



**WYDZIAŁ MATEMATYKI  
i INFORMATYKI**

Uniwersytet Łódzki

Aleksandra Zakrzewska

Rozprawa doktorska

*Skoki liczb Milnora deformacji  
liniowych osobliwości krzywych*

Promotor: **prof. dr hab. Tadeusz Krasieński**

Promotor pomocniczy: **dr Szymon Brzostowski**

KATEDRA GEOMETRII ALGEBRAICZNEJ

I INFORMATYKI TEORETYCZNEJ

ŁÓDŹ 2019

# Spis treści

|     |   |           |
|-----|---|-----------|
| 1   | Wstęp . . . . .   | 3         |
| 2   | Rozdmuchania, rozwiązania osobliwości i diagramy Enriquesa osobli-<br>wości . . . . . | 6         |
| 3   | Abstrakcyjne diagramy Enriquesa . . . . .   | 10        |
| 4   | Skoki liczb Milnora deformacji liniowych osobliwości jednorodnych . .                 | 23        |
| 5   | Uwagi końcowe . . . . .   | 35        |
| 5.1 | Osobliwości quasi-jednorodne . . . . .  | 35        |
| 5.2 | Skoki liczb Milnora po rozdmuchaniu . . . . .   | 38        |
|     | <b>Bibliografia</b>   | <b>42</b> |

# 1 Wstęp

Niech  $f_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  będzie **osobliwością izolowaną**, tzn.  $f_0$  jest kielkiem funkcji holomorficzej  $\overline{f_0} : U \rightarrow \mathbb{C}$ , będącej reprezentantem tego kielka  $f_0$ , określonej w otwartym otoczeniu  $U$  punktu  $0 \in \mathbb{C}^n$  i spełniającej warunki:

1.  $\overline{f_0}(0) = 0$ ,
2.  $\nabla \overline{f_0}(0) = 0$ ,
3.  $\nabla \overline{f_0}(z) \neq 0$  dla  $z \in U \setminus \{0\}$ .

W powyższej definicji przyjmujemy, że  $\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$  jest gradientem funkcji  $f$ . W dalszym ciągu przez **osobliwość** będziemy rozumieć osobliwość izolowaną.

**Deformacją osobliwości**  $f_0$  nazywamy kielkę funkcji holomorficzej  $f = f(s, z) : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  taki, że

1.  $f(0, z) = f_0(z)$ ,
2.  $f(s, 0) = 0$ .

Deformację  $f(s, z)$  osobliwości  $f_0$  traktujemy jako rodzinę  $(f_s)$  kielków  $f_s(z) := f(s, z)$ . Ponieważ  $f_0$  jest osobliwością izolowaną,  $f_s$  ma również osobliwości izolowane w punktach bliskich 0 dla wystarczająco małych  $s$  ([GLS06] Theorem 2.6 I). Zatem dla dostatecznie małych  $s$  możemy zdefiniować liczbę  $\mu_s$

$$\mu_s := \mu(f_s) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / (\nabla f_s)$$

zwaną **liczbą Milnora**, gdzie  $\mathcal{O}_n$  jest pierścieniem kielków funkcji holomorficzych w 0, natomiast  $(\nabla f_s)$  jest ideałem w  $\mathcal{O}_n$  generowanym przez współrzędne gradientu  $\nabla f_s$ .

Ponieważ liczba Milnora jest półciągła z góry w topologii Zariskiego ([GLS06] Theorem 2.6 I i Proposition 2.57 II) w rodzinie osobliwości, zatem istnieje otoczenie  $S$  punktu  $0 \in \mathbb{C}$  takie, że

1.  $\mu_s = \text{const.}$  dla  $s \in S \setminus \{0\}$ ,
2.  $\mu_0 \geq \mu_s$  dla  $s \in S$ .

Stałą różnicę  $\mu_0 - \mu_s$  (dla  $s \neq 0$ ) nazywamy **skokiem liczby Milnora deformacji**  $(f_s)$  i oznaczamy  $\lambda((f_s))$ . Najmniejsza niezerowa wartość wśród skoków liczby Milnora deformacji osobliwości  $f_0$  nazywana jest **skokiem liczby Milnora**  $f_0$  i oznaczana  $\lambda(f_0)$ .

Pierwszy ważny rezultat dotyczący skoków liczby Milnora uzyskał Sabir Gusein-Zade ([GZ93]), który udowodnił istnienie osobliwości  $f_0$ , dla której  $\lambda(f_0) > 1$  oraz że dla osobliwości nierozkładalnych krzywych płaskich  $f_0$  zachodzi  $\lambda(f_0) = 1$ . Problem ten był również rozważany przez innych autorów:

- A. Bodin ([Bod07]) obliczył  $\lambda(f_0)$  dla dogodnych osobliwości krzywych, których diagram Newtona redukuje się do jednego odcinka w klasie niezdegenerowanych deformacji,
- J. Walewska ([Wal13]) uogólniła wynik Bodina na osobliwości bez założenia o dogodności,
- S. Brzostowski, T. Krasieński i J. Walewska ([BKW14]) obliczyli wszystkie możliwe liczby Milnora dla niezdegenerowanych deformacji jednorodnych osobliwości krzywych,
- dla szczególnych osobliwości  $f_0^n(x, y) = x^n + y^n$  ( $n \geq 2$ ) ci sami autorzy w [BKW14] udowodnili również, że  $\lambda(f_0) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  i że skok liczby Milnora nie jest niezmiennikiem topologicznym.

W niniejszej pracy zajmę się badaniem skoków liczb Milnora osobliwości  $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dla rodziny **deformacji liniowych**, tzn. deformacji postaci  $f_s = f_0 + sg$ , gdzie  $g$  jest dowolną funkcją holomorficzną w otoczeniu 0 taką, że  $g(0) = 0$ . Najmniejszą niezerową wartość skoków deformacji liniowych osobliwości  $f_0$  oznaczając będziemy  $\lambda^{lin}(f_0)$ .

Do badania tych skoków będą użyte diagramy Enriquesa, gdyż w tym języku wyrażony jest rezultat M. Alberich-Carramiñany i J. Roé ([ACR05]) na którym oparte są moje wyniki. Podali oni charakteryzację przyległości liniowej (czyli deformacji liniowych) w języku abstrakcyjnych diagramów Enriquesa. Inną charakteryzację (w języku waluacji dywizorialnych i dywizorów wyjątkowych) podali J. Fernández de Bobadilla, M. Pe Pereira i P. Popescu-Pampu ([dBPPP17]).

Głównym rezultatem pracy jest wzór na  $\lambda^{lin}(f_0)$ , w przypadku, gdy  $f_0$  jest osobliwością jednorodną lub semi-jednorodną dwóch zmiennych.

Ponadto okazuje się również, że  $\lambda^{lin}(f_0)$  jest niezmiennikiem topologicznym. Jest to prosty wniosek z twierdzenia M. Alberich-Carramiñany i J. Roé [ACR05] zastosowany do skoków liczb Milnora deformacji liniowych.

Przypomnijmy, że dwie osobliwości  $f, g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  są **topologicznie (odp. analitycznie) równoważne**, gdy istnieje homeomorfizm (odp. biholomorfizm)  $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  taki, że  $\phi(V(f)) = V(g)$ . Funkcję  $\Psi$  określoną w zbiorze

osobliwości o wartościach w pewnym zbiorze  $X$  nazywamy **niezmiennikiem topologicznym (odp. analitycznym)**, gdy dla każdej pary osobliwości topologicznie (odp. analitycznie) równoważnych przyjmuje ona te same wartości. Oczywiście z analitycznej równoważności wynika topologiczna równoważność, ale nie na odwrót. Przykładem jest skok liczby Milnora osobliwości, który jest niezmiennikiem analitycznym, ale nie jest niezmiennikiem topologicznym (zobacz [BK14]).

## 2 Rozdmuchania, rozwiązania osobliwości i diagramy Enriquesa osobliwości

W tym rozdziale przedstawię informacje na temat rozdmuchań osobliwości i diagramów Enriquesa. Szczegóły wraz z dowodami można znaleźć w [CA00] i [BK86].

Niech  $M$  będzie powierzchnią zespoloną, tzn. 2-wymiarową rozmaitością zespoloną i  $P \in M$ . **Rozdmuchaniem**  $M$  w  $P$  nazywamy 2-wymiarową rozmaitość  $\widehat{M}$  i odwzorowanie holomorficzne  $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$  spełniające warunki:

1.  $E := \pi^{-1}(P)$  jest biholomorficzne z 1-wymiarową przestrzenią rzutową  $\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}}$  ( $E$  nazywamy **dywizorem wyjątkowym** rozdmuchania  $\pi$ ),
2.  $\pi|_{\widehat{M} \setminus E} : \widehat{M} \setminus E \rightarrow M \setminus \{P\}$  jest biholomorfizmem,
3. w pewnym otoczeniu  $U$  punktu  $P$  odwzorowanie  $\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  jest biholomorficzne ze standardowym rozdmuchaniem  $O \in \mathbb{C}^2$  obciętym do pewnego otoczenia  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Przez standardowe rozdmuchanie rozumiemy  $\pi^{\text{st}} : B \rightarrow \mathbb{C}^2$ , gdzie  $B = \{(z, l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 : z \in l\}$  i  $\pi^{\text{st}}(z, l) := z$ .

Rozdmuchanie  $M$  w  $P$  zawsze istnieje i jest określone jednoznacznie z dokładnością do biholomorfizmu. Wszystkie punkty  $E$  nazywamy **nieskończenie bliskimi**  $P$ . Ponieważ rozdmuchaniem  $M$  w  $P$  jest rozmaitość  $\widehat{M}$ , zatem możemy powtórzyć ten proces i rozdmuchać  $\widehat{M}$  w punktach  $\widehat{M}$ , w szczególności w punktach  $E$ . Wszystkie punkty należące do kolejnych dywizorów wyjątkowych nazywamy również punktami **nieskończenie bliskimi**  $P$ . Jeśli  $\Gamma$  jest **krzywą lokalną o środku w  $P$**  tzn. kielkiem w punkcie  $P$  zbioru zer  $V(f)$  niestałej funkcji holomorficznej określonej w otoczeniu  $P$ , to **przeciwobrazem właściwym** krzywej lokalnej  $\Gamma$  o środku w  $P$  nazywamy zbiór  $\overline{\pi^{-1}(\Gamma \setminus \{P\})}$ , który oznaczamy przez  $\widehat{\Gamma}$ .

**Rozwiązaniem osobliwości** lokalnej krzywej  $\Gamma$  w  $P$  nazywamy ciąg rozdmuchań

$$M = S_0 \xleftarrow{\pi_1} S_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_n} S_n$$

o tej własności, że  $\pi_1$  jest rozdmuchaniem  $S_0 = M$  w  $P$ ,  $\pi_t$  jest rozdmuchaniem  $S_{t-1}$  w jednym z punktów dywizora wyjątkowego  $(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{t-1})^{-1}(P)$  ( $t = 1, \dots, n$ ). Ponadto przeciwobraz właściwy  $\widehat{\Gamma}$  krzywej  $\Gamma$  za pomocą  $\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n$  jest nieosobliwy i przecina transwersalnie dywizor wyjątkowy  $E = \pi^{-1}(P)$ . Zakładamy, że ciąg rozdmuchań jest minimalny.

Niech  $f_0$  będzie osobliwością izolowaną w  $0 \in \mathbb{C}^2$ , a  $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  rozwiązaniem osobliwości  $V(f_0)$ . Proces rozdmuchań (rozwiązanie) może zostać przedstawiony za pomocą **diagramu Enriquesa**  $E(f_0)$ . Diagram Enriquesa to drzewo z wyróżnionym

korzeniem i dwoma rodzajami krawędzi. Przedstawimy jego konstrukcję dla nierozkładalnych osobliwości. W przypadku osobliwości rozkładalnej diagram Enriquesa konstruuje się dla każdego jej nierozkładalnego czynnika oddzielnie, a następnie „skleja” się je ze sobą we wspólnych punktach nieskończenie bliskich.

Zatem, niech  $f_0$  będzie nierozkładalną osobliwością izolowaną w  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Wierzchołkami  $E(f_0)$  są wszystkie punkty nieskończenie bliskie 0, które należą do przeciwoobrazu właściwego zbioru zer  $V(\widehat{f_0})$  i do kolejnych przeciwoobrazów w procesie rozwiązania osobliwości. W każdym kolejnym rozdmuchaniu otrzymujemy również nierozkładalne osobliwości. Oznaczmy je przez  $V_0 = V(\widehat{f_0}), V_1, \dots, V_k$  oraz ich środki przez  $P_0 = 0, P_1, \dots, P_k$ . Wierzchołkami  $E(f_0)$  są zatem punkty  $P_0, \dots, P_k$ . Punkt  $P_0 = 0 \in \mathbb{C}^2$  jest korzeniem grafu  $E(f_0)$ , a krawędzie  $E(f_0)$  łączą kolejne pary punktów  $(P_{i-1}, P_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Krawędzie mogą być albo zaokrąglone albo proste. Rysujemy je według następującej zasady.

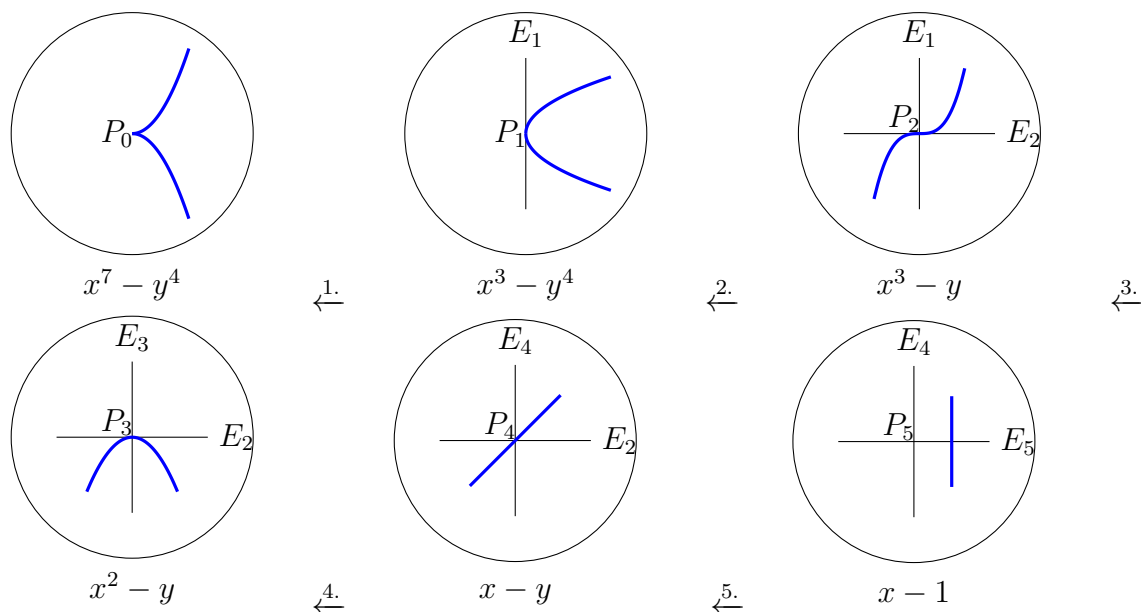
Niech  $P_{i-1}$  i  $P_i$  będą dwoma kolejnymi punktami w ciągu rozdmuchań i  $P_i$  będzie nieskończenie bliski  $P_{i-1}$  po jednym rozdmuchaniu.

1. Jeżeli  $V_{i-1}$  nie jest styczna do dywizora wyjątkowego w punkcie  $P_{i-1}$ , to krawędź łącząca  $P_{i-1}$  i  $P_i$  jest zokrąglona i ma tę samą styczną, co krawędź „prowadząca” do  $P_{i-1}$ .
2. Jeśli  $V_{i-1}$  jest styczna do dywizora wyjątkowego w punkcie  $P_{i-1}$ , to krawędź łącząca  $P_{i-1}$  i  $P_i$  jest prosta oraz:
  - (a) jeśli  $V_{i-1}$  jest styczna do ostatnio wklejonej przestrzeni rzutowej, to krawędź jest prostopadła do krawędzi „prowadzącej” do  $P_{i-1}$ ;
  - (b) jeśli  $V_{i-1}$  jest styczna do jednej z wcześniej wklejonych przestrzeni rzutowych, to krawędź jest przedłużeniem krawędzi „prowadzącej” do  $P_{i-1}$  (również prostej).

*Przykład 2.1.* Rozważmy osobliwość  $f_0(x, y) = x^7 - y^4$ . Graficzne przedstawienie rozwiązania tej osobliwości w 0 wraz z lokalnymi opisami zostało przedstawione na rysunku 1.

Wówczas w diagramie Enriquesa  $f_0$ :

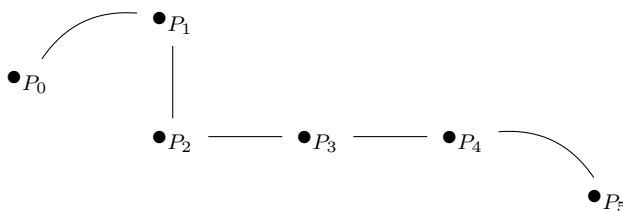
1.  $P_0$  będzie połączony z  $P_1$  zaokrągloną krawędzią,  $V_0$  nie jest styczna do dywizora wyjątkowego w  $P_0$  (w punkcie  $P_0$  nie ma dywizora wyjątkowego).
2.  $P_1$  będzie połączony z  $P_2$  krawędzią prostą prostopadłą do poprzedniej, gdyż  $V_1$  jest styczna do  $E_1$  w  $P_1$ .



Rysunek 1: Rozwiązanie osobliwości  $x^7 - y^4$  w 0.

3.  $P_2$  będzie połączony z  $P_3$  krawędzią prostą prostopadłą do poprzedniej, gdyż  $V_2$  jest styczna do  $E_2$  w  $P_2$ .
4.  $P_3$  będzie połączona z  $P_4$  krawędzią prostą będącą przedłużeniem poprzedniej, gdyż  $V_3$  jest styczny do  $E_2$  w  $P_3$ .
5.  $P_4$  będzie połączony z  $P_5$  zaokrągloną krawędzią, gdyż  $V_4$  nie jest styczna do dywizora wyjątkowego.
6.  $P_5$  jest ostatnim wierzchołkiem, gdyż  $V_5$  przecina transversalnie dywizor wyjątkowy.

Diagram Enriquesa osobliwości  $f_0$  jest przedstawiony na rysunku 2.



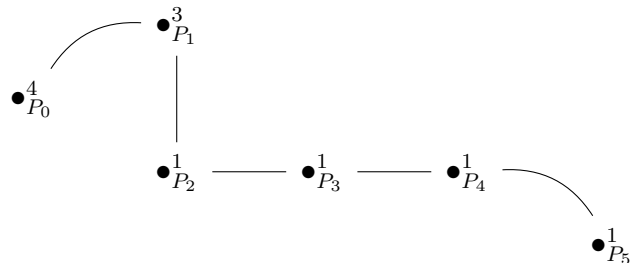
Rysunek 2: Diagram Enriquesa krzywej  $x^7 - y^4$ .

Dla dowolnego diagramu Enriquesa  $E(f_0)$  osobliwości  $f_0$  możemy określić **funkcję wag** określoną na zbiorze wierzchołków o wartościach nieujemnych całkowitych tzn.  $\nu : \{P_0, \dots, P_k\} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ . Wartością  $\nu(P_i)$  dla dowolnego  $i \in \{1, \dots, k\}$  jest rząd transformaty właściwej osobliwości  $f_0$  w punkcie  $P_i$ .



*Przykład 2.2.* Dla diagramu Enriquesa  $E(f_0)$  osobliwości  $f_0(x, y) = x^7 - y^4$  (zob. rysunek 3) funkcja wag określona jest w następujący sposób:  $\nu(P_0) = 4, \nu(P_1) = 3, \nu(P_2) = \nu(P_3) = \nu(P_4) = \nu(P_5) = 1$ .

W dalszym ciągu wagi będziemy zaznaczać na diagramie Enriquesa z prawej strony wierzchołka u góry.



Rysunek 3: Diagram Enriquesa krzywej  $x^7 - y^4$  wraz z funkcją wag  $\nu$ .

Diagramy Enriquesa jako jedne z „przedstawień” procesu rodmuchania osobliwości są niezmiennikami topologicznymi ([CA00] Chapter 3.9 page 99) osobliwości. Inne przedstawienia tego procesu to np. grafy dualne lub układy krotności.

Co więcej, diagram Enriquesa osobliwości  $f_0$  determinuje jej topologię, tzn. jeśli  $E(f) = E(g)$ , to  $V(f)$  i  $V(g)$  są topologicznie równoważne.

### 3 Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Diagramy Enriquesa można też zdefiniować w sposób abstrakcyjny, tak, aby każdy diagram Enriquesa osobliwości krzywej był abstrakcyjnym diagramem Enriquesa. Jednak będzie to szersza klasa diagramów od klasy diagramów osobliwości krzywych. Są one potrzebne do sformułowania rezultatów M. Alberich-Carramiñany i J. Roé.

**Definicja 3.1** ([ACR05]). *Abstrakcyjnym diagramem Enriquesa* nazywamy drzewo  $D$  z wyróżnionym korzeniem  $i$  z relacją najbliższości w zbiorze wierzchołków spełniające warunki:

1. Korzeń nie jest najbliższy żadnemu wierzchołkowi.
2. Każdy wierzchołek, który nie jest korzeniem, jest najbliższy swojemu bezpośredniemu poprzednikowi.
3. Żaden wierzchołek nie jest najbliższy więcej niż dwóm innym wierzchołkom.
4. Jeśli  $Q$  jest najbliższy dwóm wierzchołkom, to jeden z nich jest bezpośrednim poprzednikiem  $Q$  który nadto jest najbliższy drugiemu.
5. Dla dowolnych dwóch wierzchołków  $P$  i  $Q$ , jeśli  $Q$  jest najbliższy  $P$ , to istnieje co najwyżej jeden wierzchołek najbliższy im obu.

Zapis  $Q \rightarrow P$  oznacza, że  $Q$  jest najbliższy  $P$ . Wierzchołki, które są najbliższe dwóm innym wierzchołkom nazywamy **satelitarnymi**, natomiast pozostałe (poza korzeniem) **wierzchołkami swobodnymi**.

By oddać graficznie relację najbliższości krawędzie między wierzchołkami  $D$  „rysujemy” w następujący sposób:

1. Jeśli  $Q$  jest swobodnym następnikiem  $P$ , to krawędź łącząca  $P$  i  $Q$  jest **zaokrąglona** i jej styczna ma kierunek zgodny ze styczną poprzedniej krawędzi.
2. Ciąg krawędzi łączących maksymalną liczbę wierzchołków najbliższych pewnemu wierzchołkowi  $P$  jest **linią** ortogonalną do krawędzi łączącej  $P$  z pierwszym wierzchołkiem tego ciągu.

**Uwaga 3.2.** Przyjmijmy oznaczenia, że w dowolnym drzewie (grafie)  $G$  przez  $R_G$  oznaczamy korzeń tego drzewa oraz że zapis  $\text{Pre}(P)$  oznacza bezpośredniego poprzednika wierzchołka  $P \in G$  w drzewie  $G$ .

Wówczas definicję 3.1 można formalnie zapisać (za pomocą kwantyfikatorów).

**Abstrakcyjnym diagramem Enriquesa** nazywamy drzewo  $D$  z wyróżnionym korzeniem  $R_D$  i z relacją najbliższości „ $\rightarrow$ ” w zbiorze wierzchołków spełniające warunki:

1.

$$\forall_{Q \in D} R_D \not\rightarrow Q$$

2.

$$\forall_{Q \in D, Q \neq R_D} Q \rightarrow \text{Pre}(Q)$$

3.

$$\neg \left( \exists_{Q \in D} \exists_{W \neq Z \neq X \in D} Q \rightarrow W, Z, X \right)$$

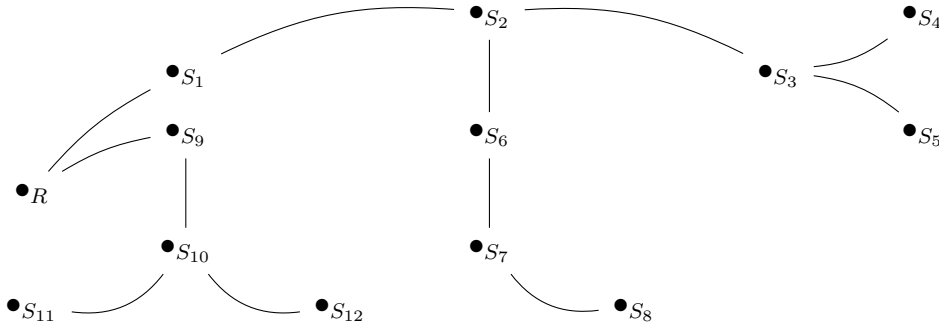
4.

$$\begin{aligned} & \forall_{Q, W, Z \in D} (Q \rightarrow W, Z \wedge W \neq Z) \Rightarrow \\ & \Rightarrow ((W = \text{Pre}(Q) \wedge W \rightarrow Z) \vee (Z = \text{Pre}(Q) \wedge Z \rightarrow W)) \end{aligned}$$

5.

$$\forall_{Q, P \in D} Q \rightarrow P \Rightarrow \left( \forall_{W, Z \in D} W \rightarrow Q, P \wedge Z \rightarrow Q, P \Rightarrow W = Z \right)$$

*Przykład 3.3.* Niech  $D = \{R, S_1, \dots, S_{12}\}$  będzie abstrakcyjnym diagramem Enriquesa przedstawionym na rysunku 4, gdzie  $R$  jest korzeniem. Relacja najbliższości określona jest następująco:  $S_1, S_9, S_{10} \rightarrow R$ ;  $S_2, S_6, S_7 \rightarrow S_1$ ;  $S_3, S_6 \rightarrow S_2$ ;  $S_4, S_5 \rightarrow S_3$ ;  $S_7 \rightarrow S_6$ ;  $S_8 \rightarrow S_7$ ;  $S_{10} \rightarrow S_9$  i  $S_{11}, S_{12} \rightarrow S_{10}$  (patrz przykład 3.27).



Rysunek 4: Diagram  $D$  z przykładu 3.3.

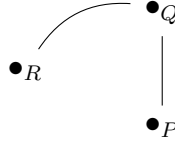
**Lemat 3.4.** *Diagram Enriquesa osobliwości krzywej jest abstrakcyjnym diagramem Enriquesa.*

*Dowód.* Relację najbliższości w diagramie Enriquesa osobliwości krzywej określamy w następujący sposób. Jeśli  $Q$  jest bezpośrednim następnikiem  $P$ , to  $Q \rightarrow P$ . Ponadto, jeśli krawędź łącząca  $P$  i  $Q$  jest prosta i  $Q$  jest najbliższy  $P$ , to przez  $T$  oznaczmy wierzchołek diagramu  $D$  „najmniej oddalony” od korzenia i leżący na prostej, która zawiera krawędź łączącą  $P$  i  $Q$ . Wówczas  $Q \rightarrow S$ , gdzie  $S$  jest bezpośrednim

poprzednikiem  $T$ . Tak określona relacja najbliższości spełnia wszystkie 5 warunków w definicji abstrakcyjnego diagramu Enriquesa.  $\square$

**Uwaga 3.5.** *Klasa abstrakcyjnych diagramów Enriquesa jest szersza od klasy diagramów Enriquesa osobliwości krzywych.*

*Przykład 3.6.* Diagram  $D = \{R, P, Q\}$  taki, że  $P, Q \rightarrow R$  i  $P \rightarrow Q$  przedstawiony na rysunku 5 jest abstrakcyjnym diagramem Enriquesa, ale nie jest diagramem Enriquesa osobliwości krzywej. Diagramy Enriquesa osobliwości krzywych kończą się zaokrąglonymi krawędziami.



Rysunek 5: Abstrakcyjny diagram Enriquesa nie będący diagramem Enriquesa osobliwości krzywej.

**Definicja 3.7** ([ACR05]). *Dowolną funkcję  $\nu : D \rightarrow \mathbb{Z}_+$  nazywamy **systemem wag** diagramu  $D$ . Diagram Enriquesa  $D$  z systemem wag  $\nu$  nazywamy **abstrakcyjnym diagramem Enriquesa z wagami** i oznaczamy  $(D, \nu)$ .*

**Definicja 3.8** ([ACR05]). *Abstrakcyjny diagram Enriquesa z wagami  $(D, \nu)$  nazywamy **zgodnym**, gdy dla dowolnego  $P \in D$*

$$\nu(P) \geq \sum_{Q \rightarrow P} \nu(Q).$$

**Definicja 3.9.** *Wierzchołek  $P \in D$  nazywamy **końcowym**, jeżeli nie istnieje taki  $Q \in D$ , że  $Q \rightarrow P$ . W przeciwnym przypadku wierzchołek nazywamy **niekońcowym**.*

**Definicja 3.10.** *Zgodny abstrakcyjny diagram Enriquesa z wagami  $(D, \nu)$  nazywamy **pełnym**, gdy dla dowolnego  $P \in D$  niekońcowego*

$$\nu(P) = \sum_{Q \rightarrow P} \nu(Q),$$

*oraz każdy końcowy wierzchołek ma wagę 1 i nie jest on najbliższy innemu swobodnemu wierzchołkowi wagi 1 lub korzeniowi (o dowolnej wadze).*

**Definicja 3.11** ([ACR05]). *Jeśli  $(D, \nu)$  jest abstrakcyjnym diagramem Enriquesa z*

wagami, to funkcję  $\text{ord}_\nu : D \rightarrow \mathbb{Z}_+$  określoną

$$\text{ord}_\nu(P) = \begin{cases} \nu(P), & \text{gdy } P \text{ jest korzeniem,} \\ \nu(P) + \sum_{P \rightarrow Q} \text{ord}_\nu(Q), & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

nazywamy **funkcją rzędu** diagramu  $(D, \nu)$ .

**Definicja 3.12** ([ACR05]). **Poddiagramem** abstrakcyjnego diagramu Enriquesa  $D$  nazywamy poddrzewo  $D_0 \subset D$  wraz z indukowaną relacją najbliższości takie, że jeśli  $Q \in D_0$ , to również jego poprzednik należy do  $D_0$ . Oczywiście poddiagram jest abstrakcyjnym diagramem Enriquesa.

**Definicja 3.13.** Niech  $D$  i  $D'$  będą abstrakcyjnymi diagramami Enriquesa. **Izomorfizmem diagramów**  $D$  i  $D'$  nazywamy taką bijekcję zbiorów  $i : D \rightarrow D'$ , która zachowuje relację najbliższości w tych abstrakcyjnych diagramach Enriquesa.

**Definicja 3.14** ([ACR05]). Niech  $(D, \nu)$  i  $(D', \nu')$  będą abstrakcyjnymi diagramami Enriquesa z wagami. Definiujemy relację  $(D', \nu') \geq (D, \nu)$  w zbiorze abstrakcyjnych diagramów Enriquesa z wagami w następujący sposób: istnieją izomorficzne poddiagramy  $D_0 \subset D$ ,  $D'_0 \subset D'$  i izomorfizm diagramów

$$i : D_0 \rightarrow D'_0$$

taki, że dla nowego systemu wag  $\mu_{\nu'} : D \rightarrow \mathbb{Z}$  zdefiniowanego

$$\mu_{\nu'}(P) = \begin{cases} \nu'(i(P)), & \text{gdy } P \in D_0 \\ 0, & \text{gdy } P \notin D_0 \end{cases}$$

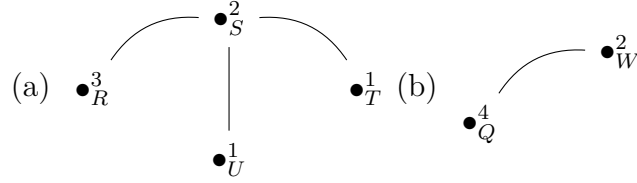
zachodzi nierówność

$$\text{ord}_\nu(P) \leq \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(P)$$

dla dowolnego  $P \in D$ .

**Przykład 3.15.** Niech  $(D, \nu)$  i  $(D', \nu')$  będą zgodnymi diagramami Enriquesa z wagami oraz  $R$  i  $Q$  ich korzeniami, przedstawionymi na rysunkach 6(a) i 6(b) (liczby nad wierzchołkami to ich wagi).

Łatwo sprawdzić, że  $(D', \nu') \geq (D, \nu)$ . Istotnie, niech  $D_0 = \{R, S\} \subset D$  i  $D'_0 = D'$  będą poddiagramami,  $i : D_0 \rightarrow D'_0$  izomorfizmem diagramów takim, że  $i(R) = Q$  i



Rysunek 6: Grafy diagramów  $(D, \nu)$  i  $(D', \nu')$ .

$i(S) = W$ . Nowy system wag  $\mu_{\nu'} : D \rightarrow \mathbb{Z}_+$  w  $D$  określony jest następująco:

$$\mu_{\nu'}(P) = \begin{cases} \nu'(i(R)) = \nu'(Q) = 4, & \text{gdy } P = R \\ \nu'(i(S)) = \nu'(W) = 2, & \text{gdy } P = S \\ 0, & \text{gdy } P = U \\ 0, & \text{gdy } P = T \end{cases}.$$

Teraz sprawdzimy, że  $\text{ord}_{\nu}(P) \leq \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(P)$  dla dowolnego  $P \in D$ . Istotnie

- $\text{ord}_{\nu}(R) = 3 \leq 4 = \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(R)$ ,
- $\text{ord}_{\nu}(S) = 5 \leq 6 = \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(S)$ ,
- $\text{ord}_{\nu}(T) = 6 \leq 6 = \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(T)$ ,
- $\text{ord}_{\nu}(U) = 9 \leq 10 = \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(U)$ .

**Definicja 3.16.** Mówimy, że dwa zgodne abstrakcyjne diagramy Enriquesa  $(D, \nu)$  i  $(D', \nu')$  są **równoważne**, jeżeli różnią się co najwyżej swobodnymi wierzchołkami wagi maksymalnie 1, tzn. jeśli spełnione są następujące warunki:

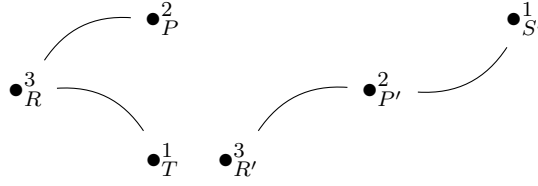
1. istnieją poddiagramy  $D_0 \subset D$  i  $D'_0 \subset D'$ ;
2. istnieje izomorfizm diagramów  $i : D_0 \rightarrow D'_0$  zachowujący wagi;
3. dla dowolnego  $P \in D \setminus D_0$ ,  $\nu(P) \leq 1$  i  $P$  jest swobodnym wierzchołkiem;
4. dla dowolnego  $P \in D' \setminus D'_0$ ,  $\nu'(P) \leq 1$  i  $P$  jest swobodnym wierzchołkiem.

Ta relacja jest relacją równoważności. **Typem** diagramu  $(D, \nu)$  nazywamy klasę abstrakcji  $[(D, \nu)]$  względem tej relacji równoważności.

**Uwaga 3.17.** W dalszym ciągu będziemy zakładać, że w powyższej definicji diagramy  $D_0 \subset D$  i  $D'_0 \subset D'$  są wybrany w sposób maksymalny (ze względu na inkluzję).

**Przykład 3.18.** Określmy dwa różne zgodne abstrakcyjne diagramy Enriquesa  $(D, \nu)$  i  $(D', \nu')$ , przedstawione na rysunku 7, następująco:

- $D = \{R, P, T\}$ ,  $\nu(R) = 3, \nu(P) = 2, \nu(T) = 1$  oraz  $P, T \rightarrow R$ ,
- $D' = \{R', P', S'\}$ ,  $\nu'(R') = 3, \nu'(P') = 2, \nu'(S') = 1$  oraz  $P' \rightarrow R', S' \rightarrow P'$ .



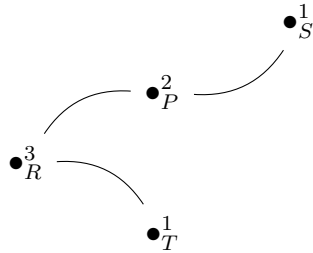
Rysunek 7: Diagramy  $(D, \nu)$  i  $(D', \nu')$ .

Wówczas  $[(D, \nu)] = [(D', \nu')]$ .

**Uwaga 3.19.** W dalszych rozważaniach, jeśli dwa diagramy Enriquesa  $(D, \nu)$  i  $(D', \nu')$  są równoważne to ich izomorficzne poddiagramy  $D_0$  i  $D'_0$  będziemy ze sobą utożsamiać.

*Przykład 3.20.* Diagramy Enriquesa  $(D, \nu)$  i  $(D', \nu')$  z przykładu 3.18 możemy utożsamiać z poddiagramami diagramu  $(E, \lambda)$  określonego w następujący sposób (rysunek 8):

- $E = \{R, P, T, S'\}$ ,
- $P, T \rightarrow R, S' \rightarrow P$ ,
- $\lambda(R) = 3, \lambda(P) = 2, \lambda(T) = \lambda(S') = 1$ .



Rysunek 8: Diagram  $(E, \lambda)$ .

**Definicja 3.21.** Dla zgodnego abstrakcyjnego diagramu Enriquesa z wagami  $(D, \nu)$  określamy jego **liczbę Milnora** wzorem

$$\mu((D, \nu)) = \sum_{P \in D} \nu(P)(\nu(P) - 1) + 1 - r_D,$$

gdzie  $r_D = \sum_{P \in D} r_D(P)$ ,  $r_D(P) = (\nu(P) - \sum_{Q \rightarrow P} \nu(Q))$  dla dowolnego  $P \in D$ .

**Twierdzenie 3.22** ([CA00] Chapter 3.9 page 99, Theorem 6.4.1). *Niech  $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  będzie osobliwością. Wówczas odpowiadający jej diagram Enriquesa  $(D, \nu)$  jest pełnym abstrakcyjnym diagramem Enriquesa i  $\mu((D, \nu)) = \mu(f_0)$ . W tym przypadku liczba  $r_D$  (z definicji 3.21) jest liczbą gałęzi tej osobliwości.*

Z każdego zgodnego abstrakcyjnego diagramu Enriquesa możemy „zrobić” pełny diagram Enriquesa. Mianowicie, w wierzchołkach  $P$  takiego diagramu, gdzie  $r_D(P) > 0$ , dodajemy zaokrąglone krawędzie i odpowiadające im wierzchołki krotności 1 w liczbie równej  $r_D(P)$ . Mówi o tym następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.23.** *Niech  $(D, \nu)$  będzie zgodnym abstrakcyjnym diagramem Enriquesa. Wówczas istnieje dokładnie jeden pełny abstrakcyjny diagram Enriquesa  $(D', \nu') \in [(D, \nu)]$ .*

*Dowód.* Niech  $E = \{P \in D : r_D(P) > 0\}$ . Dla każdego  $P \in E$ , niech  $s_P = r_D(P)$  i  $D_P = \{Q_1^P, \dots, Q_{s_P}^P\}$ , gdzie  $Q_i^P$  są nowymi wierzchołkami. Dodatkowo definiujemy

$$\tilde{D} = \left\{ P \in D : \nu(P) = 1 \wedge P \text{ jest swobodny} \wedge \left( \exists_{Q \in D, P \rightarrow Q} \nu(Q) = 1 \wedge Q \text{ jest swobodny} \right) \right\}$$

oraz

$$D_0 = \{P \in D : \nu(P) = 0\}.$$

Niech  $(D', \nu')$  będzie określony następująco:

$$D' = \left( D \setminus (\tilde{D} \cup D_0) \right) \cup \bigcup_{P \in E} D_P,$$

ponadto dla dowolnych  $Q, P \in D'$  relację najbliższości definiujemy następująco:  $Q \xrightarrow{D'} P$  gdy  $Q \xrightarrow{D} P$  lub  $P \in E$  i  $Q \in D_P$ . Natomiast system wag

$$\nu'(P) = \begin{cases} \nu(P), & P \in D \\ 1, & P \in D' \setminus D \end{cases}.$$

Z konstrukcji  $(D', \nu')$  widać, że  $(D', \nu') \in [(D, \nu)]$  oraz że  $(D', \nu')$  jest pełny.

Założmy, że istnieją dwa pełne diagramy Enriquesa  $(\tilde{D}, \tilde{\nu}), (\tilde{D}', \tilde{\nu}') \in [(D, \nu)]$ . Na mocy uwagi 3.19 możemy założyć, że są one poddiagramami jednego diagramu i dla  $P \in \tilde{D} \cap \tilde{D}'$  mamy  $\tilde{\nu}(P) = \tilde{\nu}'(P)$ .

Założmy, że  $(\tilde{D}, \tilde{\nu}), (\tilde{D}', \tilde{\nu}')$  są różne. Skoro  $(\tilde{D}, \tilde{\nu}), (\tilde{D}', \tilde{\nu}') \in [(D, \nu)]$ , to różnią się one swobodnymi wierzchołkami wagi 1. Możemy założyć, że  $\tilde{D} \setminus \tilde{D}' \neq \emptyset$ , w przeciwnym przypadku tj.  $\tilde{D}' \setminus \tilde{D} \neq \emptyset$  rozumowanie przeprowadzamy analogicznie. Wobec tego istnieją  $Q \in \tilde{D} \setminus \tilde{D}'$  swobodny i  $P \in \tilde{D} \cap \tilde{D}'$ , takie, że  $Q \rightarrow P$ . Wówczas  $\tilde{\nu}(Q) = 1$ .



Z pełności  $\widetilde{D}$  wynika, że  $P$  nie jest swobodnym wierzchołkiem ani korzeniem o wadze 1. Zatem istnieje wierzchołek  $W \in \widetilde{D}'$  taki, że  $W \xrightarrow{\widetilde{D}'} P$ . Ponieważ  $\widetilde{D}'$  został wybrany maksymalnie, to  $W$  nie może być swobodnym wierzchołkiem wagi 1, a zatem  $W \in \widetilde{D}$ . Stąd

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}'(P) = \tilde{\nu}(P) &= \sum_{W \xrightarrow{\widetilde{D}} P} \tilde{\nu}(W) = \sum_{W \xrightarrow{\widetilde{D}} P, W \neq Q} \tilde{\nu}(W) + \tilde{\nu}(Q) > \sum_{W \xrightarrow{\widetilde{D}'} P, W \neq Q} \tilde{\nu}'(W) = \\ &= \sum_{W \xrightarrow{\widetilde{D}'} P} \tilde{\nu}'(W) = \tilde{\nu}'(P). \end{aligned}$$

To jednak przeczy pełności  $(\widetilde{D}', \tilde{\nu}')$ .

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że  $(\widetilde{D}, \tilde{\nu}) = (\widetilde{D}', \tilde{\nu}')$ . □

**Twierdzenie 3.24.** *Jeżeli  $(D_1, \nu_1), (D_2, \nu_2) \in [(D, \nu)]$  są zgodnymi diagramami Enriquesa, to*

$$\mu((D_1, \nu_1)) = \mu((D_2, \nu_2)).$$

*Dowód.* Oznaczmy  $D_1^0 \subset D_1$  i  $D_2^0 \subset D_2$  izomorficzne poddiagramy diagramów  $(D_1, \nu_1), (D_2, \nu_2)$ . Na mocy uwagi 3.19 możemy założyć, że są one poddiagramami jednego diagramu i dla  $P \in D_1^0 = D_2^0 = D_1 \cap D_2$  mamy  $\nu_1(P) = \nu_2(P)$ .

Dowód będzie indukcyjny ze względu na liczbę wierzchołków, którymi różnią się  $D_1$  i  $D_2$ , tj. ze względu na liczbę elementów zbioru  $((D_1 \setminus D_1^0) \cup (D_2 \setminus D_2^0))$ . Jeśli różnią się 1 wierzchołkiem, możemy założyć, że  $(D_1 \setminus D_1^0) = \{S\}$  (gdyby  $(D_2 \setminus D_2^0) = \{S\}$ , to rozumowanie przeprowadzamy analogicznie). Oczywiście  $S$  musi być wierzchołkiem końcowym.

Ponieważ  $S \neq R_{D_1}$  (skoro  $D_1^0$  został wybrany w sposób maksymalny, to  $R \in D_1^0$ ), zatem istnieje dokładnie jeden  $T \in D_1^0$ , że  $S \rightarrow T$ . Ponadto skoro diagramy  $D_1$  i  $D_2$  różnią się tylko jednym wierzchołkiem, to  $T \in D_1^0$ . Wobec tego

$$\begin{aligned} \nu_1(T) - \sum_{Q \in D_1, Q \rightarrow T} \nu_1(Q) &= \nu_1(T) - \sum_{Q \in D_1^0, Q \rightarrow T} \nu_1(Q) - \nu_1(S) = \\ &= \nu_2(T) - \sum_{Q \in D_2^0, Q \rightarrow T} \nu_2(Q) - \nu_1(S) = \nu_2(T) - \sum_{Q \in D_2, Q \rightarrow T} \nu_2(Q) - \nu_1(S). \end{aligned}$$

Dla pozostałych  $P \in D_1^0$  mamy

$$\nu_1(P) - \sum_{Q \in D_1, Q \rightarrow P} \nu_1(Q) = \nu_2(P) - \sum_{Q \in D_2, Q \rightarrow P} \nu_2(Q).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
r_{D_1} &= \sum_{P \in D_1} r_{D_1}(P) = \sum_{P \in D_1} \left( \nu_1(P) - \sum_{Q \in D_1, Q \rightarrow P} \nu_1(Q) \right) = \\
&= \sum_{P \in D_1^0} \left( \nu_1(P) - \sum_{Q \in D_1, Q \rightarrow P} \nu_1(Q) \right) + \nu_1(S) - \sum_{Q \in D_1, Q \rightarrow S} \nu_1(Q) = \\
&= \sum_{P \in D_1^0} \left( \nu_1(P) - \sum_{Q \in D_1, Q \rightarrow P} \nu_1(Q) \right) + \nu_1(S) = \\
&= \sum_{P \in D_1^0 \setminus \{T\}} \left( \nu_1(P) - \sum_{Q \in D_1, Q \rightarrow P} \nu_1(Q) \right) + \nu_1(T) - \sum_{Q \in D_1, Q \rightarrow T} \nu_1(Q) + \nu_1(S) = \\
&= \sum_{P \in D_2^0 \setminus \{T\}} \left( \nu_2(P) - \sum_{Q \in D_2, Q \rightarrow P} \nu_2(Q) \right) + \nu_2(T) - \sum_{Q \in D_2, Q \rightarrow T} \nu_2(Q) - \nu_1(S) + \nu_1(S) = \\
&= \sum_{P \in D_2} \left( \nu_2(P) - \sum_{Q \in D_2, Q \rightarrow P} \nu_2(Q) \right) = \sum_{P \in D_2} r_{D_2}(P) = r_{D_2}.
\end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
\mu((D_1, \nu_1)) &= \sum_{P \in D_1} \nu_1(P)(\nu_1(P) - 1) + 1 - r_{D_1} = \\
&= \sum_{P \in D_1^0} \nu_1(P)(\nu_1(P) - 1) + \nu_1(S)(\nu_1(S) - 1) + 1 - r_{D_1} = \\
&= \sum_{P \in D_2^0} \nu_2(P)(\nu_2(P) - 1) + 1 - r_{D_2} = \sum_{P \in D_2} \nu_2(P)(\nu_2(P) - 1) + 1 - r_{D_2} = \mu((D_2, \nu_2)).
\end{aligned}$$

Założmy teraz, że dla dowolnych dwóch diagramów  $(D_1, \nu_1), (D_2, \nu_2) \in [(D, \nu)]$  różniących się  $n$  wierzchołkami zachodzi  $\mu((D_1, \nu_1)) = \mu((D_2, \nu_2))$ . Weźmy dwa diagramy zgodne  $(D'_1, \nu'_1), (D'_2, \nu'_2) \in [(D, \nu)]$  różniące się  $n + 1$  wierzchołkami. Możemy założyć, że istnieją  $Q \in D'_1 \setminus D_1^0$  i  $R \in D_1^0$  takie, że  $Q \rightarrow R$ . Określmy nowy zgodny diagram  $(D_3, \nu_3)$  następująco:  $D_3 = D'_2 \cup \{Q\}$  oraz  $Q \xrightarrow{D_3} R$ , natomiast dla pozostałych  $P, Q \in D'_2$  mamy  $Q \xrightarrow{D_3} P \Leftrightarrow Q \xrightarrow{D_2} P$ . System wag definiujemy następująco:  $\nu_3(Q) = 1$  i  $\nu_3(P) = \nu_2(P)$  dla  $P \in D'_2$ . Z konstrukcji  $(D_3, \nu_3)$  widać, że jest to diagram zgodny i  $(D_3, \nu_3) \in [(D, \nu)]$ . Ponadto  $(D_3, \nu_3)$  różni się od  $(D'_2, \nu'_2)$  jednym wierzchołkiem, a od  $(D'_1, \nu'_1)$   $n$  wierzchołkami, zatem  $\mu((D'_1, \nu'_1)) = \mu((D_3, \nu_3)) = \mu((D'_2, \nu'_2))$ . Na mocy zasady indukcji matematycznej otrzymujemy tezę.  $\square$

**Definicja 3.25.** *Minimalnym diagramem Enriquesa* nazywamy taki zgodny abstrakcyjny diagram Enriquesa  $(D, \nu)$ , który nie posiada swobodnych wierzchołków wagi 1 poza takimi, którym najbliższy jest wierzchołek satelitarny oraz nie posiada wierzchołków o wadze 0.

**Twierdzenie 3.26.** Niech  $(D, \nu)$  będzie zgodnym abstrakcyjnym diagramem Enriquesa. Wówczas istnieje dokładnie jeden minimalny abstrakcyjny diagram Enriquesa  $(D', \nu') \in [(D, \nu)]$ .

*Dowód.* Niech

$$D'' = \left\{ P \in D : \nu(P) = 1 \wedge P \text{ jest swobodny} \wedge \forall_{Q \rightarrow P} Q \text{ jest swobodny} \right\}.$$

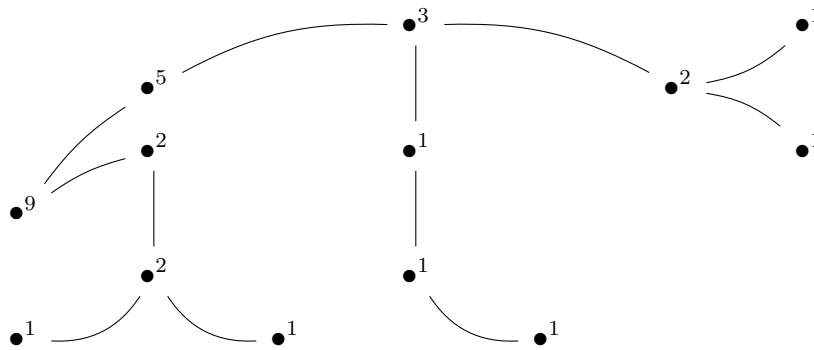
Określmy diagram  $(D', \nu')$  następująco: zbiór wierzchołków to

$$D' = D \setminus (\{P \in D : \nu(P) = 0\} \cup D''),$$

a system wag  $\nu' = \nu|_{D'}$ . Z konstrukcji  $(D', \nu')$  wynika, że jest on diagramem minimalnym i  $(D', \nu') \in [(D, \nu)]$ .

Założmy, że istnieją dwa minimalne diagramy Enriquesa  $(\tilde{D}, \tilde{\nu}), (\tilde{D}', \tilde{\nu}') \in [(D, \nu)]$ . Na mocy uwagi 3.19 możemy założyć, że są one poddiagramami jednego diagramu i dla  $P \in \tilde{D} \cap \tilde{D}'$  mamy  $\tilde{\nu}(P) = \tilde{\nu}'(P)$ . Jeśli te dwa diagramy są różne to musi istnieć wierzchołek  $Q \in \tilde{D} \setminus \tilde{D}'$  (lub  $\in \tilde{D}' \setminus \tilde{D}$  co rozważa się w sposób analogiczny). Wówczas albo  $Q$  jest swobodny bez satelitarnego następnika i jest to sprzeczne z minimalnością diagramu  $(\tilde{D}, \tilde{\nu})$  albo istnieje  $P \in \tilde{D} \setminus \tilde{D}'$  satelitarny, a to jest sprzeczne z tym, że  $(\tilde{D}, \tilde{\nu}), (\tilde{D}', \tilde{\nu}') \in [(D, \nu)]$ . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że  $(\tilde{D}, \tilde{\nu}) = (\tilde{D}', \tilde{\nu}')$ .  $\square$

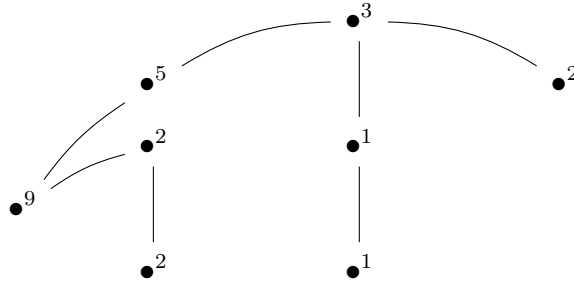
*Przykład 3.27.* Niech  $f(x, y) = (x^2 - y^3)(x^2 + y^3)(x^3 - y)(x^3 + y)(x^4 - y^3)$  będzie osobliwością. Jej diagram Enriquesa (pełny) i minimalny diagram są przedstawione na rysunkach 9 i 10.



Rysunek 9: Pełny diagram Enriquesa osobliwości  $f$  z przykładu 3.27.

Można zatem wyliczyć liczbę Milnora tej osobliwości z któregokolwiek z powyższych diagramów

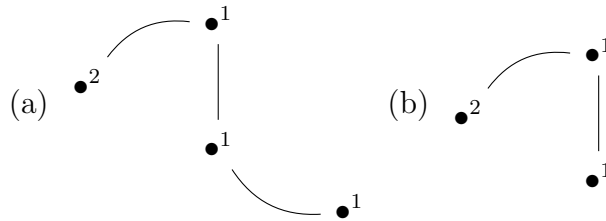
$$r = (9 - 5 - 2 - 2) + (5 - 3 - 1 - 1) + (3 - 2 - 1) + 2 + (1 - 1) + 1 + (2 - 2) + 2 = 5,$$



Rysunek 10: Minimalny diagram Enriquesa osobliwości  $f$  z przykładu 3.27.

$$\mu(f) = \mu((D, \nu)) = 9 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 - r = 109.$$

*Przykład 3.28.* Niech  $f(x, y) = x^2 - y^3$  będzie osobliwością. Jej diagram Enriquesa, który jest pełnym diagramem przedstawiony jest na rysunku 11(a). Natomiast na rysunku 11(b) przedstawiony jest minimalny diagram tego samego typu. Jak widać w diagramie minimalnym mogą istnieć wierzchołki swobodne o wadze 1, o ile najbliższy jest do nich wierzchołek satelitarny.



Rysunek 11: Pełny diagram Enriquesa osobliwości  $f(x, y) = x^2 - y^3$  oraz diagram minimalny tego samego typu.

Ponieważ każdy diagram Enriquesa osobliwości  $(D, \nu)$  jest abstrakcyjnym diagramem Enriquesa (patrz twierdzenie 3.22), to istnieje dokładnie jeden minimalny diagram Enriquesa typu  $[(D, \nu)]$ . Jeśli natomiast weźmiemy dowolny minimalny diagram Enriquesa, to istnieje osobliwość, której diagram Enriquesa ma ten sam typ ([ACR05] page 6). Jej diagram Enriquesa powstaje z tego minimalnego poprzez dodanie odpowiednich swobodnych wierzchołków wagi 1 tak, by był on pełny (zob. twierdzenie 3.23). Zatem możemy sformułować następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3.29** ([ACR05] page 6). *Istnieje wzajemna jednoznaczność między minimalnymi diagramami Enriquesa a typami topologicznymi osobliwości krzywych.*

W rodzinie typów diagramów wprowadzamy relację przyległości, którą definiujemy następująco (wzorem do przyjęcia tej definicji jest twierdzenie 1.3 ([ACR05])):

**Definicja 3.30.** Niech  $[(D, \nu)]$  i  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  będą typami abstrakcyjnych diagramatów Enriquesa z wagami. Mówimy, że  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  jest **liniowo przyległy do**  $[(D, \nu)]$ , jeżeli istnieje zgodny abstrakcyjny diagram Enriquesa z wagami  $(D', \nu') \in [(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  taki, że  $(D', \nu') \geq (D_{\min}, \nu_{\min})$ , gdzie  $(D_{\min}, \nu_{\min})$  jest minimalnym diagramem typu  $[(D, \nu)]$  (na mocy twierdzenia 3.26 istnieje dokładnie jeden taki diagram).

**Twierdzenie 3.31.** Niech  $[(D, \nu)]$  i  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  będą typami abstrakcyjnych diagramatów Enriquesa z wagami takimi, że  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ . Wówczas  $\nu(R_D) \leq \tilde{\nu}(R_{\widetilde{D}})$ , gdzie  $R_D$  i  $R_{\widetilde{D}}$  to odpowiednio korzenie diagramów  $(D, \nu)$  i  $(\widetilde{D}, \tilde{\nu})$ .

*Dowód.* Wynika to wprost z tego, że istnieje  $(D', \nu') \in [(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  taki, że  $(D', \nu') \geq (D_{\min}, \nu_{\min})$ . Skoro  $\tilde{\nu}(R_{\widetilde{D}}) = \nu'(R_{D'})$  i  $\nu_{\min}(R_{D_{\min}}) = \nu(R_D)$ , wobec tego  $\nu(R_D) \leq \nu'(R_{D'}) = \tilde{\nu}(R_{\widetilde{D}})$   $\square$

Dalsze wyniki badań będą opierać się na twierdzeniu 1.3 [ACR05] M. Alberich-Carramiñany i J. Roé podającym warunek konieczny i wystarczający dla pary osobliwości by jedna była deformacją liniową drugiej w terminach typów ich diagramatów Enriquesa.

Na podstawie ich rezultatów możemy sformułować następujące twierdzenie, które wykorzystamy w dalszych badaniach.

**Twierdzenie 3.32.** Jeżeli  $[(D, \nu)]$  i  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  są typami zgodnych diagramatów Enriquesa z wagami, to następujące warunki są równoważne:

1.  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ .
2. Dla dowolnej osobliwości  $f_0$ , której diagram Enriquesa jest typu  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  istnieje deformacja liniowa  $(f_s)$  osobliwości  $f_0$  taka, że generyczny element  $f_s$  jest typu  $[(D, \nu)]$ .
3. Istnieje osobliwość  $f_0$  typu  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$  i deformacja liniowa  $(f_s)$  osobliwości  $f_0$  taka, że generyczny element  $f_s$  jest typu  $[(D, \nu)]$ .

*Dowód.* Równoważność  $1 \Leftrightarrow 2$  jest treścią twierdzenia 1.3 [ACR05]. Implikacja  $2 \Rightarrow 3$  jest oczywista. Natomiast implikacja  $3 \Rightarrow 1$  jest wyjaśniona w uwadze 1.4 [ACR05].  $\square$

**Wniosek 3.33.**  $\lambda^{\text{lin}}(f_0)$  jest niezmiennikiem topologicznym.

*Dowód.* Weźmy dwie osobliwości  $f_0$  i  $g_0$  topologicznie równoważne tzn. ich diagramy Enriquesa są izomorficzne. Zatem ich typ jest taki sam, oznaczmy go  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$ . Niech  $(f_s)$  będzie deformacją liniową  $f_0$  realizującą  $\lambda^{\text{lin}}(f_0)$ . Oznaczmy generyczny typ  $(f_s)$  przez  $[(D, \nu)]$ . Zatem z implikacji  $3 \Rightarrow 1$  w twierdzeniu 3.32 wynika, że  $[(\widetilde{D}, \tilde{\nu})]$

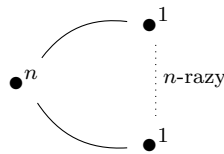
jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ . Natomiast z  $1 \Rightarrow 2$  w twierdzeniu 3.32 istnieje  $(g_s)$  deformacja liniowa  $g_0$  o generycznym typie  $[(D, \nu)]$ . Zatem  $\lambda^{lin}(g_0) \leq \lambda^{lin}(f_0)$ . Zamieniając rolami  $f_0$  i  $g_0$  otrzymujemy nierówność w drugą stronę, a tym samym równość.  $\square$

## 4 Skoki liczb Milnora deformacji liniowych osobliwości jednorodnych

Rozważmy osobliwość  $f_0^n(x, y) := x^n + y^n$  dla  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Wiadomo, że możemy zapisać tę osobliwość w postaci iloczynu

$$f_0^n(x, y) = \prod_{i=1}^n (x + e_i y),$$

gdzie  $e_1, \dots, e_n$  są różnymi pierwiastkami z  $-1$  stopnia  $n$ . Nietrudno zauważyć, że diagram Enriquesa tej osobliwości wygląda następująco (zob. rysunek 12).



Rysunek 12: Diagram Enriquesa osobliwości  $f_0^n(x, y) = x^n + y^n$ .

Oznaczmy ten diagram przez  $(D_n^P, \nu_n^P)$ . Ściślej rzecz ujmując,  $(D_n^P, \nu_n^P)$  to pełny diagram Enriquesa, gdzie  $D_n^P = \{R, P_1, \dots, P_n\}$ ,  $P_i \rightarrow R$  dla  $i = 1, \dots, n$ , oraz  $\nu_n^P(R) = n$ ,  $\nu_n^P(P_i) = 1$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Odpowiadający mu minimalny diagram Enriquesa to  $(D_n, \nu_n)$ , gdzie  $D_n = \{R\}$ ,  $\nu(R) = n$  i jest on przedstawiony na rysunku 13.



Rysunek 13: Diagram  $(D_n, \nu_n)$ .

Zatem mamy

**Fakt 4.1.**  $[(D_n, \nu_n)]$  jest typem diagramów Enriquesa osobliwości  $f_0^n$  dla  $n \geq 2$ .

**Definicja 4.2.** Osobliwością jednorodną stopnia  $n$  (dla  $n \geq 2$ ) nazywamy każdą osobliwość postaci:

$$f_0(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Zatem z definicji osobliwości i własności wielomianów jednorodnych (dwóch zmiennych) wynika, że wielomian  $f_0$  rozkłada się na  $n$  czynników liniowych, przy czym każdy z nich jest jednokrotny. Zatem własność z faktu 4.1 zachodzi również dla dowolnych osobliwości jednorodnych.

**Fakt 4.3.**  $[(D_n, \nu_n)]$  jest typem diagramów Enriquesa dowolnej osobliwości jednorodnej stopnia  $n$  dla  $n \geq 2$ .

**Definicja 4.4.** Osobliwością *semi-jednorodną stopnia*  $n$  (dla  $n \geq 2$ ) nazywamy osobliwość postaci  $f_0 = f'_0 + g$ , gdzie  $f'_0$  jest jednorodną osobliwością stopnia  $n$  i  $\text{ord } g > \text{ord } f'_0 = n$ .

**Fakt 4.5.**  $[(D_n, \nu_n)]$  jest typem diagramów Enriquesa osobliwości *semi-jednorodnej stopnia*  $n$  dla  $n \geq 2$ .

Głównym rezultatem tego rozdziału będzie wzór na skok liczby Milnora osobliwości jednorodnych i *semi-jednorodnych* dla deformacji liniowych. Pierwszym krokiem będzie oszacowanie tego skoku z góry. W tym celu udowodnimy kilka lematów.

Najpierw rozważymy osobliwości jednorodne stopnia 2 i 3.

**Lemat 4.6.** 1. Istnieje minimalny diagram Enriquesa  $(D, \nu)$  taki, że  $[(D_2, \nu_2)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$  i  $\mu((D, \nu)) = 0$ .

2. Istnieje minimalny diagram Enriquesa  $(D, \nu)$  taki, że  $[(D_3, \nu_3)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$  i  $\mu((D, \nu)) = 3$ .

*Dowód.*

1. Niech  $(D, \nu)$  będzie zdefiniowany następująco (zob. rysunek 14):

- $D = \{S\}$ ,
- $\nu(S) = 1$ .

• $\frac{1}{S}$

Rysunek 14: Diagram  $(D, \nu)$ .

Ponieważ  $(D, \nu)$  jest diagramem minimalnym, wystarczy pokazać, że  $(D, \nu) \leq (D_2, \nu_2)$ . Istotnie, określimy izomorfizm diagramów  $i : D \rightarrow D_2$  kładąc  $i(S) = R_{D_2}$ , gdzie  $R_{D_2}$  jest korzeniem diagramu  $(D_2, \nu_2)$ . Wówczas mamy

$$\text{ord}_\nu(S) = \nu(S) = 1 \leq 2 = \nu_2(R_{D_2}) = \nu_2(i(S)) = \mu_{\nu_2}(S) = \text{ord}_{\mu_{\nu_2}}(S).$$

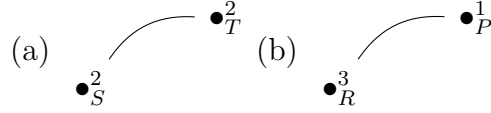
Zatem  $[(D_2, \nu_2)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ . Ponadto  $r_D = 1$ , stąd

$$\mu((D, \nu)) = 1 \cdot 0 + 1 - 1 = 0.$$



2. Niech  $(D, \nu)$  będzie zdefiniowany następująco (rysunek 15(a)):

- $D = \{S, T\}$ ,
- $T \rightarrow S$ ,
- $\nu(S) = \nu(T) = 2$ .



Rysunek 15: Diagramy  $(D, \nu)$  i  $(D', \nu')$ .

Natomiast  $(D', \nu')$  definiujemy następująco (rysunek 15(b)):

- $D' = \{R, P\}$ ,
- $R \rightarrow P$ ,
- $\nu'(R) = 3, \nu'(P) = 1$ .

Oczywiście  $(D', \nu') \in [(D_3, \nu_3)]$ . Ponieważ  $(D, \nu)$  jest diagramem minimalnym, wystarczy pokazać, że  $(D, \nu) \leq (D', \nu')$ . Istotnie, okreśmy izomorfizm diagramów  $i : D \rightarrow D'$  kładąc  $i(S) = R$  i  $i(T) = P$ . Wówczas mamy

$$\text{ord}_\nu(S) = \nu(S) = 2 \leq 3 = \nu'(R) = \nu'(i(S)) = \mu_{\nu'}(S) = \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(S),$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_\nu(T) = \nu(S) + \nu(T) &= 2 + 2 = 4 = 3 + 1 = \nu'(R) + \nu'(P) = \nu'(i(S)) + \nu'(i(T)) = \\ &= \mu_{\nu'}(S) + \mu_{\nu'}(T) = \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(T). \end{aligned}$$

Zatem  $[(D_3, \nu_3)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ . Ponadto  $r_D = (2 - 2) + 2 = 2$ , stąd

$$\mu((D, \nu)) = 2 + 2 + 1 - 2 = 3. \quad \square$$

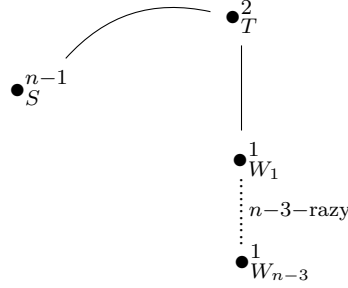
**Lemat 4.7.** Niech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ . Istnieje minimalny diagram Enriquesa  $(D, \nu)$  taki, że  $[(D_n, \nu_n)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$  i

$$\mu((D, \nu)) = (n - 1)^2 - (n - 2).$$

*Dowód.* Określmy  $(D, \nu)$  następująco (rysunek 16):

- $D = \{S, T, W_1, \dots, W_{n-3}\}$ ,

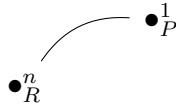
- $T \rightarrow S, W_1 \rightarrow S, T$  i dla  $i = 2, \dots, n-3$  jest  $W_i \rightarrow S, W_{i-1}$ ,
- $\nu(S) = n-1, \nu(T) = 2, \nu(W_1) = \dots = \nu(W_{n-3}) = 1$ .



Rysunek 16: Diagram  $(D, \nu)$ .

Diagram  $(D, \nu)$  jest zgodny, gdyż  $\nu(S) = n-1 = 2 + n-3 = \nu(T) + \nu(W_1) + \dots + \nu(W_{n-3}) = \sum_{Q \rightarrow S} \nu(Q)$ . Ponadto  $(D, \nu)$  jest też diagramem minimalnym.

Pokażemy, że  $[(D_n, \nu_n)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ . Niech  $D'_n = \{R, P\}$ ,  $P \rightarrow R$  i  $\nu'_n(R) = n, \nu'_n(P) = 1$ . Wówczas  $(D'_n, \nu'_n) \in [(D_n, \nu_n)]$  i jego graf jest przedstawiony na rysunku 17.



Rysunek 17: Diagram  $(D'_n, \nu'_n)$ .

Ponadto zachodzi  $(D, \nu) \leq (D'_n, \nu'_n)$ . Istotnie, istnieją poddiagramy  $D_0 = \{S, T\} \subset D$ ,  $D'_0 = D'_n$  i izomorfizm  $i : D_0 \rightarrow D'_0$  taki, że  $i(S) = R, i(T) = P$ .

Nowy system wag  $\mu_{\nu'_n} : D \rightarrow \mathbb{Z}$  w  $D$  jest zdefiniowany następująco:

$$\mu_{\nu'_n}(Q) = \begin{cases} \nu'_n(i(S)) = \nu'_n(R) = n, & Q = S \\ \nu'_n(i(T)) = \nu'_n(P) = 1, & Q = T \\ 0, & Q = W_i \text{ dla dowolnych } i = 1, \dots, n-3 \end{cases} .$$

Pokażemy, że dla dowolnego  $Q \in D$  mamy  $\text{ord}_\nu(Q) \leq \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(Q)$ . Istotnie:

- jeśli  $Q = S$ , to

$$\text{ord}_\nu(S) = \nu(S) = n-1 < n = \nu'_n(R) = \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(S),$$

- jeśli  $Q = T$ , to

$$\text{ord}_\nu(T) = \nu(T) + \text{ord}_\nu(S) = 2 + n - 1 = 1 + n = \mu_{\nu'_n}(T) + \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(S) = \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(T),$$

- jeśli  $Q = W_1$ , to

$$\text{ord}_\nu(W_1) = \nu(W_1) + \text{ord}_\nu(S) + \text{ord}_\nu(T) = 1 + n - 1 + n + 1 = 2n + 1 =$$

$$0 + n + n + 1 = \mu_{\nu'_n}(W_1) + \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(S) + \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(T) = \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(W_1),$$

- ...,

- jeśli  $Q = W_{n-3}$  (dla  $n \geq 5$ ), to

$$\text{ord}_\nu(W_{n-3}) = \nu(W_{n-3}) + \text{ord}_\nu(S) + \text{ord}_\nu(W_{n-4}) = 1 + n - 1 + (n - 3)n + 1 =$$

$$= (n - 2)n + 1 = 0 + n + (n - 3)n + 1 = \mu_{\nu'_n}(W_{n-3}) + \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(S) + \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(W_{n-4}) = \\ = \text{ord}_{\mu_{\nu'_n}}(W_{n-3}).$$

Zatem  $[(D_n, \nu_n)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ .

Policzmy teraz liczbę Milnora  $(D, \nu)$

$$r_D = \sum_{P \in D} r_D(P) = r_D(S) + r_D(T) + r_D(W_1) + \dots + r_D(W_{n-3}) =$$

$$= (n - 1 - 2 - (n - 3)) + 2 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + 1 = 2,$$

$$\mu((D, \nu)) = (n - 1)(n - 2) + 2 \cdot 1 + 1 - 2 = (n - 1)(n - 2) + 1 =$$

$$= (n - 1)^2 - (n - 2). \quad \square$$

**Twierdzenie 4.8.** Niech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Istnieje diagram Enriquesa  $(D, \nu)$  taki, że  $[(D_n, \nu_n)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$  i

$$\mu((D, \nu)) = \begin{cases} (n - 1)^2 - (n - 2), & n \geq 3 \\ 0, & n = 2 \end{cases}.$$

*Dowód.* Wynika wprost z lematów 4.6 i 4.7. □

**Uwaga 4.9.** Równanie osobliwości o diagramie  $(D, \nu)$  z powyższych lematów podane jest w Uwadze 4.15.

**Wniosek 4.10.** Dla dowolnej jednorodnej osobliwości  $f_0$  stopnia  $n$  ( $n \geq 2$ ) skok

liczby Milnora jej deformacji liniowych jest oszacowany z góry następująco:

$$\lambda^{\text{lin}}(f_0) \leq \begin{cases} n-2, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases}.$$

Kolejne lematy będą potrzebne do udowodnienia oszacowania z dołu skoku liczby Milnora osobliwości jednorodnych i semi-jednorodnych.

**Lemat 4.11.** *Jeżeli  $(D, \nu)$  jest dowolnym diagramem Enriquesa takim, że  $[(D_n, \nu_n)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$  i  $(D, \nu) \notin [(D_n, \nu_n)]$ , to  $\nu(R_D) < \nu_n(R_{D_n}) = n$ , gdzie  $R_D$  i  $R_{D_n}$  to odpowiednio korzenie diagramów  $(D, \nu)$  i  $(D_n, \nu_n)$ .*

*Dowód.* Bez straty ogólności możemy założyć, że  $(D, \nu)$  jest diagramem minimalnym. Z twierdzenia 3.31 wiemy, że  $\nu(R_D) \leq \nu_n(R_{D_n})$ . Załóżmy, że  $\nu(R_D) = \nu_n(R_{D_n}) = n$ . Weźmy dowolny wierzchołek  $P \in D$  taki, że  $P \rightarrow R_D$ . Dla każdego takiego wierzchołka mamy  $n + \nu(P) = \nu(R_D) + \nu(P) = \text{ord}_\nu(R_D) + \nu(P) = \text{ord}_\nu(P) \leq \text{ord}_{\mu_{\nu_n}}(P) = \text{ord}_{\mu_{\nu_n}}(R_D) + \mu_{\nu_n}(P) = \mu_{\nu_n}(R_D) + \mu_{\nu_n}(P) = n + \mu_{\nu_n}(P)$ . Ponieważ  $\mu_{\nu_n}(P) \leq 1$ , to  $\nu(P) = 1$  (w diagramie minimalnym nie ma wierzchołków krotności 0). Wobec tego dla dowolnego  $Q \in D \setminus \{R_D\}$ ,  $\nu(Q) = 1$ . Ponieważ  $(D, \nu) \notin [(D_n, \nu_n)]$ , to musi istnieć wierzchołek  $Q_0 \in (D, \nu)$  satelitarny taki, że wszystkie jego poprzedniki (w drzewie) poza korzeniem są swobodne. Oznaczmy je  $P_0, \dots, P_k$  ( $k \geq 1$ ). Wówczas mamy  $Q_0 \rightarrow P_0, P_1, P_i \rightarrow P_{i+1}$  dla  $i = 0, \dots, k-1$  i  $P_k = R_D$ . Zatem  $\text{ord}_\nu(Q_0) = \text{ord}_\nu(P_0) + \text{ord}_\nu(P_1) + \nu(Q_0) = \text{ord}_\nu(P_1) + \nu(P_0) + \text{ord}_\nu(P_1) + \nu(Q_0) = \nu(Q_0) + \nu(P_0) + 2 \text{ord}_\nu(P_1) = \nu(Q_0) + \nu(P_0) + 2(\nu(P_1) + \dots + \nu(P_k)) = 1 + 1 + 2(n+k-1) = 2n+2k$  oraz  $\text{ord}_{\mu_{\nu_n}}(Q_0) = \mu_{\nu_n}(Q_0) + \mu_{\nu_n}(P_0) + 2(\mu_{\nu_n}(P_1) + \dots + \mu_{\nu_n}(P_k)) \leq 0 + 1 + 2(n+k-1) = 2n+2k-1$ . Wobec tego  $\text{ord}_{\mu_{\nu_n}}(Q_0) < \text{ord}_\nu(Q_0)$ , co jest niemożliwe wobec założonej liniowej przyległości. Zatem w diagramie  $(D, \nu)$  nie ma wierzchołków satelitarnych, a więc  $(D, \nu) \in [(D_n, \nu_n)]$ . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że  $\nu(R_D) < \nu_n(R_{D_n})$ .  $\square$

**Lemat 4.12.** *Niech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Jeżeli  $[(D_n, \nu_n)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$  i różny od niego, to istnieje diagram  $(E, \lambda)$  taki, że  $[(E, \lambda)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$  i*

$$\mu((E, \lambda)) \leq (n-1)^2 - (n-2).$$

*Dowód.* Bez straty ogólności możemy założyć, że  $(D, \nu)$  jest diagramem minimalnym. Skoro  $(D, \nu)$  jest zgodnym diagramem, to przyjmijmy następujące oznaczenia na korzeń diagramu  $(D, \nu)$  i wszystkie wierzchołki jemu najbliższe. Podzielimy je na 3 rodzaje:  $P_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ),  $S_j, S_j^p$  ( $j = 1, \dots, l, p = 1, \dots, \alpha_j$ ),  $U_j, U_j^p$  ( $j = 1, \dots, q, p = 1, \dots, \beta_j$ ):

- $R$  jest korzeniem diagramu  $(D, \nu)$ ,

- $P_1, \dots, P_k \in D$  to następniki (w sensie drzewa)  $R$  takie, że  $\nu(P_j) \geq 2$  i nie istnieje  $Q_j \in D$  satelitarny taki, że  $Q_j \rightarrow P_j, R$  ( $j = 1, \dots, k$ ),
- $S_1, \dots, S_l \in D$  to następniki (w sensie drzewa)  $R$  takie, że  $\nu(S_j) \geq 2$  i istnieje  $Q_j \in D$  satelitarny taki, że  $Q_j \rightarrow S_j, R$  ( $j = 1, \dots, l$ ),
- dla dowolnego  $j = 1, \dots, l$  istnieje liczba  $\alpha_j \geq 1$  i wierzchołki  $S_j^1, \dots, S_j^{\alpha_j}$  takie, że  $S_j^p \rightarrow S_j^{p-1}, R$ , gdzie  $p = 1, \dots, \alpha_j$  i przyjmujemy, że  $S_j^0 := S_j$ ; ponadto nie istnieje wierzchołek  $W \in D$  taki, że  $W \rightarrow S_j^{\alpha_j}, R$ ,
- $U_1, \dots, U_q \in D$  to następniki (w sensie drzewa)  $R$  takie, że  $\nu(U_j) = 1$  i istnieje  $Q_j \in D$  satelitarny taki, że  $Q_j \rightarrow U_j, R$  ( $j = 1, \dots, q$ ),
- dla dowolnego  $j = 1, \dots, q$  istnieje liczba  $\beta_j \geq 1$  i wierzchołki  $U_j^1, \dots, U_j^{\beta_j}$  takie, że  $U_j^p \rightarrow U_j^{p-1}, R$ , gdzie  $p = 1, \dots, \beta_j$  i przyjmujemy, że  $U_j^0 := U_j$ ; ponadto nie istnieje wierzchołek  $W \in D$  taki, że  $W \rightarrow U_j^{\beta_j}, R$ .

Ponadto warto zauważyć, że za wierzchołkami  $U_1, \dots, U_q$  jest tylko jedna gałąź, bo w przeciwnym razie ich waga byłaby większa od 1. Diagram poglądowy przedstawiony jest na rysunku 18.

Skoro  $[(D_n, \nu_n)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ , to istnieje diagram  $(D', \nu') \in [(D_n, \nu_n)]$  taki, że  $(D, \nu) \leq (D', \nu')$ . Zatem istnieją poddiagramy  $D_0 \subset D$  i  $D'_0 \subset D'$  oraz izomorfizm  $i : D_0 \rightarrow D'_0$  taki, że  $\text{ord}_\nu(P) \leq \text{ord}_{\nu'}(P)$  dla dowolnego  $P \in D$ .

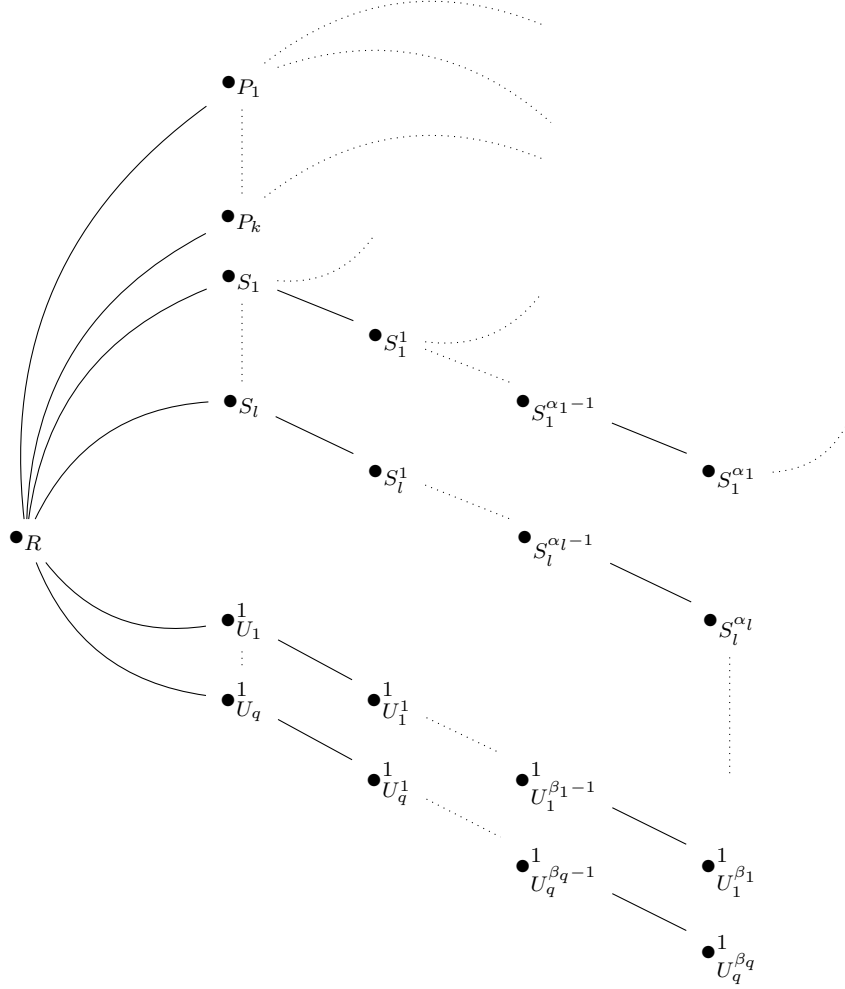
Skoro  $(D', \nu') \in [(D_n, \nu_n)]$ , to składa się on z wierzchołkami  $R_{D'}$  i swobodnych wierzchołków wagi co najwyżej 1. Usuniemy z  $D'_0$  korzeń, wszystkie jego następniki i wierzchołki o wadze 0, tzn. określamy

$$D''_0 = D'_0 \setminus \left( \{R_{D'}\} \cup \bigcup_{Q \in D'_0, Q \rightarrow R_{D'}} \{Q\} \cup \bigcup_{Q \in D'_0, \nu'(Q)=0} \{Q\} \right).$$

Niech  $r$  oznacza liczbę elementów tego zbioru i niech  $D''_0 = \{W_1, \dots, W_r\}$ .

Zdefiniujemy teraz diagram  $(E, \lambda)$ .

- $E = \{R_E, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k, \tilde{S}_1, \tilde{S}_1^1, \dots, \tilde{S}_1^{\alpha_1}, \dots, \tilde{S}_l, \tilde{S}_l^1, \dots, \tilde{S}_l^{\alpha_l}, \tilde{U}_1, \tilde{U}_1^1, \dots, \tilde{U}_1^{\beta_1}, \dots, \tilde{U}_q, \tilde{U}_q^1, \dots, \tilde{U}_q^{\beta_q}, \tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_r\}$ ,
- $\lambda(R_E) = n - 1$ ,
- dla  $j = 1, \dots, k$  niech  $\tilde{P}_j \xrightarrow{E} R_E$  i  $\lambda(\tilde{P}_j) = 2$ ,
- dla  $j = 1, \dots, l$  niech  $\tilde{S}_j \xrightarrow{E} R_E$  i  $\lambda(\tilde{S}_j) = 2$ ,  
dla  $p = 1, \dots, \alpha_j$  niech  $\tilde{S}_j^p \rightarrow \tilde{S}_j^{p-1}, R_E$  ( $\tilde{S}_j^0 := \tilde{S}_j$ ) i  $\lambda(\tilde{S}_j^p) = 1$



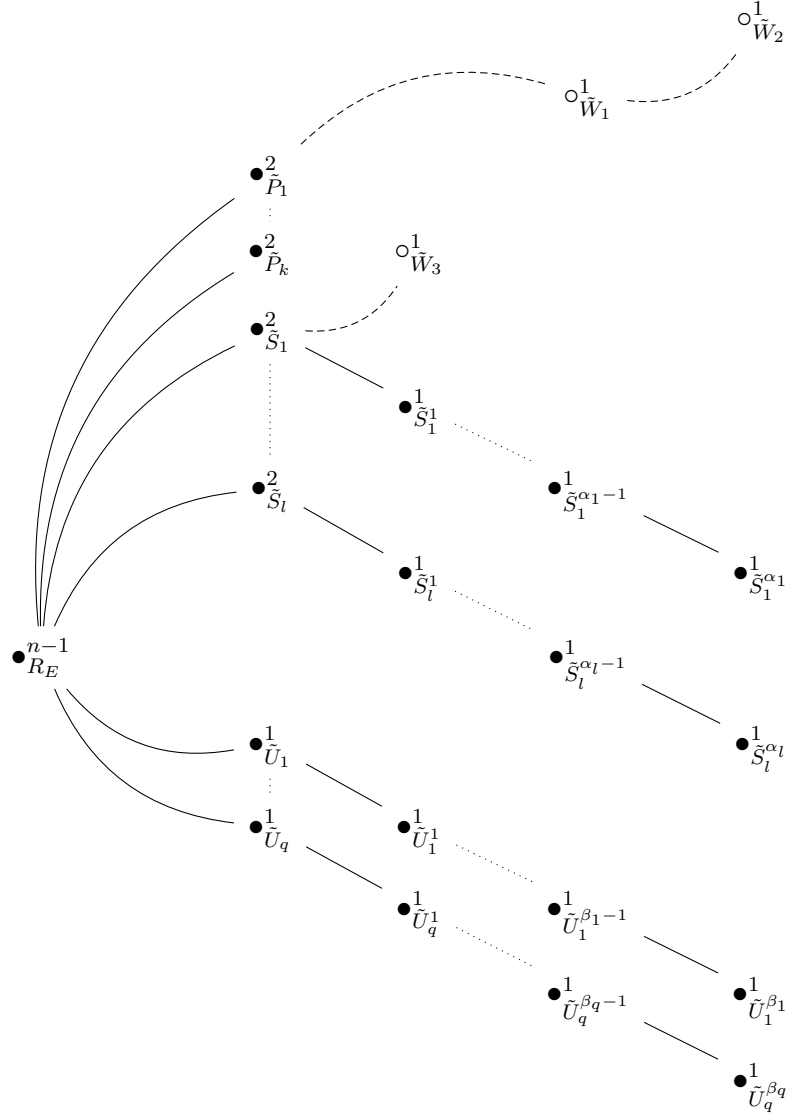
Rysunek 18: Diagram poglądowy  $(D, \nu)$ .

- dla  $j = 1, \dots, q$  niech  $\tilde{U}_j \xrightarrow{E} R_E$  i  $\lambda(\tilde{U}_j) = 1$ ,  
 dla  $p = 1, \dots, \beta_j$  niech  $\tilde{U}_j^p \rightarrow \tilde{U}_j^{p-1}, R_E$  ( $\tilde{U}_j^0 := \tilde{U}_j$ ) i  $\lambda(\tilde{U}_j^p) = 1$
- dla  $j = 1, \dots, r$  niech  $\lambda(\tilde{W}_j) = 1$  i
  - $W_j \xrightarrow{D'} W_p \Leftrightarrow \tilde{W}_j \xrightarrow{E} \tilde{W}_p$  dla  $p = 1, \dots, r$
  - $W_j \xrightarrow{D'} i(P_p) \Leftrightarrow \tilde{W}_j \xrightarrow{E} \tilde{P}_p$  dla  $p = 1, \dots, k$
  - $W_j \xrightarrow{D'} i(S_p) \Leftrightarrow \tilde{W}_j \xrightarrow{E} \tilde{S}_p$  dla  $p = 1, \dots, l$

Jak wcześniej zostało zauważone, za wierzchołkami  $U_p$  jest tylko jedna krawędź, zatem  $W_j$  nie może być najbliższy żadnemu  $i(U_p)$  dla  $p = 1, \dots, q$ .

Diagram poglądowy  $(E, \lambda)$  znajduje się na rysunku 19.

Diagram  $(E, \lambda)$  jest zgodny. Istotnie, dla korzenia  $R$  skoro diagram  $(D, \nu)$  jest



Rysunek 19: Diagram poglądowy  $(E, \lambda)$ . Położenie wierzchołków  $\tilde{W}_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) zostało zaznaczone w sposób przykładowy.

zgodny, to

$$\nu(R) \geq 2 \cdot k + 2 \cdot l + \alpha_1 + \dots + \alpha_l + q + \beta_1 + \dots + \beta_q.$$

Zatem, skoro na mocy lematu 4.11  $\nu(R) < n$ , to

$$\lambda(R_E) = n - 1 \geq 2 \cdot k + 2 \cdot l + \alpha_1 + \dots + \alpha_l + q + \beta_1 + \dots + \beta_q = \sum_{Q \rightarrow R_E} \lambda(Q).$$

Dla pozostałych wierzchołków nierówność że  $\lambda(Q) \geq \sum_{O \rightarrow Q} \lambda(O)$  dla  $Q \in E \setminus \{R_E\}$  wynika z konstrukcji diagramu  $(E, \lambda)$  oraz z faktu, że w diagramie  $(D', \nu')$  dla dowolnego wierzchołka poza korzeniem istnieje co najwyżej jeden najbliższy mu

wierzchołek. Zatem dla dowolnego  $\tilde{P}_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) lub  $\tilde{S}_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ) istnieje co najwyżej jeden wierzchołek  $\tilde{W}_p$  ( $p = 1, \dots, r$ ) jemu najbliższy.

Pokażemy teraz, że  $(E, \lambda)$  jest liniowo przyległy do  $(D, \nu)$ . Określmy poddiagramy  $\tilde{D}_0 = \{P_1, \dots, P_k, S_1, S_1^1, \dots, S_1^{\alpha_1}, \dots, S_l, S_l^1, \dots, S_l^{\alpha_l}, U_1, U_1^1, \dots, U_1^{\beta_1}, \dots, U_q, U_q^1, \dots, U_q^{\beta_q}, i^{-1}(W_1), \dots, i^{-1}(W_r)\} \subset D$ ,  $E_0 = E$  i izomorfizm diagramów  $\tilde{i} : \tilde{D}_0 \rightarrow E_0$ . Izomorfizm określamy następująco:

- $\tilde{i}(R) = R_E$ ,
- $\tilde{i}(P_j) = \tilde{P}_j$  dla  $j = 1, \dots, k$ ,
- $\tilde{i}(S_j^p) = \tilde{S}_j^p$  dla  $j = 1, \dots, l$ ,  $p = 1, \dots, \alpha_j$ ,
- $\tilde{i}(U_j^p) = \tilde{U}_j^p$  dla  $j = 1, \dots, q$ ,  $p = 1, \dots, \beta_j$ ,
- $\tilde{i}(i^{-1}(W_j)) = \tilde{W}_j$  dla  $j = 1, \dots, r$ .

Zauważmy dwa fakty, które przydadzą nam się później:

- 1\*.  $\mu_{\nu'}(S_j^p) = 0$  dla  $j = 1, \dots, l$ ,  $p = 1, \dots, \alpha_j$ . Wynika to z tego, że w diagramie  $(D', \nu')$  nie ma wierzchołków satelitarnych, zatem  $S_j^p \notin D_0$ .
- 2\*.  $\mu_{\nu'}(P) \leq \mu_\lambda(P)$  dla  $P \neq R$ ,  $P \in D$ . Jest to konsekwencją tego, że dla dowolnego  $Q \in D_0$  takiego, że  $\nu'(Q) > 0$  mamy  $i^{-1}(Q) \in \tilde{D}_0$  oraz z określenia systemu wag  $\nu'$  i  $\lambda$ .

Pokażemy teraz, że  $\text{ord}_\nu(P) \leq \text{ord}_{\mu_\lambda}(P)$  dla  $P \in D$ . Rozważmy następujące przypadki:

1.  $P = R$ , wówczas  $\text{ord}_\nu(R) = \nu(R) \stackrel{\text{Lemat 4.11}}{\leq} n - 1 = \lambda(R_E) = \mu_\lambda(R) = \text{ord}_{\mu_\lambda}(R)$ .
2.  $P$  leży na gałęzi drzewa zaczynającej się od  $U_j$  dla pewnego  $j = 1, \dots, q$ .
  - $\text{ord}_\nu(U_j) = \nu(R) + \nu(U_j) \leq n - 1 + 1 = n$ ,  $\text{ord}_{\mu_\lambda}(U_j) = \mu_\lambda(R) + \mu_\lambda(U_j) = \lambda(R_E) + \lambda(\tilde{U}_j) = n - 1 + 1 = n$ , stąd  $\text{ord}_\nu(U_j) \leq \text{ord}_{\mu_\lambda}(U_j)$ .
  - $\text{ord}_\nu(U_j^1) = \nu(R) + \text{ord}_\nu(U_j) + \nu(U_j^1) \leq n - 1 + n + 1 = 2n$ ,  $\text{ord}_{\mu_\lambda}(U_j^1) = \mu_\lambda(R) + \text{ord}_{\mu_\lambda}(U_j) + \mu_\lambda(U_j^1) = \lambda(R_E) + \text{ord}_\lambda(\tilde{U}_j) + \lambda(\tilde{U}_j^1) = n - 1 + n + 1 = 2n$ , stąd  $\text{ord}_\nu(U_j^1) \leq \text{ord}_{\mu_\lambda}(U_j^1)$ .
  - ...
  - $\text{ord}_\nu(U_j^{\beta_j}) = \nu(R) + \text{ord}_\nu(U_j^{\beta_j-1}) + \nu(U_j^{\beta_j}) \leq n - 1 + \beta_j \cdot n + 1 = (\beta_j + 1) \cdot n$ ,  $\text{ord}_{\mu_\lambda}(U_j^{\beta_j}) = \mu_\lambda(R) + \text{ord}_{\mu_\lambda}(U_j^{\beta_j-1}) + \mu_\lambda(U_j^{\beta_j}) = \lambda(R_E) + \text{ord}_\lambda(\tilde{U}_j^{\beta_j-1}) + \lambda(\tilde{U}_j^{\beta_j}) = n - 1 + \beta_j \cdot n + 1 = (\beta_j + 1)n$ , stąd  $\text{ord}_\nu(U_j^{\beta_j}) \leq \text{ord}_{\mu_\lambda}(U_j^{\beta_j})$ .



3. Dla pozostałych wierzchołków  $P$  pokażemy, że  $\text{ord}_\nu(P) \leq \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(P) \leq \text{ord}_{\mu_\lambda}(P)$ . Pierwsza nierówność wynika natychmiast z liniowej przyległości  $[(D_n, \nu_n)]$  do  $[(D, \nu)]$ , natomiast drugą udowodnimy indukcyjnie ze względu na odległość  $P$  od  $R$ .

(a) Jeśli  $P$  jest bezpośrednim następnikiem  $R$ , to  $P = P_j$  dla pewnego  $j \in \{1, \dots, k\}$  lub  $P = S_j$  dla pewnego  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Zatem  $\text{ord}_\nu(P) \leq \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(P) = \mu_{\nu'}(R) + \mu_{\nu'}(P) \leq n + 1 = n - 1 + 2 = \lambda(R_E) + \lambda(\tilde{i}(P)) = \mu_\lambda(R) + \mu_\lambda(P) = \text{ord}_{\mu_\lambda}(P)$ .

(b) Załóżmy, że nierówność  $\text{ord}_{\mu_{\nu'}}(P) \leq \text{ord}_{\mu_\lambda}(P)$  zachodzi na  $P$  odległych od  $R$  o  $m$  krawędzi. Niech teraz  $Q$  będzie wierzchołkiem odległym od  $R$  o  $m + 1$  krawędzi. Wobec tego możliwe są następujące przypadki:

- $Q$  jest swobodnym wierzchołkiem, dla którego istnieje  $W$  takie, że  $Q \rightarrow W$ . Wobec tego  $W$  jest odległy od  $R$  o  $m$  krawędzi, zatem  $\text{ord}_\nu(Q) \leq \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(Q) = \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(W) + \mu_{\nu'}(Q) \stackrel{2^*}{\leq} \text{ord}_{\mu_\lambda}(W) + \mu_\lambda(Q) = \text{ord}_{\mu_\lambda}(Q)$ .
- $Q$  jest satelitarnym wierzchołkiem, dla którego istnieją  $W, V \neq R$  takie, że  $Q \rightarrow W, V$ . Wobec tego  $W, V$  są odległe od  $R$  o mniej lub równo  $m$  krawędzi, zatem  $\text{ord}_\nu(Q) \leq \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(Q) = \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(W) + \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(V) + \mu_{\nu'}(Q) \stackrel{2^*}{\leq} \text{ord}_{\mu_\lambda}(W) + \text{ord}_{\mu_\lambda}(V) + \mu_\lambda(Q) = \text{ord}_{\mu_\lambda}(Q)$ .
- $Q$  jest satelitarnym wierzchołkiem, dla którego istnieje  $W \neq R$  takie, że  $Q \rightarrow W, R$ . Wobec tego  $Q = S_j^p$  dla pewnych  $j \in \{1, \dots, l\}$  i  $p \in \{1 \dots \alpha_j\}$ . Mamy:

$$\begin{aligned} - \text{ord}_\nu(S_j^1) &\leq \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(S_j^1) = \mu_{\nu'}(R) + \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(S_j) + \mu_{\nu'}(S_j^1) \stackrel{1^*}{=} n + n + 1 + 0 = 2n + 1, \text{ord}_{\mu_\lambda}(S_j^1) = \mu_\lambda(R) + \text{ord}_{\mu_\lambda}(S_j) + \mu_\lambda(S_j^1) = n - 1 + n + 1 + 1 = 2n + 1, \text{zatem } \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(S_j^1) \leq \text{ord}_{\mu_\lambda}(S_j^1) \end{aligned}$$

- ...

$$\begin{aligned} - \text{ord}_\nu(S_j^{\alpha_j}) &\leq \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(S_j^{\alpha_j}) = \mu_{\nu'}(R) + \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(S_j^{\alpha_j-1}) + \mu_{\nu'}(S_j^{\alpha_j}) \stackrel{1^*}{=} n + \alpha_j \cdot n + 1 + 0 = (\alpha_j + 1)n + 1, \text{ord}_{\mu_\lambda}(S_j^{\alpha_j}) = \mu_\lambda(R) + \text{ord}_{\mu_\lambda}(S_j^{\alpha_j-1}) + \mu_\lambda(S_j^{\alpha_j}) = n - 1 + \alpha_j \cdot n + 1 + 1 = (\alpha_j + 1)n + 1, \text{zatem } \text{ord}_{\mu_{\nu'}}(S_j^{\alpha_j}) \leq \text{ord}_{\mu_\lambda}(S_j^{\alpha_j}). \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że  $(D, \nu) \leq (E, \lambda)$ . Zatem  $[(E, \lambda)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ . Policzmy teraz liczbę Milnora diagramu  $(E, \lambda)$ . Niech  $E' = E \setminus \{\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_r\}$ . Ponieważ wierzchołki  $\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_r$  są wierzchołkami swobodnymi o wadze 1, to  $(E', \lambda|_{E'}) \in [(E, \lambda)]$ . Na mocy twierdzenia 3.24 mamy  $\mu((E, \lambda)) = \mu((E', \lambda|_{E'}))$ .

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
r_{E'} &= \sum_{P \in E'} r_{E'}(P) = r_{E'}(R_{E'}) + \sum_{j=1}^k r_{E'}(\tilde{P}_j) + \sum_{j=1}^l r_{E'}(\tilde{S}_j) + \sum_{j=1}^l \sum_{p=1}^{\alpha_j} r_{E'}(\tilde{S}_j^p) + \\
&+ \sum_{j=1}^q r_{E'}(\tilde{U}_j) + \sum_{j=1}^q \sum_{p=1}^{\beta_j} r_{E'}(\tilde{U}_j^p) \geq 0 + \sum_{j=1}^k 2 + \sum_{j=1}^l (2-1) + l + \sum_{j=1}^q (1-1) + q = \\
&= 2k + l + l + q = 2k + 2l + q.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\mu((E, \lambda)) &= \mu((E', \lambda|_{E'})) = (n-1)(n-2) + 2k + 2l + 1 - r_{E'} \leq \\
&\leq (n-1)^2 - n + 1 + 2k + 2l + 1 - 2k - 2l - q = (n-1)^2 - n + 2 - q \leq (n-1)^2 - (n-2).
\end{aligned}$$

To kończy dowód.  $\square$

**Lemat 4.13.** *Niech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Jeżeli  $[(D_n, \nu_n)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$  i różny od niego, to*

$$\mu((D, \nu)) \leq (n-1)^2 - (n-2).$$

*Dowód.* Na mocy poprzedniego lematu 4.12 istnieje diagram  $(E, \lambda)$  taki, że  $[(E, \lambda)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$  i  $\mu((E, \lambda)) \leq (n-1)^2 - (n-2)$ . Zatem dla dowolnej osobliwości  $f$ , której diagram Enriquesa jest typu  $[(E, \lambda)]$  istnieje deformacja liniowa  $(f_s)$ , której generyczny element jest typu  $[(D, \nu)]$ . Z półciągłości liczby Milnora z góry ([GLS06] Theorem 2.6 I) dla odpowiednio małych  $s$  mamy  $\mu(f_s) \leq \mu(f)$ . Zatem  $\mu((D, \nu)) = \mu(f_s) \leq \mu(f) = \mu((E, \lambda)) \leq (n-1)^2 - (n-2)$ .  $\square$

**Twierdzenie 4.14.** *Dla dowolnej osobliwości  $f_0^n$  ( $n \geq 2$ ) skok liczby Milnora jej deformacji liniowych jest równy*

$$\lambda^{lin}(f_0^n) = \begin{cases} n-2, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases}.$$

*Dowód.* Dla  $n = 2$  na mocy twierdzenia 4.8 istnieje diagram  $(D, \nu)$  taki, że  $[(D_2, \nu_2)]$  jest do niego liniowo przyległy i o liczbie Milnora równej 0. Skoro  $\mu((D_2, \mu_2)) = 1$ , to  $\lambda^{lin}(f_0^2) \leq 1$ . Z definicji skoku osobliwości  $f$ ,  $\lambda^{lin}(f) \geq 1$ . Zatem  $\lambda^{lin}(f_0^2) = 1$ .

Dla  $n \geq 3$  z jednej strony wiemy na mocy twierdzenia 4.8, że istnieje diagram  $(D, \nu)$  taki, że  $[(D_n, \nu_n)]$  jest do niego liniowo przyległy i  $\mu((D, \nu)) = (n-1)^2 - (n-2)$ , stąd  $\lambda^{lin}(f_0^2) \leq n-2$ . Natomiast na mocy lematu 4.13 wiemy, że każda liniowa deformacja  $f_s$  ma diagram Enriquesa, którego liczba Milnora jest mniejsza od  $(n-1)^2 - (n-2)$ . Zatem  $\lambda^{lin}(f_0^n) = n-2$ .  $\square$

**Uwaga 4.15.** Dla osobliwości  $f_0^n(x, y) := x^n + y^n$  ( $n \geq 3$ ) liniowa deformacja realizująca skok minimalny to:

$$f_s(x, y) := \begin{cases} f_0^n(x, y) + s(x + y)^{n-1}, & n \notin 2\mathbb{N} \\ f_0^n(x, y) + s(x + ey)^{n-1}, & n \in 2\mathbb{N} \end{cases},$$

gdzie  $e^n = -1$ .

Liczba Milnora  $f_s$  jest równa  $\mu(f_s) = (n - 1)^2 - (n - 2)$ , a minimalny diagram odpowiadający osobliwości  $f_s$  to  $(D, \nu)$  z dowodów lematów 4.6 i 4.7.

**Twierdzenie 4.16.** Dla dowolnej jednorodnej osobliwości  $f_0$  stopnia  $n$  ( $n \geq 2$ ) skok liczby Milnora dla deformacji liniowych jest równy

$$\lambda^{lin}(f_0) = \begin{cases} n - 2, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases}.$$

*Dowód.* Wynika to z faktu, że dowolna osobliwość jednorodna stopnia  $n$  ma diagram Enriquesa typu  $[(D_n, \nu_n)]$ .  $\square$

**Twierdzenie 4.17.** Dla dowolnej semi-jednorodnej osobliwości  $f_0$  stopnia  $n$  ( $n \geq 2$ ) skok liczby Milnora dla deformacji liniowych jest równy

$$\lambda^{lin}(f_0) = \begin{cases} n - 2, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases}.$$

*Dowód.* Wynika to z faktu, że dowolna osobliwość semi-jednorodna stopnia  $n$  ma diagram Enriquesa typu  $[(D_n, \nu_n)]$ .  $\square$

## 5 Uwagi końcowe

### 5.1 Osobliwości quasi-jednorodne

Powyższą metodę wyznaczenia skoku liczby Milnora osobliwości jednorodnych w klasie deformacji liniowych można wykorzystać do badania skoków osobliwości quasi-jednorodnych. Jest to możliwe dzięki temu, że diagramy Enriquesa osobliwości quasi-jednorodnych są szczególnej postaci, która zostanie przedstawiona poniżej.

Mówimy, że osobliwość  $f_0(x, y) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x^i y^j$  jest **osobliwością quasi-jednorodną**, jeżeli istnieją wagi  $w_x, w_y \in \mathbb{N}$  i  $D \in \mathbb{N}$  takie, że dla każdego  $(i, j) \in \text{supp}(f_0)$  zachodzi  $iw_x + jw_y = D$ , gdzie  $\text{supp}(f_0) = \{(i, j) \in \mathbb{N} : a_{i,j} \neq 0\}$ .

Bez zmniejszenia ogólności, możemy założyć, że  $f_0$  jest postaci:

$$f_0(x, y) = x^k y^l (x^p + \dots + \gamma_{i,j} x^i y^j + \dots + y^q), \quad k, l \in \{0, 1\}, p \leq q, k + l + p \geq 2,$$

gdzie dla każdego niezerowego wyrazu  $\gamma_{i,j} x^i y^j$  spełniona jest równość  $i w_x + j w_y = D$ . Dodatkowo założymy, że  $p \neq q$ , gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy do czynienia z osobliwością jednorodną, rozważaną w poprzednim rozdziale.

Zauważmy, że osobliwość  $f_0$  może zostać przedstawiona jednoznacznie w postaci iloczynu

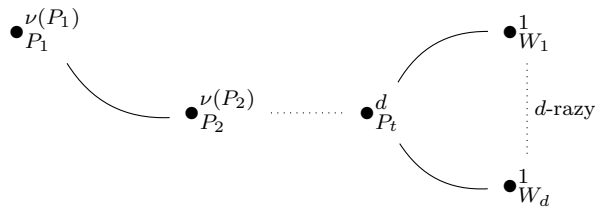
$$x^k y^l \prod_{i=1}^d (x^r + \alpha_i y^s), \quad \alpha_i \neq 0, \alpha_i \neq \alpha_j \text{ dla } i \neq j,$$

gdzie  $d = \text{NWD}(p, q)$ ,  $r = \frac{p}{d}$ ,  $s = \frac{q}{d}$ . Stąd wynika prosty lemat o postaci diagramu Enriquesa tych osobliwości.

**Lemat 5.1.** *Niech  $p \neq q$ ,  $k = l = 0$  i  $d = \text{NWD}(p, q)$ . Diagram Enriquesa  $(D, \nu)$  osobliwości  $f_0$  (przedstawiony na rysunku 20) określony jest następująco:*

- $D = \{P_1, \dots, P_t, W_1, \dots, W_d\}$ ,  $t \geq 2$
- $\nu(P_t) = d$ ,
- $\nu(W_i) = 1$  dla  $i = 1, \dots, d$ ,
- $P_i \rightarrow P_{i-1}$  dla  $i = 2, \dots, t$ ,
- $W_i \rightarrow P_t$  dla  $i = 1, \dots, d$ ,
- istnieje  $i_0 \in \{2, \dots, t\}$  takie, że  $P_2, \dots, P_{i_0}$  są wierzchołkami swobodnymi, a  $P_{i_0+1}, \dots, P_t$  (gdy  $i_0 < t$ ) są satelitarne. Warunek  $i_0 = t$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $r = 1$  lub  $s = 1$ .

Diagram  $(D, \nu)$  ma  $d$  wierzchołków końcowych.



Rysunek 20: Diagram Enriquesa osobliwości  $f_0$  dla  $k = l = 0$ .

Stąd, dodając krawędzie odpowiadające czynnikom  $x$  i  $y$  w rozkładzie  $f_0$ , otrzymujemy diagram Enriquesa dowolnej osobliwości quasi-jednorodnej.

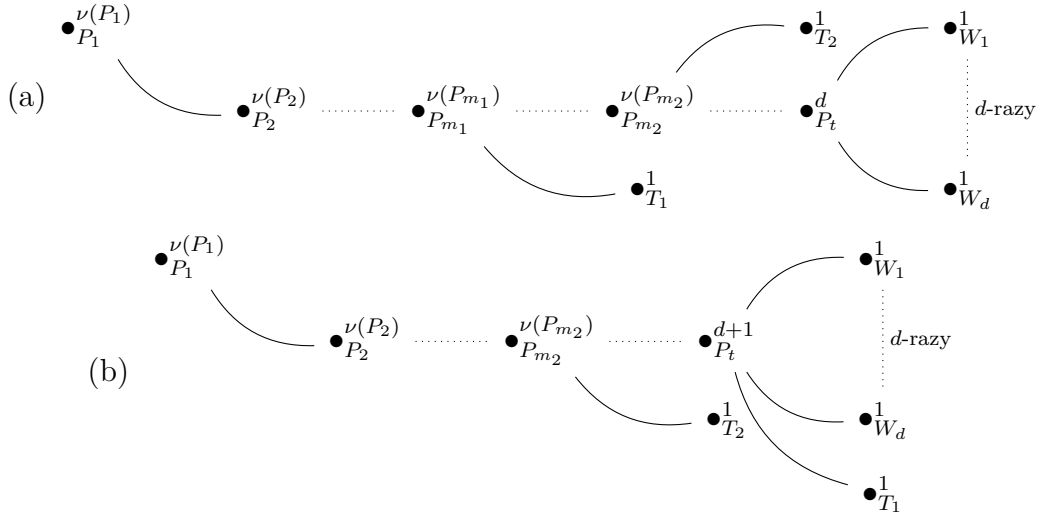
**Twierdzenie 5.2.** *Diagram Enriquesa dowolnej osobliwości quasi-jednorodnej jest określony następująco:*

1. Jeżeli  $k = l = 0$ , to diagramem Enriquesa  $f_0$  jest  $(D, \nu)$  z lematu 5.1.
2. W przeciwnym wypadku, niech  $(D', \nu')$  będzie diagramem Enriquesa odpowiadającym osobliwości  $\tilde{f}_0 = x^p + \dots + \gamma_{i,j} x^i y^j + \dots + y^q$ . Wówczas diagram  $(D, \nu)$  Enriquesa osobliwości  $f_0$  jest „rozszerzeniem” diagramu  $(D', \nu')$  o  $k+l \in \{1, 2\}$  swobodnych wierzchołków krotności 1.

Oznacza to, że dla każdego  $1 \leq i \leq k+l$  istnieje  $m_i \in \{1, \dots, t\}$  (jeśli  $k+l = 2$ , to  $m_1 \neq m_2$ ) i diagram  $(D, \nu)$  jest postaci:

- $D = D' \cup \bigcup_{i=1}^{k+l} \{T_i\}$  ( $T_i$  to nowe wierzchołki),
- $\nu(P) = \nu'(P)$  dla  $P \in D \setminus \bigcup_{i=1}^{k+l} \{P_{m_i}\}$ ,
- $\nu(P_{m_i}) = \nu'(P) + 1$  dla  $1 \leq i \leq k+l$ ,
- $\nu(T_i) = 1$  dla  $1 \leq i \leq k+l$ ,
- $P \xrightarrow{D} Q \Leftrightarrow P \xrightarrow{D'} Q$  dla  $P, Q \in D'$ ,
- $T_i \rightarrow P_{m_i}$  dla  $1 \leq i \leq k+l$ .

Diagram  $(D, \nu)$  ma  $d+k+l$  liści i został on przedstawiony na rysunkach 21 (a) i (b) (w zależności od  $m_i$ : gdy  $m_i < t$  i gdy jedna z liczb  $m_i$  jest równa  $t$ ).



Rysunek 21: Diagram Enriquesa osobliwości quasi-jednorodnej, gdy  $k+l = 2$  i  $m_1 < m_2$ . Na rysunku (a)  $m_1, m_2 \neq t$ , natomiast na (b)  $m_2 = t$ .

Korzystając z powyższego twierdzenia można badać skok liczby Milnora osobliwości quasi-jednorodnej dla deformacji liniowych w podobny sposób jak dla

osobliwości jednorodnych. Zauważmy, że końcową częścią każdego diagramu osobliwości quasi-jednorodnej jest diagram osobliwości jednorodnej. Zatem używając tych samych metod jesteśmy w stanie wyliczyć skok liczby Milnora dla osobliwości quasi-jednorodnych. Tematem tym będę się zajmować w mojej dalszej pracy naukowej.

## 5.2 Skoki liczb Milnora po rozdmuchaniu

W punkcie tym zbadamy zależność skoków liczb Milnora osobliwości ze skokami po jej rozdmuchaniu. Nie ma prostej zależności wiążącej skok liczby Milnora osobliwości ze skokami osobliwości otrzymanych po jej rozdmuchaniu. W ogólnym przypadku otrzymujemy tylko nierówność (wniosek 5.8). Brak prostej zależności jest powodem niezastosowania indukcji w dowodzie głównego twierdzenia.

Najpierw opiszemy diagramy Enriquesa osobliwości otrzymanych po jej rozdmuchaniu.

**Definicja 5.3.** Niech  $(D, \nu)$  będzie dowolnym zgodnym diagramem Enriquesa. Oznaczmy przez  $P_1, \dots, P_n$  wszystkie bezpośrednie następniki korzenia  $R_D$ .

Dla dowolnego  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) przez  $(D_{P_i}, \nu_{P_i})$  oznaczmy nowy diagram, który jest fragmentem diagramu  $(D, \nu)$  o korzeniu  $P_i$ . Definiujemy go następująco:

1.  $P_i \in D_{P_i}$ ,  $P_i$  jest korzeniem  $D_{P_i}$ ,
2. jeżeli  $T \xrightarrow{D} W$  i  $W \in D_{P_i}$ , to  $T \in D_{P_i}$ ,
3.  $T \xrightarrow{D_{P_i}} W \Leftrightarrow (T \xrightarrow{D} W \wedge W \neq R_D)$  dla  $T, W \in D_{P_i}$ ,
4.  $\nu_{P_i}(P) = \nu(P)$ , gdy  $P \in D_{P_i}$ .

$(D_{P_1}, \nu_{P_1}), \dots, (D_{P_n}, \nu_{P_n})$  stanowi pewien podział diagramu  $(D, \nu)$ , tzn. dla dowolnego  $P \in D$ ,  $P \neq R_D$  istnieje dokładnie jeden diagram  $(D_{P_i}, \nu_{P_i})$  taki, że  $P$  jest jego wierzchołkiem.

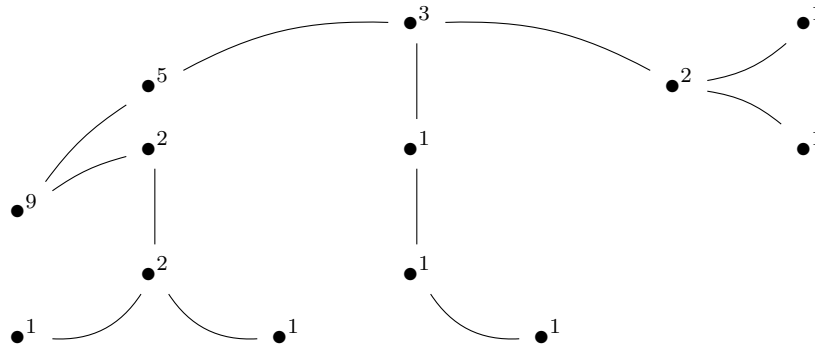
**Uwaga 5.4.** Niech  $(D_{P_1}, \nu_{P_1}), \dots, (D_{P_n}, \nu_{P_n})$  stanowi powyższy podział diagramu  $(D, \nu)$ . Załóżmy, że istnieje  $i \in \{1, \dots, n\}$  oraz  $Q \in D$  takie, że  $Q \rightarrow P_i, R_D$ . Wówczas wierzchołek  $Q$  w diagramie  $(D, \nu)$  jest wierzchołkiem satelitarnym, natomiast w diagramie  $(D_{P_i}, \nu_{P_i})$  – wierzchołkiem swobodnym.

Oczywiście zachodzi

**Stwierdzenie 5.5.** Niech  $f_0$  będzie osobliwością w  $0 \in \mathbb{C}^2$ , a  $(D, \nu)$  odpowiadającym jej diagramem Enriquesa. Niech  $(D_{P_1}, \nu_{P_1}), \dots, (D_{P_n}, \nu_{P_n})$  stanowi podział diagramu

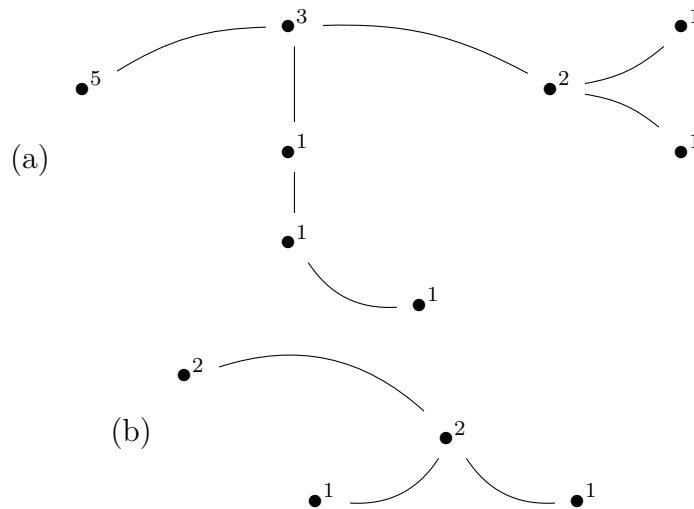
$(D, \nu)$ . Załóżmy, że po pierwszym rozdmuchaniu otrzymujemy  $n$  osobliwości  $V_1, \dots, V_n$  o środkach w  $Q_1, \dots, Q_n$ . Wówczas dla dowolnego  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) istnieje  $j \in \{1, \dots, n\}$  takie, że  $Q_i = P_j$  oraz diagram  $(D_{P_j}, \nu_{P_j})$  jest diagramem osobliwości  $V_i$  o środku w  $Q_i$ .

Przykład 5.6. Niech  $f(x, y) = (x^2 - y^3)(x^2 + y^3)(x^3 - y)(x^3 + y)(x^4 - y^3)$  będzie osobliwością. Jej diagram Enriquesa  $(D, \nu)$  jest przedstawiony na rysunku 22.



Rysunek 22: Pełny diagram Enriquesa osobliwości  $f$ .

Diagram ten dzieli się na 2 diagramy  $(D_{P_1}, \nu_{P_1})$  i  $(D_{P_2}, \nu_{P_2})$  przedstawione na rysunku 23.



Rysunek 23: Diagramy Enriquesa  $(D_{P_1}, \nu_{P_1})$ ,  $(D_{P_2}, \nu_{P_2})$ .

**Twierdzenie 5.7.** Niech  $(D, \nu)$  będzie dowolnym minimalnym diagramem Enriquesa oraz niech  $(D_{P_1}, \nu_{P_1}), \dots, (D_{P_n}, \nu_{P_n})$  będzie jego podziałem. Niech  $k \in \{0, \dots, n\}$  będzie takie, że  $\nu(P_i) > 1$  dla  $1 \leq i \leq k$  i  $\nu(P_i) = 1$  dla  $k < i \leq n$ . Dla każdego  $i = 1, \dots, k$  przez  $(E_i, \delta_i)$  oznaczmy zgodny diagram Enriquesa taki, że  $[(D_{P_i}, \nu_{P_i})]$  jest liniowo przyległy do  $[(E_i, \delta_i)]$ . Wówczas istnieje zgodny diagram  $(E, \delta)$  taki, że  $[(D, \nu)]$  jest liniowo przyległy do  $[(E, \delta)]$  i

$$\mu((E, \delta)) = \nu(R_D)(\nu(R_D) - 1) + \sum_{i=1}^k \mu((E_i, \delta_i)) - k + 1 - (\nu(R_D) - \sum_{P \rightarrow R_E} \delta(P))$$

*Idea dowodu.* Diagram  $(E, \delta)$  konstruujemy w następujący sposób:

- $E = \bigcup_{i=1}^k E_i \cup \{R_E\}$ .
- Dla dowolnego  $i = 1, \dots, k$  i  $P \in E_i$  mamy  $\delta(P) = \delta_i(P)$ ,
- $\delta(R_E) = \nu(R_D)$ .
- Dla dowolnego  $i = 1, \dots, k$  i  $P, Q \in E_i$  mamy  $P \xrightarrow{E} Q \Leftrightarrow P \xrightarrow{E_i} Q$ .
- Dla dowolnego  $i = 1, \dots, k$  oznaczmy przez  $D'_i \subset D_{P_i}$ ,  $E'_i \subset E_i$  izomorficzne diagramy, a przez  $j_i : E'_i \rightarrow D'_i$  ich izomorfizm. Wówczas dla  $Q \in E_i$  mamy  $Q \xrightarrow{E} R_E \Leftrightarrow (Q \in E'_i \wedge j_i(Q) \xrightarrow{D} R_D)$ .

Diagram  $(E, \delta)$  jest spójnym diagramem takim, że  $[(D, \nu)]$  jest liniowo przyległy do  $[(E, \delta)]$  i  $\mu((E, \delta)) = \nu(R_D)(\nu(R_D) - 1) + \sum_{i=1}^k \mu((E_i, \delta_i)) - k + 1 - (\nu(R_D) - \sum_{P \rightarrow R_E} \delta(P))$ .  $\square$

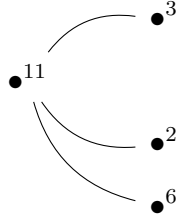
Stąd otrzymujemy natychmiast

**Wniosek 5.8.** Niech  $f_0$  będzie osobliwością w  $0 \in \mathbb{C}^2$ , a  $(D, \nu)$  odpowiadającym jej diagramem Enriquesa. Załóżmy, że po pierwszym rozdmuchaniu otrzymujemy  $n$  osobliwość  $V_1, \dots, V_n$  o środkach w  $Q_1, \dots, Q_n$ . Dla każdego  $i = 1, \dots, n$  oznaczmy  $\alpha_i = \lambda^{\text{lin}}((V_i))$ . Wówczas

$$\lambda^{\text{lin}}((f_0)) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i + \nu(R_D) - n.$$

*Przykład 5.9.* Niech  $f_0$  będzie osobliwością o minimalnym diagramie Enriquesa  $(D, \nu)$  przedstawionym na rysunku 24. Zauważmy, że rozbija się on na 3 diagramy osobliwości jednorodnych. Wobec tego  $\lambda^{\text{lin}}(f_0) \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \nu(R_D) - 3 = 1 + 1 + 4 + 11 - 3 = 14$ .

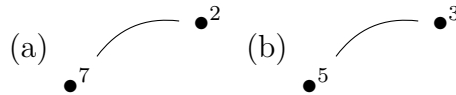




Rysunek 24: Diagram Enriquesa  $(D, \nu)$

Aby we wniosku 5.8 uzyskać nierówność w drugą stronę, musielibyśmy sformułować twierdzenie odwrotne do twierdzenia 5.7. Dla dowolnej osobliwości jest to jednak skomplikowane.

*Przykład 5.10.* Niech  $(D, \nu)$  i  $(E, \delta)$  będą określone jak na rysunku 25. Zauważmy,



Rysunek 25: Diagramy Enriquesa  $(D, \nu)$  i  $(E, \delta)$ .

że  $[(D, \nu)]$  jest liniowo przyległy do  $[(E, \delta)]$ . Jeśli oznaczymy przez  $(D_1, \nu_1)$  rozbitcie diagramu  $(D, \nu)$ , a przez  $(E_1, \delta_1)$  rozbitcie diagramu  $(E, \delta)$  to widać, że  $[(D_1, \nu_1)]$  nie jest liniowo przyległy do  $[(E_1, \delta_1)]$ .

Twierdzenie takie można częściowo sformułować dla osobliwości jednorodnych

**Twierdzenie 5.11.** *Niech  $(D, \nu)$  będzie dowolnym diagramem takim, że  $[(D_n, \nu_n)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ . Niech  $(D_{P_1}, \nu_{P_1}), \dots, (D_{P_n}, \nu_{P_n})$  będzie jego podziałem. Wówczas dla dowolnego  $i = 1, \dots, n$  takiego, że nie istnieje  $Q \in D$  spełniająca  $Q \rightarrow P_i, R_D$  typ  $[(D_{n-r+1}, \nu_{n-r+1})]$  jest liniowo przyległy do  $[(D_{P_i}, \nu_{P_i})]$ , gdzie  $r = \nu(R_D)$ .*

*Przykład 5.12.* Niech  $f(x, y) = (x^2 - y^3)(x^2 + y^3)(x^3 - y)(x^3 + y)(x^4 - y^3)$  będzie osobliwością z przykładu 5.6. Jej diagram Enriquesa to  $(D, \nu)$  (zobacz rysunek 22). Zauważmy, że  $[(D_{16}, \nu_{16})]$  jest liniowo przyległy do  $[(D, \nu)]$ . Na mocy twierdzenia 5.11 natomiast wiemy, że  $[(D_8, \nu_8)]$  jest liniowo przyległy do  $[(D_{P_1}, \nu_{P_1})]$ .

# Bibliografia

- [ACR05] Maria Alberich-Carramiñana and Joaquim Roé. Enriques Diagrams and Adjacency of Planar Curve Singularities. *Canad. J. Math.*, 57(1):3–16, 2005.
- [BK86] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer. *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser, 1986.
- [BK14] Szymon Brzostowski and Tadeusz Krasieński. The jump of the Milnor number in the  $X_9$  singularity class. *Cent. Eur. J. Math.*, 12(3):429–435, 2014.
- [BKW14] Szymon Brzostowski, Tadeusz Krasieński, and Justyna Walewska. Milnor numbers in deformations of homogeneous singularities. *ArXiv*, (1104.7704), 2014.
- [Bod07] Arnaud Bodin. Jump of Milnor numbers. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38(3):389–396, 2007.
- [CA00] Eduardo Casas-Alvero. *Singularities of Plane Curve*. Cambridge University Press, 2000.
- [dBPPP17] Javier Fernández de Bobadilla, María Pe Pereira, and Patrick Popescu-Pampu. On the generalized Nash problem for smooth germs and adjacencies of curve singularities. *Advances in Maths.*, 320:1269–1317, 2017.
- [GLS06] Gert-Martin Greuel, Christoph Lossen, and Eugenii Shustin. *Introduction to Singularities and Deformation*. Springer Verlag, 2006.
- [GZ93] Sabir Gusein-Zade. On singularities from which an  $A_1$  can be split off. *Funct. Anal. Appl.*, 27(1):57–60, 1993.
- [Wal13] Justyna Walewska. The jump of Milnor numbers in families of non-degenerate and non-convenient singularities. *Analytic and Algebraic Geometry, University of Łódź Press*, pages 141–153, 2013.