Gedanken zur praktischen und theoretischen Mathematik vor Kepler

Von Wolfgang Kaunzner

Das moderne Bestreben der Menschen, wissenschaftliche Erkenntnisse zu analysieren und zu ordnen, sie auf den Grad ihrer praktischen Verwertbarkeit hin zu untersuchen, sie für neue und auch fremde Probleme aufzubereiten, schließlich hiervon ausgehend zu noch umfassenderen Aussagen zu gelangen, läßt sich nicht verallgemeinern. Die griechische Geometrie etwa, die man nur um ihrer selbst willen betrieben hatte, ist nicht das einzige Beispiel für eine Wissenschaft, die ohne Beziehung zu anderen Disziplinen — in diesem Fall sogar ohne jede Berührung mit der Arithmetik oder der Algebra — zu einem Gedankengebäude von grandioser Höhe errichtet worden war. Was heute der Schüler an Geometrie geboten erhält, ist manchmal nur ein Bruchteil der Lehrsätze, die man vor zweieinhalbtausend Jahren bereits mit wahrer Bravour handhabte.

Auch in der Mathematik stand am Beginn ihrer Entwicklung die reine Praxis, die sich vom Erkennen einfachster Gesetze in Geometrie und im Bereich unserer Zahlenreihe bis hin zu den Methoden spannt, mit denen heutzutage in so vielen Wissensgebieten mathematische Hilfsmittel zur Selbstverständlichkeit wurden. Die Verallgemeinerung, der Schluß vom speziellen zum allgemeinen Fall, trat hierbei erst spät in den Vordergrund; anfangs behandelte man nur Einzelbeispiele, relativ bald auch Tabellen.

Der Weg, der begangen werden mußte, war weder eben noch gerade; man konnte nicht auf ausgetretenen Pfaden schreiten. Viele Völker bauten am Gebäude der Mathematik mit, teils einander ablösend, teils in Gemeinschaft miteinander, und sie näherten sich, wenn auch manchmal von verschiedenen Seiten, fast gleichen Zielen. So schufen die Babylonier z. B. vor nahezu 4000 Jahren vornehmlich im Mündungsgebiet von Euphrat und Tigris mit ihren Keilschrifttafeln mathematischen Inhalts grundlegende Bausteine für ein Sechzigersystem[1]. Zur nämlichen Zeit hatten die Ägypter ein bereits fundiertes Zahlensystem auf dezimaler Basis. Hieraus folgende Grundkenntnisse im Umgang mit Zahlen benützen wir heute als Selbstverständlichkeiten in der Sprache; denn Zählen wurde ja ein Bestandteil des normalen Sprechens.

Am Beginn der abendländischen Mathematik — um die Jahrtausendwende — bot sich bis auf geringe Ausnahmen der aus dem Osten ankommenden, bereits hoch entwickelten Wissenschaft ein Neuland an, welches erst nach einigen

[1] J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik 1, Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes, Sammlung Göschen, Bd. 226/226 a ([2]1963) 12 f.; H. Gericke, Geschichte des Zahlbegriffs, B. I.-Hochschultaschenbücher, Bd. 172/172 a (1970) 14—16.

Jahrhunderten die früheren Pflegestätten völlig in den Schatten zurückdrängen konnte. Anfangs wurden nur die Klöster, später auch die Stadt- und Lateinschulen und die Universitäten die Zentren, an denen man sich, wenn überhaupt, auch mit mathematischen Fragen auseinandersetzte. Die älteste Datierung in den indisch-arabischen Ziffern im Abendland findet sich ohne die Null im *Kodex Vigilanus* aus dem spanischen Kloster Albelda; sie stammt vom Jahre 976 [2]. Nur vereinzelt freilich drang diese neue Kenntnis selbst in Gelehrtenkreisen vor, vor allem stieß man sich an der Benützung der Null; denn wie konnte etwas, das nichts bedeutete, einen anderen Namen als das Nichts haben, andererseits aber durch einen Kreis dargestellt werden, der doch das vollkommenste aller ebenen Gebilde ist? Bei Verwendung römischer Zahlzeichen hatte man kein Symbol geschaffen, welches das Nichts auszudrücken hatte — die Römer waren ein Volk, welches sein Wissen auf dem Boden realer und praktischer Erkenntnisse gesammelt hatte; deshalb konnte man von ihnen außer ihrer Rechenmethode, ferner ihrem Abakus und traditionsreichen Kenntnissen in der Feldmeßkunst nicht viel brauchbares für die Mathematik übernehmen. Der Umgang mit römischen Ziffern setzte sich sogar nach der Jahrtausendwende bei uns — soweit man überhaupt rechnete oder Zahlen schrieb — erst langsam richtig durch; im 15. und 16. Jahrhundert endlich wurden die indisch-arabischen Zeichen allgemein bekannt. Grund hierfür mag nicht nur ihre größere Handlichkeit sein, sondern auch der Umstand, daß sie anfangs noch ziemlich klobige und wechselnde Formen aufwiesen, wie sie uns u. a. in manchen ehedem Regensburger Handschriften schon ab dem 11. Jahrhundert etwa begegnen [3].

Über Süditalien und vorwiegend über Spanien gelangte das Wissen der Alten Welt zu uns. Die Wege über Italien sind noch nicht deutlich genug rekonstruierbar, klarer bietet sich der über Spanien an. Dort blieben die Araber nach ihrer Niederlage noch lange Jahre hindurch die Lehrmeister der Sieger. Es war nicht allein ehedem indisches, persisches und arabisches Wissen, welches vorwiegend im 11., 12. und 13. Jahrhundert von Spanien her den Weg durch Westeuropa nahm, sondern auch griechisches Gedankengut. Am Kalifenhofe in Bagdad hatte man im 9. Jahrhundert in der Zeit der dortigen Hochblüte u. a. vielleicht auch die 13 Bücher der Geometrie Euklids (365?—300?) aus dem Griechischen ins Arabische übersetzt [4], jahrhundertelang in dieser Form aufbewahrt, bis auch sie dann von westlichen Gelehrten an regelrechten Übersetzerschulen, etwa in Toledo oder Sevilla, ins Kastilianische oder Lateinische übertragen wurden [5]. Auf der anderen Seite sorgte der Strom deutscher Kaufleute und später Studenten, die in Italien ihre Ausbildung erfahren hatten, dafür, daß praktische kaufmännische Kenntnisse im Gefolge einer

[2] K. Vogel, Die Practica des Algorismus Ratisbonensis, in: Schriftenreihe zur bayerischen Landesgeschichte 50 (1954) 2.

[3] Diese Kodizes befinden sich heute in der Bayer. Staatsbibliothek München. Hervorzuheben sind hier etwa *Clm 14137* aus dem 11. Jh., fol 113r, oder *Clm 13021* aus dem 12./13. Jh., fol 27r und 28r. Diese Vorläufer der heute verwendeten indisch-arabischen Ziffernformen nennt man Apices.

[4] J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik 1, 64; ferner K. Menninger, Zahlwort und Ziffer 2 ([2] 1958) 224.

[5] J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik 1, 86; K. Menninger, Zahlwort und Ziffer 2, 224.

kaufmännischen Fachsprache und später auch allgemeines mathematisches Wissen in unser Sprachgebiet floß. Hier verschmolzen diese beiden Strömungen, die schon im frühen 13. Jahrhundert dem Pisaner Kaufmann Leonardo Fibonacci (1180?—1250?) als Basis für seine mathematischen Darstellungen[6] gedient hatten, schließlich erneut auf viel breiterer Ebene.

Im 12. und 13. Jahrhundert fanden in unserem Lebensraum bereits solch frühe Begegnungen mit dem Wissen der Alten Welt statt. Mancher Gebildete reiste damals nach Spanien, um sich dort die modernen Kenntnisse anzueignen. Im Volke war man innerlich jedoch noch nicht so weit, um sich mit mathematischen Fragen allgemein auf der richtigen Stufe auseinanderzusetzen. Nur ein verschwindend kleiner Teil der Menschen konnte lesen oder schreiben, zu rechnen verstanden noch weniger. Der Zahlenraum erschöpfte sich dort, wo man ein Ergebnis mit den Fingern oder mit den Zehen noch kontrollieren konnte. Rechnungen wurden, wenn überhaupt, auf dem Rechenbrett durchgeführt, einem Vorläufer unserer Kinderrechenmaschine; mit Rechensteinen[7] bewältigte man die einfachen Aufgaben des täglichen Umgangs. Mit römischen Zahlen läßt sich nicht gut rechnen; schon richtiges Anschreiben bringt manchmal Schwierigkeiten mit sich. Kluge Köpfe hatten freilich allerlei Faustregeln ersonnen, wie man nur unter Zuhilfenahme der Finger das kleine Einmaleins beherrschte, ohne lesen oder schreiben zu müssen. Verschiedene Stellungen der Hände symbolisierten außerdem seit langem verschiedene Zahlen.

Den großartigen geistigen Leistungen der östlichen Völker war schon dadurch ein Rahmen gesetzt, daß sie in der eigenen Sprache aufgezeichnet worden waren — die arabische Schrift hat sich seit 2000 Jahren nahezu nicht verändert. Im Westen bot sich nun durch das Fehlen von Schriftsprachen, etwa einer deutschen Schriftsprache, nur eine internationale, wenn auch bescheidene Korrespondenz an. Dem Lateinischen wurde hierdurch *die* Möglichkeit eingeräumt — in Italien sprach man bis zur Wende des 14. Jahrhunderts immer noch lateinisch —; zuweilen wird es in Iberien wohl in Widerstreit mit dem Hochspanischen getreten sein; Kastilianisch hätte damals vielleicht zur Gelehrtensprache des Abendlandes werden können, und dies wäre großenteils der Einwirkung der Araber zuzuschreiben gewesen.

Im Mittelalter wurden diejenigen Leute, welche eine geistige Ausbildung erfuhren, in der Regel Kleriker oder Staatsbeamte. Die Klöster waren und blieben vorerst die Stätten, an denen man sich wirklich mit den neu einströmenden Kenntnissen auseinandersetzte. Noch standen keine Originaltexte zur Verfügung, wohl aber mehr oder minder gute Abschriften, und eine wahre Flut von weiteren Abschriften hiervon sorgte dafür, daß man Manuskripte oft gleichen Inhalts noch in den Bibliotheken in ganz Europa verstreut findet. Vorerst schrieb man lateinisch, ab dem 14. und 15. Jahrhundert vereinzelt in europäischen Sprachen.

Die Vermittlung des alten Kulturgutes lag bei uns somit anfangs fast ausschließlich in Händen der Mönche. Sie lag in guten Händen, wenn auch hierdurch so manche Entscheidung gefallen sein mag. Wir finden in dieser ersten Epoche, in der man von einer Entwicklung der Mathematik bei uns reden

[6] Sein Hauptwerk ist der „Liber abbaci“ vom Jahre 1202, überarbeitet 1228.

[7] Man nannte sie *calculi;* das Wort Kalkulation hängt hiermit zusammen.

kann, daß einige wirklich dem praktischen Umgang entnommene Fragestellungen, nämlich vorwiegend Rechnen mit ganzen Zahlen und mit Brüchen, in einer Weise theoretisiert werden, wie sie der inneren abstrahierenden Einstellung der damals geistig führenden Schicht entspricht. Man nannte diese Rechenvorschriften *Algorithmen,* und nur wenige der sich mit Mathematik Beschäftigenden mögen die Rechenanleitungen ordentlich verstanden haben, nämlich die Grundrechenarten bis Wurzelziehen, ferner Reihenlehre. So wundert es uns nicht, daß schon bald nach dem Aufzeichnen der ersten Algorithmen dieselben durch Kommentare aufgelockert wurden; an praktischen Aufgaben versuchte man nun das Dargestellte zu erläutern. Es mag trotzdem ein schwieriges Unterfangen gewesen sein, den Scholaren diese Grundkenntnisse beizubringen, die heute das zwölfjährige Kind verstehen kann. Aufgrund der arabischen Tradition entbehrten die Rechnungen von damals jeder abkürzenden Terminologie; sie sind nicht so leicht zu überblicken, wie wir dies dank der heutigen Symbole gewöhnt sind. Es war keine Selbstverständlichkeit, daß man rechnen konnte. An Feiertagen vor dem Amt und während der Predigt sowie jeden Tag eine Stunde lang nach dem Essen übten sich die Schüler an der vor 1273 gegründeten Stadtschule in Nabburg in der Rechenkunst lt. Schulordnung vom Jahre 1480 [8]. Ein mittelalterliches Lehrgedicht, welches auf Augustinus 351—430) zurückgeht, sagt uns: „Unum et unum duo, duo et duo quatuor, odiosa cantio mihi erat“ [9] (= Eins und eins ist zwei, zwei und zwei ist vier, es war mir ein verhaßter Gesang). Durch gemeinsames Hersingen wurden die Kenntnisse eingebläut.

Die Geometrie wurde, wie uns die Handschriften zeigen, ausführlich weitergegeben. Einmal die Geometrie Euklids, die in ihrer strengen Form der Denkweise der damaligen Zeit entgegenkam. Zum anderen waren es Traktate, die auf den überlieferten Angaben der römischen Feldmesser basieren; diese oft falschen Formeln pflanzten sich mit erstaunlicher Beharrlichkeit bis in die beginnende Neuzeit hinein fort und bilden hierdurch direkt auch eines der Kennzeichen der praktischen Mathematik, wie sie ab dem 13. Jahrhundert etwa bei uns nachzuweisen ist. Manche geometrische Handschrift römischer Tradition ist sogar wesentlich älter. Großenteils unverstanden mögen diese Abhandlungen abgeschrieben worden sein, wodurch sich ein Teil der zusätzlichen Fehler erklären läßt, die fast allen Manuskripten jener Zeit eigen sind. Johannes Regiomontans (1436—1476) Bestreben hätte zu einem erheblichen Teil der Drucklegung der mittlerweile aufgefundenen Originalwerke der Antike gegolten. Grund wären vor allem die vielen, durch Abschreiben entstandenen Fehler gewesen.

Die Erkenntnisse der Astronomen der Antike erlebten in unseren Klöstern in der angesprochenen Epoche eine Erweckung. Arabische Fachausdrücke blieben durch den sehr stark nachweisbaren Vermittlereinfluß ein fester Bestandteil der Astronomie der damaligen Zeit. Die zentrale Stellung des Menschen im Mittelalter beanspruchte den Begriff des geozentrischen Weltbildes. Die Erde war der Mittelpunkt des Weltalls, und mit allen nur gängigen Deutungen wurden weiterhin die mit der Beobachtung nicht in Einklang stehenden Widersprüche durch die Epizykeltheorie gedeutet: die Planeten sollten sich

[8] H. Berr, Versuch einer Schulgeschichte Nabburgs (1955) 2 f.

[9] Hier sehe man etwa H. Endrös, Augustinus, Bekenntnisse (1963) 29.

auf ihrem Hauptkreis um die Erde zusätzlich in kleinen Kreisen bewegen; wie ein seinen Herrn während eines Spaziergangs auf einem Kreis umkreisender Hund.

War es Neugier, war es Wißbegier, in der Astronomie bot sich wie in keiner anderen Disziplin auch bei uns die Möglichkeit, Voraussagen zu treffen. Wenn aber Konstellationsvoraussagen zutrafen, dann konnte man noch ohne den Begriff des Naturgesetzes versuchen, aus einer Anzahl von Beobachtungen etwa Rückschlüsse auf vorher oder nachher zu ziehen. Astronomische Tabellen, in die man alle in Frage kommenden Beobachtungen eintrug, waren im Mittelalter verbreitet. Die römischen Zahlen mögen sich zum Ablesen in einer ebenen Zahlentafel ohnedies nicht gut geeignet haben; deshalb boten sich die übersichtlicheren indisch-arabischen zugleich mit der Quelle, aus der man hierzulande seine astronomischen Kenntnisse bezogen hatte, als selbstverständlich an. Es kam aber eine Zeit, in welcher man sich nicht mehr aus einer Tabelle einen mehr oder minder mühsamen Überblick verschaffen wollte, und dies mag mit einer der entscheidenden Momente gewesen sein, als man zur zweidimensionalen grafischen Darstellung überging. So lassen sich in Handschriften des 15. Jahrhunderts grafische Verfahren nachweisen. Das Schattenende eines an einer Sonnenuhr befestigten Stiftes ließ man auf die Kalendervertikale des betreffenden Datums fallen und zeigte damit die Zeit an[10]; die Punkte wurden verbunden: ein Vorgang in einer Zeichenebene, der im Prinzip etwa einer Schar von Temperaturkurven entspricht. Tycho Brahe (1546—1601) legte um das Jahr 1600 seine Werte nur in Zahlentafeln nieder, aus denen dann Johannes Kepler (1571—1630) zum erheblichen Teil seine Erkenntnisse ableitete.

Auch die Visierkunst ist eine Disziplin praktischer mathematischer Darstellung. Man bestimmte den Inhalt von Weinfässern mittels eines schräg durch das Spundloch gesteckten Stabes. Auf einer eingeritzten Kalibrierung dieser Visierrute las man die verbliebene Flüssigkeitsmenge ab. Es war ein grobes Verfahren, aber das einzige bekannte, wollte man nicht durch Umgießen mittels geeichter Meßgefäße zum Ziel kommen. Der ganze Fragenkomplex diente Kepler als Anlaß für seine Doliometrie. Wir können aber schon ein gutes Jahrhundert vor ihm feststellen, daß auch in der Visierrechnung grafisch gearbeitet wurde[11]. Diese Darstellungen haben noch keinen formelmäßig beschreibenden Charakter wie in der analytischen Geometrie, sind aber doch m. E. als eine wichtige Vorstufe aufzufassen, obwohl nirgends die Andeutung auf einen funktionellen Zusammenhang erscheint. Man konnte ja kaum Gleichungen lösen, geschweige denn eine Funktion behandeln. Nach außen erinnern diese Skizzen manchmal sowohl an eine Kurvenschar als auch an ein Nomogramm.

Zur Zeit des noch auf den Universitäten gelehrten Triviums, nämlich Grammatik, Rhetorik und Dialektik, und des Quadriviums, nämlich Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik, machte sich also in der Mathematik eine praktische Richtung bemerkbar, die freilich zum Teil unter dem Deckmantel einer theoretisierenden Rechenvorschrift aufgezogen wurde. Astrono-

[10] Z. B. in der aus dem Regensburger Kloster St. Emmeram stammenden Handschrift *Clm 14504,* fol 191 v, aufgezeichnet im 15. Jh.. Herrn R. Lauri, Riehen/Schweiz, danke ich hier für die mir erteilten Auskünfte.

[11] So in der Handschrift *Cgm 4142* aus dem Jahre 1506, fol 50 v und öfter.

mie, Arithmetik und Geometrie waren stoffmäßig noch Teilgebiete der Philosophie; sie wurden wahrscheinlich mehr schlecht als recht in den freien Künsten vorgetragen, die man absolvieren mußte, ehe man sich dem eigentlichen Fachstudium zuwandte.

Die Frühscholastik (1100—1200) hatte bei uns keinen nennenswerten Aufschwung in Mathematik und Naturwissenschaften gebracht. Nur vereinzelt nutzte man arabisches Wissen. Aber schon unter Karl dem Großen (768—814) war verlangt worden, daß in jedem Kloster mindestens ein Mönch in der Lage sein müsse, die kirchlichen Festtage zu berechnen, und der „Computus", das kirchliche Jahrestabellenbuch, ist schon wesentliches Merkmal in dieser Zeit. Es soll ja bereits der Fall eingetreten sein, daß man mangels geeigneter Berechner Ostern etwa von Kloster zu Kloster an verschiedenen Sonntagen gefeiert hatte [12].

Der Hochscholastik des 13. Jahrhunderts wohnte nicht die Kraft inne, welche nötig gewesen wäre, eine Straffung des inzwischen bekannt gewordenen mathematischen Wissens herbeizuführen; sie erschöpfte sich zum erheblichen Teil in unfruchtbaren philosophisch-religiösen Streitigkeiten [13].

In der Spätscholastik des 14. und im 15. Jahrhundert blieben freilich die Algorithmen der Jahrzehnte vorher Bestandteil der Ausbildung; aber sie wurden in der nämlichen Form vorgetragen und immer noch abgeschrieben, und zwar so, wie sie bereits zu ihrer Entstehungszeit aufgezeichnet worden waren. Lediglich die Ziffernformen hatten sich bereits so weit vereinheitlicht, daß man bis auf die 4, 5 und 7 schon das heutige Bild vorfindet. Die Erwartung, welche man aus unserer Sicht an die damaligen Universitäten stellt, wurde nicht erfüllt. Eine Haltung, die auch im religiösen Bereich aus wenig fruchtbaren Spekulationen heraus interne Reformbestrebungen eingeleitet haben mag — man denke an die von Kastl, Melk, Bursfelde und Reichenbach ausgehenden Reformen —, warf nicht nur ihre Schatten auf die Reformation voraus, sondern sie wirkte sich auch auf Bildung und Ausbildung der Studenten aus. So ist es nicht verwunderlich, daß ein Teil der Studierenden nach Italien ging. Andererseits drangen auch nationale und konfessionelle Unruhen bis zur Oberfläche durch, so daß z. B. im Jahre 1409 an die 2000 Prager Studenten mit ihren Lehrern nach Leipzig zogen und die dortige Universität gründeten. Noch mußten die Benediktiner auch nur im zweiten Glied warten, bis sie im folgenden Zeitabschnitt, in der Renaissance, voll auf den Plan treten konnten.

Von den hiesigen Universitäten waren vorerst keine durchgreifenden wissenschaftlichen Neuerungen zu erwarten. Die Wiener Universität, von ehedem Pariser Lehrern ab 1365 aufgebaut, war im ersten Jahrhundert ihres Bestehens die führende mathematische Ausbildungsstätte. Albert von Sachsen (1320?—1390), Heinrich von Langenstein (1325—1397), Johannes von Gmunden (1380?—1444), Georg von Peuerbach (1423—1461) und Johannes Regiomontan sind Namen von Persönlichkeiten, welche im späten 14. und im 15. Jahrhundert in Wien tätig waren. Aber nicht von dort aus ging der entscheidende Impuls, welcher der Mathematik binnen verhältnismäßig kurzer Zeit ein nach außen hin völlig neues Gesicht verlieh. Es waren mehrere Faktoren, welche fast gleichzeitig zusammenzuwirken begannen. Noch trat in der Natur-

[12] Hier unterrichtet G. H. Pertz, Monumenta Germaniae Historica 4 (1841) 114.
[13] J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik 1, 93 f.

wissenschaft nicht das Experiment und der Versuch seiner formelmäßigen Erfassung in den Vordergrund. Konrad von Megenberg (1309—1374), der auch in Regensburg wirkte, hatte in seinem beschreibenden „Buch der Natur" vorerst den Blick von der Betrachtung der Übernatur auf die Betrachtung der Natur gelenkt. Neben die Bibel war sozusagen die Offenbarung im Werk getreten. Vielleicht mit ein Anstoß dafür, daß man ab jetzt nicht mehr nur nach zweckgebundenen, also teleologischen Zusammenhängen in jeder Wissenschaft suchte, sondern die Sinne langsam geschärft erhielt für die kausale Betrachtung der Naturvorgänge, für die Frage nach Ursache und Wirkung.

Großenteils von sehr erstarkenden Fürstenhöfen aus griff die neue Entwicklung um sich. Nicht nur in künstlerischer Hinsicht ging eine neue Richtung diesmal durch Europa, sondern auch in literarischer und naturwissenschaftlicher[14]. Die Erfindung des Buchdrucks um 1450, die Vertreibung der Gelehrten aus Byzanz im Jahre 1453, die breitere Verwendung der indisch-arabischen Ziffern und nicht zuletzt das Auftreten von richtigen Leuten zur richtigen Zeit begünstigten eine Entwicklung, die sich zwischen 1450 und 1550 als ein geistiger Sturm für die Mathematik bemerkbar machte. Nicht mehr die Klöster sind die Stätten, auf welche vorwiegend unser Blick gelenkt wird, sondern Nichttheologen stehen nun auch in vorderster Linie der mathematischen Wissenschaft. Die Benediktiner freilich dringen in Mathematik und Astronomie stark nach vorne. Erwähnt seien St. Emmeram, Reichenbach und Tegernsee. Gleichzeitig löste sich in dieser Epoche die Mathematik innerlich von der Philosophie und bildete einzelne Fachdisziplinen aus. Um 1500 wurden die beiden ersten Lehrstühle für Mathematik in Wien von Kaiser Maximilian I. (1459—1519) gestiftet[15]. Selbst Papier aus meist italienischen Papiermühlen stand nun in ausreichendem Maße zur Hand, um den neuen geistigen Produkten die angemessene Verbreitungsmöglichkeit zu bieten.

Johannes Regiomontan stand mit am Anfang dieser Epoche, die als Renaissance meistens nur unter künstlerischem Aspekt und von der Technik her als Zeitalter der Erfindungen und Entdeckungen notiert wird. Auch in der Mathematik brachte sie einen völligen Umschwung. Während einerseits durch eine große Anzahl von Rechenschulen, in denen von Rechenmeistern deutsch unterrichtet wurde, die so lange schon, aber nur in einer dünnen Schicht des Volkes geübten praktischen Rechenmethoden jetzt in breitere Volksteile dringen konnten — der Name Adam Ries (1492—1559) ist allen geläufig —, verlagerte sich in den wissenschaftlich gebildeten Kreisen das Interesse. Dort konnte man ja lateinisch und großenteils griechisch lesen und schreiben. So boten die Originalmanuskripte, die aus Byzanz in Mengen mit ins Abendland gebracht worden waren, nach ihrem Bekanntwerden den Stoff für eine wahre Auferstehung auch des alten griechischen Gedankengutes. Man hatte in der Renaissance eigentlich das Alte Rom wiedererstehen lassen wollen; die literarische Bewegung dehnte sich aber auf das Griechische aus, und gleichzeitig zog so manche heutige Schriftsprache den größten Nutzen aus dieser Bewegung. Man findet in jener Zeit bereits lateinisch-deutsche Wörterbücher, und die italienische Sprache hatte sich in dieser spätmittelalterlichen Phase vollends vom Lateinischen gelöst.

[14] J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik 1, 110.
[15] K. Vogel, Die Practica des Algorismus Ratisbonensis, 231.

Die Bestände in den Bibliotheken mögen wieder einer genaueren Revision unterzogen worden sein. Es existieren etliche Bibliothekskataloge von damals, in welchen zuweilen schön aufgegliedert ist, an welchem Pult so manches wertvolle Buch angekettet war. Bei dieser Suche mögen auch bisher unverstandene Texte hervorgeholt worden sein. Sie waren zwar ebenfalls durch Abschreiben vervielfältigt worden, das wirkliche Verständnis für ihren Inhalt hatte sich aber bislang nicht eingestellt. Auch eine algebraische Abhandlung des um 820 in Bagdad lebenden Mohammed ibn Musa Alchwarazmi, im 12. Jahrhundert in Spanien übersetzt, wurde nun ins Blickfeld gerückt. Die Worte *Algebra* und *Algorithmus* sind von *Alchwarazmi* abgeleitet. Dieses algebraische Werk hatte trotz seiner Übertragung ins Lateinische ein stilles Dasein gefristet; es behandelte nämlich in reinem Text ohne abkürzende Symbolik Gleichungen ersten und zweiten Grades sowohl in rechnerischer als auch in geometrischer Manier. Jetzt gewann es neues Interesse. Vor allem in Wien, Regensburg, Ingolstadt, Neumarkt, Nürnberg und Leipzig lassen sich Bestrebungen nachweisen, dieser theoretischen Richtung in der damaligen Mathematik große Aufmerksamkeit zu widmen.

Die Zeichen + und — waren bei uns erstmals um 1480 aufgetreten, sicherlich aus kaufmännischen Gepflogenheiten erwachsen: bei den damals üblichen großen Frachtballen gab es bestimmt öfters Untergewicht gegenüber einer Norm. So entwickelte sich aus dem oft und schnell angeschriebenen Wort *minus* ein *min*, welches durch Gewohnheit zu einem langen waagerechten Strich wurde. Die kaufmännischen Bezeichnungen wurden ja aus Italien übernommen. Trat einmal Übergewicht auf, dann kreuzte man diesen Strich und hatte die erste Form des Pluszeichens.

In einigen Bibliotheken existieren noch Handschriften der „Algebra" Alchwarazmis aus dem 14. Jahrhundert. Dieses schon so lange überlieferte Werk ist ohne jede abkürzende Symbolik niedergeschrieben; bei den Arabern war es bis zum 13. Jahrhundert Brauch gewesen, alles — also auch Zahlen — auszuschreiben[16]. Die Übersetzer hatten sich strikt hieran gehalten.

Nun macht sich in der Überlieferung vorerst noch eine Lücke bemerkbar. Im Jahre 1461 findet sich in einem St. Emmeramer Kodex[17] der älteste Nachweis einer zum Teil deutsch, zum anderen Teil lateinisch aufgezeichneten Algebra; Frater Fridericus Gerhart (gest. 1464/65) und ein anderer Schreiber verwendeten Symbole für unser x und x^2; es waren Abkürzungen der Worte *res* bzw. *radix* oder *Ding* für die Unbekannte, des Wortes *census* für ihr Quadrat.

Ab 1463 bearbeitete Regiomontan algebraische Gleichungen in nahezu vollendet symbolischer Form: er hatte Zeichen für unser x und x^2, einen langen waagerechten Strich als Gleichheitszeichen; bis auf die 5 verwendete er unsere heutigen Ziffernformen und kürzte auch das Wort *minus* bereits deutlich ab. Dann tritt wieder eine Lücke auf.

Ab etwa 1480 nimmt die Universität Leipzig für kurze Zeit die in Algebra führende Stellung ein. Dort hat man es verstanden, die aus praktischen Erwägungen heraus entstandenen Zeichen + und — mit den Symbolen für die algebraische Unbekannte und deren Potenzen zu verquicken. Wir finden

[16] J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik 1, 64.
[17] Es handelt sich um die Handschrift *Clm 14908*.

weitestgehende Abkürzungen aus *dragma* (= Drachme) für die Einheit, *res* (= Ding) für die Unbekannte, *census* (= Zins) für ihr Quadrat, *cubus* (= Würfel) für die 3. Potenz, *census de censu* (=Zins des Zinses) für die 4. Potenz der Unbekannten usw. Man brachte es wirklich fertig, innerhalb weniger Jahre die theoretisierende Algebra aus dem rein rhetorischen Stadium, in dem nur Worte in Erscheinung getreten waren, zur symbolischen Form zu führen. Es ist noch nicht ganz durchleuchtet, wie weit man hier unmittelbar auf arabische Urtexte zurückgriff. Erstaunlich ist jedenfalls, daß sich dieser schnelle Wechsel vorwiegend im süddeutschen Raum vollzog.

Bereits 1486 fand in Leipzig die erste Universitätsvorlesung über Algebra als Spezialfach statt. Sie ist noch erhalten.

Es ist klar, daß man sofort versuchte, praktische Folgerungen aus den nun in symbolischer Form auftretenden Gleichungen zu ziehen, und es bildeten sich viele Regeln mit Regelnamen, wie man bestimmte praktische oder kaufmännische Probleme, die wir mit Gleichungsansatz angehen würden, mittels verkappter algebraischer Anweisungen zu lösen habe. Frühe gedruckte deutsche Rechenbücher — zum Teil noch vor 1500 — liefern schöne Beispiele dafür, wie algebraisierende Methoden in Worte gekleidet wurden, welche den Lösungsweg beschreiben. Es war die dogmatische Lehrmethode, die bei sinngemäß gleichgearteten Aufgaben zum Ziel führte, bei der man freilich den Rechengang kaum verstand.

Algebraische Algorithmen, wie sie auch in der erwähnten Vorlesung vorgetragen wurden, sind lateinisch aufgezeichnet und behandeln nur theoretische Probleme. Eine Fülle neuen Stoffes wird angeboten, die sich von einfachsten Fragen in den Grundrechenarten bis zu Überlegungen hinspannt, die bereits als erste Fühler des Logarithmenrechnens bei uns aufzufassen sind; denn manche Rechenanleitungen zeigen deutlich den beabsichtigten Weg an, der über die Rechnung mit Potenzen auf das Logarithmieren zugeht.

Durch zu starkes Theoretisieren geriet die Algebra bereits um 1500 in eine Sackgasse. Seinerzeit ließ man nur positive Koeffizienten im Gleichungsansatz zu und gelangte schließlich zu 24 verschiedenen Gleichungstypen; jeder von ihnen erhielt eine gesonderte Lösungsvorschrift. Die Algebra drohte somit schon nach kurzer Zeit, nach einem vorerst grandiosen Aufschwung, an ihrer eigenen Problematik zu ersticken. Systematisches Gliedern mußte Übersicht schaffen. Die geometrische Beweisführung, welche die Darstellung Alchwarazmis begleitet hatte, war inzwischen völlig verschwunden; mit ihr auch großenteils die Frage nach der möglichen Doppeldeutigkeit der Lösung einer quadratischen Gleichung, auf welche von Alchwarazmi hingewiesen worden war. Entscheidenden Einfluß auf die Neugestaltung der bereits erheblich symbolisierten Algebra gewann nun *die* Überlegung, daß man durch Gegenüberstellen von arithmetischen und geometrischen Folgen Gesetzmäßigkeiten hieraus in die Gleichungslehre übernehmen kann. Ein völlig neuer Sinn, den man der Gleichung plötzlich unterlegte! „Nicht um die Auffindung einer Unbekannten handelt es sich, sondern um Herstellung einer aus einer gegebenen Anzahl von Gliedern bestehenden geometrischen Progression (= Reihe)“ [18]. Die Frage hieß

[18] Bei M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 2 (² 1900) 635, erfahren wir, daß noch François Viète (1540—1603) die eigentliche Aufgabe der Gleichungsauflösung hierin sieht.

also: welche geometrische Folge 1, x, x^2, x^3, usw. genügt meiner algebraischen Gleichung? Ob Doppellösung vorhanden, stand dadurch bei der quadratischen Gleichung nicht mehr zur Diskussion. Untermauert wurden diese Gedanken durch die Erkenntnis, daß Addieren, Subtrahieren, Halbieren und Dritteln in einer arithmetischen Folge zu Multiplizieren, Dividieren, Quadrat- und Kubikwurzelziehen in einer zugehörigen geometrischen Folge führt.

Der innere Zusammenhang zwischen den thetischen Operationen, nämlich Addieren — Multiplizieren wurde stark herausgestellt, ebenso der zwischen den lytischen Beziehungen, nämlich Subtrahieren — Dividieren — Wurzelziehen. Es waren wiederum großartige Gedanken, welche der Gleichungslehre das Rechnen mit geometrischen Verhältnissen fast völlig unterordneten und hierdurch erneut auf die nächste Disziplin hindeuteten, auf das Logarithmieren. Hauptsächlich von der Wiener Schule aus ging dieses Wissen; sie hatte um 1500 wieder die in der Mathematik führende Stellung inne.

Michael Stifel (1487?—1567) brachte diese Überlegungen sozusagen mit der eigentlichen Zielsetzung der Algebra, nämlich dem Lösen von Gleichungen, wieder in Einklang. In seinen Werken verknüpfte er beide Strömungen, welche der Algebra zwischen 1450 und 1550 das Gepräge erteilt und ihr nach außen hin ein völlig neues Gesicht verliehen hatten. Er befaßte sich auch mit zahlenmystischen Spekulationen; so sagte er einmal den Weltuntergang voraus und daher soll der Vers stammen: „Stifel muß sterben, ist noch so jung, so jung...". Stifel ordnete der Gleichung nicht mehr wie in der kurzen Zeitspanne vorher die Proportion völlig unter, und er kehrte auch wieder zur geometrischen Lösung zurück. Durch ihn erhielten die negativen Zahlen ab damals allmählich völlige Gleichberechtigung, und so gibt es seit Stifel in gewisser Hinsicht den allgemeinen Gleichungsansatz vom Grad 2.

Der Buchdruck und die teilweise in der Muttersprache übermittelten wissenschaftlichen Ergebnisse verhalfen dazu, daß die Zahl der sich mit Mathematik Beschäftigenden wuchs. In Ingolstadt etwa wurde 1524 eine rechnerisch und zeichnerisch gelöste Algebra vorgetragen[19]. Auch die Verwendung von Buchstaben anstelle von Zahlen, seit Jahrhunderten bereits vereinzelt praktiziert, setzte sich nun endgültig durch. Die algebraische Gleichung gewann dadurch im Prinzip um 1550 schon großenteils das Aussehen, unter welchem sie heute gelehrt wird. Freilich haben sich die damaligen Zeichen noch verändert. So las man das seinerzeitige Kürzel für *res* wahrscheinlich nach einiger Zeit in deutschen Texten irrtümlich als deutsches x, woraus sich dann das heute gebräuchliche x ableitet.

Mit Michael Stifel endet das Zeitalter der *Deutschen Coß*[20], der in unserem Lebensraum herausgebildeten symbolischen Algebra. Augenscheinlichstes Merkmal ist der freie Umgang mit den Zeichen + und — als Operationszeichen. Auch als Vorzeichen fanden sie bald Eingang.

Die praktische Mathematik war während dieser Zeit ebenfalls, vorwiegend von den Rechenmeistern, vorangetrieben worden. Erinnert sei auch an die Ergebnisse in der Baukunst und der Perspektive. Regiomontan hatte die Tradition fortgesetzt, astronomische Daten in Tabellen niederzulegen. Er schuf

[19] Aufgezeichnet in der Wiener Universitätshandschrift *Nr. 5277*, fol 245^{v}—246^{r}.
[20] Allgemein die Bezeichnung für die in unserem Lebensraum damals entwickelte symbolische Algebra. Cosa = Sache, Ding.

große Tafelwerke in indisch-arabischen Ziffern und verhalf jenen dadurch mit zur Verbreitung. Kein Nachfolger hat sein Werk unmittelbar fortgeführt. Seine Bücher wurden zum Teil verschleudert. Die Erkenntnisse in der Trigonometrie freilich gingen nicht unter, sondern fanden schon im frühen 16. Jahrhundert Interessenten; diese versuchten eifrig, die komplizierten Berechnungen aus der Astronomie durch Umformungen zu verkürzen. In der Prosthaphairesis wurden Multiplikationen in den Winkelfunktionen auf Addition bzw. Subtraktion zurückgeführt. Es waren sehr langwierige und umständliche Rechnungen. Dies erklärt vielleicht mit zum Teil die Stagnation, die zwischen 1550 und 1600 in der Mathematik bei uns eintrat, in der Zeit, in welcher in anderen Ländern aufgeholt wurde. Schließlich griff man auf die Gedanken zurück, wie sie sich in der Algebra ab der Leipziger Zeit über die Wiener Schule bis hin zu Stifel ziehen und man begann, dieses Wissen aus Proportion und Gleichung für das Rechnen mit Logarithmen zu nutzen. Hierdurch wurde ungefähr um 1600 ein neuer, der dritte geistige Abschnitt in der Mathematik unseres Lebensraumes eingeleitet, in welchem man sich wieder vorerst rein praktischen Modellen zuwandte.

Eine großartige Epoche war vergangen. Der Widerstreit zwischen Problem und System, Theorie und Praxis, Geistes- und Naturwissenschaft, Glaube und Aberglaube, Denken in althergebrachten Formen einerseits und in völlig revolutionären Bahnen andererseits, hatte sehr bestimmt auch auf die Entwicklung in der Mathematik eingewirkt. Wir sprechen meist nur vom Zeitalter der Erfindungen und Entdeckungen, weil wir in jeder Epoche nur das Neue sehen und leicht den Blick für das Traditionelle und darum Bewährte uns trüben lassen. Jetzt begann Johannes Kepler zu wirken; er, der sich im Laufe seines Lebens mit Fragen aus den meisten dieser Gebiete abgab. Diese Vielseitigkeit in Keplers Leben und Schaffen führt leicht zu dem Schluß, er habe sich mit einzelnen Aufgaben bloß oberflächlich beschäftigt. Er stand inmitten dieser Probleme und verstand es, eine Brücke zu schlagen zwischen den Erkenntnissen des Altertums — er griff großenteils in seinen astronomischen Überlegungen auf die Geometrie der Griechen zurück — und den Erkenntnissen des ausgehenden Mittelalters — hier vor allem seine vorerst intuitive, dann wissenschaftlich begründete Abkehr vom geozentrischen Weltbild und die Vertiefung der harmonischen Ideen im heliozentrischen Weltbild des Nicolaus Kopernikus (1473—1543) — zu den Erkenntnissen der Neuzeit, wobei er Gedanken vorwegnahm, die man den Barockphilosophen zuschreibt[21]. Kepler wurde ja ein halbes Jahrhundert vor diesen Männern bereits mit den neuen Vorstellungen konfrontiert, die auf der Woge des geistigen Überschwanges zwischen 1450 und 1550 zu so großer Entfaltung gelangt waren.

Trotzdem findet zur Zeit Keplers und mit Kepler in der Mathematik ein Gedankengang sein Ende. Er spannte sich über nahezu 3000 Jahre, hatte an seinem Beginn rein theoretischen geometrischen Überlegungen Platz eingeräumt, während an seinem Ende die offene Frage nach praktischer und technischer Verwertbarkeit steht, ohne die Exaktheit der Geometrie irgendwie zu gefährden.

Es war das Ende einer Ideenwelt, an welche wahrscheinlich nicht vor der

[21] Verwiesen sei vor allem auf das Isaac Newton (1643—1727) zugeschriebene Gravitationsgesetz, welches von Kepler bereits in großen Zügen skizziert wurde.

Relativitätstheorie angeknüpft wurde; gleichzeitig war es der Beginn einer Epoche, welche die moderne Naturwissenschaft einleitete. Der Anstoß hierzu ging zum Teil von Fragen der Philosophie aus, die seitdem — wie vor der Renaissance — wieder eng mit der mathematischen Problematik verknüpft ist; es ist anzunehmen, daß Kepler hier großen Einfluß ausübte.

Die Jahrhunderte vor ihm waren zwar in wissenschaftlicher Hinsicht eine dunkle Zeit, doch auch diese, — vor allem das späte Mittelalter, — war nicht so finster, daß nicht mancher Schimmer bis in unser schnellebiges Dasein gedrungen wäre. Es liegt an uns, ob wir diese schwachen Strahlen bündeln und sie gleichsam in ihrer Brennebene sammeln wollen, um von dort aus das Abbild dieser so oft als ungeistig verrufenen Epoche mit Objektivität auf uns einwirken zu lassen.