

УДК 004.942

В.М. Артемьев, А.О. Наумов, Л.Л. Кохан

**АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ КОМПЛЕКСИРОВАННЫХ  
ИЗМЕРЕНИЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

*Приводится методика синтеза адаптивных фильтров на основе метода наименьших квадратов при комплексированных измерениях, позволяющих решать задачи при отсутствии априорной информации о моделях полезных сигналов и характеристиках шумов измерений. Дается сравнительная оценка точности фильтрации с результатами фильтра Калмана.*

**Введение**

Повышение точности фильтрации и надежности при отказах датчиков достигается комплексированием результатов измерений одних и тех же параметров совокупностью измерителей, которые могут быть построены на различных физических принципах. Комплексирование широко используется в ряде технических систем, например в навигации, управлении подвижными объектами, атомной энергетике и др. Статистическая теория комплексированной фильтрации разработана достаточно полно и отражена в литературе, например [1]. Разработанные методы для своей реализации требуют знания моделей и априорных статистических характеристик измеряемых параметров и помех. Однако в некоторых случаях такие данные исследователю недоступны, что приводит к необходимости решения задач в условиях неопределенности. Для этого может применяться детерминистский подход, использующий метод наименьших квадратов [2], в котором вместо статистических данных применяется лишь эмпирическая информация и информация, извлекаемая из текущих результатов наблюдений. Такой подход расширяет область применения фильтров за счет их универсальности. Однако его недостатком является ухудшение точности фильтрации из-за снижения объема информации о характеристиках воздействий. Чтобы частично компенсировать этот недостаток, применяют адаптивную фильтрацию, использующую дополнительную информацию о воздействиях, которую получают в процессе обработки текущих измерений. По данному направлению имеется ряд публикаций, связанных с обработкой сигналов в адаптивных антенных решетках [3, 4], системах связи, фильтрации речевых сигналов и др. [5]. В этих работах авторы исследуют структуры решетчатых или трансверсальных фильтров с конечной памятью и задача сводится к нахождению параметров фильтра заданной структуры на основе использования классического квадратичного функционала невязки.

Вызывает интерес решение более общей задачи синтеза адаптивных рекуррентных фильтров с нахождением их структуры, которое можно осуществить с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов (РМНК) [6]. Для этого предлагается расширить структуру критерия оптимальности путем добавления квадратичных слагаемых, придающих фильтру как адаптивные, так и рекуррентные свойства. Задача решается с учетом комплексированных измерений полезного сигнала.

**1. Исходные положения**

Предполагается, что фильтрации подлежит случайная скалярная последовательность  $x_k$ , где  $k=0, 1, 2, \dots$  есть дискретное время. Измерения осуществляются посредством  $N$  датчиков, совокупность сигналов на выходах которых можно представить  $N$ -мерным вектором  $x_k \cdot \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1}=[1, \dots, 1]^T$ , где верхний индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования. Вектор сигналов датчиков представляется в виде  $x_k H \mathbf{1}$ , где  $N \times N$  матрица  $H$  с элементами  $h_{i,j}$  ( $i=\overline{1, N}$ ,  $j=\overline{1, N}$ ) отображает характеристики датчиков и связей между ними. Диагональные элементы

матрицы  $h_{i,i}$  являются коэффициентами чувствительности датчиков. Наблюдения осуществляются со случайными ошибками в виде аддитивных шумов с нулевым математическим ожиданием  $\mathbf{v}_k = [v_{1,k}, v_{2,k}, \dots, v_{N,k}]^T$ , в результате чего вектор наблюдений  $\mathbf{z}_k = [z_{1,k}, z_{2,k}, \dots, z_{N,k}]^T$  имеет вид

$$\mathbf{z}_k = H\mathbf{1}x_k + \mathbf{v}_k. \quad (1)$$

Считается, что модель формирования полезного сигнала  $x_k$  и его характеристики априори неизвестны. Кроме того, неизвестной полагается и ковариационная матрица шумов  $\mathbf{v}_k$ .

Адаптивная фильтрация должна обеспечить текущие рекуррентные оценки скалярного полезного сигнала  $x_k$  по результатам измерений (1) в условиях отмеченной выше априорной неопределенности. Для этого используется РМНК, в основе которого лежит выбор подходящего функционала потерь. Его главной составляющей остается классическая квадратичная невязка  $(\mathbf{z}_k - H\mathbf{1}x_k)^T (\mathbf{z}_k - H\mathbf{1}x_k)$ . Если ограничиться лишь этой составляющей, то теряется возможность получения рекуррентных свойств оценок, поэтому в состав функционала предлагается ввести дополнительные квадратичные составляющие, способные обеспечить как рекуррентные, так и адаптивные свойства фильтру. Одним из возможных вариантов функционала  $J_k$  может быть следующий:

$$J_k(\hat{x}_k, \hat{a}_k) = (\mathbf{z}_k - H\mathbf{1}\hat{x}_k)^T (\mathbf{z}_k - H\mathbf{1}\hat{x}_k) + (\hat{x}_k - \hat{a}_k \hat{x}_{k-1})^2 + \alpha (\hat{a}_k - \hat{a}_{k-1})^2. \quad (2)$$

В выражении (2) первое слагаемое задается невязкой решения, второе определяет согласование оценки  $\hat{x}_k$  с оценкой на предыдущем шаге  $\hat{x}_{k-1}$  и неизвестным сглаживающим коэффициентом  $\hat{a}_k$ , подлежащим оценке наряду с  $\hat{x}_k$ . Третье слагаемое обеспечивает сглаживание оценки этого коэффициента с размерным эмпирическим коэффициентом регуляризации  $\alpha$ , дающим возможность получения стабильного решения.

## 2. Уравнения адаптивного фильтра

Оптимальные текущие оценки  $\hat{x}_k$  и  $\hat{a}_k$  находятся из условия минимума критерия (2). Первоначально полагаем, что ограничения на решения отсутствуют. Тогда необходимые условия оптимальности определяются уравнениями

$$\frac{\partial J_k(\hat{x}_k, \hat{a}_k)}{\partial \hat{x}_k} = 0; \quad \frac{\partial J_k(\hat{x}_k, \hat{a}_k)}{\partial \hat{a}_k} = 0.$$

После выполнения дифференцирования приходим к равенствам

$$\begin{aligned} -\mathbf{1}^T H^T (\mathbf{z}_k - H\mathbf{1}\hat{x}_k) + (\hat{x}_k - \hat{a}_k \hat{x}_{k-1}) &= 0; \\ -\hat{x}_{k-1} (\hat{x}_k - \hat{a}_k \hat{x}_{k-1}) + \alpha (\hat{a}_k - \hat{a}_{k-1}) &= 0, \end{aligned}$$

из которых находим следующие уравнения фильтра:

$$\hat{x}_k = \frac{\hat{a}_k}{1 + h_0^2} \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{1 + h_0^2} \mathbf{b}^T \mathbf{z}_k; \quad (3)$$

$$\hat{a}_k = \frac{\alpha}{\alpha + \hat{x}_{k-1}^2} \hat{a}_{k-1} + \frac{\hat{x}_{k-1}}{\alpha + \hat{x}_{k-1}^2} \hat{x}_k. \quad (4)$$

В уравнениях (3), (4) использованы обозначения

$$h_0^2 = \mathbf{1}^T H^T H \mathbf{1} = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N h_{i,j} \right)^2; \quad (5)$$

$$\mathbf{b} = H \mathbf{1} = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T, \quad b_i = \sum_{j=1}^N h_{i,j}. \quad (6)$$

В результате сомножитель  $\mathbf{b}^T \mathbf{z}_k$  будет скалярным комплексированным входным воздействием фильтра.

После подстановки в формулу (4) значения  $\hat{x}_k$  из (3) находим окончательное выражение для оценки  $\hat{a}_k$ :

$$\hat{a}_k = \frac{\alpha(1+h_0^2)}{\alpha(1+h_0^2)+h_0^2\hat{x}_{k-1}^2} \hat{a}_{k-1} + \frac{\hat{x}_{k-1}}{\alpha(1+h_0^2)+h_0^2\hat{x}_{k-1}^2} \mathbf{b}^T \mathbf{z}_k. \quad (7)$$

Выражения (3) и (7) являются рекуррентными уравнениями, в которых значения  $\hat{x}_{k-1}$  и  $\hat{a}_{k-1}$  определены на предыдущем шаге решения. Они отображают адаптивный характер фильтрации, поскольку их параметры не зависят от априорных сведений о модели полезного сигнала и характеристик шумов, а определяются на основе текущих измерений  $\mathbf{z}_k$ . Уравнение для коэффициента  $\hat{a}_k$  автономно, поэтому результаты его предварительного решения используются при решении уравнения (3).

Учет комплексирования происходит посредством коэффициента  $h_0^2$  и вектора  $\mathbf{b}$ , связанных с параметрами матрицы датчиков соотношениями (5) и (6).

Уравнения фильтра (3) и (7) получены в предположении отсутствия ограничений. В то же время из структуры уравнения (3) следует, что его решение будет устойчивым, если выполняются ограничения  $0 < \frac{\hat{a}_k}{1+h_0^2} < 1$ . Отсюда получаем ограничение на решение уравнения (7):

$$0 < \hat{a}_k < 1+h_0^2, \quad (8)$$

которое приводит к тому, что фильтр становится, с одной стороны, нелинейным, а с другой – квазиоптимальным, поскольку ограничение использовано после минимизации критерия (2), а не в ее процессе.

Решение уравнения (7) будет устойчивым при выполнении неравенства

$$0 < \frac{\alpha(1+h_0^2)}{\alpha(1+h_0^2)+h_0^2\hat{x}_{k-1}^2} < 1 \quad \text{для любой величины эмпирического коэффициента регуляризации } \alpha$$

в интервале от нуля до бесконечности. Его величина влияет на ошибку фильтрации и первоначально может быть принята равной единице. Дальнейшее ее уточнение проводится путем моделирования с оценкой точности фильтрации.

### 3. Сравнение адаптивного фильтра с фильтром Калмана

Качество работы синтезированного квазиоптимального адаптивного фильтра определяется величиной функционала потерь (2). Однако при статистическом подходе качество фильтрации оценивается величиной дисперсии ошибки фильтрации. В линейном случае оптимальным по этому критерию является фильтр Калмана, обеспечивающий минимальные значения дисперсий ошибок фильтрации. Сравнение дисперсий ошибок фильтра Калмана и адаптивного фильтра представляет интерес при заданной модели полезного сигнала и статистических харак-

теристиках помех, что дает возможность оценки потерь из-за априорной неопределенности при переходе от статистического подхода к детерминистскому.

Проведем такое сравнение для следующего конкретного случая. Пусть формирование полезного сигнала  $x_k$  осуществляется посредством модели в виде стохастического конечно-разностного уравнения первого порядка:

$$x_k = a_x x_{k-1} + w_k, \quad (9)$$

где постоянный параметр модели  $0 < a_x < 1$ , а  $w_k$  есть дискретный белый шум с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией  $\sigma_w^2$ . Можно показать, что в установившемся режиме параметры модели (9) связаны с дисперсией сигнала  $x_k$  соотношением [7]

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 (1 - a_x^2). \quad (10)$$

Параметр  $a_x$  связан с длительностью корреляции  $\tau_x$ , которая определяется шириной прямоугольной функции, аппроксимирующей корреляционную функцию, соотношением

$$a_x = \frac{\tau_x}{\tau_x + 1}. \quad (11)$$

Полагаем, что полезный сигнал  $x_k$  измеряется посредством  $N$  одинаковых, независимых друг от друга датчиков с коэффициентами чувствительности  $h_{i,i} = h$ , т. е.  $N \times N$  матрица наблюдений  $H = hI$ , где  $I$  – единичная матрица. В этом случае коэффициент (5) принимает значение

$$h_0^2 = Nh^2,$$

а вектор (6) имеет вид

$$\mathbf{b} = h\mathbf{1}.$$

Скалярное комплексированное входное воздействие фильтра с учетом (1) и (6)

$$\mathbf{b}^T \mathbf{z}_k = x_k h_0^2 + h v_{0,k}, \quad (12)$$

где скалярный комплексированный шум наблюдения на входе фильтра равен сумме

$$v_{0,k} = \sum_{i=1}^N v_{i,k}.$$

Предположим, что составляющие  $v_{i,k}$  вектора шума являются дискретными белыми шумами с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковой дисперсией  $\sigma_v^2$ . Тогда дисперсия шума  $v_{0,k}$  определяется выражением

$$\sigma_{0,v}^2 = N\sigma_v^2. \quad (13)$$

Дисперсия  $\sigma_v^2$  шума наблюдений в каждом канале фильтра определяется исходя из отношения сигнала к шумам  $q = \sigma_x / \sigma_v$  при заданных значениях  $q$  и  $\sigma_x$ .

Для рассматриваемого примера выражения (3) и (7) принимают следующие значения:

$$\hat{x}_k = \frac{\hat{a}_k}{1 + h_0^2} \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{1 + h_0^2} \mathbf{b}^T \mathbf{z}_k; \quad (14)$$

$$\hat{a}_k = \frac{\alpha(1+h_0^2)}{\alpha(1+h_0^2)+h_0^2\hat{x}_{k-1}^2} \hat{a}_{k-1} + \frac{\hat{x}_{k-1}}{\alpha(1+h_0^2)+h_0^2\hat{x}_{k-1}^2} \mathbf{b}^T \mathbf{z}_k. \quad (15)$$

Уравнение (15) должно решаться с учетом ограничений (8).

Дисперсия  $\sigma_e^2$  ошибки фильтрации  $e_k = x_k - \hat{x}_k$  в силу нелинейного характера уравнений фильтра находится путем моделирования с получением результатов методом статистических испытаний. Ниже приводятся результаты оценки точности фильтрации в установившемся режиме при следующих параметрах:  $\alpha = 1$ ;  $\sigma_x^2 = 400$ ;  $\tau_x = 10, 20, 50$ ;  $q = 3, 5, 10$ .

Усреднение проводилось по данным  $10^3$  испытаний.

На рис. 1 изображен фрагмент реализации входного сигнала (штрихпунктирная линия), а также результаты обработки фильтром Калмана (штриховая линия) и адаптивным фильтром наименьших квадратов (сплошная линия).

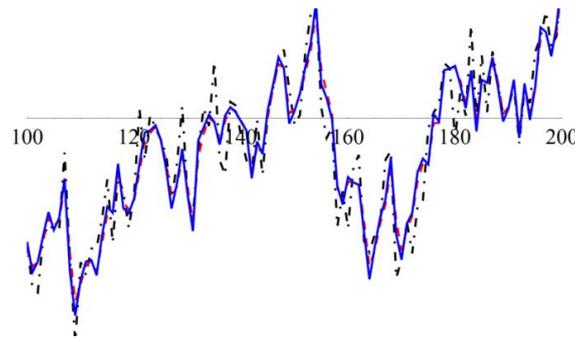


Рис. 1. Фрагмент реализации результатов фильтрации при  $\tau_x = 50$ ,  $q = 5$

На рис. 2, а сплошными линиями показана зависимость относительной величины средне-квадратического отклонения (СКО) ошибки фильтрации  $\epsilon = \sigma_e / \sigma_x$  от числа каналов  $N$  измерений входного сигнала при различных значениях длительности корреляции  $\tau_x$  при  $q = 5$ , а на рис. 2, б – зависимость  $\epsilon$  от  $N$  при различных значениях  $q$  и  $\tau_x = 50$ .

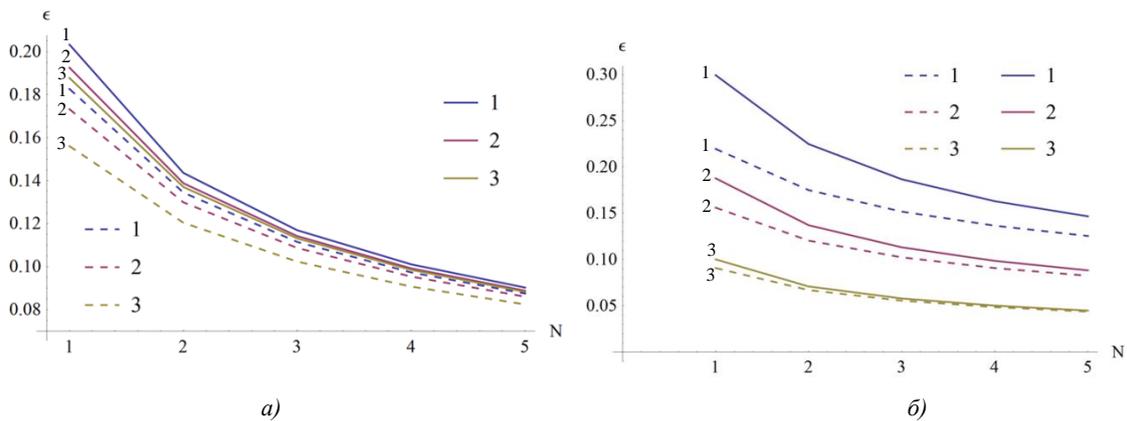


Рис. 2. Относительные значения СКО ошибок фильтрации: а) при различных длительностях корреляции: 1)  $\tau_x = 10$ , 2)  $\tau_x = 20$ , 3)  $\tau_x = 50$  и  $q = 5$ ; б) при различных отношениях сигнала к шумам: 1)  $q = 3$ , 2)  $q = 5$ , 3)  $q = 10$  и  $\tau_x = 50$

На рис. 2 штриховыми линиями показаны результаты для фильтра Калмана, которые могут служить нижней границей ошибок. Увеличение ошибки фильтрации адаптивного фильтра по сравнению с этим случаем вызвано неучетом априорной информации. Исследования показывают, что выбор коэффициента  $\alpha = 1$  обеспечивает ошибку фильтрации, близкую к минимальной.

### Заключение

Полученные результаты позволяют утверждать, что адаптивные фильтры наименьших квадратов при комплексированных измерениях могут быть использованы при отсутствии априорной информации о моделях полезных сигналов и шумов наблюдений. В этом смысле данные фильтры универсальны по сравнению с фильтром Калмана и могут иметь широкое применение. Однако неучет априорной информации приводит к увеличению ошибок фильтрации по сравнению с фильтром Калмана. В то же время нахождение параметров адаптивного фильтра наименьших квадратов менее трудоемко, чем у фильтра Калмана, что упрощает их реализацию в реальном масштабе времени.

### Список литературы

1. Справочник по теории автоматического управления / под. ред. А.А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 711 с.
2. Степанов, А.О. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации : в 3 ч. / А.О. Степанов. – СПб. : ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2009. – Ч. 1. : Введение в теорию оценивания. – 496 с.
3. Veen, van B.D. Beam forming: A versatile approach to spatial filtering / B.D. van Veen, K.M. Buckley // IEEE Acoust., Speech, Signal Processing Mag. – 1988. – Vol. 5. – P. 4–24.
4. A Fast Least-Squares Algorithms for Linearly Constrained Adaptive Filtering / G.B. Maurice [et al.] // IEEE Trans. Signal Processing. – 1996. – Vol. 44, no. 5. – P. 1168–1174.
5. Адаптивные фильтры / под. ред. П.Н. Гранта, К.Ф. Коуэна. – М. : Мир, 1988. – 388 с.
6. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки изображений / Ю.В. Линник. – М. : Физматгиз, 1962. – 349 с.
7. Артемьев, В.М. Оптимальная линейная совмещенная фильтрация случайных последовательностей на основе рекуррентного метода наименьших квадратов / В.М. Артемьев, А.О. Наумов, Л.Л. Кохан // Информатика. – 2015. – № 1. – С. 8–16.

Поступила 15.06.2016

*Институт прикладной физики  
НАН Беларуси,  
Минск, Академическая, 16  
e-mail: naumov@iapf.bas-net.by*

**V.M. Artemiev, A.O. Naumov, L.L. Kokhan**

### **ADAPTIVE FILTERING THE MULTISENSORY MEASUREMENTS BY LEAST-SQUARE METHOD**

The least-square methodology is given consider adaptive filtering for multisensory measurements in case of uncertain prior knowledge about signal models and measurement noise parameters. The accuracy comparison with Kalman filtering is presented.