

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 004.942

Ю.Ф. Новик

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
N-СОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА

Приводятся результаты компьютерного моделирования N -солитонного решения уравнения Кортевега – де Фриза при $N = 1, 2, 3, 4$. С помощью численного эксперимента находится свойство сохранения площади под огибающей солитонных решений уравнения Кортевега – де Фриза. Обнаруживается зависимость значения площади под огибающей N -солитона от значения параметра, входящего в соответствующее решение уравнения Кортевега – де Фриза.

Введение

Уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ) представляет собой модельное уравнение, в котором учитываются нелинейность и дисперсия. Оно используется при описании длинноволновых возмущений малой, но конечной амплитуды, магнитогидродинамических волн в холодной плазме, а также при исследовании ионно-звуковых волн. Важную роль в понимании физических процессов, описываемых уравнением КдФ, играют его точные стационарные решения [1].

В настоящей работе будем придерживаться следующего определения: *солитоном уравнения КдФ (или солитонным решением)* называют стационарное решение уравнения КдФ, которое обращается в ноль на $\pm \infty$ вместе со своими производными по координате и имеет вид нелинейной уединенной волны, которая распространяется без изменения своей формы [1].

В 1971 г. Р. Хирота нашел точное N -солитонное решение уравнения КдФ [2], где N – произвольное, но конечное натуральное число. Есть мнение, что N -солитонное решение может быть интерпретировано как взаимодействие N односолитонов [3], т. е. N -солитон – это функция, которая описывает взаимодействие N одиночных солитонов ($N \geq 2$) и является решением уравнения КдФ.

1. Уравнение КдФ и его решения

Уравнение КдФ выглядит следующим образом:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Односолитонное решение уравнения КдФ является тривиальным случаем для рассмотрения его поведения и имеет вид [4]

$$u(x, t) = \frac{P^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\eta}{2}, \quad (2)$$

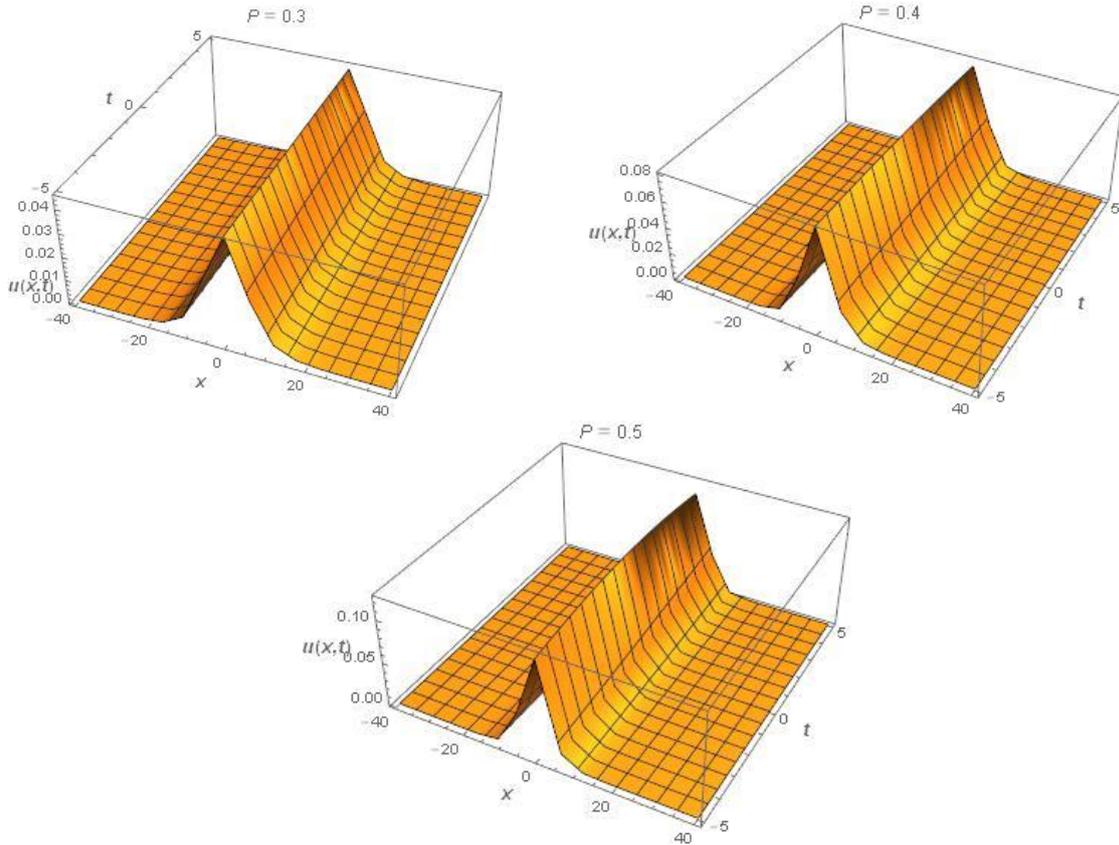
где $\eta = Px + \Omega t + C$ и $\Omega + P^3 = 0$. Произвольные параметры C и P соответственно определяют положение солитона и его амплитуду. Здесь амплитудой солитона будем называть локальный максимум функции $u(x, t_0)$, где t_0 – фиксированный момент.

На рис. 1 показана зависимость амплитуды от значения параметра P : чем больше значение параметра P , тем больше амплитуда.

Р. Хирота с помощью своего прямого метода (метод Хироты [4]) нашел N -солитонное решение уравнения КдФ:

$$u = 2(\log f)_{xx}, \quad (3)$$

где f определяется ниже для каждого $N = 2, 3, 4$.

Рис. 1. Движение солитона уравнения КдФ при различных значениях P

Для двухсолитонного решения уравнения КдФ

$$f = 1 + \exp \eta_1 + \exp \eta_2 + a_{12} \exp(\eta_1 + \eta_2), \quad (4)$$

где $a_{12} = \frac{(P_1 - P_2)^2}{(P_1 + P_2)^2}$; $\eta_i = P_i x + \Omega_i t + C_i$, C_i – константы; P_i , Ω_i удовлетворяют нелинейному дисперсионному соотношению

$$\Omega_i + P_i^3 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Важная величина a_{12} определяет фазовый сдвиг, т. е. изменение положения, вызванного взаимодействием двух солитонов [4].

Для трехсолитонного решения уравнения КдФ

$$f = 1 + \exp \eta_1 + \exp \eta_2 + \exp \eta_3 + a_{12} \exp(\eta_1 + \eta_2) + a_{13} \exp(\eta_1 + \eta_3) + a_{23} \exp(\eta_2 + \eta_3) + a_{12} a_{13} a_{23} \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \quad (6)$$

где $\eta_i = P_i x + \Omega_i t + C_i$; $\Omega_i + P_i^3 = 0$; $a_{ij} = \frac{(P_i - P_j)^2}{(P_i + P_j)^2}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Для четырехсолитонного решения уравнения КдФ

$$f = 1 + \exp \eta_1 + \exp \eta_2 + \exp \eta_3 + \exp \eta_4 + a_{12} \exp(\eta_1 + \eta_2) + a_{13} \exp(\eta_1 + \eta_3) + a_{23} \exp(\eta_2 + \eta_3) + a_{14} \exp(\eta_1 + \eta_4) + a_{24} \exp(\eta_2 + \eta_4) + a_{34} \exp(\eta_3 + \eta_4) + a_{12} a_{13} a_{23} \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) + a_{23} a_{24} a_{34} \exp(\eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + a_{13} a_{14} a_{34} \exp(\eta_1 + \eta_3 + \eta_4) + a_{12} a_{14} a_{24} \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_4) + a_{12} a_{13} a_{14} a_{23} a_{24} a_{34} \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4), \quad (7)$$

где $\eta_i = P_i x + \Omega_i t + C_i$, $\Omega_i + P_i^3 = 0$; $a_{ij} = \frac{(P_i - P_j)^2}{(P_i + P_j)^2}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

2. Моделирование двухсолитонного решения уравнения КдФ

Моделирование эволюции двухсолитонного решения (3) уравнения КдФ, где f имеет вид (4), в трехмерном случае с учетом эволюции на заданном промежутке времени при $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0,5$ показано на рис. 2.

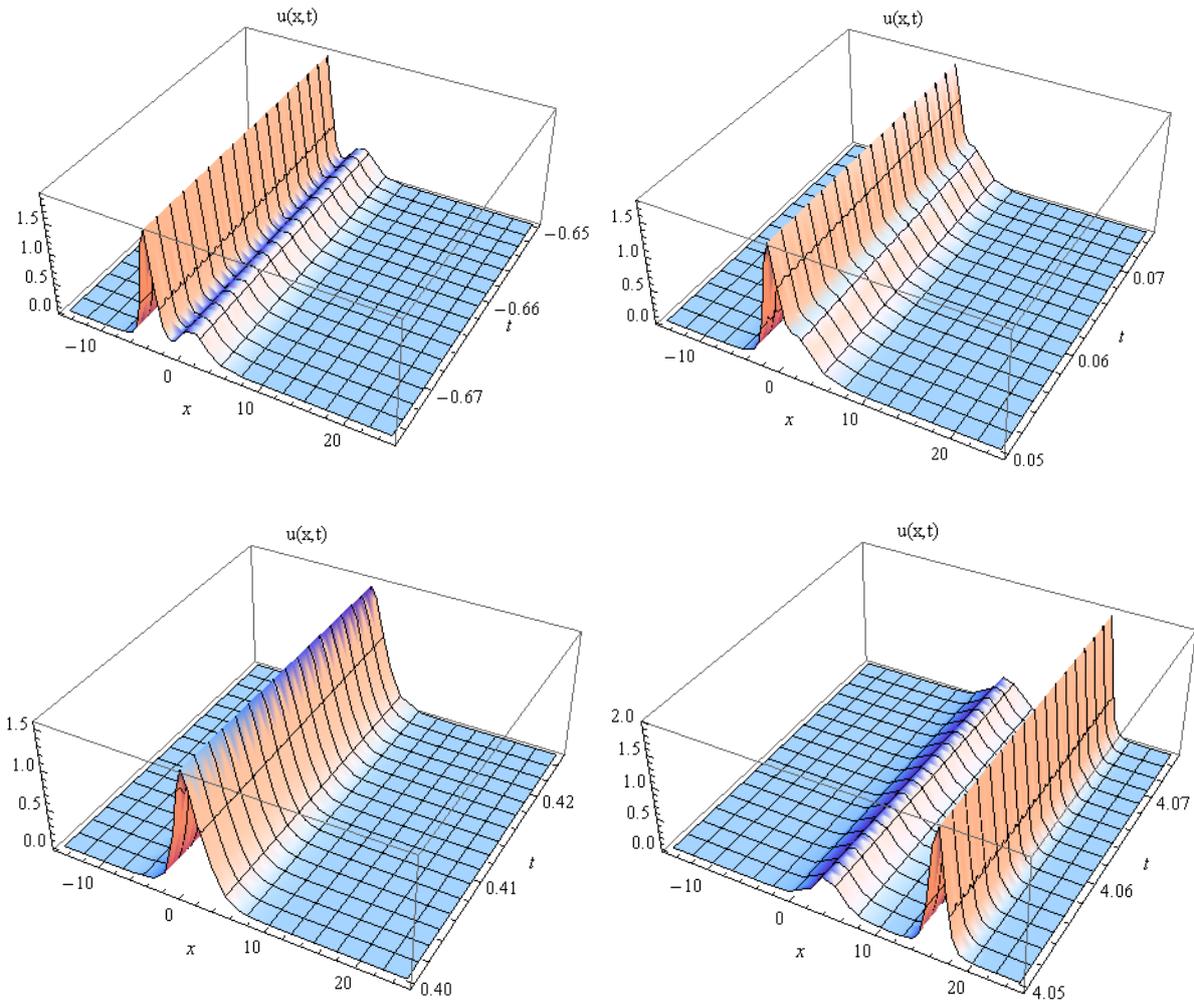


Рис. 2. Компьютерное моделирование эволюции двухсолитонного решения уравнения КдФ

Будем говорить, что солитоны достаточно отделились друг от друга, если $u(x_0, t_0) < \varepsilon$ при $\varepsilon = 10^{-15}$, где t_0 – фиксированный момент; $x_0 = x_0^{(1)} + \frac{x_0^{(2)} - x_0^{(1)}}{2}$, $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}$ – координаты, при которых $A_i = U(x_0^{(i)}, t_0)$, A_i – амплитуды меньшего и большего одиночных солитонов соответственно, $i = 1, 2$. В данном случае амплитуда меньшего солитона равняется 0,5, а амплитуда большего – 2.

Посчитаем площадь под огибающей каждого из двух одиночных солитонов, а также площадь под огибающей на промежутке взаимодействия данных солитонов.

Из численного эксперимента видно, что временной промежуток взаимодействия одиночных солитонов $[-1,5; 2,5]$. Используя результаты моделирования движения солитонов, находим, что при $t=35$ одиночные солитоны достаточно удалились друг от друга, т. е. $u(87,9245; 35) = 0 < \varepsilon$ (рис. 3).

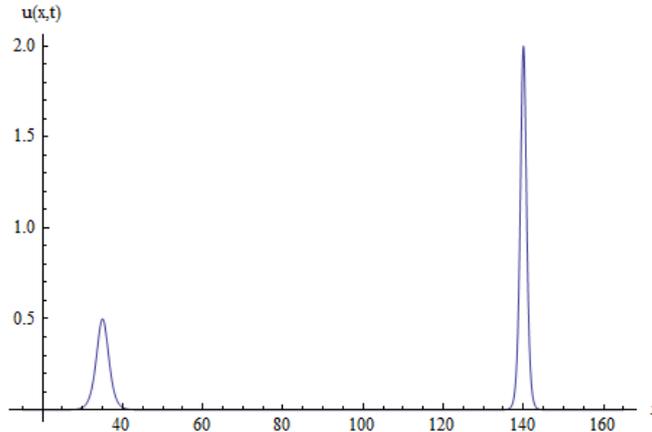


Рис. 3. Положение двухсолитонного решения уравнения КдФ при $t = 35$

Площадь солитонов будем считать по формуле

$$S = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_0) dx, \quad (8)$$

где t_0 – фиксированный момент времени; x_1, x_2 – решения уравнения $u(x, t_0) = \varepsilon$.

Находим площадь солитона с меньшей амплитудой. Корни уравнения $u(x, 35) = \varepsilon$ в окрестности точки $x_0^{(1)} = 35$ будут $x_{11} = -0,2319, x_{12} = 70,2539$. Подставляя их в (8), получаем $S_1 = 2$.

Оцениваем площадь солитона с большей амплитудой. Корни уравнения $u(x, 35) = \varepsilon$ в окрестности точки $x_0^{(2)} = 140,849$ будут $x_{21} = 122, x_{22} = 157,767$. Подставляя их в (8), получаем $S_2 = 4$.

Посчитаем площадь под огибающей во время взаимодействия солитонов по схеме, приведенной выше. Результаты вычисления представлены в табл. 1.

Таблица 1

Площадь S под огибающей двухсолитонного решения уравнения КдФ при взаимодействии в момент t_0

t_0	-1,5	-1,25	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
S	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

Согласно результатам вычислений площадь под огибающей на промежутке взаимодействия солитонов равна сумме площадей одиночных солитонов $S = S_1 + S_2$, т. е. площадь под огибающей двухсолитонного решения уравнения КдФ сохраняется на всем временном промежутке для рассмотренного примера.

3. Моделирование трехсолитонного решения уравнения КдФ

Моделирование движения трехсолитонного решения (3) уравнения КдФ с учетом (6) в трехмерном случае при $P_1 = 1, P_2 = 1,5, P_3 = 0,75$ показано на рис. 4.

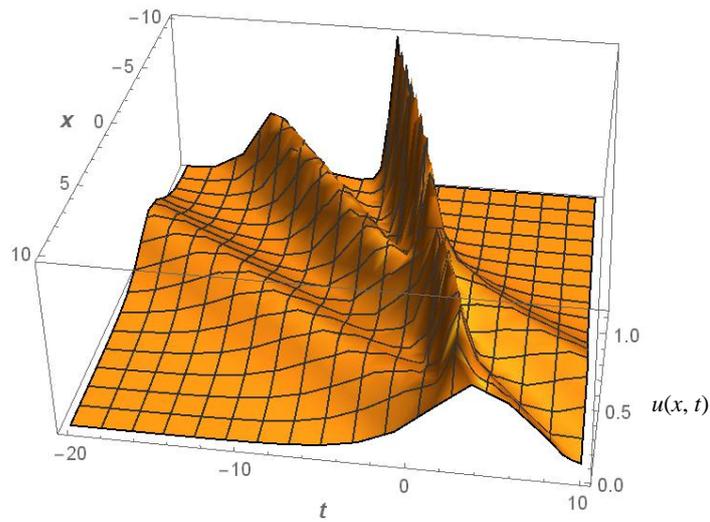


Рис. 4. Компьютерное моделирование эволюции трехсолитонного решения уравнения КдФ

Аналогично случаю при $N = 2$ вычисляем площади под огибающей трехсолитонного решения уравнения КдФ при их взаимодействии и в том случае, когда три одиночных солитона отдалились друг от друга. Промежуток взаимодействия солитонов в данном случае будет $[-3; 6]$ (рис. 5). Результаты вычисления площади под огибающей на этом промежутке приведены в табл. 2.

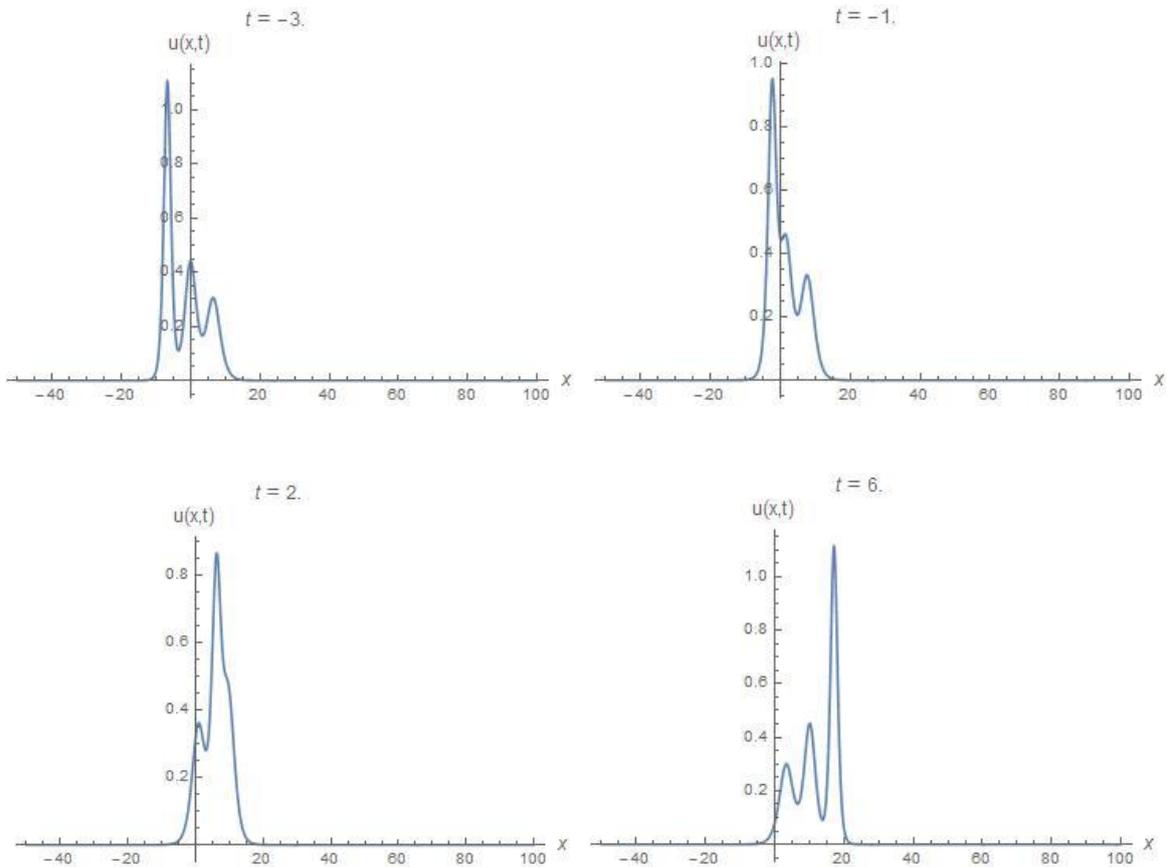


Рис. 5. Компьютерное моделирование эволюции трехсолитонного решения уравнения КдФ при $t = [-3; 6]$

Таблица 2

Площадь S под огибающей трехсолитонного решения уравнения КдФ при взаимодействии в момент t_0

t_0	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	
S	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5

Из численного эксперимента находим, что три солитона достаточно отделились друг от друга в момент $t_0 = 230$, т. е. $u(182; 230) = 0 < \varepsilon$ и $u(377,5; 230) = 0 < \varepsilon$. Вычисляем площади трех одиночных солитонов аналогично случаю $N = 2$ и получаем $S_1 = 2$, $S_2 = 3$, $S_3 = 1,5$. В итоге имеем $S = S_1 + S_2 + S_3$, т. е. площадь под огибающей трехсолитонного решения уравнения КдФ также сохраняется для рассмотренного примера.

4. Моделирование четырехсолитонного решения уравнения КдФ

Согласно формулам (3), (7) было промоделировано четырехсолитонное решение уравнения КдФ (рис. 6).

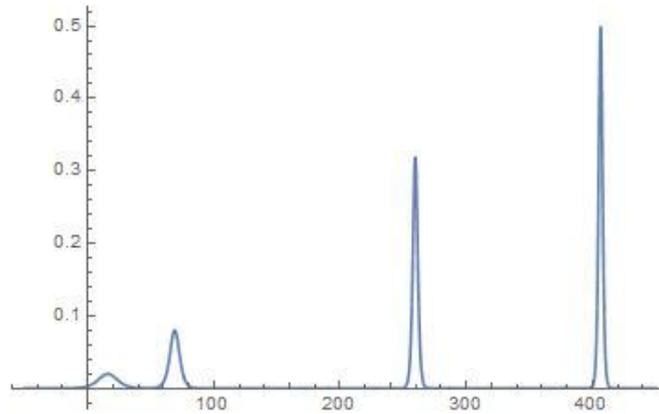


Рис. 6. Положение четырехсолитонного решения уравнения КдФ при $P_1 = 0,2$, $P_2 = 0,4$, $P_3 = 0,8$, $P_4 = 1$ в момент $t = 400$

Аналогично предыдущим случаям были найдены площади под огибающей удалившихся солитонов и площадь под огибающей на промежутке взаимодействия четырехсолитонного решения уравнения КдФ при различных значениях P_i , $i = \overline{1,4}$:

1. $P_1 = 0,2$; $P_2 = 0,4$; $P_3 = 0,8$; $P_4 = 1$ – момент, когда солитоны успели достаточно отдалиться друг от друга, $t_0 = 3000$, время взаимодействия $t = [-25; 30]$. Площади под огибающей отдалившихся солитонов $S_1 = 0,4$, $S_2 = 0,8$, $S_3 = 1,6$, $S_4 = 2$. Площадь под огибающей во время взаимодействия $S = 4,8$. В результате получаем, что площадь под огибающей четырехсолитонного решения уравнения КдФ также сохраняется ($S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$).

2. $P_1 = 0,1$; $P_2 = 0,2$; $P_3 = 0,5$; $P_4 = 0,9$ – момент, когда солитоны успели достаточно отдалиться друг от друга, $t_0 = 20\ 000$, время взаимодействия $t = [-34; 50]$. Площади под огибающей отдалившихся солитонов $S_1 = 0,2$, $S_2 = 0,4$, $S_3 = 1$, $S_4 = 1,8$. Площадь под огибающей во время взаимодействия $S = 3,4$. Заметим, что $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

3. $P_1 = 1$, $P_2 = 1,2$, $P_3 = 1,5$, $P_4 = 2$ – момент, когда солитоны успели достаточно отдалиться друг от друга при данных P_i , $i = \overline{1,4}$, $t_0 = 305$, время взаимодействия $t = [-25; 30]$. Площади под огибающей отдалившихся солитонов $S_1 = 2$, $S_2 = 2,4$, $S_3 = 3$, $S_4 = 4$. Площадь под огибающей во время взаимодействия $S = 11,4$ ($S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$).

5. Анализ результатов моделирования

С помощью численных экспериментов было показано, что площадь под огибающей N -солитонного решения уравнения КдФ ($N = 2, 3, 4$) во время взаимодействия и в момент отдаления сохраняется.

На рис. 1 видно, что чем больше значение параметра P , тем больше амплитуда солитона. Отсюда легко определить, какое P_i , $i = \overline{1, N}$, соответствует солитону в момент отдаления.

Обратим внимание на связь значений площади отдалившихся солитонов и значений параметров P_i , $i = \overline{1, N}$. При $N = 3$ задавались значения параметров $P_1 = 1$, $P_2 = 1,5$, $P_3 = 0,75$ и были получены соответствующие площади отдалившихся солитонов $S_1 = 2$, $S_2 = 3$, $S_3 = 1,5$. Заметим, что $S_1 = 2P_1$, $S_2 = 2P_2$, $S_3 = 2P_3$. При $N = 4$ были рассмотрены три различных варианта значений P_i , $i = \overline{1, 4}$, и снова получилось, что $S_i = 2P_i$, $i = \overline{1, 4}$.

На основании вышесказанного можно выдвинуть гипотезу, что площадь под огибающей N -солитонного решения уравнения КдФ равна удвоенному значению параметра P , который входит в дисперсионное отношение $\Omega_i + P_i^3 = 0$, $i = \overline{1, N}$.

Заключение

В настоящей работе показаны результаты моделирования N -солитонного решения уравнения КдФ при $N = 1, 2, 3, 4$. При анализе результатов моделирования было обнаружено свойство N -солитона уравнения КдФ сохранять площадь под огибающей на всем временном интервале. Свойство сохранения площади под огибающей является определяющей характеристикой (инвариантом) класса N -солитонных решений уравнения КдФ. Кроме того, обнаружена зависимость величины площади под огибающей солитона от значения параметра, входящего в данное решение: площадь под огибающей равна удвоенному значению параметра P .

Список литературы

1. Плазменная гелиогеофизика : в 2 т. Т. 2 / под ред. Л.М. Зеленого, И.С. Веселовского. – М. : Физматлит, 2008. – 560 с.
2. Hirota, R. Exact solution of the Korteweg – de Vries equation for multiple collisions of solitons / R. Hirota // Phys. Rev. Lett. – 1971. – № 27. – P. 1192–1194.
3. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.] ; пер. с англ. – М. : Мир, 1988. – 694 с.
4. Hirota, R. The Direct Method in Soliton Theory / R. Hirota ; ed. B. Bollobas [et al.]. – N. Y. : Cambridge University Press, 2004. – 200 p.

Поступила 11.11.2016

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: novik.yu.f@gmail.com*

Y.F. Novik

ANALYSIS OF THE RESULTS OF COMPUTER SIMULATION N -SOLITON SOLUTIONS OF THE KORTEWEG – DE VRIES EQUATION

The results of computer simulation N -soliton solutions of the Korteweg – de Vries equation with $N = 1, 2, 3, 4$ are shown. Using numerical experiment the property of conservation of area under the envelope of soliton solutions of the Korteweg – de Vries equation is found. In addition, the dependence value of the area under the envelope of N -soliton on the value of parameter, included into a corresponding solution of the Korteweg – de Vries equation, is detected.