

Austauschbarkeit in Diskreten Strukturen: Simplizes und Filtrationen

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften

Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

M.Sc. Julian Gerstenberg

2018

Referent: Prof. Dr. R. Grübel
Korreferenten: Prof. Dr. U. Rösler
Prof. Dr. A. Gnedin

Tag der Promotion: 26.01.2018

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden spezielle Modelle für diskrete Strukturen, sogenannte konsistente Systeme, vorgeschlagen und die Menge der austauschbaren Verteilungen in diesen Modellen betrachtet. Diese Menge ist stets ein metrisierbarer Choquetsimplex. Es wird gezeigt, dass dieser Simplex in kanonischer Weise isomorph zu Simplizes von Markovverteilungen mit vorgegebener Rückwärtsdynamik ist und dass die ergodischen austauschbaren Verteilungen in einem geeigneten Sinn mit deterministischen Limiten wachsender diskreter Strukturen, dem Martinrand in geeignet gewählten Equipped Graded Graphs, identifiziert werden können. Insbesondere sind die Isomorphiestrukturen der auftretenden Simplizes durch die Homöomorphiestruktur der ergodischen Verteilungen determiniert. Es werden Produkte konsistenter Systeme eingeführt und funktionale Darstellungen austauschbarer Verteilungen im Stil der Darstellungsergebnisse von Aldous-Hoover-Kallenberg werden mit Betrachtungen zu Filtrationen, die sich bei austauschbaren Verteilungen in solchen Produktsystemen ergeben, in Zusammenhang gebracht. Die sich hier ergebenden Begriffe fallen in das Gebiet der Klassifikation von Filtrationen im Sinne von A. Vershik. Die allgemeinen Begriffe und Resultate werden für spezielle konsistente Systeme interpretiert und angewendet; diese umfassen Betrachtungen zu Wörtern, linearen Ordnungen, Partitionen, Hierarchien, binären Hierarchien und Graphen. Speziell für Hierarchien wird ein Darstellungsergebnis erarbeitet, welches die Beschreibung des Doob-Martin Randes zu Rémys Kette von S.N. Evans, R. Grübel und A. Wakolbinger und der Beschreibung ergodischer austauschbarer (gewurzelter) Hierarchien von N. Forman, C. Haulk und J. Pitman in einen engen gemeinsamen Kontext stellt.

Schlagwörter: Diskrete Strukturen, Austauschbarkeit, Equipped Graded Graphs, Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten, Doob-Martin Theorie, Markovketten, Simplizes, Isomorphie, ergodische Verteilungen, Homöomorphie, Darstellungsergebnisse, Filtrationen, Standardness

Abstract

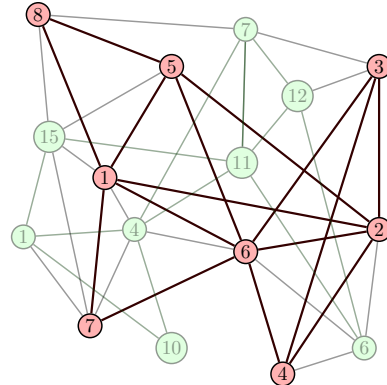
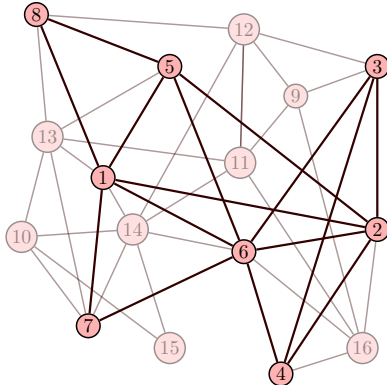
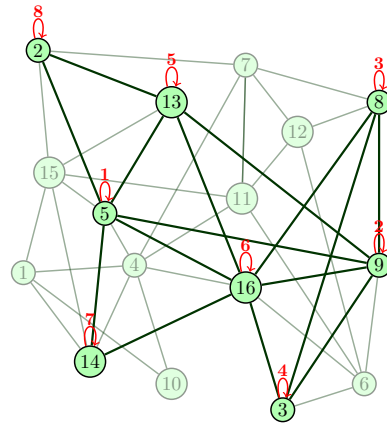
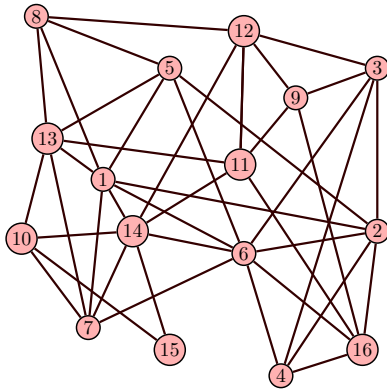
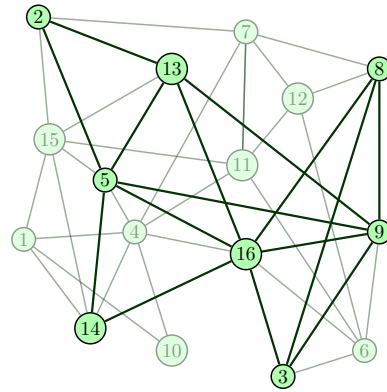
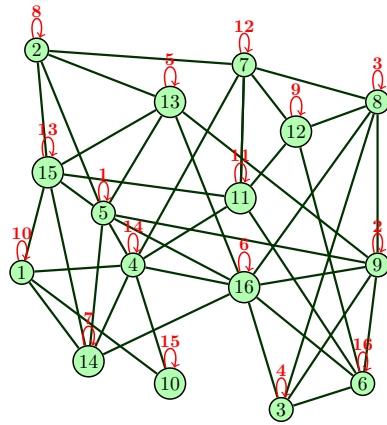
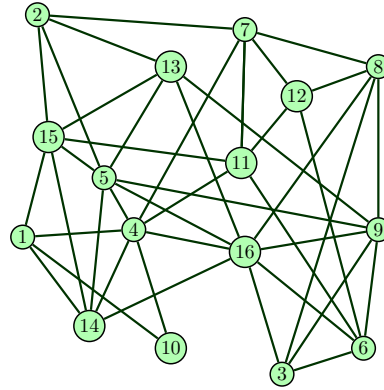
This thesis presents a general framework for the analysis of discrete structures, called consistent systems, and analyses the space of exchangeable laws in such systems. This space turns out to be a metrizable Choquet simplex. It will be proved that this simplex is isomorphic to certain spaces of Markovian laws with prescribed cotransition probabilities and that the ergodic exchangeable laws are in direct correspondence with deterministic limits of growing discrete structures. The isomorphism type of the occurring simplices is determined by the homeomorphism type of ergodic laws. Products of consistent systems will be introduced and functional representations of exchangeable laws, in the spirit of Aldous-Hoover-Kallenberg representation theorems, will be linked to the study of filtrations occurring in such product systems. One is now in the area of classification of filtrations in the sense of A.Vershik.

The general notions and results around consistent systems will be interpreted and applied to some selected special consistent systems involving words, linear orders, partitions, hierarchies, binary hierarchies and graphs. Especially the representation result for exchangeable hierarchies will be compared to the results from S.N. Evans, R. Grübel and A. Wakolbinger concerning the Doob-Martin boundary of Rémy's tree growth chain and the description of the ergodic exchangeable rooted hierarchies obtained by N. Forman, C. Haulk und J. Pitman.

Key words: Discrete structures, exchangeability, equipped graded graphs, cotransition probabilities, Doob-Martin boundary theory, Markov chains, simplices, isomorphism, ergodic laws, homeomorphism, representation results, filtrations, standardness

Die Konsistenzeigenschaft

$$\text{pr}_{[k]}^{[n]}(\pi.x) = \pi|_{\pi^{-1}([k])} \cdot \text{pr}_{\pi^{-1}([k])}^{[n]}(x)$$



Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
1.1. Motivation, Inhalt und Einordnung	1
1.2. Notationen und bedingte Verteilungen	7
1.3. Projektive Systeme topologischer Räume	9
1.4. Simplizes	11
1.5. Topologische dynamische Systeme	13
1.6. Equipped Graded Graphs	16
2. Homogen markierte Bratellidiagramme	25
2.1. μ -zentrale Prozesse	26
2.2. Starke μ -zentrale Prozessverteilungen	31
2.2.1. Charakterisierung starker μ -zentraler Prozesse	33
2.2.2. Starke μ -zentrale Verteilungen bilden eine messbare Fläche dem Maße nach	36
2.3. Standardfiltrationen im Fall zentraler Prozesse	38
2.4. Beispiel: Shift-Invariante Prozesse und Bratellidiagramme	41
2.5. Beispiel: Split-Word-Prozesse	46
3. Konsistente Systeme	49
3.1. Strukturelle Konstruktionen	53
3.1.1. Projektive Limiten und Fortsetzung der Ummarkierungen	53
3.1.2. Homomorphismen $h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ konsistenter Systeme	57
3.1.3. Produktsysteme $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ und weitere Konstruktionen	59
3.1.4. Wahrscheinlichkeitsmaße auf konsistenten Systemen	60
3.1.5. Die abgeleiteten Strukturen	62
3.2. Austauschbarkeit und Markovketten	65
3.2.1. Markovketten und Isomorphismen von Simplizes	67
3.2.2. Limiten diskreter Strukturen (I), Unabhängigkeit, Bauersimplex	75
3.2.3. Zusammenspiel mit Homomorphismen und Produktsystemen	80
3.3. Das konsistente System \mathbf{Lin} der linearen Ordnungen	83
3.3.1. Homöomorphe Pfadräume $\mathbb{L}_\infty \leftrightarrow \text{Proj}(\mathbb{S}) \leftrightarrow \prod_{k \geq 1} [k]$	85
3.3.2. Darstellung der gleichverteilten linearen Ordnung über einen U - Prozess	85
3.4. Konsistente Systeme der Form $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$	89
3.4.1. Homöomorphe Pfadräume $\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty \leftrightarrow \text{Path}(\Phi) \leftrightarrow \text{Path}(\Lambda)$	90
3.4.2. Simplizes und Limiten diskreter Strukturen (II)	92
3.4.3. Starke Verteilungen in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$	96

3.4.4.	Überdeckende und Φ -stabile Teilmengen	98
3.4.5.	Die Aldous-Hoover-Kallenberg-Resultate im Kontext	100
4.	Die Systeme $\mathbf{Lin}^{(m)}$ und $\mathbf{Word}(\Sigma) \times \mathbf{Lin}$	103
4.1.	$\mathbf{Lin}^{(m)} = \mathbf{Lin} \times \mathbf{Lin} \times \dots \times \mathbf{Lin}$	103
4.1.1.	Starke Verteilungen in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty^m \times \mathbb{L}_\infty)$	104
4.1.2.	Pattern-Densities und Permutons	105
4.2.	$\mathbf{Word}(\Sigma) \times \mathbf{Lin}$	107
4.2.1.	Starke Verteilungen	108
4.2.2.	Standardness	109
5.	Hierarchien	115
5.1.	Beschreibung von $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH})$	120
5.1.1.	Beweis von Satz 5.1.9	123
5.2.	Verbindungen zu bekannten Resultaten	134
5.2.1.	Die Resultate aus [FHP17] und [EGW17]	134
5.2.2.	Gnedins Composition Structures, Kingmans Partition Structures	137
5.2.3.	Gleichverteilte 231-vermeidende Permutationen	139
6.	Graphen und abschließende Bemerkungen	143
6.1.	Das konsistente System der Graphen	143
6.2.	Abschließende Bemerkungen und Fragen	146
A.	Anhang	149
A.1.	Beweise und Hilfsmittel	149
A.2.	σ -Algebren	150
A.3.	Das Ersetzen unabhängiger Experimente	151
A.4.	Zufällige kompakte Mengen	152
	Symbolverzeichnis zu \mathcal{M}_1-Räumen	159
	Literatur	161

1. Einführung

1.1. Motivation, Inhalt und Einordnung

In der vorliegenden Arbeit werden *spezielle Modelle* für *diskrete Strukturen* vorgeschlagen und die Menge der *austauschbaren Verteilungen* in diesen Modellen betrachtet. Dabei stehen Aussagen über *Isomorphiestrukturen von Simplizes* und über *Darstellungen von Filtrationen* im Fokus.

Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Modelle für diskrete Strukturen werden *konsistente Systeme* genannt. Für den Moment wird der Begriff *diskrete Struktur* durch *diskreter Datensatz* ersetzt. Darüber gelangt man auf natürliche Weise zu den getroffenen Definitionen. Später wird auf diese Sichtweise nicht weiter eingegangen, es wird nur mit der Definition gearbeitet. Die Bestandteile eines konsistenten Systems werden nun darüber motiviert. Angenommen an einer endlichen Menge U von Individuen werden diskrete Daten erhoben. Diese können individuelle Daten, wie Blutgruppe, Geschlecht, Wohnort etc.; relationale Daten, wie Bekanntschaftsgraph, Abstammungshierarchie etc. oder eine Kombination solcher Daten sein. Dabei wird gefordert, dass die Menge aller an U messbarer Datensätze, bezeichnet durch die Menge $F[U]$, ebenfalls endlich und nicht-leer ist. Der an den Individuen U erhobene Datensatz ist damit ein Element $x_U \in F[U]$. Ein erster Bestandteil ist damit schon gegeben:

(R1) Eine *Regel* F , die jeder nicht-leeren endlichen Menge U (von Individuen) eine nicht-leere endliche Menge $F[U]$ (die an U messbaren Daten) zuordnet.

Stellt man sich vor, dass diese Datensätze in *nicht-anonymisierter* Weise vorliegen, so sollte es möglich sein, den an einer Teilmenge $V \subseteq U$ der Individuen erhobenen Datensatz $x_V \in F[V]$ *funktional* aus dem umfangreicheren Datensatz x_U ableiten zu können. Ist $W \subseteq V$ eine weitere nicht-leere Teilmenge, so sollte man den Datensatz x_W entweder aus dem Datensatz x_V oder direkt aus dem größeren Datensatz x_U ableiten können. Diese Funktionen werden später auch *Projektionen* genannt und liefern den zweiten Bestandteil:

(R2) Eine *Regel* F , die jeder nicht-leeren Teilmenge $V \subseteq U$ einer endlichen Menge U eine Abbildung $F[U, V] : F[U] \rightarrow F[V]$ zuordnet, sodass die folgende Eigenschaft gilt: Ist $\emptyset \neq W \subseteq V \subseteq U$ und U eine endliche Menge, so gilt

$$F[V, W] \circ F[U, V] = F[U, W]$$

und $F[U, U] = \text{id}_{F[U]}$ ist die Identität auf $F[U]$.

Ebenso sollte es möglich sein, die Datensätze *umzubenennen*, beispielsweise um die Möglichkeit einer Anonymisierung bereitzustellen. Zu jeder Bijektion $\pi : U \rightarrow U'$ wird die

Existenz einer Abbildung gefordert, die den Datensatz $x_U \in F[U]$ in einen *ummarkierten* Datensatz aus $F[U']$ überführt. Durch Anwendung von π^{-1} sollte man den ursprünglichen Datensatz zurückerhalten und generell sollte sich die Verknüpfung von Permutationen auf eine Verknüpfung der Ummarkierungsabbildungen übertragen. Dies liefert den dritten Bestandteil:

(R3) Eine *Regel* F , die jeder Bijektion $\pi : U \rightarrow U'$ endlicher nicht-leerer Mengen eine Abbildung $F[\pi] : F[U] \rightarrow F[U']$ zuordnet, sodass die folgende Eigenschaft gilt: Ist $\sigma : U' \rightarrow U''$ eine weitere Bijektion, so gilt

$$F[\sigma] \circ F[\pi] = F[\sigma \circ \pi]$$

und ferner $F[\text{id}_U] = \text{id}_{F[U]}$.

Nimmt man (R1) und (R3) zusammen, so nennt man F auch eine *Species of Structures* im Sinne von A. Joyal (siehe [BLL13]). Eine natürliche Forderung an die Interaktion von Projektion und Umbenennung ist, dass die Reihenfolge dieser Operationen in einem geeigneten Sinne vertauschbar ist; benennt man einen Datensatz zunächst um und reduziert diesen dann, erhält man den gleichen Datensatz, als hätte man zunächst auf eine gewisse Teilmenge reduziert und das Resultat dann geeignet umbenannt. Formal ist dies die *Konsistenzeigenschaft* und wie folgt präzisiert:

(K) Die Abbildungen aus (R1) und (R2) erfüllen die folgende Eigenschaft: Ist $\pi : U \rightarrow U'$ eine Bijektion endlicher Mengen und $V \subseteq U$ eine nicht-leere Teilmenge, so erhält man mit $V' := \pi(V) \subseteq U'$ und der eingeschränkten Bijektion $\pi|_V : V \rightarrow V'$, dass

$$F[U', V'] \circ F[\pi] = F[\pi|_V] \circ F[U, V]$$

gilt.

Eine Regel F , welche alle oben genannten Bestandteile erfüllt, wird *Projective Species of Structures* genannt. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden diese Regeln nur eingeschränkt betrachtet, genauer: Die endlichen Mengen U sind dann stets Teilmengen der natürlichen Zahlen. Damit umgeht man kategorientheoretische Notationen und den Begriff „Regel“. Im Rahmen der Motivation stellt man sich dabei vor, dass eine abzählbar unendliche Menge von Individuen vorliegt, welche durch die natürlichen Zahlen mit $1, 2, 3, \dots$ aufgezählt ist. Die formale Definition eines *konsistenten Systems* ist dann die Einschränkung einer Projective Species of Structures auf endliche Teilmengen der natürlichen Zahlen und wird an späterer Stelle gesondert gegeben. Die dort verwendeten Schreibweisen sind dann von denen in dieser Einführung verwendeten abweichend. So wird $F[U]$ durch $\mathbb{F}(U)$, $F[U, V]$ durch pr_V^U und $F[\pi](x)$ durch $\pi.x$ ersetzt. Die Abbildung auf Seite iii zeigt eine Visualisierung der Konsistenzeigenschaft mit diesen später verwendeten Bezeichnungen, ausgeführt für einen Graphen.

Will man Zufälligkeit ins Spiel bringen, so ist eine (auch für Anwendungen) naheliegende stochastische Annahme die der *Austauschbarkeit*: Individuen I_1, I_2, \dots werden einer

Grundgesamtheit in der Art zufällig entnommen, dass die zufällige Folge der Individuen eine *austauschbare Verteilung* besitzt. Dies bedeutet, dass die Verteilung der Prozesse

$$(I_1, I_2, I_3, \dots) \text{ und } (I_{\pi(1)}, I_{\pi(2)}, I_{\pi(3)}, \dots)$$

für alle Bijektionen $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ identisch ist. Ist nun X_U der an den Individuen $\{I_i : i \in U\}$ erhobene Datensatz, so liegt mit $X = (X_U : U \subseteq \mathbb{N}, 0 < |U| < \infty)$ eine zufällige Kollektion endlicher Datensätze vor, welche *projektiv und austauschbar* sein sollte: Für alle $V \subseteq U$ gilt $F[U, V](X_U) = X_V$ fast sicher und $F[\pi](X_U)$ und $X_{U'}$ haben für alle Bijektionen $\pi : U \rightarrow U'$ die gleiche Verteilung. Die Analyse aller denkbaren Verteilungen solcher projektiver austauschbarer Kollektionen von Datensätzen ist das Hauptanliegen dieser Arbeit.

I Strukturelle Aussagen. Die Menge der projektiven austauschbaren Verteilungen ist, ausgestattet mit der üblichen Topologie der schwachen Konvergenz, ein *Simplex*, genauer: Ein *metrisierbarer Choquetsimplex*. Die Arbeit stellt unterschiedliche Wege vor, wie man auf diesen und isomorphe Simplexes geführt wird; ein konsistentes System induziert auf unterschiedliche Weise andere bekannte mathematische Strukturen, die wiederum in ihrer jeweiligen eigenen Art einen Simplex induzieren. Eine dieser gängigen mathematischen Strukturen, die jedem konsistenten System zugeordnet wird, ist ein *topologisches dynamisches System*. Dies ist ein kompakter metrisierbarer Raum T zusammen mit einer Untergruppe Γ der Automorphismen von T , wobei Γ dann durch die abzählbare Gruppe der endlichen Bijektionen von \mathbb{N} dargestellt sein wird. In obiger Motivation entspricht T der Menge aller projektiven Datensätze. Die Menge der bzgl. Γ *invarianten* Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf T ist ein Simplex und diese Menge entspricht genau den Verteilungen der oben genannten projektiven und austauschbaren zufälligen Datensätze. Ein anderer Weg, der auf Simplexes führt, verläuft über *Equipped Graded Graphs* und die darüber erklärten *affin projektiven Limiten endlich-dimensionaler Simplexes*; solche sind stets wieder Simplexes. Über Erweiterungssätze von Kolmogorov isomorph dazu sind Kollektionen von Verteilungen solcher *Markovketten*, deren *Rückwärtsdynamiken* durch den Equipped Graded Graph (EGG) bestimmt sind. Tatsächlich induziert ein konsistentes System auf verschiedene, aber jeweils kanonische Weisen, solche Equipped Graded Graphs, und es wird gezeigt, dass *alle* bis dato konstruierten Simplexes isomorph sind. Der in dieser Arbeit vorgestellte Übergang von konsistenten Systemen zu EGGs verläuft hier über einen Zwischenschritt: *Homogen markierte Bratellidiagramme*. Dieser strukturelle Aspekt der vorliegenden Arbeit – speziellere reichhaltigere Strukturen implizieren allgemeinere weniger reichhaltige Strukturen und liefern damit verknüpft Fragestellungen dieser Gebiete – kann in Abbildung 1.1, welche in der Arbeit erläutert und entwickelt wird, zusammengefasst werden.

Einordnung: Die in dieser Arbeit vorgestellten strukturellen Zusammenhänge sind nicht gänzlich neu und gerade auch in speziellen Beispielen lange bekannt. Ein Ansatz dieser Arbeit besteht unter anderem darin, über den Begriff „konsistentes System“ bekannte Aussagen auf einen Nenner zu bringen und Resultate präzise(r) zueinander in Bezug zu setzen. Die Isomorphie des Simplex der austauschbaren Verteilungen zu Simplexes von

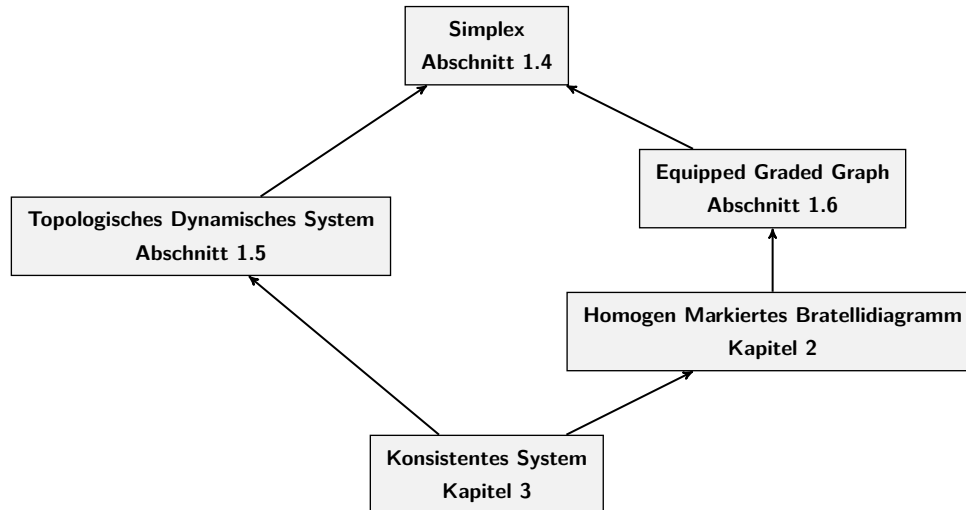


Abb. 1.1.: Ein Pfeil $A \rightarrow B$ bedeutet, dass ein Objekt A auf natürliche Weise ein Objekt B erklärt. Zum Beispiel liefert ein topologisches dynamisches System den Simplex der invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße und ein Equipped Graded Graph den Simplex aller Markovverteilungen mit vorgeschriebener Rückwärtsdynamik.

Markovverteilungen mit vorgegebener Rückwärtsdynamik stellt eine Instanz allgemeiner Resultate dar, welche beispielsweise in [Lau88] zu finden sind: Durch Übergang zu Werten einer suffizienten Statistik gelangt man von projektiven Objekten zu Markovketten. Unter der Hypothese der Austauschbarkeit ist der Übergang zu Orbits eine solche suffiziente Statistik. Betrachtet man austauschbare 0-1-wertige Folgen, so ist die zugehörige Simplexstruktur über den *Satz von de Finetti* geklärt und durch Übergang zu Partialsummenprozessen gelangt man zu einer äquivalenten Formulierung des Problems im Regime von Equipped Graded Graphs, so zu finden in [GGH16] (gelegentlich wird ein EGG bereits von einer einzigen *Kombinatorischen Markovkette* erzeugt, dann spricht man statt über EGG über harmonische Funktionen und bewegt sich im Bereich der Doob-Martin-Theorie, siehe dazu auch [Woe09]). Ein weiteres klassisches Resultat in diesem Rahmen stellt die Beschreibung austauschbarer Partitionen dar. Diese Simplexstruktur wurde von J. Kingman in [Kin78] beschrieben. Tatsächlich ist in der genannten Arbeit nicht direkt von Partitionen die Rede, sondern von *Partition Structures* und Markovketten. Wird das Darstellungsergebnis über austauschbare Partitionen der Arbeit [Kin78] zugeordnet, so wird implizit bereits ein struktureller Zusammenhang wie beispielsweise in [Lau88] verwendet. In [Gne97] wurde eine solche Äquivalenz im Rahmen der Beschreibung von *Composition Structures* erwähnt. Analoge Aussagen für austauschbare Hierarchien (später *gewurzelte Hierarchien*) findet man in [FHP17], wo auch eine umfangreiche Literaturliste zu Austauschbarkeit in diskreten Strukturen angegeben ist. Speziell für austauschbare Graphen ist die Arbeit [Grü15] zu nennen, in welcher nicht direkt zu Orbits übergegangen, sondern Vertreter der zugehörigen Äquivalenzklassen gleichverteilt ausgewählt werden. Dieses Vorgehen wird neben dem Übergang zu Orbits für allgemeine konsistente Systeme eine wichtige Rolle spielen. Einen großen Einfluss auf die vorliegende Arbeit hatte die Lektüre von [EGW17]. Insbesondere der dort beschriebene Übergang von einer

speziellen Menge von Verteilungen von Markovketten vorgegebener Rückwärtsdynamik zu *markierten Versionen* und darüber zu austauschbaren projektiven Objekten war Inspiration für einige der später formulierten allgemeinen Definitionen.

II Konvergenz diskreter Strukturen und Austauschbarkeit. Jedes konsistente System liefert einerseits einen Simplex austauschbarer Verteilungen und andererseits einen Equipped Graded Graph. Jeder EGG liefert eine Notation von *Konvergenz von Objekten wachsender Größe* und damit verbunden einen Begriff für die zugehörigen Limiten. Diese möglichen Limiten werden im *Martinrand* zusammengefasst und dieser umfasst stets die Extrempunkte des zu diesem Equipped Graded Graph assoziierten Simplex. Bei durch konsistenten Systemen induzierten EGGs hat dieser Konvergenzbegriff eine anschauliche Bedeutung: Eine Folge wachsender Datensätze konvergiert, falls die Folge der Verteilungen, welche man durch *gleichverteiltes Umbenennen* und anschließendes *Reduzieren auf eine fixierte Größe* erhält, für jede fixierte Größe konvergiert. Es wird sich herausstellen, dass Martinrand und Extrempunkte bei durch konsistenten Systemen induzierten EGG stets übereinstimmen. Über die Isomorphie der Simplizes hat man damit eine kanonische Korrespondenz von *austauschbaren ergodischen Verteilungen* und *Limiten wachsender diskreter Strukturen* erarbeitet. Ferner erhält man damit sofort, dass alle betrachteten Simplizes, welche aus konsistenten Systemen heraus abgeleitet wurden, *Bauersimplizes* sind. Die Frage nach der Isomorphiestruktur der Simplizes reduziert sich in diesen Fällen damit auf eine homöomorphe Beschreibung der ergodischen ($\hat{=}$ extremalen) Verteilungen. Ferner wird sich herausstellen, dass Ergodizität einer Verteilung projektiver austauschbarer Datensätze gleichbedeutend zur Unabhängigkeit an disjunkten Individuengruppen entnommener Datensätze ist.

Einordnung: Speziell für Graphen ist der zugehörige Limesbegriff der von Lovasz et al. eingeführte Limesbegriff für wachsende dichte Graphen ([Lov12]). Der Zusammenhang zu zufälligen austauschbaren Graphen auf Knotenmenge \mathbb{N} ist in [DJ08] zusammengefasst. Dass man diesen Limesbegriff über die Konvergenz in einem EGG ausdrücken kann, wurde in [Grü15] und dass dieses wiederum äquivalent zu einem Übergang unmarkierter Graphen (Orbits) ist, in [Hag16] herausgestellt. Solche Zusammenhänge sind ebenso in den Arbeiten [Aus12], [Aus08] (für Graphen, Hypergraphen und mehr) und [Ald10] (in allgemeiner Form) dargestellt bzw. angedeutet. Gleichheit von Martinrand und Extrempunktmenge ist ebenfalls eines der Resultate in [EGW17]. Ein Teil des dort angegebenen Beweises wird in der vorliegenden Arbeit auf die allgemeine Situation übertragen. Die Charakterisierung von Extremalität durch Unabhängigkeit disjunkter Teilstrukturen ist bei geeigneter Formulierung auch Teil der Darstellungsergebnisse von Aldous-Hoover-Kallenberg ([Kal06]). In [FHP17] wird speziell für Hierarchien eine analoge Aussage bewiesen. In [Gne97] findet man ebenfalls einen Verweis darauf, dass mit einer Beschreibung der ergodischen austauschbaren Kompositionsstrukturen gleichzeitig auch ein Martinrand beschrieben wurde. Limiten diskreter Strukturen finden in der Literatur bei weitem nicht nur in der Wahrscheinlichkeitstheorie Beachtung. Allgemeine Ansätze für eine Behandlung von Limiten diskreter Strukturen finden sich beispielsweise in [Raz07] und in der kürzlich erschienen Dissertation [Kru16].

III Produkte konsistenter Systeme, Filtrationen und Darstellungen. Eine Stärke der Theorie der Species of Structures ist sicherlich, dass aus vorhandenen Species auf verschiedenste Arten neue zusammengesetzt werden können. Einige dieser Operationen sind auch bei konsistenten Systemen anwendbar. Sind \mathbf{F} und \mathbf{G} zwei konsistente Systeme, so kann man beispielsweise leicht ein neues konsistentes System, das *Produktsystem* $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, einführen. Ab dem dritten Kapitel (genauer ab Abschnitt 3.3) spielt dabei das spezielle konsistente System der *Linearen Ordnungen*, bezeichnet mit \mathbf{Lin} , eine herausragende Rolle. In diesem existiert nur eine einzige projektive austauschbare Verteilung, die der *Gleichverteilten Linearen Ordnung auf \mathbb{N}* , welche man über eine Folge U_1, U_2, \dots unabhängiger und je auf $[0, 1]$ gleichverteilter Zufallsvariablen erklären kann: Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ ist i kleiner j genau dann, wenn $U_i < U_j$ ist. Speziell werden Produktsysteme der Form $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ genauer analysiert. Die Tatsache, dass man lineare Ordnungen auf $[n] = \{1, \dots, n\}$ auf kanonische Weise mit Permutationen von $[n]$ in Bezug setzen kann, erlaubt es, die Verteilungen austauschbarer projektiver Objekte auf Produktsystemen $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ über spezielle homogen markierte Bratellidiagramme (HMB) darzustellen; diese werden durch einen Übergang von linearen Ordnungen zu *relativen Rängen* erhalten. In Kapitel 2 wurden für allgemeine HMB Filtrationen und lokale Innovationsprozesse eingeführt und eine Charakterisierung für die Existenz spezieller funktionaler Darstellungen der zugehörigen stochastischen Objekte und damit einhergehend für die Filtrationen derselben angegeben. Diese Charakterisierung erhält bei Anwendung auf die speziellen HMB, welche aus einem konsistenten System der Form $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ abgeleitet wurde, eine besondere Bedeutung. Die Konvergenz diskreter Strukturen in einem System der Form $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ kann ferner direkt mit der Konvergenz von wachsenden Strukturen im System \mathbf{F} verglichen werden und liefert einen *feineren* Konvergenzbegriff; weniger Folgen konvergieren gegen eine reichhaltigere Menge von Limiten. Hier sind andere Anwendungen als in der eingangs beschriebenen Motivation denkbar.

Abgeschlossen wird Kapitel 3 mit der Vorstellung einer Methode für die Beschreibung von Simplexes austauschbarer Verteilungen und einem Vergleich zu bekannten funktionalen Darstellungsergebnissen von Aldous-Hoover-Kallenberg für austauschbare Arrays.

Einordnung: Die allgemeine Aussage über Filtrationen in HMB, Hauptsatz von Kapitel 2, ist eine Aussage darüber, wann ein gewisser lokaler Innovationsprozess generierend ist. Ganz allgemein geht es dabei um die Frage, wann man Supremums- und Schnittbildung von σ -Algebren vertauschen kann. In voller Allgemeinheit wurde diese Frage in [Wei83] adressiert. Die im Anschluss vorgestellten Begriffe entstammen der Theorie von A. Vershik rund um die Klassifizierung von Filtrationen und sind in wahrscheinlichkeitstheoretischer Notation in den Arbeiten von S. Laurent ([Lau11],[Lau13]) dargestellt. Eine Analyse von Strukturen über Eigenschaften von Produkten mit anderen anderen Strukturen ist beispielsweise in der Ergodentheorie üblich ([Gla03]). Der Zusammenhang zu den Darstellungsergebnissen von Aldous-Hoover-Kallenberg wird später erläutert.

IV Beispiele. Beginnend mit Kapitel 4 werden konkrete konsistente System betrachtet und die allgemeinen Resultate aus dem vorangegangenen Kapitel für diese mit Leben gefüllt. So wird zum Beispiel das System $\mathbf{Lin} \times \mathbf{Lin} \times \dots \times \mathbf{Lin} =: \mathbf{Lin}^{(m)}$ betrachtet und gezeigt, dass

die ergodischen austauschbaren Verteilungen homöomorph durch m -dimensionale Copulas beschrieben werden können. Für den Fall $m = 2$ erhält man darüber als Folgerung der allgemein vorgestellten Aussage ein Resultat, welches in [Hop+13] bewiesen wurde. Bereits im vorherigen Kapitel 3 wird das „einfachste“ konsistente System der Wörter über einem endlichen Alphabet Σ eingeführt, bezeichnet mit $\mathbf{Word}(\Sigma)$. Dieses wird dort parallel zur allgemeinen Begriffsbildung in Form eines fortgeführten Beispiels zur Illustration der dort formulierten Sätze und Definitionen analysiert. In Kapitel 4 wird außerdem das System $\mathbf{Word}(\Sigma) \times \mathbf{Lin}$ betrachtet und neben Klärung der Simplexstruktur wird gezeigt, dass alle ergodischen Verteilungen in den assoziierten Bratellidiagrammen *standard* sind. Dadurch wird ein Resultat aus [Lau16] verallgemeinert. Kapitel 5 behandelt das konsistente System der Hierarchien, bezeichnet mit \mathbf{H} . Dieses wird mit der in Kapitel 3 vorgestellten Methode analysiert und die in dieser Arbeit erhaltenen Resultate werden denen der Arbeiten [FHP17], [EGW17], [Gne97] und [Kin78] gegenübergestellt. Das zu Rémys Kette assoziierte Limesobjekt, eine zufällige kompakte Menge, wird vorgestellt und mögliche Zusammenhänge zu Resultaten der Arbeit [HRS17] aufgezeigt.

In Kapitel 6 werden die in dieser Arbeit vorgestellten Aussagen und Begriffe für das konsistente System der Graphen, bezeichnet mit \mathbf{Graph} , interpretiert und bekannten Aussagen gegenübergestellt. Zuletzt folgen abschließende Bemerkungen.

Abbildung 1.1 zeigte bereits den logischen Aufbau der vorliegenden Arbeit; zunächst werden die allgemeineren, daraufhin die spezielleren Strukturen vorgestellt. In Abschnitt 1.2 sind einige durchgängig verwendete Notationen und Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie festgehalten. Abschnitt 1.3 stellt kurz die verwendeten Begriffe rund um *projektive Systeme topologischer Räume* dar; im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit sind diese Begriffe nützlich und wichtig.

1.2. Notationen und bedingte Verteilungen

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- $f|_{A'} : A' \rightarrow B$, die Einschränkung einer Funktion $f : A \rightarrow B$ auf eine Teilmenge $A' \subseteq A$.
- $\text{id}_A : A \rightarrow A$, die Identität auf einer Menge A .
- $1_A : B \rightarrow \{0, 1\}$, die Indikatorfunktion eine Menge $A \subseteq B$. Ist ϕ ein logischer Ausdruck, so ist $1(\phi) = 1$, falls ϕ wahr ist und 0 sonst. Speziell ist also $1_A(x) = 1(x \in A)$.
- $|A| = \#A$, die Kardinalität einer Menge A .
- $\mathfrak{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$, die Potenzmenge einer Menge A .
- $\mathfrak{P}_k(A) = \{B \in \mathfrak{P}(A) : |B| = k\}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, die Menge aller k -elementigen Teilmengen von A .
- $\mathfrak{P}_{\text{fin}}(A) = \bigcup_{k \geq 0} \mathfrak{P}_k(A)$, die Menge aller endlichen Teilmengen von A .
- $\mathfrak{P}_{\infty}(A) = \mathfrak{P}(A) \setminus \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$, die Menge aller unendlichen Teilmengen von A .

- $\sigma(\mathcal{E})$, die kleinste \mathcal{E} umfassende σ -Algebra auf A für eine Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(A)$.
- $\mathcal{B}(T)$, die Borelsche σ -Algebra auf einem topologischen Raum T .
- $\mathcal{M}_1(T)$, die Menge der Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem topologischen Raum T .
- $\sigma(f_i, i \in I)$, die kleinste σ -Algebra \mathcal{A} auf Ω , die alle Funktionen $f_i : \Omega \rightarrow S_i, i \in I$ $(\mathcal{A}, \mathcal{S}_i)$ -messbar macht, wobei $(S_i, \mathcal{S}_i), i \in I$ messbare Räume sind.
- $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$, ein bedingter Erwartungswert von X unter \mathcal{F} bzgl. \mathbb{P} , wobei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbar mit $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter- σ -Algebra ist.
- $\mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{G}$ wird geschrieben, falls $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ Unter- σ -Algebren sind, sodass es zu jedem $F \in \mathcal{F}$ ein $G \in \mathcal{G}$ mit $\mathbb{P}(F \Delta G) = 0$ gibt.
- $\mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}$ wird geschrieben, falls sowohl $\mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{G}$ als auch $\mathcal{G} \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{F}$ gilt.
- $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ für Unter- σ -Algebren $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$.

Viele später auftauchende maßtheoretische Existenzaussagen rühren daher, dass $(T, \mathcal{B}(T))$ ein Borelraum ist, falls T ein kompakter metrisierbarer Raum ist (siehe Anhang in [Kal02]). Ein messbarer Raum (S, \mathcal{S}) heißt *Borelraum*, falls eine Borelsche Teilmenge $B \subseteq [0, 1]$ und eine bijektive Abbildung $f : S \rightarrow B$ existieren, sodass f und f^{-1} messbar sind, wenn man B mit der Spur- σ -Algebra von $[0, 1]$ ausstattet.

Für einen Borelraum (S, \mathcal{S}) wird ebenfalls $\mathcal{M}_1(S)$ für die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf diesem Raum geschrieben. Die Menge $\mathcal{M}_1(S)$ wird wiederum mit einer messbaren Struktur ausgestattet: Für $A \in \mathcal{S}$ sei

$$i_A : \mathcal{M}_1(S) \rightarrow [0, 1], P \mapsto P(A)$$

und $\mathcal{S}' = \sigma(i_A, A \in \mathcal{S})$ sei die von $i_A, A \in \mathcal{S}$ erzeugte σ -Algebra auf $\mathcal{M}_1(S)$.

Ist $P \in \mathcal{M}_1(S)$ sowie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ eine Unter- σ -Algebra, so nennt man eine $(\mathcal{F}, \mathcal{S}')$ -messbare Abbildung

$$P(\cdot|\mathcal{F}) : S \rightarrow \mathcal{M}_1(S) \text{ mit } P(A|\mathcal{F})(\omega) := P(\cdot|\mathcal{F})(\omega)(A)$$

eine *bedingte Verteilung von P unter \mathcal{F}* , falls $P(A|\mathcal{F}) : S \rightarrow [0, 1], \omega \mapsto P(A|\mathcal{F})(\omega)$ für alle $A \in \mathcal{S}$ ein bedingter Erwartungswert von 1_A unter \mathcal{F} bzgl. P ist.

Ist (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum und sind $X, Y : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_1(S)$ jeweils $(\mathcal{A}, \mathcal{S}')$ -messbare Abbildungen, so ist $\{X = Y\}$ in diesem Fall ein Ereignis, da die σ -Algebra \mathcal{S} eines Borelraumes stets abzählbar erzeugt ist.

Satz 1.2.1 ([Kal02], Theorem 6.3). *Ist (S, \mathcal{S}) ein Borelraum und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ eine Unter- σ -Algebra und $P \in \mathcal{M}_1(S)$, so existiert eine bedingte Verteilung von P unter \mathcal{F} , bezeichnet mit $P(\cdot|\mathcal{F})$, und diese ist P -fast-sicher eindeutig.*

Satz 1.2.2 ([Kal02], Lemma 1.25). *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, S ein Borelraum und F ein beliebiger messbarer Raum. Es seien $X : \Omega \rightarrow S$ und $Y : \Omega \rightarrow F$ messbare Abbildungen. Dann gilt $\sigma(X) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(Y)$ genau dann, wenn es eine messbare Abbildung $h : F \rightarrow S$ mit $X = h(Y)$ \mathbb{P} -fast sicher gibt.*

Es sei T ein kompakt metrisierbarer topologischer Raum und $\mathcal{M}_1(T)$ die Menge der Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße. Für eine beliebige messbare und beschränkte Abbildung $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$i_g : \mathcal{M}_1(T) \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \int_T g dP.$$

Die *Topologie der schwachen Konvergenz auf $\mathcal{M}_1(T)$* ist die kleinste Topologie, unter der die Abbildungen i_f für alle stetigen $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Bekanntlich ist diese Topologie nun ebenfalls kompakt und metrisierbar ([Par67]). In der Folge wird $\mathcal{M}_1(T)$ mit dieser Topologie ebenfalls stets als kompakter metrisierbarer topologischer Raum aufgefasst. Es sei $\mathcal{B}(\mathcal{M}_1(T))$ die zugehörige Borelsche σ -Algebra auf $\mathcal{M}_1(T)$. Ferner ist $\mathcal{B}(\mathcal{M}_1(T))$ die kleinste σ -Algebra, bezüglich derer die Zuordnungen $P \mapsto P(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(T)$ messbar sind. Damit sind bedingte Verteilungen $P(\cdot | \mathcal{F})$ für $P \in \mathcal{M}_1(T)$ in diesem Fall Zufallsgrößen mit Werten in einem kompakten metrisierbaren Raum.

Generell wird in dieser Arbeit eine Unterscheidung der Symbole \mathbb{P} und P vorgenommen. \mathbb{P} wird verwendet, wenn mit einer Zufallsgröße X argumentiert und gearbeitet wird, welche auf einem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert ist. Stehen Aussagen über Wahrscheinlichkeitsmaße (Verteilungen) selber im Fokus, so wird für diese das Symbol P verwendet. Oftmals wird es so sein, dass ein kompakter topologischer Raum T vorliegt, und die Objekte im Fokus eine Teilmenge (Simplex) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1(T)$ bilden. Hier wird dann $P \in \mathcal{M}$ geschrieben. Für viele der später formulierten Aussagen und Beweise ist das Arbeiten mit Zufallsgrößen angenehmer und lesbarer. Statt direkt über die Elemente $P \in \mathcal{M}$ zu sprechen, wird die Aussage dann über eine Zufallsgröße X mit Verteilung $\mathbb{P}^X = P \in \mathcal{M}$ formuliert. Statt \mathbb{P}^X wird gelegentlich auch $\mathcal{L}(X)$ verwendet.

1.3. Projektive Systeme topologischer Räume

Als Referenz für die in diesem Abschnitt vorgestellten Begriffe und Aussagen eignet sich das erste Kapitel in [RZ00].

Projektive Systeme topologischer Räume werden im Verlauf der vorliegenden Arbeit vielfach Verwendung finden und in natürlicher Weise auftreten. Im Allgemeinen besteht ein *projektives System topologischer Räume* aus

- (a) einer gerichteten Menge; das ist ein Tupel (I, \leq) bestehend aus einer nicht-leeren Indexmenge I und einer Halbordnung \leq auf I , sodass zu je zwei Elementen $i, j \in I$ ein $k \in I$ mit $i, j \leq k$ existiert;
- (b) einer Kollektion nicht-leerer topologischer Räume $T_i, i \in I$ und
- (c) einer Kollektion stetiger Abbildungen $\phi_j^i : T_i \rightarrow T_j$ für alle $j \leq i$ mit $\phi_j^i \circ \phi_i^k = \phi_j^k$ für alle $j \leq i \leq k$ und $\phi_i^i = \text{id}_{T_i}$.

Im Folgenden wird nur noch von *projektiven Systemen* gesprochen. Die Abbildungen ϕ sind die Projektionen und das projektive System wird mit $\mathcal{T} = (T_i, \phi_j^i)$ bezeichnet. Liegt ein solches projektives System \mathcal{T} vor, so nennt man einen topologischen Raum T zusammen mit stetigen Abbildungen $\phi_i : T \rightarrow T_i, i \in I$ ein *kompatibles Limesystem* zu \mathcal{T} , falls $\phi_j^i \circ \phi_i = \phi_j$ für alle $i \leq j$ gilt. Das kompatible Limesystem wird mit $\mathcal{T}_\infty = (T, \phi_i)$ bezeichnet. Man nennt das kompatible Limesystem \mathcal{T}_∞ ein *projektives Limesystem* von \mathcal{T} , falls es zu jedem anderen kompatiblen Limesystem $\mathcal{T}'_\infty = (T', \psi_i)$ eine stetige Abbildung $f : T' \rightarrow T$ mit $\phi_i \circ f = \psi_i$ für alle $i \in I$ gibt.

Ein erster Satz in diesem Zusammenhang besagt, dass projektive Limesysteme stets existieren und im folgenden Sinn eindeutig sind: Sind \mathcal{T}_∞ und \mathcal{T}'_∞ zwei projektive Limesysteme, so existiert ein eindeutig bestimmter Homöomorphismus $f : T \rightarrow T'$ mit $\phi_i \circ f = \psi_i$ für alle $i \in I$. Im Allgemeinen kann es passieren, dass die projektiven Limesysteme das „leere System“ sind, der Raum T also der leere topologische Raum ist. Dieser Sachverhalt tritt im späteren Verlauf der Arbeit nicht auf, denn es sind dann stets die Bedingungen des folgenden Satzes erfüllt:

Satz 1.3.1. *Ist \mathcal{T} ein projektives System über einer abzählbaren gerichteten Menge (I, \leq) und ist jedes $T_i, i \in I$ ein kompakt metrisierbarer topologischer Raum, so ist ein projektives Limesystem gegeben durch den Teilraum*

$$\text{Proj}(\mathcal{T}) := \left\{ (x_j)_{j \in I} : x_j \in T_j, \phi_i^j(x_j) = x_i \text{ für alle } i \leq j \right\} \subseteq \prod_{j \in I} T_j,$$

wobei $\prod_{j \in I} T_j$ mit der Produkttopologie versehen wird, zusammen mit den Abbildungen $\phi_i : \text{Proj}(\mathcal{T}) \rightarrow T_i$ gegeben durch $\phi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$. Insbesondere ist $\text{Proj}(\mathcal{T})$ nicht-leer und ebenfalls kompakt metrisierbar. Ist darüber hinaus jede der Abbildungen ϕ_i^j surjektiv, so ist auch ϕ_i für alle i surjektiv.

Das im Satz beschriebene projektive Limesystem wird auch das *kanonische projektive Limesystem* zu \mathcal{T} genannt. Als abzählbare gerichtete Mengen (I, \leq) treten später im Wesentlichen auf: (\mathbb{N}_0, \leq) mit der üblichen Ordnungsrelation \leq auf \mathbb{N} und $(\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq)$, wobei $\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} und \subseteq die Teilmengenrelation ist. Sehr häufig tragen die topologischen Räume T_i später weitere Strukturen (konvexe Mengen, Gruppenwirkungen) und die Projektionen sind mit dieser Struktur verträglich (Affinität, Vertauschen mit Gruppenwirkungen). Diese Strukturen übertragen sich dann auf kanonische Weise auf die projektiven Limesysteme. Liegt ein projektives System $\mathcal{T} = (T_n, \phi_k^n)$ über (\mathbb{N}_0, \leq) vor und ist $\mathcal{T}_\infty = (T, \phi_n)$ ein projektives Limesystem, so wird dieser Sachverhalt auch symbolisch durch

$$T_0 \xleftarrow{\phi_0^1} T_1 \xleftarrow{\phi_1^2} T_2 \xleftarrow{\phi_2^3} T_3 \xleftarrow{\phi_3^4} T_4 \xleftarrow{\phi_4^5} \dots \xleftarrow{\phi_n} T$$

ausgedrückt.

Beispiel 1.3.2. Betrachtet wird die gerichtete Menge $(I, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$ und $T_n = \{0, 1\}^n$ für $n \geq 1$ mit der diskreten Topologie. Für $1 \leq k \leq n$ sei $\phi_k^n : T_n \rightarrow T_k$ definiert durch $\phi_k^n((w_1, \dots, w_n)) := (w_1, \dots, w_k)$. Ein projektives Limesystem ist gegeben durch den

Raum $T = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ versehen mit der Produkttopologie und den Abbildungen $\phi_n : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^n$ mit $\phi_n((w_1, w_2, w_3, \dots)) = (w_1, \dots, w_n)$, symbolisch also

$$\{0, 1\}^1 \xleftarrow{\phi_1^2} \{0, 1\}^2 \xleftarrow{\phi_2^3} \{0, 1\}^3 \xleftarrow{\phi_3^4} \{0, 1\}^4 \xleftarrow{\phi_4^5} \dots \xleftarrow{\phi_n} \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Dieses projektive Limesystem stimmt nicht mit dem kanonischen projektiven Limesystem $\text{Proj}(\mathcal{T})$ aus Satz 1.3.1 überein: Die Elemente in $\text{Proj}(\mathcal{T})$ wären in diesem Beispiel alle Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n = (w_{n,1}, \dots, w_{n,n}) \in \{0, 1\}^n$ und $\phi_k^n(x_n) = x_k$ für alle $1 \leq k \leq n$. Für solche Folgen erhält man natürlich sofort $w_{n,i} = w_{i,i}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und der eindeutig bestimmte Homöomorphismus, welcher die beiden projektiven Limesysteme ineinander überführt, ist gegeben durch

$$f : \text{Proj}(\mathcal{T}) \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, (x_n)_{n \geq 1} \mapsto (w_{i,i})_{i \geq 1}. \quad \triangleleft$$

1.4. Simplizes

Als Referenzen für die in diesem Abschnitt vorgestellten Begriffe und Aussagen eignen sich [Phe01] und [Luk+10].

Es sei $K \subseteq V$ eine nicht-leere kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes über \mathbb{R} , wobei die Spurtopologie auf K metrisierbar sei. In diesem Fall bilden die Extrempunkte von K , bezeichnet mit $\text{ex}(K)$, eine nicht-leere G_δ -Teilmenge und $\text{ex}(K)$ ist als topologischer Teilraum damit polnisch. Insbesondere ist $\text{ex}(K) \in \mathcal{B}(K)$ Element der Borelschen σ -Algebra auf K .

Ist $\mu \in \mathcal{M}_1(K)$ ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf K , so existiert zu diesem μ ein eindeutig bestimmter Punkt $x^\mu \in K$ mit

$$f(x^\mu) = \int f(y) d\mu(y) \quad \text{für alle } f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig und affin.}$$

Die so erhaltene Zuordnung $\mathcal{M}_1(K) \rightarrow K, \mu \mapsto x^\mu$ heißt *Barycenter-Abbildung* und ist stetig und affin, wobei die Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1(K)$ mit der Topologie der schwachen Konvergenz ausgestattet sind. Der Satz von Choquet besagt, dass es in dieser Situation zu jedem $x \in K$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}_1(K)$ mit $\mu(\text{ex}(K)) = 1$ und $x = x^\mu$ gibt. Es sei $r : \mathcal{M}_1(\text{ex}(K)) \rightarrow K, \mu \mapsto x^\mu$ die Einschränkung der Barycenter-Abbildung auf diejenigen Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf die Extrempunkte konzentriert sind. r ist also stets stetig, affin und surjektiv. K heißt *metrisierbarer Choquetsimplex*, in der Folge nur *Simplex*, falls r bijektiv ist. Ein Simplex K heißt *Bauersimplex*, falls die Extrempunkte $\text{ex}(K)$ eine abgeschlossene Teilmenge von K bilden. Das ist gleichbedeutend dazu, dass r stetig invertierbar ist. Ist K ein Simplex und $F \subseteq K$ eine konvexe Teilmenge mit der Eigenschaft, dass für alle $x, y \in K, \alpha \in (0, 1)$ aus $\alpha x + (1 - \alpha)y \in F$ auch $x, y \in F$ folgt, so nennt man F eine *Fläche* in K . Für jede Fläche $F \subseteq K$ gilt $\text{ex}(F) = F \cap \text{ex}(K)$. Ist die Fläche $F \subseteq K$ eine Borelsche Teilmenge und gilt für alle $\mu \in \mathcal{M}_1(\text{ex}(K))$, dass $r(\mu) \in F \Leftrightarrow \mu(\text{ex}(F)) = 1$, so nennt man F eine *messbare Fläche dem Maße nach*. Jede messbare Fläche dem Maße nach ist das Bild von r unter $\mathcal{M}_1(A) \subseteq \mathcal{M}_1(\text{ex}(K))$ für eine messbare Teilmenge $A \subseteq \text{ex}(K)$; in diesem Fall ist

$\text{ex}(F) = A$. Ist $F \subseteq K$ eine abgeschlossene Fläche, so ist F auch eine messbare Fläche dem Maße nach. Insbesondere ist eine abgeschlossene konvexe Teilmenge $F \subseteq K$ genau dann eine Fläche, wenn $\text{ex}(F) \subseteq \text{ex}(K)$ gilt. Nicht jede messbare Fläche ist eine Fläche dem Maße nach:

Beispiel 1.4.1. Betrachtet wird $K = \mathcal{M}_1([0,1])$ ausgestattet mit der Topologie der schwachen Konvergenz. Es sei

$$F = \{P \in \mathcal{M}_1([0,1]) : \text{es gibt endliche Menge } E \subset [0,1] \text{ mit } P(E) = 1\}.$$

$F \subseteq K$ ist eine messbare Fläche, aber es gilt $\text{ex}(F) = \text{ex}(K)$. Damit ist F keine messbare Fläche dem Maße nach. Die Flächeneigenschaft von F stammt hier daher, dass zwar alle Extrempunkte zur Mischung zugelassen sind, die erlaubten Mischungen derselben aber nur eine echte konvexe Teilmenge aller möglichen Mischungen bilden. In messbaren Flächen dem Maße nach ist nur eine messbare Teilmenge aller Extrempunkte zur Mischung zugelassen, die Mischungen dieser unterliegen aber keiner Einschränkung. \triangleleft

Des Weiteren sind abgeschlossene Flächen in Simplizes selbst Simplizes und abgeschlossene Flächen in Bauersimplizes sind selbst wieder Bauersimplizes. Zwei Simplizes K_1, K_2 heißen *isomorph*, in Zeichen $K_1 \simeq K_2$, falls es einen affinen Homöomorphismus (*Isomorphismus*) $f : K_1 \rightarrow K_2$ gibt. Ist f ein Isomorphismus von K_1 nach K_2 , so ist $f|_{\text{ex}(K_1)}$ ein Homöomorphismus von $\text{ex}(K_1)$ nach $\text{ex}(K_2)$. Ist T ein kompakter metrisierbarer topologischer Raum und $\mathcal{M}_1(T)$ die Menge der Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf T ausgestattet mit der Topologie der schwachen Konvergenz, so ist $\mathcal{M}_1(T)$ ein Bauersimplex. Die $\mathcal{M}_1(T)$ umgebenden lokalkonvexen Vektorräume sind beispielsweise über den Rieszschen Darstellungssatz oder alternativ direkt über signierte Maße im Hintergrund vorhanden.

Jeder Bauersimplex ist bzgl. Isomorphie von dieser Form: Ist K ein Bauersimplex, so ist r ein Isomorphismus von $\mathcal{M}_1(\text{ex}(K))$ nach K . Zwei Bauersimplizes sind genau dann isomorph, wenn ihre Extrempunktengen homöomorph sind. Für einen kompakten metrisierbaren Raum T ist $\text{ex}(\mathcal{M}_1(T)) = \{\delta_x : x \in T\}$ via $x \mapsto \delta_x$ stets homöomorph zu T und damit sind Bauersimplizes der Form $\mathcal{M}_1(T_1)$ und $\mathcal{M}_1(T_2)$ genau dann isomorph, wenn T_1 und T_2 homöomorph sind. Diese Äquivalenz gilt nicht für alle Simplizes; im Allgemeinen ist die Simplexstruktur nicht eindeutig durch die topologische Struktur der Extrempunkte determiniert. In Kontrast zu einem Bauersimplex steht „der“ Poulsen-simplex: Ein Simplex K heißt *Poulsen-simplex*, wenn $|\text{ex}(K)| > 1$ und $\text{ex}(K)$ in K dicht liegt. Alle Poulsen-simplizes sind isomorph zueinander. Diese und viele weitere interessante Aussagen findet man in [LOS78]. In der Folge wird daher auch von *dem* Poulsen-simplex gesprochen.

Wie bereits angedeutet sind die im weiteren Verlauf der Arbeit auftretenden Simplizes häufig Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen; betrachtet werden Simplizes $K \subseteq \mathcal{M}_1(T)$, wobei T ein kompakter metrisierbarer topologischer Raum ist und die Topologien die der schwachen Konvergenz sind. Wichtig ist hier die konkrete Form der Barycenter-Abbildung: Ist $\mu \in \mathcal{M}_1(K)$ und $K \subseteq \mathcal{M}_1(T)$ ein Simplex, so ist das Barycenter

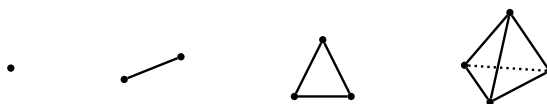


Abb. 1.2.: Simplizes mit 1, 2, 3 und 4 Extrempunkten. Das letzte Bild sollte drei-dimensional aufgefasst werden.

$P^\mu := r(\mu) \in K$ von μ in K dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß auf T mit

$$P^\mu(A) = \int_{\text{ex}(K)} Q(A) d\mu(Q) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(T).$$

Beispiel 1.4.2. Ein Simplex K heißt *endlich-dimensional*, falls $|\text{ex}(K)| < \infty$ eine endliche Menge ist. Alle endlich-dimensionalen Simplizes sind Bauersimplizes und damit sind endlich-dimensionale Simplizes genau dann isomorph, wenn ihre Extrempunktmenge die gleiche Mächtigkeit haben. Ein kanonischer Vertreter ist jeweils wie folgt gegeben: Für $m \geq 1$ sei $\mathcal{M}_1([m])$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[m] = \{1, \dots, m\}$. Die Extrempunkte von $\mathcal{M}_1([m])$ sind die Einpunktmaße $\delta_i, i \in [m]$. Jeder endlich-dimensionale Simplex K mit $m := |\text{ex}(K)|$ ist isomorph zu $\mathcal{M}_1([m])$. Man betrachte auch Abbildung 1.2. ◁

Einige der später auftauchenden Simplizes und Isomorphismen zwischen Simplizes entstehen wie folgt, einen Beweis findet man im Anhang.

Satz 1.4.3. *Es seien T_1, T_2 kompakte metrisierbare Räume, $f : T_1 \rightarrow T_2$ ein Homöomorphismus und $K_1 \subseteq \mathcal{M}_1(T_1)$ ein Simplex. Dann ist*

$$K_2 := \{P^f : P \in K_1\} \subseteq \mathcal{M}_1(T_2)$$

ebenfalls ein Simplex und

$$K_1 \rightarrow K_2, P \mapsto P^f$$

ist ein Isomorphismus.

1.5. Topologische dynamische Systeme

Als Referenzen für diesen Abschnitt eignen sich [Gla03] (speziell Kapitel 8, Abschnitt 2) und [Kal06] (Anhang A.1 und Referenzen darin).

Ein *topologisches dynamisches System* ist ein Tupel (T, Γ) bestehend aus

- (a) einem kompakten, metrisierbaren topologischen Raum T ,
- (b) einer abzählbaren Gruppe Γ mit neutralem Element id , Multiplikation $\pi \cdot \sigma$ und Inversion π^{-1} , sowie
- (c) einer stetigen Gruppenwirkung von Γ auf T , das ist eine Zuordnung $\Gamma \times T \rightarrow T, (\pi, x) \mapsto \pi \cdot x$, welche $\pi \cdot (\sigma \cdot x) = (\pi \cdot \sigma) \cdot x$ und $\text{id} \cdot x = x$ für alle $\pi, \sigma \in \Gamma$ und $x \in T$ erfüllt, derart dass $T \rightarrow T, x \mapsto \pi \cdot x$ für alle $\pi \in \Gamma$ stetig ist.

Damit ist die Zuordnung $x \mapsto \pi.x$ automatisch für alle $\pi \in \Gamma$ ein Homöomorphismus auf T . Wie üblich sei $\mathcal{B}(T)$ die Borelsche σ -Algebra auf T . Es sei $\mathcal{I}^\Gamma \subseteq \mathcal{B}(T)$ die Unter- σ -Algebra der bzgl. Γ *invarianten Ereignisse*. Es ist also $A \in \mathcal{I}^\Gamma$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{B}(T)$ und $\pi.A = \{\pi.x : x \in A\} = A$ für alle $\pi \in \Gamma$ gilt. Die Menge der unter Γ *invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße*, $\mathcal{M}_1(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}_1(T)$, besteht aus allen Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaßen P auf T mit $P^{\pi \cdot} = P$ für alle $\pi \in \Gamma$. Wie üblich wird $\mathcal{M}_1(T)$ mit der Topologie der schwachen Konvergenz ausgestattet als kompakter metrisierbarer Raum aufgefasst. Der Satz über die *ergodische Zerlegung* lautet:

Satz 1.5.1. *Ist $\mathcal{M}_1(\Gamma) \neq \emptyset$, so ist $\mathcal{M}_1(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}_1(T)$ ein Simplex. Für alle $P \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ gilt $P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Gamma))$ genau dann wenn P ergodisch ist, also $P(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{I}^\Gamma$ gilt. Ferner ist $P(\cdot | \mathcal{I}^\Gamma)$ P -fast-sicher Element von $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Gamma))$ und die Verteilung $\mu^P := \mathcal{L}(P(\cdot | \mathcal{I}^\Gamma))$ von $P(\cdot | \mathcal{I}^\Gamma)$ unter P ist diejenige mit Barycenter P , also*

$$P(B) = \int_{\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Gamma))} Q(B) d\mu^P(Q) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(T).$$

Die nachfolgend formulierten Aussagen findet man in [Lin01] oder alternativ auch in [Gla03].

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz Γ -invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße ist die Amenabilität der Gruppe Γ . Dabei heißt die abzählbare diskrete Gruppe Γ *amenabel*, falls es zu jeder endlichen Teilmenge $A \subseteq \Gamma$ und jedem $\delta > 0$ eine endliche Menge $F \subseteq \Gamma$ gibt, sodass $|F \Delta \gamma.F| < \delta|F|$ für alle $\gamma \in A$ gilt. Eine solche Menge F heißt (A, δ) -*invariant*. Eine Folge F_1, F_2, \dots endlicher Teilmengen von Γ heißt *Følner-Sequenz*, falls für alle endlichen $K \subseteq \Gamma$ und alle $\delta > 0$ alle bis auf endlich viele der F_n (K, δ) -invariant sind. Ferner heißt eine Folge endlicher Teilmengen F_1, F_2, \dots von Γ *temperiert*, falls es ein $C > 0$ gibt, sodass $|\bigcup_{k \leq n} F_k^{-1}.F_{n+1}| \leq C|F_{n+1}|$ für alle $n \geq 1$ gilt. Amenabilität von Γ , Existenz einer Følner-Sequenz in Γ und Existenz einer temperierten Følner-Sequenz in Γ sind äquivalente Eigenschaften. Temperierte Følner-Sequenzen schöpfen Γ hinreichend reichhaltig aus, um den Satz von Birkhoff erhalten zu können:

Satz 1.5.2 ([Lin01]). *Es sei $P \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ und F_1, F_2, \dots sei eine temperierte Følner-Sequenz in Γ . Es sei $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $E(|f|) = \int |f| dP < \infty$. Dann konvergiert das Mittel von f über F_n , gegeben durch $|F_n|^{-1} \sum_{\pi \in F_n} f \circ (\pi \cdot)$, mit $n \rightarrow \infty$ P -fast-sicher (und in L^1) gegen $E(f | \mathcal{I}^\Gamma)$, den bedingten Erwartungswert von f unter \mathcal{I}^Γ bzgl. P .*

Beispiel 1.5.3. Es sei $\Gamma = \mathbb{S}_\infty$ die Menge derjenigen bijektiven Abbildungen $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\pi(i) = i$ für schließlich alle $i \in \mathbb{N}$. Mit der Hintereinanderausführung von Funktionen ist \mathbb{S}_∞ damit eine abzählbare Gruppe. Es sei $T = \{0, 1\}^\mathbb{N}$ ausgestattet mit der Produkttopologie. Für $\pi \in \mathbb{S}_\infty$ und $x = (w_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T$ sei $\pi.x := (w_{\pi^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}$. Damit ist eine Gruppenwirkung von \mathbb{S}_∞ auf $\{0, 1\}^\mathbb{N}$ wie oben beschrieben gegeben. Die Menge $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ besteht nun aus allen Wahrscheinlichkeitsmaßen P auf $T = \{0, 1\}^\mathbb{N}$ mit $P^{\pi \cdot} = P$; das sind genau die Verteilungen von austauschbaren $\{0, 1\}$ -wertigen Prozessen. \mathbb{S}_∞ ist amenabel: Für $n \geq 1$ sei $F_n \subseteq \mathbb{S}_\infty$ die Menge derjenigen Bijektionen $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\pi(i) = i$ für alle $i > n$. Die Folge F_1, F_2, \dots ist eine temperierte Følner-Sequenz in \mathbb{S}_∞ . Mit $P = \mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ für einen austauschbaren $\{0, 1\}$ -wertigen stochastischen Prozess $X = (X_1, X_2, X_3, \dots)$

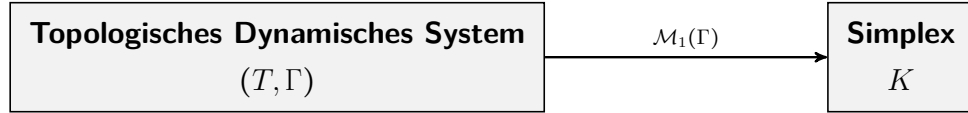


Abb. 1.3.: Wie beschrieben liefert ein topologisches dynamisches System (T, Γ) den Simplex $K = \mathcal{M}_1(\Gamma)$ der bzgl. Γ invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße auf T .

ist $\mathcal{E} := X^{-1}(\mathcal{I}^\Gamma)$ die σ -Algebra der bzgl. X austauschbaren Ereignisse. Für $n \geq 1$ sei \mathbb{S}_n die Menge der Permutationen von $[n] := \{1, \dots, n\}$. Setzt man jede solche Bijektion durch die Identität zu einer Bijektion von \mathbb{N} nach \mathbb{N} fort, erhält man genau die Menge F_n . Betrachtet man $k \geq 1$ und $(a_1, \dots, a_k) \in \{0, 1\}^k$ fest, so konvergiert der Ausdruck $(n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : X_{\pi^{-1}(1)} = a_1, \dots, X_{\pi^{-1}(k)} = a_k\}$ nach Satz 1.5.2 mit $n \rightarrow \infty$ fast sicher gegen $\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_k = a_k | \mathcal{E})$. Elementare kombinatorische Überlegungen zeigen: Mit $Y_n := X_1 + \dots + X_n$ als Anzahl der Einsen unter den ersten n X -Werten und $j = a_1 + \dots + a_k$ als Anzahl der Einsen im Muster $(a_1, \dots, a_k) \in \{0, 1\}^k$ erhält man

$$\frac{1}{n!} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : X_{\pi^{-1}(1)} = a_1, \dots, X_{\pi^{-1}(k)} = a_k\} = \frac{1}{\binom{k}{j}} \frac{\binom{Y_n}{j} \binom{n-Y_n}{k-j}}{\binom{n}{k}}.$$

Insbesondere konvergieren auch die Ausdrücke $\binom{n}{k}^{-1} \binom{Y_n}{j} \binom{n-Y_n}{k-j}$ fast sicher. Speziell für $k = 1$ liefert das die fast sichere Konvergenz von Y_n/n gegen eine $[0, 1]$ -wertige Zufallsvariable Y_∞ und mit dieser erhält man schließlich die fast sicher gültige Identität

$$\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_k = a_k | \mathcal{E}) = Y_\infty^{a_1 + \dots + a_k} (1 - Y_\infty)^{k - (a_1 + \dots + a_k)} = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(X_i = a_i | \mathcal{E}).$$

Anders ausgedrückt: Jeder $\{0, 1\}$ -wertige austauschbare Prozess X ist iid gegeben \mathcal{E} ; das ist der berühmte *Satz von de Finetti*. Satz 1.5.1 wird speziell zur Aussage: Jeder austauschbare $\{0, 1\}$ -wertige Prozess ist ein zweistufiges Experiment, in welchem zuerst ein Parameter $p \in [0, 1]$ gemäß einer Verteilung $\mu \in \mathcal{M}_1([0, 1])$ gezogen und dann ein iid-Prozess mit Parameter p ausgeführt wird. Insbesondere ist $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ in diesem Beispiel ein Bauersimplex, welcher isomorph zum Simplex $\mathcal{M}_1([0, 1])$ ist; die Extrempunkte sind hier homöomorph zum Einheitsintervall. Dieses Beispiel wird im Wesentlichen auch in [Gla03], Kapitel 8.4 diskutiert; dort ist $T = S^\mathbb{Z}$ mit kompaktem metrischen Raum S und Γ ist die Gruppe aller endlichen Bijektionen $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. \triangleleft

Beispiel 1.5.4. Es sei $\Gamma = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition als Gruppenstruktur. \mathbb{Z} ist amenabel; eine temperierte Følner-Sequenz ist durch $F_n = \{0, 1, \dots, n\}$ gegeben. Es sei Σ eine endliche Menge und $T = \Sigma^\mathbb{Z}$ die Menge der zweiseitigen Folgen. Ausgestattet mit der üblichen diskreten Produkttopologie ist T damit ein kompakter metrisierbarer Raum. Für $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $\pi \in \mathbb{Z}$ sei $\pi.x := (x_{i+\pi})_{i \in \mathbb{Z}}$. Der Simplex $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ ist hier der Poulsensimplex (siehe z.B. [Phe01]). In Abschnitt 2.4 wird dieser Simplex erneut betrachtet. \triangleleft

Abbildung 1.3 zeigt die erste Stufe des bereits angekündigten Strukturdiagrammes.

1.6. Equipped Graded Graphs

Die Terminologie *Equipped Graded Graph* ist der Arbeit [Ver15a] entnommen. Beweise vieler Aussagen findet man auch in [Hag16] (in Verbindung mit Bemerkung 1.6.14).

Es sei $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots$ eine Folge endlicher nicht-leerer Mengen mit $|\mathbb{F}_0| = 1$. Es sei $\mathbb{F} := \bigsqcup_{n \geq 0} \mathbb{F}_n$ die disjunkte Vereinigung der \mathbb{F}_n . Es liege ein System von *Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten* $\theta = (\theta_k^n, 0 \leq k \leq n)$ vor. Das bedeutet: Für alle $0 \leq k \leq n$ ist

$$\theta_k^n : \mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_n \longrightarrow [0, 1]$$

eine Abbildung und diese erfüllen die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\theta_n^n(x, y) = 1(x = y)$ für alle $n \geq 0$ und $x, y \in \mathbb{F}_n$.
- (ii) $\sum_{x \in \mathbb{F}_k} \theta_k^n(x, y) = 1$ für alle $0 \leq k \leq n$ und $y \in \mathbb{F}_n$.
- (iii) $\theta_k^n(x, y) = \sum_{z \in \mathbb{F}_m} \theta_k^m(x, z) \theta_m^n(z, y)$ für alle $0 \leq k \leq m \leq n$ und $x \in \mathbb{F}_k, y \in \mathbb{F}_n$.

Die Kollektion (\mathbb{F}, θ) heißt *Equipped Graded Graph* (EGG). Aufgrund der drei genannten Eigenschaften sowie der Forderung $|\mathbb{F}_0| = 1$ ist das gesamte Funktionensystem θ bereits eindeutig durch $(\theta_{n-1}^n, n \geq 2)$ determiniert. Liegt eine Folge endlicher Mengen $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \dots$ wie zu Beginn vor und sind für alle $n \geq 2$ Funktionen $\theta_{n-1}^n : \mathbb{F}_{n-1} \times \mathbb{F}_n \rightarrow [0, 1]$ mit Eigenschaft (ii) gegeben, so kann man daraus einen Equipped Graded Graph eindeutig konstruieren, indem man die Eigenschaften (i) als Definition für θ_n^n und induktiv Eigenschaft (iii) als Definition für θ_k^n für diejenigen $0 \leq k \leq n$ mit $n - k \geq 2$ verwendet. In späteren Situationen wird \mathbb{F}_0 häufig nicht extra spezifiziert oder \mathbb{F}_0 enthält mehr als ein Element.

Man kann EGGs auch als inverse Systeme endlich-dimensionaler Simplizes mit affinen Projektionen verstehen: Fasst man jede der endlichen Mengen \mathbb{F}_n , ausgestattet mit der Potenzmenge, als kompakten metrisierbaren Raum auf, so ist die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$ auf \mathbb{F}_n ein Simplex. Jedes $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$ ist eindeutig durch die Funktion $p(x) := P(\{x\})$ bestimmt. Die Menge $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$ wird darüber mit der Menge aller Funktionen $p : \mathbb{F}_n \rightarrow [0, 1]$ mit der Eigenschaft $\sum_{x \in \mathbb{F}_n} p(x) = 1$ identifiziert. Ist p eine solche Funktion und $0 \leq k \leq n$, so ist $x \mapsto \sum_{y \in \mathbb{F}_n} \theta_k^n(x, y) p(y)$ Element von $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_k)$. Man kann θ_k^n also als Funktion $\theta_k^n : \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_k)$ auffassen. Eigenschaft (iii) wird zu $\theta_k^m \circ \theta_m^n = \theta_k^n$ für alle $0 \leq k \leq m \leq n$ und Eigenschaft (i) wird zu $\theta_n^n = \text{id}_{\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)}$. Die so konstruierten θ_k^n sind darüberhinaus affin und stetig. Zusammengefasst: Ein EGG liefert auf kanonische Weise ein projektives System über der gerichteten Menge (\mathbb{N}_0, \leq) mit Grundmengen $T_n = \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$ und affinen Projektionen $\theta_k^n : \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_k)$. Jede affine Abbildung $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_k)$ ist eindeutig durch die Bilder der Einpunktmaße $\delta_y, y \in \mathbb{F}_n$ determiniert; insbesondere ist damit jedes System von affinen Projektionen auf den Grundmengen $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_0), \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_1), \dots$ wie eben aus einem Equipped Graded Graph konstruiert. In diesem Sinne ist ein EGG auf den Grundmengen $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \dots$ nichts anderes als ein projektives System auf den Grundmengen $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_0), \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_1), \dots$ in welchem die Projektionen zusätzlich affin sind. Mehr zu dieser Sichtweise findet man in [Ver15a]. Zur Veranschaulichung betrachte man auch Abbildung 1.4.

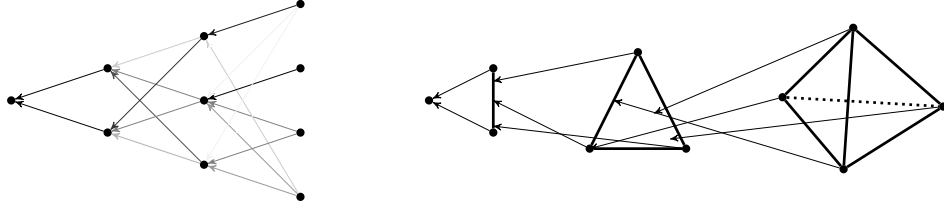


Abb. 1.4.: Links der Beginn eines EGG mit $\#\mathbb{F}_n = n + 1$ für $n \geq 0$. Die Dicke der gezeichneten Pfeile zwischen den Ebenen ist höher, je größer der Wert $\theta_{n-1}^n(x, y)$ ist. Rechts der Beginn der daraus konstruierten Folge von Simplexes und Projektionen. Da die Projektionen affin sind, wird nur gezeichnet, worauf die jeweiligen Extrempunkte abgebildet werden.

Der kanonische projektive Limesraum, welcher von einem Equipped Graded Graph (\mathbb{F}, θ) ausgeht, besteht nun also aus allen Folgen $p = (p_0, p_1, \dots)$ mit $p_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$ und $p_k(x) = \sum_{y \in \mathbb{F}_n} \theta_k^n(x, y) p_n(y)$ für alle $0 \leq k \leq n$ und $x \in \mathbb{F}_k$. Es sei $\mathcal{P}_1(\theta)$ die Kollektion aller dieser p . Eine Folge $(p^m)_{m \geq 1} \subseteq \mathcal{P}_1(\theta)$ konvergiert in der induzierten Topologie nun genau dann gegen ein $p \in \mathcal{P}_1(\theta)$, wenn $p_n^m(x) \rightarrow p_n(x)$ für alle $n \geq 0, x \in \mathbb{F}_n$ mit $m \rightarrow \infty$. Mit $p = (p_0, p_1, \dots), q = (q_0, q_1, \dots) \in \mathcal{P}_1(\theta)$ und $\alpha \in [0, 1]$ ist auch

$$\alpha p + (1 - \alpha)q := (\alpha p_0 + (1 - \alpha)q_0, \alpha p_1 + (1 - \alpha)q_1, \dots) \in \mathcal{P}_1(\theta).$$

Ein erster klassischer Satz besagt:

Satz 1.6.1. $\mathcal{P}_1(\theta)$ ist ein Simplex. Populärer ausgedrückt: Affin projektive Limiten endlich-dimensionaler Simplexes sind wieder Simplexes.

Einen Beweis dieser Aussage findet man beispielsweise in [Luk+10], Abschnitt 12.2.D. Hier ist $\prod_{n \geq 1} \mathbb{R}^{\mathbb{F}_n}$ der $\mathcal{P}_1(\theta)$ umfassende lokalkonvexe topologische Vektorraum. Bezeichnet $\text{ex}(\mathcal{P}_1(\theta)) \subseteq \mathcal{P}_1(\theta)$ die Extrempunkte, so bedeutet Satz 1.6.1 insbesondere, dass zu jedem $p = (p_1, p_2, \dots) \in \mathcal{P}_1(\theta)$ ein eindeutig bestimmtes $\mu \in \mathcal{M}_1(\text{ex}(\mathcal{P}_1(\theta)))$ mit der Eigenschaft

$$p_k(x) = \int_{\text{ex}(\mathcal{P}_1(\theta))} q_k(x) d\mu(q) \quad \text{für alle } k \geq 1, x \in \mathbb{F}_k$$

existiert.

Über den Kolmogorovschen Erweiterungssatz (Theorem 6.16 in [Kal02]) erhält man einen alternativen projektiven Limes, welcher die Brücke zur Wahrscheinlichkeitstheorie schlägt und kanonisch isomorph zu $\mathcal{P}_1(\theta)$ ist. Betrachtet wird ein stochastischer Prozess $X = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ mit $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{F}_n) = 1$ für alle $n \geq 0$. Die Zukunft ab $n \geq 0$ ist durch die σ -Algebra $\mathcal{G}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ gegeben. Der stochastische Prozess X ist eine Markovkette mit Rückwärtsdynamik θ , falls

$$\mathbb{P}(X_k = x | \mathcal{G}_n) = \theta_k^n(x, X_n) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher für alle } 0 \leq k \leq n \text{ und } x \in \mathbb{F}_k$$

gilt. Äquivalent dazu ist, dass für alle $n \geq 0$ und $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_0 \times \dots \times \mathbb{F}_n$

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \theta_0^1(x_0, x_1) \theta_1^2(x_1, x_2) \dots \theta_{n-1}^n(x_{n-1}, x_n) \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

gilt. Es sei

$$\mathcal{M}_1(\theta) := \{\mathcal{L}(X) : X = (X_n)_{n \geq 1} \text{ ist Markovkette mit Rückwärtsdynamik } \theta\}$$

die Menge aller Verteilungen von Markovketten mit Rückwärtsdynamik θ . Ein solcher Prozess X ist ein Zufallselement mit Werten im Pfadraum

$$\text{Path}(\mathbb{F}) := \mathbb{F}_0 \times \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3 \times \dots.$$

Dieser ist mit der Produkttopologie versehen wiederum ein kompakt metrisierbarer topologischer Raum und $\mathcal{M}_1(\theta)$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{M}_1(\text{Path}(\mathbb{F}))$, der Menge aller Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\text{Path}(\mathbb{F})$. Damit erhält man nun folgenden strukturellen Zusammenhang zu $\mathcal{P}_1(\theta)$:

Satz 1.6.2. $\mathcal{M}_1(\theta)$ ist ein Simplex. Für jedes $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\theta)$ ist $(\mathbb{P}^{X_n})_{n \geq 0} \in \mathcal{P}_1(\theta)$ und diese Zuordnung ist ein Isomorphismus von $\mathcal{M}_1(\theta)$ nach $\mathcal{P}_1(\theta)$. Insbesondere ist auch $\mathcal{M}_1(\theta)$ mit den Abbildungen $\mathbb{P}^X \mapsto \mathbb{P}^{X_n}, n \geq 0$ ein projektives Limesystem zu dem oben beschriebenen projektiven System $(\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n), \theta_k^n)$.

Mit der in Abschnitt 1.3 eingeführten Schreibweise gilt also

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_0) \xleftarrow{\theta_0^1} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_1) \xleftarrow{\theta_1^2} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_2) \xleftarrow{\theta_2^3} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_3) \xleftarrow{\theta_3^4} \dots \xleftarrow{\mathbb{P}^{X_n}} \mathcal{M}_1(\theta).$$

Zu einer Markovkette X auf \mathbb{F} mit Rückwärtsdynamik θ , also $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\theta)$, seien

$$\mathcal{G}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_\infty := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{G}_n.$$

Lemma 1.6.3. Für alle $k \geq 0$ und $x \in \mathbb{F}_k$ ist der Prozess $(\theta_k^n(x, X_n))_{n \geq k}$ ein Rückwärtsmartingal bzgl. der Rückwärtsfiltration $(\mathcal{G}_n)_{n \geq k}$. Insbesondere gilt $\mathbb{E}(\theta_k^n(x, X_n)) = \mathbb{P}(X_k = x)$ für alle $n \geq k$ und $\theta_k^n(x, X_n)$ konvergiert mit $n \rightarrow \infty$ fast sicher gegen $\mathbb{P}(X_k = x | \mathcal{G}_\infty)$. Die terminale σ -Algebra \mathcal{G}_∞ wird \mathbb{P} -fast sicher von den Zufallsgrößen $\mathbb{P}(X_k = x | \mathcal{G}_\infty), k \geq 0, x \in \mathbb{F}_k$ erzeugt.

Beweis. Es wird nur die letzte Aussage begründet. Es sei $k \geq 0$ und $x_i \in \mathbb{F}_i, 0 \leq i \leq k$. Da X eine Markovkette ist, erhält man

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k | \mathcal{G}_\infty) = \theta_0^1(x_0, x_1) \theta_1^2(x_1, x_2) \dots \theta_{k-1}^k(x_{k-1}, x_k) \mathbb{P}(X_k = x | \mathcal{G}_\infty)$$

fast sicher. Die Behauptung folgt dann mit Lemma A.2.5. \square

Man erhält darüber ein Analogon zu den Sätzen 1.5.1 und 1.5.2, die „ergodische Zerlegung“ wird nun zur „terminalen Zerlegung“.

Satz 1.6.4. Es sei $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\theta)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\mathbb{P}^X \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta))$.
2. \mathcal{G}_∞ ist \mathbb{P} -trivial.
3. Für alle $k \geq 0$ und $x \in \mathbb{F}_k$ konvergiert $\theta_k^n(x, X_n)$ mit $n \rightarrow \infty$ \mathbb{P} -fast sicher gegen die Konstante $\mathbb{P}(X_k = x)$.
4. Für alle $k \geq 0$ und $x \in \mathbb{F}_k$ konvergiert die Varianz von $\theta_k^n(x, X_n)$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null.

Beweis. 1. \Rightarrow 2.: Angenommen \mathcal{G}_∞ ist nicht \mathbb{P} -trivial. Sei $A \in \mathcal{G}_\infty$ mit $\mathbb{P}(A) \in (0, 1)$. Da A ein terminales Ereignis und X eine Markovkette ist, sind $\mathbb{P}(X \in \cdot | A)$ und $\mathbb{P}(X \in \cdot | A^C)$ jeweils verschiedene Elemente von $\mathcal{M}_1(\theta)$. Damit ist

$$\mathbb{P}(X \in \cdot) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(X \in \cdot | A) + (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(X \in \cdot | A^C)$$

eine nicht-triviale Konvexkombination in $\mathcal{M}_1(\theta)$ und $\mathbb{P}(X \in \cdot)$ somit nicht extremal.

2. \Rightarrow 3.: Die Behauptung folgt aus Lemma 1.6.3 zusammen mit $\mathbb{P}(X_k = x | \mathcal{G}_\infty) = \mathbb{P}(X_k = x)$ fast sicher im Falle der \mathbb{P} -trivialität von \mathcal{G}_∞ .

3. \Rightarrow 1.: Für $k \geq 0$ und $x \in \mathbb{F}_k$ sei $p_k(x) := \mathbb{P}(X_k = x)$. Betrachtet wird das Ereignis

$$A := \{(x_n)_{n \geq 0} \in \text{Path}(\mathbb{F}) : \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_k^n(x, x_n) = p_k(x) \text{ für alle } k \geq 0, x \in \mathbb{F}_k\}.$$

Eigenschaft 3. liefert $\mathbb{P}(X \in A) = 1$. Es sei $\alpha \in (0, 1)$ und Y, Z seien Prozesse mit $\mathbb{P}(Y \in \cdot), \mathbb{P}(Z \in \cdot) \in \mathcal{M}_1(\theta)$. Es gelte $\mathbb{P}(X \in \cdot) = \alpha\mathbb{P}(Y \in \cdot) + (1 - \alpha)\mathbb{P}(Z \in \cdot)$. Aus $\mathbb{P}(X \in A) = 1$ folgt damit auch $\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}(Z \in A) = 1$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_k^n(x, Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_k^n(x, Z_n) = p_k(x) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher für alle } k \geq 0, x \in \mathbb{F}_k.$$

Darüber erhält man mit Lemma 1.6.3

$$\mathbb{P}(Y_k = x | \bigcap_{n \geq 1} \sigma(Y_n, Y_{n+1}, \dots)) = \mathbb{P}(Z_k = x | \bigcap_{n \geq 1} \sigma(Z_n, Z_{n+1}, \dots)) = p_k(x)$$

fast sicher für alle $k \geq 0, x \in \mathbb{F}_k$. Wieder Lemma 1.6.3 liefert, dass $\bigcap_{n \geq 1} \sigma(Y_n, Y_{n+1}, \dots)$ und $\bigcap_{n \geq 1} \sigma(Z_n, Z_{n+1}, \dots)$ jeweils \mathbb{P} -trivial sind. Darüber folgt dann

$$\mathbb{P}(Y_k = x) = \mathbb{P}(Z_k = x) = \mathbb{P}(X_k = x) \quad \text{für alle } k \geq 0, x \in \mathbb{F}_k.$$

Damit sind X, Y und Z Markovketten mit Rückwärtsdynamik θ und identischen eindimensionalen Randverteilungen. Dieses impliziert $\mathbb{P}^Y = \mathbb{P}^Z = \mathbb{P}^X$ und damit die Extremalität von \mathbb{P}^X , denn die einzigen Konvexkombinationen von \mathbb{P}^X mit nicht-trivialem $\alpha \in (0, 1)$ sind damit ebenfalls trivial.

3. \Leftrightarrow 4.: Der Prozess $(\theta_k^n(x, X_n))_{n \geq k}$ ist bzgl. $(\mathcal{G}_n)_{n \geq k}$ ein $[0, 1]$ -wertiges Rückwärtsmartingal. Damit erhält man aus der allgemeinen Theorie neben der fast sicheren auch die L^p Konvergenz, $p \geq 1$. Insbesondere erhält man für die Varianz damit aus Lemma 1.6.3 zunächst $\text{Var}(\theta_k^n(x, X_n)) \rightarrow \text{Var}(\mathbb{P}(X_k = x | \mathcal{G}_\infty))$ für alle $k \geq 0, x \in \mathbb{F}_k$ mit $n \rightarrow \infty$. Darüber folgt die Behauptung. \square

Eine weitere interessante Konstruktion im Zusammenhang mit EGGs ist der *Martinrand*.

Eine Folge $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{F}$ mit $x_n \in \mathbb{F}_{m_n}$ und $m_n \rightarrow \infty$ heißt θ -konvergent, falls $\theta_k^{m_n}(x, x_n)$ für alle $k \geq 0, x \in \mathbb{F}_k$ mit $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Jede θ -konvergente Folge \mathbf{x} liefert damit eine Limesfunktion $p^\mathbf{x} = (p_0^\mathbf{x}, p_1^\mathbf{x}, \dots)$ mit $p_k^\mathbf{x}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_k^{m_n}(x, x_n)$ für alle $k \geq 0$ und $x \in \mathbb{F}_k$. Man überzeugt sich leicht davon, dass $p^\mathbf{x} \in \mathcal{P}_1(\theta)$. Es sei $\partial\mathcal{P}_1(\theta)$ die Menge aller solchen $p^\mathbf{x}$. Das Bild von $\partial\mathcal{P}_1(\theta)$ unter dem Isomorphismus in Satz 1.6.2 besteht aus genau denjenigen Wahrscheinlichkeitsmaßen $P^\mathbf{x}$ auf $\text{Path}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}_0 \times \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \dots$, deren endlich-dimensionale Randverteilungen von der Form

$$P^\mathbf{x}(\{(y_0, \dots, y_k)\} \times \mathbb{F}_{k+1} \times \mathbb{F}_{k+2} \times \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_0^1(y_0, y_1) \theta_1^2(y_1, y_2) \cdots \theta_{k-1}^k(y_{k-1}, y_k) \theta_k^{m_n}(y_k, x_n)$$

für eine θ -konvergente Folge $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \in \mathbb{F}_{m_n}$ sind. Es sei $\partial\mathcal{M}_1(\theta) \subseteq \mathcal{M}_1(\theta)$ die Menge dieser Verteilungen auf $\text{Path}(\mathbb{F})$. Die Menge $\partial\mathcal{M}_1(\theta)$ bzw. $\partial\mathcal{P}_1(\theta)$ heißt im folgenden *Martinrand*.

Bemerkung 1.6.5. Zur Terminologie „Martinrand“ sei an dieser Stelle auf [Ver15a], Abschnitt 2.2 und die dort genannten Referenzen verwiesen.

Ein weiterer fundamentaler Zusammenhang besagt:

Satz 1.6.6. *Es gilt stets $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta)) \subseteq \overline{\text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta))} \subseteq \partial\mathcal{M}_1(\theta) \subseteq \mathcal{M}_1(\theta)$. Ferner ist $\partial\mathcal{M}_1(\theta)$ stets abgeschlossen.*

Im Allgemeinen kann jede Kombination aus echter Inklusion und Gleichheit wirklich vorkommen (siehe [Ver15a]); es können 8 Fälle unterschieden werden. Die Isomorphiestruktur des Simplex $\mathcal{M}_1(\theta)$ legt die Lagebeziehungen nicht in allen Fällen vollständig fest, wohl aber für die beiden Extremfälle: Der Simplex $\mathcal{M}_1(\theta)$ besteht genau dann aus einem Punkt, wenn in obiger Lagebeziehung ($=, =, =$) gilt und $\mathcal{M}_1(\theta)$ ist der Poulsen-simplex genau dann wenn ($\varnothing, =, =$) gilt. Ferner ist $\mathcal{M}_1(\theta)$ ein Bauersimplex genau dann wenn ($=, ?, ?$) gilt. In den meisten natürlich auftretenden und nicht-trivialen Beispielen hat man ($=, =, \varnothing$): Extrempunkte und Martinrand stimmen überein und es gibt mehr als einen Extrempunkt.

Satz 1.6.7. *Ist $X = (X_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette mit Rückwärtsdynamik θ , so ist X \mathbb{P} -fast sicher θ -konvergent und es gilt $P^X = \mathbb{P}(X \in \cdot | \mathcal{G}_\infty)$ fast sicher. Insbesondere existiert zu jedem $P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta))$ eine θ -konvergente Folge $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 0}$ mit $P = P^{\mathbf{x}}$ und den Eigenschaften $x_n \in \mathbb{F}_n$ und $\theta_n^{n+1}(x_n, x_{n+1}) > 0$ für alle $n \geq 0$.*

Es kann vorkommen, dass sich Punkte aus $\partial\mathcal{M}_1(\theta) \setminus \text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta))$ nicht durch Folgen \mathbf{x} mit denen im Satz formulierten Eigenschaften als Limes erhalten lassen. Teilstrukturen werden später eine wichtige Rolle spielen. Der kanonische Teilstrukturbegriff für Equipped Graded Graphs ist wie folgt:

Definition 1.6.8. Es sei (\mathbb{F}, θ) ein EGG. Eine Folge nicht-leerer Teilmengen $\mathbb{G} = (\mathbb{G}_n, n \geq 0)$ mit $\mathbb{G}_n \subseteq \mathbb{F}_n$ und

$$\sum_{x \in \mathbb{G}_k} \theta_k^n(x, y) = 1 \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq n \text{ und } y \in \mathbb{G}_n$$

heißt θ -stabile Teilmenge (*nfolge*) und (\mathbb{G}, θ) heißt Teilgraph von (\mathbb{F}, θ) . Es sei $\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta)$ die Menge aller Markovmaße auf $\text{Path}(\mathbb{G}) = \mathbb{G}_0 \times \mathbb{G}_1 \times \dots$ mit Rückwärtsdynamik θ .

Satz 1.6.9. *Ein $P \in \mathcal{M}_1(\theta)$ ist genau dann Element von $\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta)$, wenn $P(\text{Path}(\mathbb{G})) = 1$ ist. Es ist $\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta) \subseteq \mathcal{M}_1(\theta)$ eine abgeschlossene Fläche. Gilt $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta)) = \partial\mathcal{M}_1(\theta)$, so gilt auch $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta)) = \partial\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta)$.*

Beweis. Es ist nur die letzte Aussage zu begründen. Es sei $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ eine θ -konvergente Folge in \mathbb{G} mit Limes $P^{\mathbf{x}} \in \partial\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta)$. Die Folge ist dann auch eine θ -konvergente Folge in \mathbb{F} und damit ist $P^{\mathbf{x}} \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta))$. Aber es ist auch $P^{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta)$ und damit $P^{\mathbf{x}} \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta)) \cap \mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta) = \text{ex}(\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta))$, da $\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta)$ eine abgeschlossene Fläche ist. \square

Neben dem Übergang zu Teilgraphen besteht eine weitere Möglichkeit, neue Graphen zu konstruieren, darin, den vorhandenen Graphen nur an ausgewählten Zeitpunkten zu betrachten.

Definition 1.6.10. Es sei (\mathbb{F}, θ) ein Equipped Graded Graph und $\mathbf{m} = (m_n)_{n \geq 0}$ sei eine Folge natürlicher Zahlen mit $m_0 := 0 < m_1 < m_2 < \dots$. Damit definiert man einen neuen EGG $(\mathbb{F}^{\mathbf{m}}, \psi)$ durch $\mathbb{F}_n^{\mathbf{m}} := \mathbb{F}_{m_n}$ und $\psi_k^n : \mathbb{F}_k^{\mathbf{m}} \times \mathbb{F}_n^{\mathbf{m}} \rightarrow [0, 1]$, $\psi_k^n(x, y) := \theta_{m_k}^{m_n}(x, y)$.

Satz 1.6.11. In der Situation von Definition 1.6.10 ist $\mathcal{L}((X_n)_{n \geq 0}) \mapsto \mathcal{L}((X_{m_n})_{n \geq 0})$ ein Isomorphismus von $\mathcal{M}_1(\theta)$ nach $\mathcal{M}_1(\psi)$.

Bemerkung 1.6.12. Zu jedem Simplex K existiert ein Equipped Graded Graph (\mathbb{F}, θ) mit $K \simeq \mathcal{M}_1(\theta)$. Diese Aussage findet man in [LL71] (Korollar vor Theorem 5.3, als weitere Referenz eignet sich auch [Luk+10], Abschnitt 12.2.D). Diese Darstellung ist nicht eindeutig; unterschiedliche EGGs können auf isomorphe Simplexe führen. Tatsächlich ist der Begriff des Martinrandes im Allgemeinen nicht durch die Isomorphiestruktur des Simplex determiniert: Es gibt Beispiele für EGGs (\mathbb{F}, θ) und (\mathbb{G}, ψ) mit $\mathcal{M}_1(\theta) \simeq \mathcal{M}_1(\psi)$, aber $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta)) = \partial\mathcal{M}_1(\theta)$ und $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\psi)) \not\subseteq \partial\mathcal{M}_1(\psi)$. Solche Phänomene können in der Situation von Satz 1.6.11 auftreten. Konkret findet man ein solches Beispiel und die Beschreibung des Phänomens in [VM15]. Dass der Martinrand in dieser Situation durch Übergang zu Teilfolgen tatsächlich kleiner werden kann, liegt an dem in Anschluss an Satz 1.6.7 erwähnten Phänomen. ∇

Bemerkung 1.6.13. Eine Möglichkeit, das Thema „Equipped Graded Graph“ zu motivieren und die Aussagen einsichtig zu machen, erhält man durch eine *Zeitumkehr*: Angenommen man betrachtet den Zeitbereich $-\mathbb{N}_0 = \{\dots, -2, -1, 0\}$ sowie jeweils endliche Zustandsräume und darauf gegebene *Übergangswahrscheinlichkeiten*. Welche (Verteilungen von) Markovketten gibt es in dieser Situation?

Wäre der Zeitbereich $+\mathbb{N}_0$, so wäre die Antwort leicht, denn die Verteilung einer Markovkette mit Zeitbereich $+\mathbb{N}_0$ und vorgeschriebenen Übergangswahrscheinlichkeiten ist eindeutig durch die Startverteilung zum Zeitpunkt 0 beschrieben. Insbesondere ist die Menge der Startverteilungen, wenn der Zustandsraum zum Zeitpunkt 0 endlich ist, ein Simplex; dieser ist stets ein Bauersimplex und der Übergang von der Startverteilung zur zugehörigen Prozessverteilung ist stets ein Homöomorphismus. Bei Zeitbereich $-\mathbb{N}_0$ gibt es nun nicht direkt einen „Startzustand“. Die eben vorgestellte Theorie zeigt aber, dass man den *Start* bei Zeitbereich $-\mathbb{N}_0$ durch das terminale Verhalten (mit $n \rightarrow -\infty$) ersetzen kann. Der Zustandsraum zum Zeitpunkt $n = -\infty$ entspricht den Extrempunkten, $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta))$, und nach wie vor ist die Menge der Markovverteilungen, $\mathcal{M}_1(\theta)$, ein Simplex und die Verteilung einer solchen Kette $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\theta)$ eindeutig durch die Startverteilung, $\mathcal{L}(\mathbb{P}(X \in \cdot | \mathcal{G}_\infty))$, festgelegt. Allerdings ist der „Zustandsraum“ zu Beginn (bei $-\infty$) im Allgemeinen nicht mehr kompakt und der Übergang von Startverteilung zur Verteilung der zugehörigen Kette (Barycenterabbildung) im Allgemeinen nicht mehr stetig invertierbar. Es kann also vorkommen, dass sich die Verteilungen zweier Markovketten mit Rückwärtsdynamiken θ sehr ähneln (in einer geeigneten Metrik nahe beieinander liegen),

die zugehörigen extremalen Verhalten aber sehr unterschiedlich sind (auch in einer geeigneten Metrik gemessen). Dieses Phänomen tritt nicht auf, falls $\mathcal{M}_1(\theta)$ ein Bauersimplex ist. ∇

Bemerkung 1.6.14. Als Ausgangspunkt für die Diskussion muss nicht notwendigerweise ein EGG dienen. Angenommen man hat nicht-leere paarweise disjunkte endliche Mengen $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots$ mit $|\mathbb{F}_0| = 1$ und eine Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$ mit $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{F}_n) = 1$ für alle n vorliegen. Ist die Kette X schwach irreduzibel, gilt also $\mathbb{P}(X_n = x) > 0$ für alle $n \geq 0, x \in \mathbb{F}_n$, so nennt man X auch eine *Kombinatorische Markovkette*. Diese induziert den EGG (\mathbb{F}, θ) über

$$\theta_{n-1}^n(x, y) := \mathbb{P}(X_{n-1} = x | X_n = y), n \geq 1.$$

Per Definition gilt damit $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\theta)$. Mit $\mathbb{F} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{F}_n$ gibt es nun, da die Mengen \mathbb{F}_n als paarweise disjunkt angenommen wurden, eine *Raum-Zeit-Funktion* $\phi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\phi^{-1}(n) = \mathbb{F}_n$ für alle $n \geq 0$. Man nennt eine Funktion $h : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ *harmonisch bzgl. (der Verteilung von) X* , falls

$$h(x) = \sum_{y \in \mathbb{F}_{\phi(x)+1}} \mathbb{P}(X_{\phi(x)+1} = y | X_{\phi(x)} = x) h(y) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{F}$$

gilt. Es sei $\mathcal{H}_1(X)$ die Menge aller bzgl. X harmonischen Funktionen h mit $h \geq 0$ und $h(x) = 1$ für $x \in \mathbb{F}_0$. Die *Doob-Martin-Theorie Kombinatorischer Markovketten* besagt nun, dass $\mathcal{H}_1(X)$ ein Simplex ist. Tatsächlich ist dieser isomorph zu $\mathcal{P}_1(\theta)$. Ein Isomorphismus ist wie folgt gegeben: Ist $h \in \mathcal{H}_1(X)$, so ist die Funktion $p = (p_n)_{n \geq 0}$ mit $p_n : \mathbb{F}_n \rightarrow [0, 1]$ definiert durch $p_n(x) := h(x)\mathbb{P}(X_n = x)$ für $n \geq 0$ und $x \in \mathbb{F}_n$ ein Element von $\mathcal{P}_1(\theta)$ und der Übergang $h \mapsto p$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{H}_1(X)$ nach $\mathcal{P}_1(\theta)$. Mit [Grü13] ist ein Übersichtsartikel zu Kombinatorischen Markovketten mit vielen diskutierten Beispielen und weiteren Referenzen gegeben. Die Menge $\mathcal{M}_1(\theta)$ entspricht genau der Menge aller Verteilungen von h -transformierten Ketten zu X . Eine weitere kurze Einführung zu dieser Sichtweise findet sich auch in [EGW17]. Ein Beispiel für die Diskussion Kombinatorischer Markovketten, bei dem auch abzählbar unendliche Zustandsräume \mathbb{F}_n zugelassen sind, findet man in [Hag16]. Allgemein ist zu sagen, dass nicht jeder EGG von einer Markovkette im hier beschriebenen Stil induziert wird: Es gibt EGG (\mathbb{F}, θ) sodass für alle $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\theta)$ ein $n \geq 1, x \in \mathbb{F}_n$ mit $\mathbb{P}(X_n = x) = 0$ existiert. Schwach irreduzible Ketten existieren also nicht in allen EGG. Will man für die acht möglichen Lagebeziehungen aus Satz 1.6.6 Beispiele angeben, so ist es für einige Fälle schwieriger, dieses mit einem EGG zu erreichen, in welchem schwach irreduzible Ketten existieren. Ein Beispiel für einen EGG mit $(=, \not\subseteq, \not\supseteq)$, in welchem aber keine schwach irreduzible Kette existiert, findet man in [GP06] (Beispiel vor Lemma 6). Das nachfolgend diskutierte Beispiel 1.6.15 ist eine Abwandlung des dortigen Beispiels und beschreibt einen EGG, in welchem schwach irreduzible Ketten existieren und die Inklusionskette $(\not\subseteq, =, \not\supseteq)$ gilt. ∇

Beispiel 1.6.15. Es sei $\alpha \in (0, 1)$ eine fixierte Konstante. Zur nachfolgenden formalen Definition betrachte man auch Abbildung 1.5. Es sei $\mathbb{F}_0 := \{(l, 0), (r, 0)\}$ und für $n \geq 1$ sei $\mathbb{F}_n = \{(l, n), (r, n), (1, n), (2, n), \dots, (n, n)\}$. Für $n \geq 1$ sei $\theta_{n-1}^n : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_{n-1}$ gegeben durch $\theta_{n-1}^n((l, n-1), (l, n)) = \theta_{n-1}^n((r, n-1), (r, n)) := 1, \theta_{n-1}^n((k, n-1), (k, n)) = 1$ für $k \geq n-1$

und $n \geq 2$ und $\theta_{n-1}^n((l, n-1), (n, n)) = 1 - \theta_{n-1}^n((r, n-1), (n, n)) := \alpha$. Markovketten X mit Verteilung $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\theta)$ verlaufen rückwärts in der Zeit immer entlang einem der Strahlen $\dots, (l, n), (l, n-1), \dots, (l, 0)$ oder $\dots, (r, n), (r, n-1), \dots, (r, 0)$ oder auf einem der Strahlen $\dots, (k, n), (k, n-1), \dots, (k, k)$. Kommt man an einem Wert der Form (k, k) an, macht man rückwärts in der Zeit einen Schritt zum Wert $(l, k-1)$ mit Wahrscheinlichkeit α oder $(r, k-1)$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$. Man macht sich leicht klar, dass die Menge der extremalen Verteilungen, $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta))$, aus den deterministischen Bewegungen entlang der ersten beiden Strahlen oder aus denjenigen Prozessen besteht, die schließlich auf einem Strahl der Form $(k, k), (k, k+1), \dots$ bleiben. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße seien mit $P_l, P_r, P_k, k \geq 1$ bezeichnet. Insbesondere ist $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta))$ hier nun also abzählbar. Ferner überzeugt man sich davon, dass die Topologie auf $\{P_l, P_r, P_1, P_2, \dots\}$ diskret ist. Die Menge der Extrempunkte ist also homöomorph zum diskreten Raum \mathbb{N} . Damit ist $\mathcal{M}_1(\theta)$ kein *Bauersimplex* und insbesondere können Extrempunkte nicht mit Martinrand übereinstimmen. Die Folge $\mathbf{x} = ((1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots)$ ist θ -konvergent und man erhält $P^\mathbf{x} = \alpha P_l + (1-\alpha)P_r$. Tatsächlich ist $\alpha P_l + (1-\alpha)P_r$ auch der schwache Limes von P_k mit $k \rightarrow \infty$. Insgesamt gilt $\partial\mathcal{M}_1(\theta) = \text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta)) \cup \{\alpha P_l + (1-\alpha)P_r\} = \overline{\text{ex}(\mathcal{M}_1(\theta))}$, in Satz 1.6.6 gilt hier also die Beziehung $(\varphi, =, \varphi)$. Unabhängig von $\alpha \in (0, 1)$ gilt: Die Extrempunktmenge sind stets homöomorph zum diskreten Raum \mathbb{N} . Allerdings sind die zu $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$ gehörigen Simplexe genau dann isomorph, wenn $\alpha_1 \in \{\alpha_2, 1 - \alpha_2\}$ ist. Ferner gibt es für jedes $\alpha \in (0, 1)$ schwach irreduzible Markovketten, welche dieses Beispiel im Sinne von Bemerkung 1.6.14 erzeugen; offensichtlich existiert zu jedem Zustand $x \in \mathbb{F}_k, k \geq 0$ eine (sogar extremale) Verteilung $P_x \in \mathcal{M}_1(\theta)$ mit $P_x(\mathbb{F}_0 \times \dots \times \mathbb{F}_{k-1} \times \{x\} \times \mathbb{F}_{k+1} \times \dots) > 0$. Nimmt man sich nun eine strikt positive Verteilung auf \mathbb{F} , also eine Kollektion $(\beta_x)_{x \in \mathbb{F}}$ nicht-negativer Zahlen mit $\beta_x > 0$ und $\sum_{x \in \mathbb{F}} \beta_x = 1$, vor und bildet die Konvexkombination $P := \sum_{x \in \mathbb{F}} \beta_x P_x$, so erhält man mit $P \in \mathcal{M}_1(\theta)$ eine schwach irreduzible Verteilung. \triangleleft

Wie bereits angekündigt, kann man das Übersichtsbild 1.3 nun um die Struktur „Equipped Graded Graph“ erweitern. Man betrachte hierzu Abbildung 1.6.

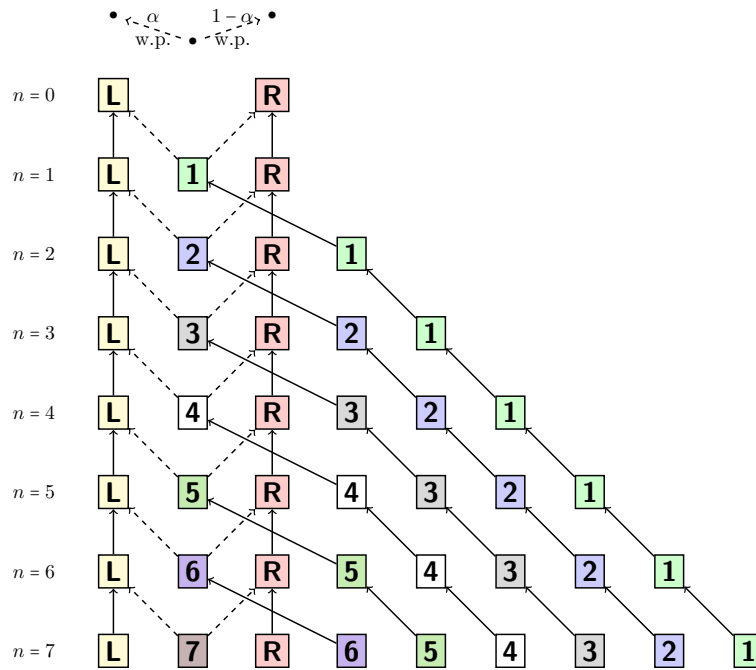


Abb. 1.5.: Der EGG aus Beispiel 1.6.15. Im Übergang von n nach $n-1$ geschieht nur an den Zuständen $(n, n), n \geq 1$ etwas Zufälliges.

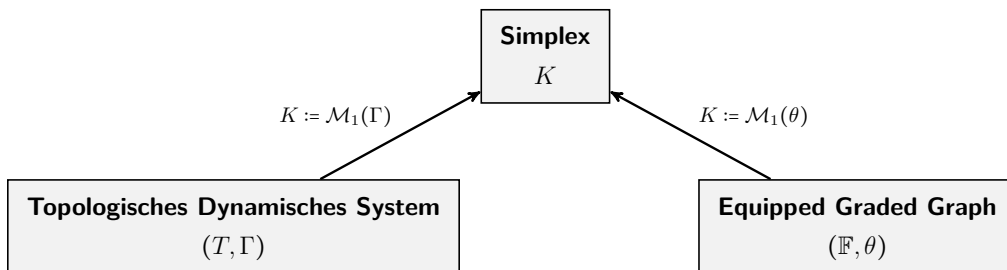


Abb. 1.6.: Der EGG (\mathbb{F}, θ) induziert den Simplex $K = \mathcal{M}_1(\theta)$, die Menge der Verteilungen von Markovketten auf $\mathbb{F}_0 \times \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \dots$ mit Rückwärtsdynamik θ .

2. Homogen markierte Bratellidiagramme

Equipped Graded Graphs werden häufig durch reichhaltigere Strukturen induziert. Ein Beispiel für eine solche Struktur wird in diesem Kapitel vorgestellt: Homogen markierte Bratellidiagramme. Die reichhaltigere Struktur erlaubt die Formulierungen weiterführender Fragen, welche in der vorliegenden Situation wahrscheinlichkeitstheoretisch daherkommen. Auf die allgemeinen Definitionen und Aussagen rund um Bratellidiagramme, Pfadräume, zentrale Maße etc. (siehe z.B. [Ver15a]) soll in diesem Kapitel nicht eingegangen werden. Die für den weiteren Verlauf der Arbeit relevante Situation ist von speziellerer Natur:

Definition 2.0.1. Ein *homogen markiertes Bratellidiagramm* (HMB) ist ein Tupel $\mathcal{B} = (\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ bestehend aus

1. $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \dots$ ist eine Folge endlicher nicht-leerer Mengen und mit $|\mathbb{F}_0| = 1$. Wie zuvor wird $\mathbb{F} = \bigsqcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_n$ als disjunkte Vereinigung der einzelnen Level aufgefasst.
2. $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_n, n \geq 1)$ ist eine Folge endlicher nicht-leerer Mengen.
3. $\Lambda = (\Lambda_{n-1}^n, n \geq 1)$ ist eine Folge von Abbildungen $\Lambda_{n-1}^n : \mathbb{F}_n \times \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{F}_{n-1}$.

Der Produktraum $\text{Path}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) := \prod_{n \geq 1} (\mathbb{F}_n \times \mathbb{A}_n)$ wird mit der diskreten Produkttopologie versehen zu einem kompakten metrisierbaren Raum. Es sei

$$\text{Path}(\Lambda) := \{(x_n, a_n)_{n \geq 1} \in \text{Path}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) : \Lambda_{n-1}^n(x_n, a_n) = x_{n-1} \text{ für alle } n \geq 2\} \subseteq \text{Path}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$$

die Menge der *Pfade* in $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$. Die Menge der Pfade ist eine nicht-leere kompakte Teilmenge von $\text{Path}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$. Es wird nicht gefordert, dass die Funktionen Λ surjektiv sind, auch wenn das in den Beispielen erfüllt ist. Da \mathbb{F}_0 nach Definition stets nur ein Element enthält, ist damit auch die Funktion Λ_0^1 festgelegt und tatsächlich spielen damit auch die Elemente \mathbb{A}_1 keine besondere Rolle. In den später untersuchten Beispielen gilt häufig ohnehin $|\mathbb{A}_1| = 1$. In den Beispielen werden daher auch die Funktionen Λ_0^1 häufig nicht extra spezifiziert und gelegentlich werden Pfade $(x_n, a_n)_{n \geq 1} \in \text{Path}(\mathbb{F}, \mathbb{A})$ auch erst ab dem zweiten Zeitpunkt betrachtet. Abbildung 2.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines HMB $\mathcal{B} = (\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$.

Für später formulierte Fragen ist folgende Interpretation nützlich: Man kann die Funktion $\Lambda_{n-1}^n : \mathbb{F}_n \times \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{F}_{n-1}$ als Algorithmus auffassen, welcher zu einem Objekt $x \in \mathbb{F}_n$ der Größe n und einem Anweisungsparameter $a \in \mathbb{A}_n$ das Objekt $\Lambda_{n-1}^n(x, a) \in \mathbb{F}_{n-1}$ liefert. Für $0 \leq k < n$ definiert man nun die Funktionen

$$\Lambda_k^n : \mathbb{F}_n \times \mathbb{A}_{k+1} \times \dots \times \mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{F}_k$$

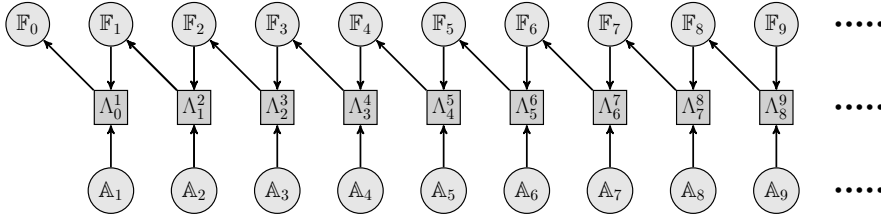


Abb. 2.1.: HMB sind inverse Funktionensysteme.

induktiv durch

$$\Lambda_k^{n+1}(x_{n+1}, a_{k+1}, \dots, a_{n+1}) := \Lambda_k^n(\Lambda_n^{n+1}(x_{n+1}, a_{n+1}), a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Aus einem HMB kann man ein Bratellidiagramm im üblichen Sinne wie folgt konstruieren: Die Knoten (Vertices) der n -ten Ebene entsprechen den Elementen der Menge \mathbb{F}_n . Die Menge der Kanten zwischen den Ebenen n und $n+1$ bestehen aus allen Paaren

$$(\Lambda_n^{n+1}(x_{n+1}, a_{n+1}), x_{n+1}) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_{n+1}, \quad x_{n+1} \in \mathbb{F}_{n+1}, \quad a_{n+1} \in \mathbb{A}_{n+1},$$

wobei wie üblich Mehrfachkanten zugelassen sind. Diese werden nun aber unterschieden (markiert), indem eine Kante der Form $(\Lambda_n^{n+1}(x_{n+1}, a_{n+1}), x_{n+1})$ das Label a_{n+1} erhält. Insbesondere gehen also von jedem Knoten der $n+1$ -ersten Ebene genau $|\mathbb{A}_{n+1}|$ Kanten in die n -te Ebene ab und die von einem Knoten ausgehenden Kanten tragen allesamt die Markierungen aus der Menge \mathbb{A}_{n+1} , sind also alle unterscheidbar. Daher der gewählte Begriff *homogen markiertes Bratellidiagramm*.

Beispiel 2.0.2. Es sei $\mathbb{F}_n = \{(n, 0), (n-1, 1), (n-2, 2), \dots, (0, n)\}$ für $n \geq 0$, $\mathbb{A}_n = [n] = \{1, \dots, n\}$ und $\Lambda_{n-1}^n: \mathbb{F}_n \times \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{F}_{n-1}$ sei definiert durch

$$\Lambda_{n-1}^n((k, n-k), j) := \begin{cases} (k-1, n-k), & \text{falls } j \leq k \\ (k, n-1-k), & \text{falls } k < j \leq n \end{cases}$$

Dieses HMB $\mathcal{B} = (\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ führt auf Abbildung 2.2; der Übersichtlichkeit halber sind die Kanten *nicht* beschriftet, Mehrfachkanten werden aber gezeichnet. Es werden dort die ersten 5 Schichten dargestellt. \triangleleft

2.1. μ -zentrale Prozesse

Betrachtet werden nun zufällige Pfade in einem HMB. Ein zufälliger Pfad in $\mathcal{B} = (\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ ist ein stochastischer Prozess $(X, \eta) = (X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ mit $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{F}_n, \eta_n \in \mathbb{A}_n) = 1$ und $\mathbb{P}(X_n = \Lambda_n^{n+1}(X_{n+1}, \eta_{n+1})) = 1$ für alle $n \geq 1$. Mit $\mathcal{M}_1(\text{Path}(\Lambda))$ als Menge aller Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Pfadraum $\text{Path}(\Lambda)$ ist ein zufälliger Pfad (X, η) also ein stochastischer Prozess mit $\mathbb{P}^{(X, \eta)} \in \mathcal{M}_1(\text{Path}(\Lambda))$. Es geht nun um spezielle Klassen von zufälligen Pfaden. Für jedes $n \geq 1$ sei $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{A}_n)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{A}_n und $\mu := \bigotimes_{n \geq 1} \mu_n$ sei das zugehörige Produktmaß. Betrachtet werden zufällige Pfade $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ mit

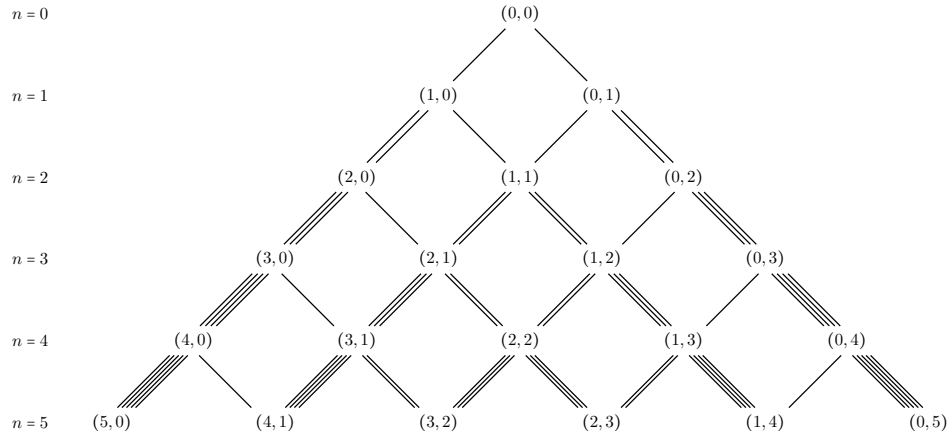


Abb. 2.2.: Das Pascalsche Dreieck.

(i) η_1, η_2, \dots sind unabhängig und $\eta_n \sim \mu_n$ für alle $n \geq 1$, also $\eta = (\eta_n)_{n \geq 1} \sim \mu$.

(ii) (η_1, \dots, η_n) und $(X_n, \eta_{n+1}, X_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots)$ sind für alle $n \geq 1$ unabhängig.

Ein zufälliger Pfad mit Eigenschaften (i) und (ii) heißt μ -zentraler Prozess. Es sei

$$\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu) := \{\mathbb{P}^{(X, \eta)} : (X, \eta) \text{ ist } \mu\text{-zentraler Prozess}\} \subseteq \mathcal{M}_1(\text{Path}(\Lambda))$$

die Menge aller Verteilungen μ -zentraler Prozesse. Mit folgender Aussage kann man häufig leicht begründen, dass ein konkreter Prozess ein μ -zentraler Prozess ist:

Lemma 2.1.1. *Liegt ein zufälliger Pfad $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ vor, bei dem η_1, η_2, \dots unabhängig sind, so ist Eigenschaft (ii) äquivalent dazu, dass (η_1, \dots, η_n) und X_n für alle $n \geq 1$ unabhängig sind.*

Beweis. Unter den getroffenen Annahmen impliziert Eigenschaft (ii) offensichtlich die im Lemma genannte Eigenschaft. Also zur anderen Richtung. Um Eigenschaft (ii) zu folgern, genügt zu zeigen, dass (η_1, \dots, η_n) und $(X_n, \eta_{n+1}, X_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots, X_{n+k-1}, \eta_{n+k}, X_{n+k})$ für alle $n, k \geq 1$ unabhängig sind. Da $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein zufälliger Pfad ist, ist (X_n, \dots, X_{n+k-1}) fast sicher eine Funktion von X_{n+k} und $(\eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+k})$. Es sind $\eta_1, \dots, \eta_{n+k}, X_{n+k}$ nach Voraussetzung unabhängig und damit sind auch (η_1, \dots, η_n) und $(\eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+k}, X_{n+k})$ unabhängig. Nun sind Funktionen unabhängiger Zufallsvariablen wieder unabhängig. \square

Die beiden nachfolgenden Sätze schlagen die Brücke zu Abschnitt 1.6.

Satz 2.1.2. *Für $n \geq 2$ sei das System von Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten $\theta = (\theta_{n-1}^n, n \geq 2)$ definiert durch $\theta_{n-1}^n : (\mathbb{F}_{n-1} \times \mathbb{A}_{n-1}) \times (\mathbb{F}_n \times \mathbb{A}_n) \rightarrow [0, 1]$ mit*

$$\theta_{n-1}^n((x_{n-1}, a_{n-1}), (x_n, a_n)) := \mu_{n-1}(a_{n-1}) \cdot 1(x_{n-1} = \Lambda_{n-1}^n(x_n, a_n)).$$

Damit gilt $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu) = \mathcal{M}_1(\theta)$.

Beweis. Ist $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein μ -zentraler Prozess, so gilt für alle $n \geq 1$ und $(x_1, a_1, \dots, x_n, a_n) \in \mathbb{F}_1 \times \mathbb{A}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_n \times \mathbb{A}_n$ wegen $\Lambda_{n-1}^n(X_n, \eta_n) = X_{n-1}$ fast sicher und zusammen mit der Unabhängigkeit von $\eta_1, \dots, \eta_n, X_n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \eta_1 = a_1, \dots, X_n = x_n, \eta_n = a_n) \\ = \prod_{i=1}^{n-1} \theta_i^{i+1}((x_i, a_i), (x_{i+1}, a_{i+1})) \cdot \mathbb{P}(X_n = x_n, \eta_n = a_n). \end{aligned}$$

Damit folgt sofort $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu) \subseteq \mathcal{M}_1(\theta)$. Umgekehrt ist jeder Prozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ mit Verteilung aus $\mathcal{M}_1(\theta)$ aufgrund des in θ auftretenden Indikators ein zufälliger Pfad. Für $n \geq 2$ und $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_1 \times \dots \times \mathbb{A}_n$ und $x_n \in \mathbb{F}_n$ sei $x_{n-1} := \Lambda_{n-1}^n(x_n, a_n)$ und induktiv $x_{i-1} := \Lambda_{i-1}^i(x_i, a_i)$ für $1 \leq i \leq n-1$. Damit ist mit $y_n := x_n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta_1 = a_1, \eta_2 = a_2, \dots, \eta_n = a_n, X_n = x_n) &= \sum_{\substack{(y_1, \dots, y_{n-1}) \\ \in \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_{n-1}}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = y_i, \eta_i = a_i\}\right) \\ &= \left(\sum_{\substack{(y_1, \dots, y_{n-1}) \\ \in \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_{n-1}}} \prod_{i=1}^{n-1} \theta_i^{i+1}((y_i, a_i), (y_{i+1}, a_{i+1})) \right) \\ &\quad \cdot \mathbb{P}(X_n = x_n, \eta_n = a_n) \\ &= \mu_1(a_1) \cdots \mu_{n-1}(a_{n-1}) \mathbb{P}(X_n = x_n, \eta_n = a_n). \end{aligned}$$

Durch Zerlegung nach den Werten von (X_{n+1}, η_{n+1}) und Einsetzen der Definition von θ erhält man

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, \eta_n = a_n) = \mu_n(a_n) \sum_{(y, b) \in \mathbb{F}_{n+1} \times \mathbb{A}_{n+1}} 1(\Lambda_n^{n+1}(y, b) = x_n) \mathbb{P}(X_{n+1} = y, \eta_{n+1} = b).$$

Summiert man über alle $x_n \in \mathbb{F}_n$ erhält man $\mathbb{P}(\eta_n = a_n) = \mu_n(a_n)$ und dann insgesamt $\mathbb{P}(X_n = x_n, \eta_n = a_n) = \mathbb{P}(X_n = x_n) \mathbb{P}(\eta_n = a_n) = \mu_n(a_n) \mathbb{P}(X_n = x_n)$. \square

Satz 2.1.3. Für jeden μ -zentralen Prozess (X, η) ist $X = (X_n)_{n \geq 1}$ eine Markovkette mit Rückwärtsdynamik $\gamma_{n-1}^n(x_{n-1}, x_n) := \mu_n(\{a_n \in \mathbb{A}_n : \Lambda_{n-1}^n(x_n, a_n) = x_{n-1}\})$. Die Abbildung

$$\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu) \rightarrow \mathcal{M}_1(\gamma), \quad \mathbb{P}^{(X, \eta)} \mapsto \mathbb{P}^X$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. $\mathbb{P}^{(X, \eta)} \in \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu) \Rightarrow \mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\gamma)$ ist elementar nachzurechnen. Die Zuordnung ist offenbar affin und stetig. Die Zuordnung ist injektiv, da die Verteilung $\mathbb{P}^{(X, \eta)} \in \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$ eindeutig durch die Folge der Randverteilungen $(\mathbb{P}^{(X_n, \eta_n)})_{n \geq 1}$ determiniert ist. Es ist $\mathbb{P}^{(X_n, \eta_n)} = \mathbb{P}^{X_n} \otimes \mu_n$. Damit ist die Folge der Verteilungen eindeutig durch $(\mathbb{P}^{X_n})_{n \geq 1}$ determiniert. Die Zuordnung ist surjektiv: Es sei $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\gamma)$. Für $n \geq 1$ seien $\eta_1, \dots, \eta_n, X'_n$ unabhängig mit $\eta_i \sim \mu_i$ und $X'_n \sim X_n$. Es sei induktiv $X'_{i-1} := \Lambda_{i-1}^i(X'_i, \eta_i)$ für $i = n, \dots, 2$. Damit gilt $(X'_1, \dots, X'_n) \sim (X_1, \dots, X_n)$. Es sei $Q_n := \mathcal{L}((X'_1, \eta_1, X'_2, \eta_2, \dots, X'_n, \eta_n))$. Die Folge der Verteilungen Q_n ist konsistent. Mit dem Erweiterungssatz von Kolmogorov erhält man eine Verteilung $\mathbb{P}^{(X', \eta)} \in \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$ mit $\mathbb{P}^{X'} = \mathbb{P}^X$. Die Zuordnung ist also bijektiv, affin und stetig. Da beides Simplexes, also kompakte metrisierbare Räume sind, ist die Zuordnung damit automatisch stetig invertierbar. \square

Ist (X, η) ein μ -zentraler Prozess, so nennt man (X, η) auch die *markierte* und X die *unmarkierte Version*. Der vorangegangene Satz besagt insbesondere, dass es zu jeder unmarkierten Version X , ein Prozess mit Verteilung in $\mathcal{M}_1(\gamma)$, eine in Verteilung eindeutig bestimmte markierte Version (X', η) , ein Prozess mit Verteilung in $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$, gibt, sodass $X \sim X'$ gilt.

Bemerkung 2.1.4. In [EGW17] wurde der Doob-Martin-Rand zu Rémys Kette identifiziert. Dabei war eine konkrete Markovkette X gegeben. Ausgehend von dieser wurde eine markierte Version (X, η) und damit der zu X gehörige Simplex über den Simplex der markierten Versionen identifiziert. Ein analoges Vorgehen findet man in der Arbeit [CE17] und ebenso in [EW16], wobei in letzterer Arbeit die Zustandsräume \mathbb{F}_n nicht endlich sind. Mehr zu den beiden erst genannten Arbeiten findet man in den Kapiteln 4 und 5. ▽

Mit den Resultaten aus Abschnitt 1.6 kann man nun direkt einige terminale σ -Algebren (modulo \mathbb{P}) miteinander identifizieren. Insbesondere die mittlere σ -Algebra spielt später eine wichtige Rolle.

Satz 2.1.5. *Ist $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein μ -zentraler Prozess, so gilt*

$$\bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, \eta_{n+1}, X_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, \eta_n, X_{n+1}, \eta_{n+1}, \dots).$$

Beweis. Man muss nur die Inklusion

$$\mathcal{A}_1 := \bigcap_n \sigma(X_n, \eta_n, X_{n+1}, \eta_{n+1}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \bigcap_n \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) =: \mathcal{A}_2$$

begründen. Mit den Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten θ und γ aus den Sätzen 2.1.2 und 2.1.3 gilt für alle $1 \leq k < n$ und $(x_k, a_k) \in \mathbb{F}_k \times \mathbb{A}_k, (x_n, a_n) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{A}_n$

$$\theta_k^n((x_k, a_k), (x_n, a_n)) = \mu_k(a_k) \gamma_k^{n-1}(x_k, \Lambda_{n-1}^n(x_n, a_n)).$$

Die σ -Algebra \mathcal{A}_1 wird modulo \mathbb{P} von den fast sicheren Limiten von

$$\theta_k^n((x_k, a_k), (X_n, \eta_n)) = \mu_k(a_k) \gamma_k^{n-1}(x_k, X_{n-1})$$

mit $n \rightarrow \infty$ erzeugt. Offenbar sind diese aber \mathcal{A}_2 -messbar. □

Wie beschrieben liefert ein HMB \mathcal{B} zusammen mit einem Produktwahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times \dots$ einen Simplex $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$. Ist $\mu_n = \text{unif}(\mathbb{A}_n)$ für alle $n \geq 1$ wird „ μ “ auch weggelassen und nur von *zentralen Prozessen* gesprochen. Spätestens ab Kapitel 3 treten nur noch zentrale Prozesse auf. Die Sätze im aktuellen Kapitel sind aber ohne Mehraufwand in gleicher Form für allgemeine μ -zentrale Prozesse zu beweisen. Es sei

$$\mathcal{M}_1(\Lambda) := \mathcal{M}_1(\Lambda, \bigotimes_n \text{unif}(\mathbb{A}_n)).$$

Wie gesehen ist $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ isomorph zu $\mathcal{M}_1(\gamma)$, wobei im Fall zentraler Prozessverteilungen

$$\gamma_{n-1}^n(x, y) = \frac{|\{a \in \mathbb{A}_n : \Lambda_{n-1}^n(y, a) = x\}|}{|\mathbb{A}_n|}$$

gilt. Das Strukturdiagramm (Abbildung 1.6) wird dahingehend erweitert, man betrachte Abbildung 2.3.

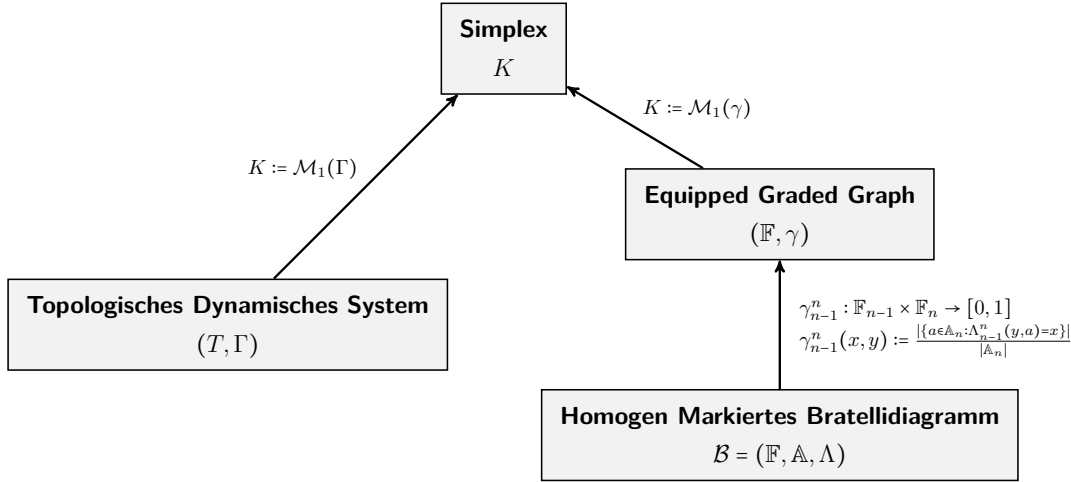


Abb. 2.3.: Neu hinzugekommen ist der Übergang von einem HMB \mathcal{B} zu einem EGG.

Satz 2.1.6. *Zu jedem Simplex K existiert ein HMB $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ mit $K \simeq \mathcal{M}_1(\Lambda)$.*

Beweis. Folgende bekannte Aussagen werden verwendet:

1. Zu jedem Simplex K existiert ein EGG (\mathbb{F}, θ) mit $K \simeq \mathcal{M}_1(\theta)$ und $\mathbb{F}_n = [n+1]$ für alle $n \geq 0$ ([LL71], siehe auch Bemerkung 1.6.12).
2. Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν auf einer endlichen Menge Σ sei $\|\mu - \nu\|_1 = \sum_{a \in \Sigma} |\mu(a) - \nu(a)|$. Sind (\mathbb{F}, θ) und (\mathbb{F}, ψ) zwei EGG mit $\mathbb{F}_n = [n+1]$ für alle $n \geq 0$ und gilt

$$\sum_{n \geq 0} \sup\{\|\theta_n^{n+1} p - \psi_n^{n+1} p\|_1 : p \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_{n+1})\} < \infty,$$

so folgt $\mathcal{M}_1(\theta) \simeq \mathcal{M}_1(\psi)$ (siehe [CR10], Lemma 9).

Aus der zweiten genannten Eigenschaft folgt zunächst direkt, dass es zu jedem EGG (\mathbb{F}, ψ) mit $\mathbb{F}_n = [n+1]$ für alle $n \geq 0$ ein System von Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten θ auf \mathbb{F} gibt, sodass $\theta_n^{n+1}(x, y) \in \mathbb{Q}$ stets rational ist und sodass $\mathcal{M}_1(\theta) \simeq \mathcal{M}_1(\psi)$ gilt. Zusammen mit der ersten genannten Eigenschaft erhält man damit, dass zu jedem Simplex K ein EGG (\mathbb{F}, θ) existiert, sodass $\mathbb{F}_n = [n+1]$ für alle $n \geq 0$, $\theta \in \mathbb{Q}$ stets rational und $\mathcal{M}_1(\theta) \simeq K$ ist. Zu einem Simplex K sei nun ein solcher EGG (\mathbb{F}, θ) gegeben. Nun wird ein passendes HMB konstruiert. Es sei $n \geq 1$. Da alle Werte $\theta_{n-1}^n(x, y)$, $x \in \mathbb{F}_{n-1}$, $y \in \mathbb{F}_n$ rational sind, kann man diese auf einen Nenner bringen. Man bezeichne diesen Nenner mit $m_n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gibt es zu allen $x \in \mathbb{F}_{n-1}$, $y \in \mathbb{F}_n$ eine Zahl $n(x, y) \in \mathbb{N}$ mit $\theta_{n-1}^n(x, y) = n(x, y)/m_n$. Es sei $\mathbb{A}_n := [m_n]$. Man kann nun eine Funktion $\Lambda_{n-1}^n : \mathbb{F}_n \times \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{F}_{n-1}$ derart angeben, dass $\#\{a \in [m_n] : \Lambda_{n-1}^n(y, a) = x\} = n(x, y)$ für alle $x \in \mathbb{F}_{n-1}$, $y \in \mathbb{F}_n$ gilt. Wählt man für jedes n eine solche Funktion, erhält man $\mathcal{M}_1(\Lambda) \simeq \mathcal{M}_1(\theta)$ und damit die Behauptung. \square

Bemerkung 2.1.7. Die Arbeit [CR10], aus welcher die zweite Eigenschaft im Beweis eben entnommen ist, behandelt eine Aussage von ähnlicher Bauart: Vorgestellt und untersucht wird eine spezielle parametrisierte Familie dynamischer Systeme $(\mathcal{X}_\lambda, T_\lambda)$, $\lambda \in [0, 4)$.

Dabei ist \mathcal{X}_λ eine abgeschlossene Teilmenge von $[0, 1]$ und $T_\lambda : \mathcal{X}_\lambda \rightarrow \mathcal{X}_\lambda$ ist stetig. Die Menge der T_λ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathcal{X}_λ , $\mathcal{M}_1(\lambda)$, ist ein Simplex. Die Aussage dort ist: Jeder Simplex K ist isomorph zu einem dieser $\mathcal{M}_1(\lambda)$. ∇

2.2. Starke μ -zentrale Prozessverteilungen

Satz 2.1.3 zeigt, dass die Simplexstruktur von $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$ nur von der induzierten Rückwärtsdynamik γ auf $\text{Path}(\mathbb{F})$ abhängt. In der nun diskutierten Eigenschaft ist die Beteiligung von Λ stärker. Es sei $(X, \eta) = (X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein μ -zentraler Prozess, definiert auf einem im Hintergrund bleibenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Für alle $1 \leq k < n$ folgt aus der Pfadeseigenschaft, $X_k = \Lambda_k^n(X_n, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ \mathbb{P} -fast sicher, direkt $\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(X_n, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$. Für $n \geq 1$ seien

$$\mathcal{G}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_n := \sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \dots).$$

Mit diesen Schreibweisen erhält man für alle $1 \leq k < n$ die Identität

$$\mathcal{G}_k \vee \mathcal{A}_{k+1} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_n \vee \mathcal{A}_{k+1}.$$

Man kann nun auf der rechten Seite den Schnitt über alle $n > k$ bilden und erhält damit

$$\mathcal{G}_k \vee \mathcal{A}_{k+1} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \bigcap_{n > k} (\mathcal{G}_n \vee \mathcal{A}_{k+1}). \quad (2.1)$$

Es sei $\mathcal{G}_\infty := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{G}_n = \bigcap_{n > k} \mathcal{G}_n$ die terminale σ -Algebra des Prozesses X . Kann man auf der rechten Seite von Gleichung (2.1) die σ -Algebra \mathcal{A}_{k+1} aus der Schnittbildung herausnehmen? Kann man Supremums- und Schnittbildung der beteiligten σ -Algebren vertauschen? Formal:

$$\text{Gilt } \mathcal{G}_k \vee \mathcal{A}_{k+1} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{A}_{k+1} ?$$

Bemerkung 2.2.1. An dieser Stelle muss die Arbeit [Wei83] erwähnt werden. Dort werden allgemeine (maßtheoretische) Äquivalenzen dafür angegeben, wann die Vertauschung von Supremums- und Schnittbildung von σ -Algebren zulässig ist. Der dort untersuchte Rahmen ist allerdings deutlich allgemeiner als der hier formulierte. Die zusätzliche Struktur in der hier untersuchten Fragestellung erlaubt es, an die Situation angepasste Äquivalenzen zu nennen, mit denen man in konkreten Situationen besser arbeiten kann. ∇

Man wird sehen, dass eine Antwort auf die Frage nicht von $k \geq 1$ abhängt, daher nun direkt die folgende Definition:

Definition 2.2.2. Die Verteilung eines μ -zentralen Prozesses $(X, \eta) = (X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ heißt *stark*, wenn $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{A}_1 \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{A}_1$ (also $\sigma(X, \eta) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty \vee \sigma(\eta)$) gilt. Es sei $\mathcal{M}_1^{\text{str}}(\Lambda, \mu) \subseteq \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$ die Menge der starken μ -zentralen Verteilungen. Ferner sei $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}}(\Lambda, \mu)) := \mathcal{M}_1^{\text{str}}(\Lambda, \mu) \cap \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu))$ die Menge der starken extremalen μ -zentralen Verteilungen.

Bemerkung 2.2.3. Zur Wahl des Begriffes *starke Verteilung* betrachte man auch die beispielsweise in [HY10] formulierte Fragestellung und die dort gewählte Terminologie.

Hinsichtlich später vorgestellter Verbindungen wäre auch die Bezeichnung *zufallsfreie Verteilung* gerechtfertigt gewesen. Letzterer Begriff klingt aber zu sehr nach „deterministisch“, was hier nicht die gleiche Bedeutung hat. ∇

Bemerkung 2.2.4. Spätere Beispiele werden zeigen, dass sich die Menge der starken Verteilungen nicht aus der Simplexstruktur ergibt (ähnlich wie beim Begriff des Martinrandes, siehe Bemerkung 1.6.12). Folgendes ist möglich: $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu) \simeq \mathcal{M}_1(\Lambda', \mu')$, $\mathcal{M}_1^{\text{str}}(\Lambda, \mu) = \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$ und $\mathcal{M}_1^{\text{str}}(\Lambda', \mu') \subsetneq \mathcal{M}_1(\Lambda', \mu')$. ∇

Um Schreibarbeit zu sparen sei im Folgenden

$$\mathcal{M}_1^{\text{str}} := \mathcal{M}_1^{\text{str}}(\Lambda, \mu) \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$$

Im Allgemeinen kann $\mathcal{M}_1^{\text{str}}$ leer sein. Man wird sehen, dass die Schreibweise $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}})$ gerechtfertigt ist: Ist $\mathcal{M}_1^{\text{str}}$ nicht leer, so ist diese Teilmenge konvex und die Extrempunkte sind genau durch $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}})$ gegeben. Allerdings ist $\mathcal{M}_1^{\text{str}}$ im Allgemeinen keine *abgeschlossene* Fläche, sondern eine messbare Fläche dem Maße nach (zur Definition siehe Abschnitt 1.4). Tatsächlich ist es in den später diskutierten Beispielen im Kontext konsistenter Systeme häufig so, dass $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}})$ dicht in $\text{ex}(\mathcal{M}_1)$ liegt.

Angenommen (X, η) ist ein extremaler μ -zentraler Prozess, also $\mathcal{G}_\infty \stackrel{\mathbb{P}}{=} \{\emptyset, \Omega\}$. Man wird sehen, dass (X, η) genau dann stark ist, wenn $\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \dots)$ für alle $k \geq 1$ gilt. Ist dieses für alle $k \geq 1$ erfüllt, so gibt es messbare Funktionen

$$\Lambda_k^\infty : \mathbb{A}_{k+1} \times \mathbb{A}_{k+2} \times \dots \longrightarrow \mathbb{F}_k,$$

sodass $\Lambda_k^\infty(\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \dots) = X_k$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $k \geq 1$ gilt. Da (X, η) ein zufälliger Pfad ist, gilt aber auch $\Lambda_k^n(X_n, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n) = X_k$ für alle $1 \leq k < n$ \mathbb{P} -fast sicher und damit

$$\Lambda_k^n(\Lambda_n^\infty(\eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots), \eta_{k+1}, \dots, \eta_n) = \Lambda_k^\infty(\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \dots) \quad \mathbb{P}\text{-fast-sicher} \quad (2.2)$$

für alle $1 \leq k < n$. Man vergleiche Gleichung (2.2) mit den Gleichungen (2.3) für das Funktionensystem $(\Lambda_k^n, 1 \leq k \leq n)$: Für alle $1 \leq k < n < N$ und $x_N \in \mathbb{F}_N$ sowie $(a_{k+1}, \dots, a_N) \in \mathbb{A}_{k+1} \times \dots \times \mathbb{A}_N$ gilt

$$\Lambda_k^n(\Lambda_n^N(x_N, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_N), a_{k+1}, \dots, a_n) = \Lambda_k^N(x_N, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_N). \quad (2.3)$$

Extremale starke Verteilungen sind also solche, für die man die Funktionen Λ_k^n für alle k mit $n \rightarrow \infty$ bzgl. der Verteilung von (X_n, η_n) geeignet *fortsetzen* kann.

Im nächsten Unterabschnitt werden zunächst einige äquivalente Bedingungen dafür angegeben, wann eine Verteilung stark ist. Folgende Definition liefert eine äquivalente Beschreibung dieser Eigenschaft und erlaubt es später leicht zu begründen, dass gewisse Verteilungen nicht stark sein können.

Definition 2.2.5. Ist (X, η) ein μ -zentraler Prozess und ist $1 \leq k < n$, so sei

$$\Gamma_k^n := \Lambda_k^n(\cdot, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n) \in \mathbb{F}_k^{\mathbb{F}_n}.$$

Die Kollektion von Prozessen $\Gamma = (\Gamma_k, k \geq 1)$ mit $\Gamma_k = (\Gamma_k^n, n > k)$ heißt durch η induzierter *antreibender Prozess*.

Offensichtlich hängt die Verteilung von Γ nicht von dem konkret gewählten μ -zentralen Prozess ab, sondern nur von Λ und μ .

2.2.1. Charakterisierung starker μ -zentraler Prozesse

Lemma 2.2.6. *Für jedes $k \geq 1$ sind \mathcal{G}_∞ und \mathcal{A}_k unabhängig.*

Beweis. Für alle $1 \leq k \leq n$ sind (X_n, X_{n+1}, \dots) und $(\eta_k, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ unabhängig. Da $\mathcal{G}_\infty \subseteq \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ für alle $n \geq 1$, sind damit auch \mathcal{G}_∞ und $\sigma(\eta_k, \dots, \eta_n)$ für alle $1 \leq k \leq n$ unabhängig. Damit folgt die Behauptung. \square

Ist E eine endliche Menge mit der diskreten Metrik und sind $Y, Y_n, n \geq 1$ Zufallsvariablen mit Werten in E so gilt für alle $1 > \epsilon > 0$, dass $d(Y, Y_n) > \epsilon$ genau dann wenn $Y \neq Y_n$ ist. Insbesondere konvergiert die Folge Y_n also genau dann stochastisch gegen Y , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = Y) = 1$ ist. Fast sichere Konvergenz von Y_n gegen Y bedeutet also, dass Y_n mit Wahrscheinlichkeit 1 schließlich mit Y übereinstimmt.

Satz 2.2.7. *Die folgenden sechs Aussagen sind äquivalent:*

1a. *Die Verteilung von (X, η) ist stark, es gilt also $\sigma(X, \eta) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty \vee \sigma(\eta)$.*

1b. *$\mathcal{G}_k \vee \mathcal{A}_{k+1} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{A}_{k+1}$ für alle $k \geq 1$.*

1c. *$\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{A}_{k+1}$ für alle $k \geq 1$.*

2. *$\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{G}_\infty \vee \bigcap_{n>k} \sigma(\Gamma_k^n, \Gamma_k^{n+1}, \dots)$ für alle $k \geq 1$.*

3a. *Mit $\mathbb{P}^{(X, \eta)} = \int Q d\rho(Q)$ als eindeutiger ergodischer Zerlegung der Verteilung von (X, η) über \mathcal{M}_1 sei (X^*, η^*, X, η) ein Prozess mit Verteilung $\int Q \otimes Q d\rho(Q)$. Dann gilt für alle $k \geq 1$, dass $\Lambda_k^n(X_n^*, \eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*)$ mit $n \rightarrow \infty$ stochastisch gegen X_k konvergiert.*

3b. *Ist $\eta^* = (\eta_n^*)_{n \geq 1}$ von X unabhängig mit $\eta^* \sim \mu$, so konvergiert $\Lambda_k^n(X_n, \eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*)$ für alle $k \geq 1$ mit $n \rightarrow \infty$ stochastisch gegen eine Zufallsvariable X_k^* .*

Bemerkung 2.2.8. Weitere äquivalente Formulierungen findet man wie bereits erwähnt in [Wei83]. In der hier vorliegenden Situation greifen die dort formulierten Äquivalenzen a)-d). Ist der betrachtete Prozess (X, η) extremal, so greift auch die Äquivalenz zu e). Der oben formulierte Punkt 3a ist durch Proposition 2.33 in [Lau11] motiviert. Die dort beschriebene Aussage wird vom Autor auch *Rosenblatt-Self-Joining-Kriterium* genannt.

∇

Beweis von Satz 2.2.7. Einige im Satz verwendete Aussagen rund um den Umgang mit σ -Algebren sind im Anhang aufgeführt.

1c. \Leftrightarrow 1b. \Rightarrow 1a.: Klar.

1a. \Rightarrow 1b.: Aus 1a folgt für beliebiges $k \geq 1$

$$\mathcal{G}_k \vee \mathcal{A}_{k+1} \vee \sigma(\eta_1, \dots, \eta_k) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{A}_{k+1} \vee \sigma(\eta_1, \dots, \eta_k).$$

Nun ist $\sigma(\eta_1, \dots, \eta_k)$ unabhängig von $\mathcal{G}_k \vee \mathcal{A}_{k+1}$ und man kann $\sigma(\eta_1, \dots, \eta_k)$ damit auf beiden Seiten der Gleichung weglassen (Anhang Lemma A.2.1).

1c. \Rightarrow 2.: Für alle $1 \leq k < n$ folgt aus $X_k = \Gamma_k^n(X_n)$ \mathbb{P} -fast sicher, dass $\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(X_n) \vee \sigma(\Gamma_k^n)$ und damit

$$\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \bigcap_{n>k} [\sigma(X_n) \vee \sigma(\Gamma_k^n)].$$

Nach 1c gilt $\sigma(X_n) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{A}_{n+1}$ für alle $n > k$ und damit

$$\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \bigcap_{n>k} [\mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{A}_{n+1} \vee \sigma(\Gamma_k^n)].$$

Es ist

$$\mathcal{A}_{n+1} \vee \sigma(\Gamma_k^n) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(\Gamma_k^n, \eta_{n+1}, \Gamma_k^{n+1}, \eta_{n+2}, \dots),$$

denn Γ_k^{n+m} ist eine Funktion von Γ_k^n und $\eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+m}$ für alle $m \geq 1$. Nach Lemma 2.2.6 ist \mathcal{G}_∞ unabhängig von $\sigma(\eta)$ und damit kann man \mathcal{G}_∞ aus der Schnittbildung herausziehen (Lemma A.2.2):

$$\bigcap_{n>k} [\mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{A}_{n+1} \vee \sigma(\Gamma_k^n)] \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty \vee \bigcap_{n>k} \sigma(\Gamma_k^n, \eta_{n+1}, \Gamma_k^{n+1}, \eta_{n+2}, \dots).$$

Der Prozess $Y = (Y_n)_{n>k}$ mit $Y_n := (\Gamma_k^n, \eta_{n+1})$ erfüllt die Bedingungen aus Lemma A.2.3 und damit gilt für die terminale σ -Algebra von Y

$$\bigcap_{n>k} \sigma(\Gamma_k^n, \eta_{n+1}, \Gamma_k^{n+1}, \eta_{n+2}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \bigcap_{n>k} \sigma(\Gamma_k^n, \Gamma_k^{n+1}, \dots).$$

Damit folgt 2.

2. \Rightarrow 1c.: Für alle $1 \leq k < n$ ist

$$\sigma(\Gamma_k^n) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(\eta_{k+1}, \dots, \eta_n) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{A}_{k+1}$$

und damit $\bigcap_{n>k} \sigma(\Gamma_k^n, \Gamma_k^{n+1}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{A}_{k+1}$.

3a. \Rightarrow 1c.: Es sei $X_k^n := \Lambda_k^n(X_n^*, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$. Die stochastische Konvergenz impliziert die Existenz einer fast sicher konvergenten Teilfolge, also einer Folge $k < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} X_k^{n_j} = X_k$ fast sicher. Damit gilt

$$\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \bigcap_{j \geq 1} \sigma(X_k^{n_j}, X_k^{n_{j+1}}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \bigcap_{n>k} \sigma(X_k^n, X_k^{n+1}, \dots).$$

Nun gilt $\sigma(X_k^n) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(X_n^*, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ und damit

$$\sigma(X_k^n, X_k^{n+1}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(X_n^*, X_{n+1}^*, \dots) \vee \mathcal{A}_{k+1}.$$

Zusammengenommen erhält man

$$\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \bigcap_{n>k} [\sigma(X_n^*, X_{n+1}^*, \dots) \vee \mathcal{A}_{k+1}].$$

Die Verteilung von (X^*, η^*, X, η) wurde nun derart konstruiert, dass X^* und η unabhängig sind und dass $\bigcap_{n>k} \sigma(X_n^*, X_{n+1}^*, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty$ gilt. Damit erhält man mit Lemma A.2.2

$$\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \left(\bigcap_{n>k} \sigma(X_n^*, X_{n+1}^*, \dots) \right) \vee \mathcal{A}_{k+1} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty \vee \mathcal{A}_{k+1}.$$

1c. \Rightarrow 3a.: Es sei $X_\infty := \mathbb{P}(X \in \cdot | \mathcal{G}_\infty)$. Damit gilt also $\sigma(X_\infty) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty$ und $X_\infty \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\gamma))$ \mathbb{P} -fast sicher. Nach 1c existiert nun für alle $k \geq 1$ eine messbare Funktion

$$f_k : \text{ex}(\mathcal{M}_1(\gamma)) \times \mathbb{A}_{k+1} \times \mathbb{A}_{k+2} \times \cdots \longrightarrow \mathbb{F}_k$$

mit $X_k = f_k(X_\infty, \eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \dots)$ fast sicher für alle $k \geq 1$. Ferner gilt wegen $X_k = \Lambda_k^n(X_n, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ fast sicher damit auch

$$f_k(\beta, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots) = \Lambda_k^n(f_n(\beta, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots), a_{k+1}, \dots, a_n)$$

für alle $1 \leq k < n$ für $\mathbb{P}^{X_\infty} \otimes \mu$ -fast alle $(\beta, a_1, a_2, \dots) \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\mu)) \times \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times \cdots$. Mit der ergodischen Zerlegung $\mathbb{P}^{(X, \eta)} = \int Q d\rho(Q)$ der Verteilung von (X, η) über \mathcal{M}_1 sei nun (X^*, η^*, X, η) ein Prozess mit Verteilung $\int Q \otimes Q d\rho(Q)$. Insbesondere gilt also auch $X_k^* = f_k(X_\infty^*, \eta_k^*, \eta_{k+1}^*, \dots)$ fast sicher für alle $k \geq 1$. Man erhält damit fast sicher

$$X_k^n := \Lambda_k^n(X_n^*, \eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*) = \Lambda_k^n(f_n(X_\infty^*, \eta_{n+1}^*, \eta_{n+2}^*, \dots), \eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*).$$

Da für alle $n \geq 1$ auch $(\eta_1, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}^*, \eta_{n+2}^*, \dots) \sim \mu$ und $X_\infty^* = X_\infty$ fast sicher erhält man so

$$X_k^n = f_k(X_\infty, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}^*, \eta_{n+2}^*, \dots)$$

fast sicher für alle $1 \leq k < n$. Die Behauptung in Punkt 3a ist nun, dass

$f_k(X_\infty, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}^*, \eta_{n+2}^*, \dots)$ mit $n \rightarrow \infty$ stochastisch gegen $f_k(X_\infty, \eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \dots)$ konvergiert. Dies folgt aus Lemma A.3.1.

3b. \Rightarrow 3a.: Es seien X_k^* die stochastischen Limiten von $\Lambda_k^n(X_n, \eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*)$ mit $n \rightarrow \infty$. Man erhält

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_k^* = \Lambda_k^{k+1}(X_{k+1}^*, \eta_{k+1}^*)) \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_k^* = \Lambda_k^{k+1}(X_{k+1}^*, \eta_{k+1}^*), X_{k+1}^* = \Lambda_{k+1}^n(X_n, \eta_{k+2}^*, \dots, \eta_n^*)) \\ &= \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_k^* = \Lambda_k^n(X_n, \eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*), X_{k+1}^* = \Lambda_{k+1}^n(X_n, \eta_{k+2}^*, \dots, \eta_n^*)) = 1. \end{aligned}$$

Es gilt $\Lambda_k^n(X_n, \eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*) \sim X_k$ für alle $1 \leq k \leq n$ und damit $X_k^* \sim X_k$ für alle $k \geq 1$. Ferner sind $(X_n^*, X_{n+1}^*, \dots)$ und $(\eta_1^*, \dots, \eta_n^*)$ für alle $n \geq 1$ unabhängig. Insgesamt erhält man also: $(X_n^*, \eta_n^*)_{n \geq 1}$ ist ein zentraler Prozess mit $(X_n^*) \sim (X_n)$. Vertauscht man nun die Rollen von X^* und X gelangt man genau zu der Formulierung in Aussage 3a.

3a. \Rightarrow 3b.: Man vertausche die Rollen von X und X^* . □

Korollar 2.2.9. *Ist (X, η) extremal, so sind die folgenden sechs Aussagen äquivalent:*

1a. Die Verteilung von (X, η) ist stark, es gilt also $\sigma(X, \eta) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(\eta)$.

1b. $\mathcal{G}_k \vee \mathcal{A}_{k+1} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{A}_{k+1}$ für alle $k \geq 1$.

1c. $\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{A}_{k+1}$ für alle $k \geq 1$.

2. $\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \bigcap_{n > k} \sigma(\Gamma_k^n, \Gamma_k^{n+1}, \dots)$ für alle $k \geq 1$.

3a. Ist $X^* \sim X$ von (X, η) unabhängig, so gilt für alle $k \geq 1$, dass $\Lambda_k^n(X_n^*, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ mit $n \rightarrow \infty$ stochastisch gegen X_k konvergiert.

3b. Ist $\eta^* = (\eta_n^*)_{n \geq 1}$ von X unabhängig mit $\eta^* \sim \mu$, so konvergiert $\Lambda_k^n(X_n, \eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*)$ für alle $k \geq 1$ mit $n \rightarrow \infty$ stochastisch gegen eine Zufallsvariable X_k^* .

Bemerkung 2.2.10. In einigen später untersuchten Beispielen liegen starke Verteilungen vor, bei denen in Punkten 3a (und äquivalent 3b) sogar fast sichere Konvergenzen gelten. ∇

Beispiel 2.2.11. Betrachtet wird eine endliche Gruppe G mit Multiplikation xy und Inversion x^{-1} . Es sei $\mathbb{F}_n = \mathbb{A}_n = G$ und $\Lambda_n^{n+1} : \mathbb{F}_{n+1} \times \mathbb{A}_{n+1} \rightarrow \mathbb{F}_n, (x, a) \mapsto ax$. Wie sehen die zentralen Prozesse $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ in diesem Diagramm aus? Es sei $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein zentraler Prozess. Dann gilt $\eta_{n+1}X_{n+1} = X_n$ fast sicher. Nun ist $\eta_{n+1} \sim \text{unif}(G)$ von $X_{n+1} \in G$ unabhängig. Man erhält

$$\mathbb{P}(X_n = x | X_{n+1} = y) = \mathbb{P}(\eta_{n+1}y = x) = |G|^{-1}.$$

Damit sind X_1, X_2, \dots unabhängig und je identisch auf G gleichverteilt, also $\mathcal{M}_1(\gamma) = \{\otimes_{n \geq 1} \text{unif}(G)\}$ und der in Verteilung eindeutige zentrale Prozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ entsteht daraus durch $\eta_n := X_{n-1}X_n^{-1}$ für $n \geq 2$. Als einzige Verteilung ist diese damit automatisch extremal. Ist die Verteilung stark? Wegen $\Lambda_k^n(x, a_{k+1}, \dots, a_n) = a_{k+1}a_{k+2} \dots a_n x$ ist $\Lambda_k^n(x, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n) = X_k X_n^{-1} x$. Damit ist $\sigma(\Gamma_k^n) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(X_k X_n^{-1})$. Der Prozess $(Y_n)_{n > k}$ mit $Y_n := X_k X_n^{-1}$ ist selber ein iid Prozess und mit dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov folgt damit $\bigcap_{n > k} \sigma(\Gamma_k^n, \Gamma_k^{n+1}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \{\emptyset, \Omega\}$ und mit Korollar 2.2.9 ist die eindeutige extremale zentrale Verteilung in \mathcal{B} damit *nicht* stark, falls $|G| > 1$. \triangleleft

2.2.2. Starke μ -zentrale Verteilungen bilden eine messbare Fläche dem Maße nach

Im letzten Unterabschnitt wurde die Eigenschaft *starke Verteilung sein* äquivalent beschrieben. In diesem Abschnitt geht es nun um Eigenschaften der Menge der starken Verteilungen $\mathcal{M}_1^{\text{str}} \subseteq \mathcal{M}_1$. Es kann sein, dass diese Menge leer ist. Angenommen $\mathcal{M}_1^{\text{str}}$ ist nicht leer. Wie oben beschrieben sei $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}}) := \mathcal{M}_1^{\text{str}} \cap \text{ex}(\mathcal{M}_1)$ die Menge der extremalen starken Verteilungen. Der Gewinn des nachfolgenden Satzes liegt darin, dass man sich bei der Suche nach starken Verteilungen auf extremale starke Verteilungen beschränken kann.

Satz 2.2.12. 1. $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}})$ ist eine Borelsche Teilmenge von \mathcal{M}_1 .

2. Für $P \in \mathcal{M}_1$ sei $\mu^P := \mathcal{L}(P(\cdot | \mathcal{G}_\infty))$ das eindeutige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\text{ex}(\mathcal{M}_1)$ mit $P = \int Q d\mu^P(Q)$. Dann gilt $P \in \mathcal{M}_1^{\text{str}} \Leftrightarrow \mu^P(\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}})) = 1$.

3. $\mathcal{M}_1^{\text{str}} \subseteq \mathcal{M}_1$ ist eine messbare Fläche dem Maße nach.

Beweis. Es bietet sich in diesem Beweis an, mit der kanonischen Konstruktion zu argumentieren. Es sei

$$\text{Path}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) \times \text{Path}(\mathbb{F}, \mathbb{A}) = (\mathbb{F}_1 \times \mathbb{A}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{A}_2 \times \dots) \times (\mathbb{F}_1 \times \mathbb{A}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{A}_2 \times \dots)$$

und darauf definiert die Identität (X, η, X^*, η^*) . Für $1 \leq k < n$ wird das Ereignis

$$D_k^n := \{\Lambda_k^n(X_n^*, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n) \neq X_k\} \subseteq \text{Path}(\mathbb{F}, A) \times \text{Path}(\mathbb{F}, A)$$

betrachtet. Für ein $P \in \mathcal{M}_1$ mit eindeutigem darstellenden Wahrscheinlichkeitsmaß μ^P wie im Satz sei $P^* \in \mathcal{M}_1(\text{Path}(\mathbb{F}, A) \times \text{Path}(\mathbb{F}, A))$ definiert durch

$$P^* := \int Q \otimes Q d\mu^P(Q).$$

Damit gilt nach Satz 2.2.7

$$P \in \mathcal{M}_1^{\text{str}} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} P^*(D_k^n) = 0 \text{ für alle } k \geq 1.$$

1: Für $P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1)$ ist $\mu^P = \delta_P$ und damit $P^* = P \otimes P$. Man erhält damit

$$\begin{aligned} \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}}) &= \{P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1) : \lim_{n \rightarrow \infty} P \otimes P(D_k^n) = 0 \text{ für alle } k \geq 1\} \\ &= \bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{N \geq k} \bigcap_{n \geq N} \{P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1) : P \otimes P(D_k^n) < 1/m\}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen

$$\mathcal{M}_1(\text{Path}(\mathbb{F}, A)) \rightarrow \mathcal{M}_1(\text{Path}(\mathbb{F}, A) \times \text{Path}(\mathbb{F}, A)), P \mapsto P \otimes P$$

und

$$\mathcal{M}_1(\text{Path}(\mathbb{F}, A) \times \text{Path}(\mathbb{F}, A)) \rightarrow [0, 1], Q \mapsto Q(D_{n,k})$$

sind messbar und damit ist $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}})$ als abzählbare Kombination messbarer Mengen messbar.

2: Ist $P \in \mathcal{M}_1^{\text{str}}$ und ist $X_\infty := P(\cdot | \mathcal{G}_\infty)$, so gibt es eine messbare Funktion

$$f : \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Lambda)) \times \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times \dots \longrightarrow \text{Path}(\mathbb{F}, A)$$

mit $P((X, \eta) = f(X_\infty, \eta)) = 1$. Damit gilt dann aber auch

$$1 = \int Q((X, \eta) = f(X_\infty, \eta)) d\mu^P(Q) = \int Q((X, \eta) = f(Q, \eta)) d\mu^P(Q).$$

Da der Integrand nur Werte im Intervall $[0, 1]$ annimmt, muss dieser also für μ^P -fast alle Q den Wert 1 haben. Also gilt für μ^P -fast alle $Q \in \text{ex}(\mathcal{M}_1)$, dass

$$(X, \eta) = f(Q, \eta) \quad Q\text{-fast sicher.}$$

Also $Q \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}})$ für μ^P -fast alle Q .

Gilt umgekehrt $\mu^P(\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}})) = 1$, so gilt für alle $k \geq 1$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^*(D_k^n) = 0 \quad \text{für } \mu^P\text{-fast alle } Q.$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^*(D_k^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int Q^*(D_k^n) d\mu^P(Q) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} Q^*(D_k^n) d\mu^P(Q) = 0$$

und damit $P \in \mathcal{M}_1^{\text{str}}$.

3: Die Konvexität folgt direkt aus Punkt 2.. Die Barycenterabbildung

$$b : \mathcal{M}_1(\text{ex}(\mathcal{M}_1)) \rightarrow \mathcal{M}_1, \mu \mapsto \int Q d\mu(Q)$$

ist eine stetige *bijektive* Abbildung zwischen polnischen Räumen. Ebenso ist die Abbildung

$$c : \mathcal{M}_1(\text{ex}(\mathcal{M}_1)) \rightarrow [0, 1], \mu \mapsto \mu(\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}}))$$

messbar, da $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}})$ nach erstem Punkt messbar ist. Damit ergibt sich mit dem vorangegangenen Satz

$$\mathcal{M}_1^{\text{str}} = b(c^{-1}(\{1\})),$$

$\mathcal{M}_1^{\text{str}}$ ist also das Bild einer messbaren Mengen und b ist eine stetige (und damit messbare) bijektive (und damit injektive) Abbildung zwischen polnischen Räumen. Die Messbarkeit von $\mathcal{M}_1^{\text{str}}$ folgt damit aus Theorem (15.1) in [Kec12]. \square

2.3. Standardfiltrationen im Fall zentraler Prozesse

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Begriffe und Aussagen sind nur ein kleiner Ausschnitt aus der Theorie der *Klassifikation von Filtrationen*, welche von A. Vershik begründet wurde. Die nachfolgende Darstellung ist [Lau13] entnommen; eine weitere gute Einführung findet man in [JLR15]. Wege zu den Originalarbeiten von A. Vershik findet man in den dort genannten Referenzen. Diese Arbeiten verwenden allerdings den Begriff „*messbare Partition*“ statt „ σ -Algebra“.

Es liegt nach wie vor ein HMB \mathcal{B} vor und betrachtet wird ein extremaler zentraler Prozess $(X, \eta) = (X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$, welcher auf einem fixierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{R}, \mathbb{P})$ definiert ist. Betrachtet wird der Fall $\eta_k \sim \text{unif}(\mathbb{A}_k)$ für alle $k \geq 1$. Wie zuvor seien $\mathcal{G}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ und $\mathcal{A}_n := \sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \dots)$ sowie

$$\mathcal{F}_n := \mathcal{G}_n \vee \mathcal{A}_{n+1} = \sigma(X_n, \eta_{n+1}, X_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots).$$

Nach Satz 2.1.5 ist Extremalität des Prozesses gleichbedeutend zu $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_n \stackrel{\mathbb{P}}{=} \{\emptyset, \Omega\}$. Ein stochastischer Prozess $\eta^* = (\eta_n^*)_{n \geq 1}$ bestehend aus unabhängigen Zufallsvariablen heißt *lokaler Innovationsprozess* von \mathcal{F} , falls

1. Für alle $n \geq 2$ sind $(\eta_2^*, \dots, \eta_n^*)$ und \mathcal{F}_n unabhängig.
2. Für alle $n \geq 1$ gilt $\mathcal{F}_n \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(\eta_{n+1}^*) \vee \mathcal{F}_{n+1}$.

Ein stochastischer Prozess $\eta^* = (\eta_n^*)_{n \geq 1}$ bestehend aus unabhängigen Zufallsvariablen heißt *generierend* zu \mathcal{F} , falls $\mathcal{F}_n \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(\eta_{n+1}^*, \eta_{n+2}^*, \dots)$ für alle $n \geq 1$ gilt. Mit diesen Definitionen erhält man sofort: Jeder generierende Prozess zu \mathcal{F} ist ein lokaler Innovationsprozess von \mathcal{F} , der Prozess η ist ein lokaler Innovationsprozess zu \mathcal{F} und (X, η) ist genau dann stark, wenn η ein generierender Prozess zu \mathcal{F} ist.

Definition 2.3.1. Die Verteilung von (X, η) heißt *standard*, falls ein generierender Prozess zu \mathcal{F} existiert.

Mit dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov erhält man sofort, dass nur die Verteilung eines extremalen Prozesses standard sein kann. Tatsächlich ist Standardness hier eine Eigenschaft

der Verteilung von (X, η) und nicht etwa eine Eigenschaft des im Hintergrund liegenden Wahrscheinlichkeitsraumes. Die hier gewählte Definition von Standardness ist in voller Allgemeinheit ein Satz. Die Filtration \mathcal{F} hat nach Konstruktion den lokalen Innovationsprozess η , welcher aus unabhängigen und je auf der endlichen Menge \mathbb{A}_n gleichverteilten Zufallsgrößen besteht. Mit $r_n := \#\mathbb{A}_n$ nennt man die Filtration \mathcal{F} dann auch (r_n) -adisch. Das erleichtert die Suche nach lokalen Innovationsprozessen erheblich.

Satz 2.3.2. *Jeder lokale Innovationsprozess $\eta^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, \dots)$ zu \mathcal{F} besteht aus unabhängigen Zufallsvariablen, sodass η_n^* für $n \geq 2$ auf einer endlichen Menge mit r_n Elementen gleichverteilt ist.*

Man kann sich daher ohne Einschränkung auf solche lokalen Innovationsprozesse η^* von \mathcal{F} mit $\eta^* \sim \eta$ beschränken. Jeder andere lokale Innovationsprozess entsteht aus einem solchen durch deterministische Umbenennung der einzelnen Komponenten. Die einfache Reduktion auf Innovationsprozesse mit $\eta^* \sim \eta$ folgt aus der Zentralität von (X, η) und beruht auf folgendem Satz:

Satz 2.3.3. *Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{R}, \mathbb{P})$ seien Unter- σ -Algebren $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{R}$ und eine auf einer endlichen Menge E gleichverteilte Zufallsgröße Y gegeben, sodass \mathcal{F} und $\sigma(Y)$ unabhängig sind und sodass $\sigma(Y) \vee \mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}$ gilt. Dann gilt für jede Zufallsgröße Z für die $\sigma(Z)$ und \mathcal{F} unabhängig sind: $\sigma(Z) \vee \mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}$ genau dann wenn es eine zufällige \mathcal{F} -messbare injektive Abbildung π mit Definitionsbereich E und $Z = \pi(Y)$ fast sicher gibt. Man nennt Y auch ein unabhängiges Komplement von \mathcal{G} bzgl. \mathcal{F} .*

Ist $\eta^* = (\eta_n^*)_{n \geq 1}$ ein lokaler Innovationsprozess zu \mathcal{F} , so ist $(\eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*)$ ein unabhängiges Komplement von \mathcal{F}_n bzgl. \mathcal{F}_k . Die rekursive Gestalt führt nun darauf, dass $(\eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*)$ nicht das Bild einer beliebigen \mathcal{F}_n -messbaren Bijektion $\pi : \mathbb{A}_{k+1} \times \dots \times \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_{k+1} \times \dots \times \mathbb{A}_n$ ist, sondern schränkt die Klasse der betrachteten Bijektionen ein. Dies führt auf den Begriff des *Tree-Automorphismus*:

Definition 2.3.4. Es sei $1 \leq k \leq n$. Es sei $\mathbb{C}_k^n := \mathbb{A}_k \times \mathbb{A}_{k+1} \times \dots \times \mathbb{A}_n$. Iterativ definiert man die Teilmenge $\mathbb{T}(\mathbb{C}_k^n) \subseteq \mathbb{S}(\mathbb{C}_k^n)$ der Tree-Automorphismen von \mathbb{C}_k^n wie folgt: $\mathbb{T}(\mathbb{C}_k^k) := \mathbb{S}(\mathbb{C}_k^k)$ ist die Menge aller Bijektionen $\mathbb{A}_k \rightarrow \mathbb{A}_k$. Jedes $\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{C}_k^{n+1})$ ist von der Form

$$\tau(a_k, \dots, a_{n+1}) := (f(\pi(a_{n+1}))((a_k, \dots, a_n)), \pi(a_{n+1}))$$

für eine Bijektion $\pi : \mathbb{A}_{n+1} \rightarrow \mathbb{A}_{n+1}$ und eine Abbildung $f : \mathbb{A}_{n+1} \rightarrow \mathbb{T}(\mathbb{C}_k^n)$.

Satz 2.3.5. *Ist η^* ein lokaler Innovationsprozess von \mathcal{F} , so existiert für alle $1 \leq k < n$ ein zufälliger \mathcal{F}_n -messbarer Tree-Automorphismus $\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{C}_{k+1}^n)$ mit $(\eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*) = \tau(\eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ fast sicher.*

Speziell in [Lau11] findet man eine sehr gute und lesbare Darstellung samt Begründungen der bis hierhin vorgestellten Begriffe. Allgemeine Tree-Automorphismen werden im weiteren Verlauf der Arbeit nicht weiter vorkommen. In einem späteren Abschnitt wird ein HMB allerdings *ummarkiert*:

Definition 2.3.6. Es sei $\mathcal{B} = (\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ ein HMB. Eine Ummarkierung von \mathcal{B} ist eine Kollektion $\phi = (\phi_x, x \in \mathbb{F})$ von Abbildungen, sodass für alle $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{F}_n$ die Funktion ϕ_x eine bijektive Abbildung $\mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$ ist. Damit definiert man das *ummarkierte* HMB $\mathcal{B}^\phi = (\mathbb{F}, \mathbb{A}, \phi\Lambda)$ mit

$$\phi\Lambda_n^{n+1} : \mathbb{F}_{n+1} \times \mathbb{A}_{n+1} \longrightarrow \mathbb{F}_n, (x, a) \longmapsto \Lambda_n^{n+1}(x, \phi_x^{-1}(a)).$$

Es sei ϕ eine Ummarkierung von \mathcal{B} . Man macht sich sofort klar, dass ein Prozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ genau dann zentral in \mathcal{B} ist, wenn $(X_n, \phi_{X_n}(\eta_n))_{n \geq 1}$ zentral in \mathcal{B}^ϕ ist. Tatsächlich ist die zugehörige Abbildung, welche die Verteilung von $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ in die Verteilung von $(X_n, \phi_{X_n}(\eta_n))_{n \geq 1}$ überführt, ein Isomorphismus zwischen den jeweiligen Simplizes der zentralen Prozessverteilung in \mathcal{B} bzw. \mathcal{B}^ϕ . Ferner ist der Prozess $\eta^* = (\phi_{X_n}(\eta_n))_{n \geq 1}$ ein lokaler Innovationsprozess zu \mathcal{F} . Direkt aus der bisherigen Begriffsbildung erhält man damit:

Satz 2.3.7. *Es sei (X, η) ein extremaler zentraler Prozess in \mathcal{B} . Existiert eine Ummarkierung ϕ von \mathcal{B} , sodass $(X_n, \phi_{X_n}(\eta_n))_{n \geq 1}$ eine starke Verteilung in \mathcal{B}^ϕ ist, so ist (X, η) standard.*

In Abschnitt 4.2 wird ein Beispiel für \mathcal{B} diskutiert, in welchem nicht jede extremale Verteilung in \mathcal{B} stark ist, man aber eine Ummarkierung ϕ von \mathcal{B} derart angeben kann, dass *jede* extremale Verteilung in \mathcal{B}^ϕ stark ist. Insbesondere zeigt man damit, dass *jeder* extremale Prozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ im dort vorliegenden Diagramm \mathcal{B} standard ist. In einfacher Form tritt dieses Phänomen bereits in Beispiel 2.3.8 auf:

Beispiel 2.3.8. Fortführung von Beispiel 2.2.11. Die eindeutige (und damit automatisch extremale) Verteilung in diesem Beispiel ist wie gesehen nicht stark, aber standard: Für $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{F}_n = G$ sei $\phi_x : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$ die Abbildung $\phi_x(a) := ax$. Damit ist ϕ eine Ummarkierung von \mathcal{B} und es ist $\phi\Lambda_n^{n+1} : \mathbb{F}_{n+1} \times \mathbb{A}_{n+1} \rightarrow \mathbb{F}_n$ gegeben durch $\phi\Lambda_n^{n+1}(x, a) = \Lambda_n^{n+1}(x, \phi_x^{-1}(a)) = \phi_x^{-1}(a)x$. Die Umkehrfunktion von $a \mapsto ax$ ist die Abbildung $a \mapsto ax^{-1}$. Damit ist $\phi\Lambda_n^{n+1}(x, a) = a$. Der einzige zentrale Prozess in \mathcal{B}^ϕ ist von der Gestalt $(X_n, \phi_{X_n}(\eta_n))_{n \geq 2}$ und nun ist $\phi_{X_n}(\eta_n) = \eta_n X_n = X_{n-1} X_n^{-1} X_n = X_{n-1}$. Also ist $(X_n, X_{n-1})_{n \geq 2}$ der einzige zentrale Prozess in \mathcal{B}^ϕ und dieser Prozess hat offensichtlich eine starke Verteilung. Damit hat der Ursprungsprozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 2}$ zwar keine starke Verteilung, die Verteilung ist aber standard nach Satz 2.3.7. \triangleleft

Selbst wenn sich (die Rückwärtsfiltration \mathcal{F} zu) ein(em) Prozess als *nicht-standard* herausgestellt hat, kann man dennoch weitere Betrachtungen in diese Richtung anstellen; zu *jeder* Filtration findet man eine aufsteigende Folge von Zeitpunkten $1 \leq m_1 < m_2 < \dots$, sodass die Filtration, eingeschränkt auf diese Zeitpunkte, standard ist (Vershik's *Lacunization Theorem*). Die Begriffe der Standardfiltrationen wurden hier nur für spezielle (r_n) -adische Filtrationen vorgestellt, aber eine solch eingeschränkte Filtration ist auch wieder (d_n) -adisch (d_n ist Produkt gewisser r_i 's) und man kann auch direkt die hier vorliegenden HMB einschränken. Dies geschieht analog zu der in Abschnitt 1.6 beschriebenen

Situation für EGGs (siehe Definition 1.6.10), wird nun aber nicht näher ausgeführt. Für konkrete extremale zentrale Prozesse $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ stellen sich nacheinander die folgenden Fragen:

1. Ist die Verteilung stark, also ist der Prozess η generierend zu \mathcal{F} ? Falls nicht:
2. Ist die Verteilung standard, also existiert ein generierender Prozess zu \mathcal{F} ? Falls nicht:
3. Das *Lacunizationtheorem* von A. Vershik besagt, dass es zu jeder Rückwärtsfiltration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ wie hier beschrieben eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(m_n)_{n \geq 0}$ gibt, derart dass die daraus konstruierte Rückwärtsfiltration $\mathcal{G} = (\mathcal{F}_{m_n})_{n \geq 0}$ standard ist. Ist \mathcal{F} (r_n) -adisch, so ist \mathcal{G} (d_n) -adisch mit geeigneten d_n . Für welche $(m_n)_{n \geq 0}$ ist \mathcal{G} standard?

In dieser Arbeit wird die erste Frage häufig geklärt und die zweite Frage in einer Situation durch Ummarkierung des Diagramms positiv beantwortet (Kaptiel 4).

2.4. Beispiel: Shift-Invariante Prozesse und Bratellidiagramme

In diesem Abschnitt wird ein ausführliches Beispiel vorgestellt, da die Art der hier formulierten und bewiesenen Aussagen später, im Hauptteil über Austauschbarkeit in konsistenten Systemen, in sehr ähnlicher Form vorkommt. Hier geht es nun zunächst nicht um Austauschbarkeit, sondern um einen anderen klassischen Invarianzbegriff für Verteilungen stochastischer Prozesse: Der *Shiftinvarianz*. Es wird nun gezeigt, wie man diesen auf kanonische Weise über ein HMB erhalten kann.

Es sei Σ eine nicht-leere endliche Menge mit $\#\Sigma \geq 2$, das Alphabet, und $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ die Menge der durch \mathbb{Z} induzierten zweiseitigen Σ -wertigen Folgen. Die diskrete Produkttopologie macht $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ zu einem kompakten metrisierbaren topologischen Raum. Die Shiftabbildung ist definiert durch

$$T : \Sigma^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}}, \quad (z_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (z_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Die Menge der Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1(\Sigma^{\mathbb{Z}})$ ist unter der Topologie der schwachen Konvergenz damit selbst ein kompakt metrisierbarer topologischer Raum. Es sei $\mathcal{M}_1^{\text{shift}}(\Sigma) \subseteq \mathcal{M}_1(\Sigma^{\mathbb{Z}})$ die Menge derjenigen P mit $P^T = P$. Bekannt ist: $\mathcal{M}_1^{\text{shift}}(\Sigma)$ ist der *Poulsen-simplex* (siehe [Phe01]). Die Verteilung $\mathbb{P}^Z \in \mathcal{M}_1^{\text{shift}}(\Sigma)$ eines shiftinvarianten Prozesses $Z = (Z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ist eindeutig durch die Werte

$$p(x) := \mathbb{P}(Z_0 = x_1, \dots, Z_{n-1} = x_n), \quad n \geq 1, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma^n \quad (2.4)$$

festgelegt. Die dadurch erhaltenen Funktionen $p : \bigcup_{n \geq 1} \Sigma^n \rightarrow [0, 1]$ erfüllen

1. $\sum_{x \in \Sigma^n} p(x) = 1$ für alle n ,
2. $\sum_{a \in \Sigma} p(ax) = \sum_{a \in \Sigma} p(xa) = p(x)$ für alle $n \geq 1, x \in \Sigma^n$,

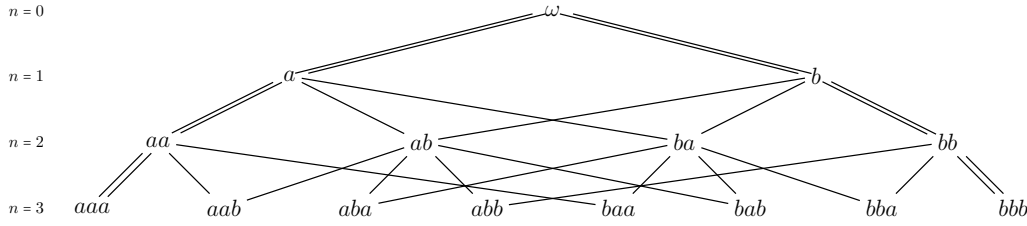


Abb. 2.4.: Ersten 3 Stufen des Diagrammes.

wobei $ax = (a, x_1, \dots, x_n) \in \Sigma^{n+1}$ für $a \in \Sigma$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma^n$ ist (analog xa). Bezeichnet man mit $\mathcal{P}_1^{\text{shift}}(\Sigma)$ die Menge aller Funktionen, welche die obigen Bedingungen 1. und 2. erfüllen und betrachtet darauf die Topologie der punktweisen Konvergenz, so ist $\mathcal{P}_1^{\text{shift}}(\Sigma)$ ein Simplex, welcher über die in (2.4) erklärte Zuordnung isomorph zu $\mathcal{M}_1^{\text{shift}}(\Sigma)$ ist.

Es wird nun gezeigt, dass man auf den Simplex $\mathcal{P}_1^{\text{shift}}(\Sigma)$ auch über eine geeignete Rückwärtsdynamik μ auf dem Pfadraum $\Sigma^1 \times \Sigma^2 \times \Sigma^3 \times \dots$ geführt wird, also $\mathcal{P}_1^{\text{shift}}(\Sigma) = \mathcal{P}_1(\gamma)$ für diese spezielle Rückwärtsdynamik gilt. Dazu wird folgendes HMB betrachtet:

1. Es sei $\mathbb{F}_n = \Sigma^n$ für $n \geq 1$ und \mathbb{F}_0 bestehe aus dem leeren Wort ω .
2. Es sei $\mathbb{A}_n = \{0, 1\}$ für $n \geq 1$.
3. Für $n \geq 2$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_n$ sei $\Lambda_{n-1}^n : \Sigma^n \times \{0, 1\} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ definiert durch

$$\Lambda_{n-1}^n(x, 0) := (x_2, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad \Lambda_{n-1}^n(x, 1) := (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

$\Lambda_{n-1}^n(\cdot, 0)$ entspricht der Anweisung „ersten Buchstaben entfernen“ und $\Lambda_{n-1}^n(\cdot, 1)$ entspricht der Anweisung „letzten Buchstaben entfernen“. Speziell für das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ zeigt Abbildung 2.4 die (wieder unmarkierten) ersten 3 Stufen des zugehörigen Diagrammes.

Die iterierten Funktionen Λ_k^n haben eine einfache Gestalt: Für $(a_{k+1}, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^{n-k}$ gilt mit $j := a_{k+1} + \dots + a_n$

$$\Lambda_k^n((x_1, \dots, x_n), (a_{k+1}, \dots, a_n)) = (x_{n-k+1-j}, \dots, x_{n-j}),$$

denn entfernt man sukzessive erste oder letzte Buchstaben eines Wortes, so ist das resultierende Wort nicht davon abhängig in welcher Reihenfolge erste/letzte Buchstaben gelöscht wurden, sondern nur, wie viele erste bzw. letzte Buchstaben insgesamt gelöscht wurden. Es wird nun eine Klasse von zentralen Prozessen betrachtet. Hierzu sei $\alpha \in (0, 1)$ fixiert. Für $n \geq 1$ sei

$$\mu_n := \text{Bin}(1, 1 - \alpha) \quad \text{und} \quad \mu_\alpha := \bigotimes_{n \geq 1} \text{Bin}(1, 1 - \alpha) = \bigotimes_{n \geq 1} \mu_n.$$

Ein Prozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ mit Verteilung in $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu_\alpha)$ ist nun derart, dass

$X_n = (X_{n,1}, \dots, X_{n,n})$ für alle $n \geq 1$ ein zufälliges Wort der Länge n über dem Alphabet Σ ist, η_1, η_2, \dots ist eine iid Folge $\{0, 1\}$ -wertiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\eta_1 = 0) = \alpha$,

für alle $n \geq 1$ sind (η_1, \dots, η_n) und $(X_n, X_{n+1}, \eta_{n+1}, X_{n+2}, \eta_{n+2}, \dots)$ unabhängig und es entsteht X_{n-1} aus X_n , indem der erste Buchstabe in X_n gelöscht wird, falls $\eta_n = 0$ ist und der letzte Buchstabe gelöscht wird, falls $\eta_n = 1$ ist. Die zugehörigen Prozesse $X = (X_n)_{n \geq 1}$ sind wie bereits gesehen Markovketten mit folgender Rückwärtsdynamik γ (welche natürlich ebenfalls von α abhängt, aber auf den Index wird verzichtet): Ist $1 \leq k < n$ und $x = (x_1, \dots, x_k) \in \Sigma^k$ sowie $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma^n$, so ist

$$\gamma_k^n(x, y) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{n-k-j} 1((y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_{j+k-1}, y_{j+k}) = (x_1, \dots, x_k)).$$

In der Form eines Experimentes ausgedrückt: Ist mit $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma^n$ ein Wort der Länge n gegeben und ist $J \sim \text{Bin}(n-k, \alpha)$ binomialverteilt mit den Parametern $n-k$ und $\alpha \in (0, 1)$, so entfernt man die ersten J Buchstaben in y und die letzten $n-k-J$ Buchstaben in y . Übrig bleibt ein zufälliges Wort der Länge k und dieses hat genau die Verteilung $\gamma_k^n(\cdot, y)$. Der Simplex $\mathcal{M}_1(\gamma)$ ist nun wie in Abschnitt 1.6 beschrieben kanonisch isomorph zur Menge aller Funktionen $p: \bigcup_{n \geq 1} \Sigma^n \rightarrow [0, 1]$ mit

1. $\sum_{x \in \Sigma^n} p(x) = 1$ für alle n .
2. $p(x) = \sum_{y \in \Sigma^n} \gamma_k^n(x, y) p(y)$ für alle $1 \leq k \leq n, x \in \Sigma^k$.

Es sei $\mathcal{P}_1(\gamma)$ die Menge aller dieser Funktionen.

Lemma 2.4.1. $\mathcal{P}_1^{\text{shift}}(\Sigma) = \mathcal{P}_1(\gamma)$. Insbesondere hängt die letzte Menge nicht von $\alpha \in (0, 1)$ ab und mit $\mathcal{P}_1^{\text{shift}}(\Sigma)$ ist auch $\mathcal{P}_1(\gamma)$ und damit $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu_\alpha)$ der Poulsensimplex.

Beweis. Die Objekte in beiden Mengen sind Funktionen

$$p: \bigcup_{n \geq 1} \Sigma^n \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad \sum_{x \in \Sigma^n} p(x) = 1 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Eine solche Funktion ist genau dann in $\mathcal{P}_1(\gamma)$ enthalten, wenn

$$p(x) = \sum_{y \in \Sigma^n} \gamma_k^n(x, y) p(y) \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n, x \in \Sigma^k \quad (2.5)$$

gilt und genau dann in $\mathcal{P}_1^{\text{shift}}(\Sigma)$ enthalten, wenn

$$p(x) = \sum_{a \in \Sigma} p(ax) = \sum_{a \in \Sigma} p(xa) \quad \text{für alle } k \geq 1, x \in \Sigma^k \quad (2.6)$$

gilt. Es muss also die Äquivalenz der Bedingungen (2.5) und (2.6) begründet werden. Die Implikation (2.6) \Rightarrow (2.5) erhält man leicht: Es gilt

$$\gamma_k^{k+1}(x, (y_1, \dots, y_{k+1})) = \alpha 1((y_2, \dots, y_{k+1}) = x) + (1-\alpha) 1((y_1, \dots, y_k) = x)$$

und damit bei Gültigkeit von (2.6)

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \Sigma^{k+1}} \gamma_k^{k+1}(x, y) p(y) &= \sum_{y \in \Sigma^{k+1}} [\alpha 1((y_2, \dots, y_{k+1}) = x) + (1-\alpha) 1((y_1, \dots, y_k) = x)] p(y) \\ &= \alpha \sum_{a \in \Sigma} p(ax) + (1-\alpha) \sum_{a \in \Sigma} p(xa) \\ &= \alpha p(x) + (1-\alpha) p(x) \\ &= p(x), \end{aligned}$$

also folgt $\mathcal{P}_1^{\text{shift}}(\Sigma) \subseteq \mathcal{P}_1(\gamma)$. Umgekehrt sei $p \in \mathcal{P}_1(\gamma)$. Dann gilt für alle $x \in \Sigma^k$ und $n \geq k + 1$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a \in \Sigma} p(xa) - p(x) \right| &= \left| \sum_{y \in \Sigma^n} p(y) \left(\sum_{a \in \Sigma} \gamma_{k+1}^n(xa, y) - \gamma_k^n(x, y) \right) \right| \\ &\leq \sum_{y \in \Sigma^n} p(y) \left| \sum_{a \in \Sigma} \gamma_{k+1}^n(xa, y) - \gamma_k^n(x, y) \right|. \end{aligned}$$

Für $y = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma^n$ gilt

$$\gamma_k^n(x, y) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{n-k-j} 1((y_{j+1}, \dots, y_{j+k}) = x).$$

und auf der anderen Seite

$$\sum_{a \in \Sigma} \gamma_{k+1}^n(xa, y) = \sum_{j=0}^{n-(k+1)} \binom{n-(k+1)}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{n-(k+1)-j} 1((y_{j+1}, \dots, y_{j+k}) = x).$$

Damit erhält man mit der Dreiecksungleichung und durch Abschätzung aller auftretenden Indikatoren nach oben durch 1

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{a \in \Sigma} \gamma_{k+1}^n(xa, y) - \gamma_k^n(x, y) \right| \\ &\leq \alpha^{n-k} + \sum_{j=0}^{n-(k+1)} \left| \binom{n-(k+1)}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{n-(k+1)-j} - \binom{n-k}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{n-k-j} \right|. \end{aligned}$$

Mit $B'_n \sim \text{Bin}(n - (k + 1), \alpha)$ ist die obere Schranke identisch zu

$$\alpha^{n-k} + \mathbb{E} \left(\left| 1 - \frac{(1-\alpha)(n-k)}{n-k-B'_n} \right| \right).$$

Mit $B_n \sim \text{Bin}(n - k, 1 - \alpha)$ ist dieser Ausdruck identisch zu

$$\alpha^{n-k} + \mathbb{E} \left(\left| 1 - \frac{(1-\alpha)(n-k)}{B_n + 1} \right| \right)$$

und dieser Term konvergiert für festes k mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 (siehe Lemma A.1.1 im Anhang). Wegen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a \in \Sigma} p(xa) - p(x) \right| &\leq \sum_{y \in \Sigma^n} p(y) \left| \sum_{a \in \Sigma} \gamma_{k+1}^n(xa, y) - \gamma_k^n(x, y) \right| \\ &\leq \alpha^{n-k} + \mathbb{E} \left(\left| 1 - \frac{(1-\alpha)(n-k)}{B_n + 1} \right| \right) \end{aligned}$$

für alle $n \geq k + 1$ folgt damit mit $n \rightarrow \infty$ also

$$\sum_{a \in \Sigma} p(xa) = p(x).$$

Da $p \in \mathcal{P}_1(\gamma)$ erhält man damit auch

$$p(x) = \sum_{y \in \Sigma^{k+1}} \gamma_k^{k+1}(x, y) p(y) = \alpha \sum_{a \in \Sigma} p(ax) + (1-\alpha) \sum_{a \in \Sigma} p(xa) = \alpha \sum_{a \in \Sigma} p(ax) + (1-\alpha) p(x),$$

also $\sum_{a \in \Sigma} p(ax) = p(x)$. Insgesamt also $p \in \mathcal{P}_1^{\text{shift}}(\Sigma)$. \square

Mit Lemma 2.4.1 erhält man die folgende dynamischere Aussage:

Satz 2.4.2. *Es sei $\alpha \in (0, 1)$ fest und*

1. $Z = (Z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sei ein Σ -wertiger shiftinvarianter Prozess.
2. $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ sei ein von Z unabhängiger Prozess von unabhängigen je $\text{Bin}(1, 1 - \alpha)$ -verteilten Zufallsgrößen.
3. Es sei $S_1 := 0$ und für $n \geq 2$ sei $S_n := \eta_2 + \dots + \eta_n$.
4. Es sei für $n \geq 1$

$$X_n := (Z_{S_n-n+1}, Z_{S_n-n+2}, \dots, Z_{S_n-1}, Z_{S_n}) \in \Sigma^n,$$

$$\text{also speziell } X_1 = (Z_0) \in \Sigma^1.$$

Dann ist der Prozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein μ_α -zentraler Prozess. Die so konstruierte Zuordnung

$$\mathcal{M}_1^{\text{shift}}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu_\alpha), \quad \mathcal{L}(Z) \longmapsto \mathcal{L}((X_n, \eta_n)_{n \geq 1})$$

ist ein Isomorphismus. In Worten ausgedrückt: Jede Markovkette $X = (X_n)_{n \geq 1}$ wachsender Wörter mit Rückwärtsdynamik γ ist ein in Verteilung eindeutiger sukzessive nach links und rechts aufgedeckter shiftinvarianter Prozess, wobei die Entscheidungen für links bzw. rechts unabhängig je mit Wahrscheinlichkeiten α bzw. $1 - \alpha$ getroffen werden.

Beweis. Zunächst wird begründet, dass $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein zentraler Prozess ist.

$\Lambda_{n-1}^n(X_n, \eta_n) = X_{n-1}$ fast sicher folgt direkt aus der Konstruktion. Auch die Verteilung von η ist per Definition die richtige. Man muss nur noch begründen, dass (η_1, \dots, η_n) und X_n für alle $n \geq 1$ unabhängig sind. Für $(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma^n$ gilt mit $j := a_2 + \dots + a_n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((\eta_1, \dots, \eta_n) = (a_1, \dots, a_n), X_n = x) \\ &= \mathbb{P}((\eta_1, \dots, \eta_n) = (a_1, \dots, a_n), (Z_{j-n+1}, \dots, Z_j) = x) \\ &= \mathbb{P}((\eta_1, \dots, \eta_n) = (a_1, \dots, a_n)) \cdot \mathbb{P}((Z_0 \dots Z_{n-1}) = x), \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichung die Definition von X_n und in der dritten die Unabhängigkeit von Z und η sowie die Shiftinvarianz von Z benutzt wurde. Aus der Shiftinvarianz von Z zusammen mit der Unabhängigkeit von Z und η folgt aber auch $X_n \sim (Z_0, \dots, Z_{n-1})$ und damit insgesamt:

1. (η_1, \dots, η_n) und X_n sind für alle $n \geq 1$ unabhängig, also ist (X, η) ein zentraler Prozess.
2. Da die Verteilungen shiftinvarianter Prozesse eindeutig durch $\mathbb{P}((Z_0, \dots, Z_{n-1}) = x)$, $n \geq 0$, $x \in \Sigma^n$ determiniert sind, ist die Zuordnung $\mathcal{M}_1^{\text{shift}}(\Sigma^{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu_\alpha)$ stetig, affin und injektiv.

Die Surjektivität der Zuordnung und damit insgesamt die Behauptung folgt dann direkt mit Lemma 2.4.1. \square

Der Konstruktion in Satz 2.4.2 liegt die deterministische Abbildung

$$f : \Sigma^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \text{Path}(\Lambda) \quad (2.7)$$

zugrunde, welche einer zweiseitigen Folge $z \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ und einer Folge von Anweisungen $a \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ die Folge der Aufdeckungen von z gemäß a und a selbst zuordnet. Schränkt man den Definitionsbereich auf solche $(z, a) \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ein, bei denen die Folge $a = (a_i)_{i \geq 1}$ an unendliche vielen Stellen 0 und an unendlich vielen Stellen 1 enthält, so wird schließlich auch jede Ziffer in z aufgedeckt und die eingeschränkte Zuordnung auf das Bild ist injektiv und damit invertierbar. Ist (X, η) ein μ_α -zentraler Prozess, so nimmt der Prozess η mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft den Wert 0 und unendlich oft den Wert 1 an und man kann den shiftinvarianten Prozess Z aus (X, η) mit Wahrscheinlichkeit 1 rekonstruieren:

Korollar 2.4.3. *Es sei $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein μ_α -zentraler Prozess in $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$. Es sei $X_n = (X_{n,1}, \dots, X_{n,n})$. Es sei $S_1 := 0$ und $S_n := \eta_2 + \dots + \eta_n$ für $n \geq 2$. Für $i \in \mathbb{Z}$ sei $\tau_i := \inf\{n \geq 1 : 1 \leq S_n + i \leq n\}$. Dann gilt $\mathbb{P}(\tau_i < \infty) = 1$. Es sei $Z_0 := X_{1,1}$ und für $i < 0$ sei $Z_i := X_{\tau_i,1}$ und für $i > 0$ sei $Z_i := X_{\tau_i, \tau_i}$. Dann ist $Z := (Z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ shiftinvariant, unabhängig von η und es gilt $f(Z, \eta) = (X, \eta)$ fast sicher, mit f wie in (2.7).*

Zum Abschluss wird gezeigt, dass die Menge der starken extremalen Verteilungen in dieser Situation gering ist:

Satz 2.4.4. *Die einzigen extremalen starken Verteilungen aus $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu_\alpha)$ sind deterministisch in dem Sinne, dass zu jedem extremalen starken Prozess (X, η) mit $\mathbb{P}^{(X, \eta)} \in \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu_\alpha)$ ein Buchstabe $a \in \Sigma$ existiert, sodass $X_n = aa \dots a = a^n$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $n \geq 1$ gilt.*

Beweis. Verwendet wird Eigenschaft 2. in Theorem 2.2.9. Für $(a_{k+1}, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^{n-k}$ gilt mit $j := a_{k+1} + \dots + a_n$

$$\Lambda_k^n((x_1, \dots, x_n), (a_{k+1}, \dots, a_n)) = (x_{n-k+1-j}, \dots, x_{n-j}),$$

damit ist $\sigma(\Gamma_k^n) = \sigma(\eta_{k+1} + \dots + \eta_n)$. Die terminale σ -Algebra von $(\Gamma_k^n)_{n > k}$ entspricht also der terminalen σ -Algebra von $(\eta_k + \dots + \eta_n)_{n > k}$ und diese ist nach dem 0-1-Gesetz von Hewitt-Savage trivial. Damit gilt also für einen extremalen starken Prozess (X, η) stets, dass $\sigma(X_n)$ \mathbb{P} -trivial ist. Also existiert für jedes $n \geq 1$ ein Wort $w_n \in \Sigma^n$ mit $X_n = w_n$ fast sicher. Da (X, η) ein zentraler Prozess ist, muss ein Buchstabe $a \in \Sigma$ mit $w_n = a^n$ für alle $n \geq 1$ existieren. \square

Speziell für den Fall $\alpha = 0.5$ stellt sich nun die Frage, welche der extremalen Verteilungen aus $\mathcal{M}_1(\Lambda) = \mathcal{M}_1(\Lambda, \mu_{0.5})$ auf Standardfiltrationen führen. In [Lau16] findet man einen Verweis auf die Behauptung, dass zumindest derjenige zentrale Prozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ mit $(X_n, \eta_n) \sim \text{unif}(\Sigma^n \times \{0, 1\})$ nicht standard ist.

2.5. Beispiel: Split-Word-Prozesse

Ausgangspunkt für die Konstruktion ist wieder ein endliches Alphabet Σ und nun zusätzlich eine Folge $r = (r_n)_{n \geq 2}$ natürlicher Zahlen mit $r_n \geq 2$ für alle $n \geq 2$. Es sei $l_1 := 1$ und induktiv sei $l_n := l_{n-1} \cdot r_n$ für alle $n \geq 2$. Damit definiert man folgendes HMB:

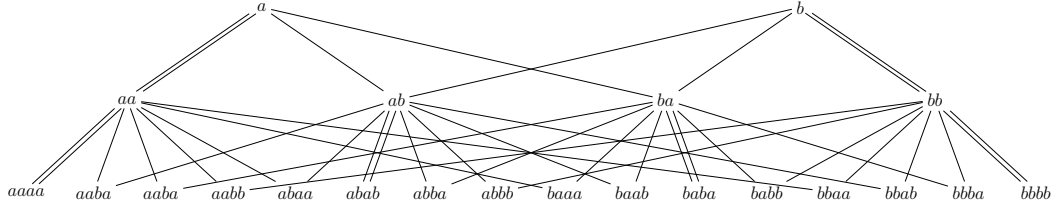


Abb. 2.5.: Ersten 3 Stufen des Diagrammes für $\Sigma = \{a, b\}$ und $r_2 = r_3 = 2$. Damit ist $l_1 = 1$, $l_2 = 2$ und $l_3 = 4$.

1. $\mathbb{F}_n := \Sigma^{l_n}$ für $n \geq 1$.
2. $\mathbb{A}_n := [r_n] = \{1, 2, \dots, r_n\}$ für $n \geq 2$.
3. Für $n \geq 2$ ist $\mathbb{F}_n = \Sigma^{l_n} = (\Sigma^{l_{n-1}})^{r_n}$. Jedes Element $x \in \mathbb{F}_n$ ist also von der Gestalt $x = (x_1, \dots, x_{r_n})$ mit $x_i \in \mathbb{F}_{n-1}$ für $1 \leq i \leq r_n$. Damit sei $\Lambda_{n-1}^n(x, j) := x_j$.

Im Folgenden werden nur zentrale Prozesse betrachtet. Verallgemeinert man das Alphabet Σ zu einem polnischen Raum, so nehmen die Split-Word-Prozesse eine besondere Rolle in der Theorie der Standardfiltrationen ein, man betrachte hierzu beispielsweise die Ausführungen in [Lau13]. Des Weiteren wurden einige spezielle extremale zentrale Prozesse hinsichtlich der Standardheit der zugehörigen Filtrationen besonders eingehend untersucht; beispielsweise für diejenigen zentralen Prozesse $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ mit $X_n \sim \text{unif}(\mathbb{F}_n)$ für alle $n \geq 1$. Die Antwort, ob die zugehörige Filtration standard ist, hängt vom Wachstumsverhalten der Folge r_n ab. (Schnell wachsende r_n führen zu Standardness, [Cei12]). Die gleich vorgestellten Aussagen sind von globaler Natur und unabhängig von der konkreten Folge (r_n) .

Satz 2.5.1. $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ ist der Poulsensimplex und die Menge der extremalen starken Verteilungen liegt dicht im gesamten Simplex.

Bemerkung 2.5.2. Dass $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ der Poulsensimplex ist, ist sicherlich kein neues Resultat. In [Ver15b] findet man eine Abbildung des Graphen der *ungeordneten Paare* und den Hinweis darauf, dass dieser auf den Poulsensimplex führe. Die Begründung dafür verläuft analog zum gleich vorgestellten Beweis. ∇

Beweis. Die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten $\gamma_k^n : \mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_n \rightarrow [0, 1]$ sind hier wie folgt erklärt: Jedes $x \in \mathbb{F}_n$ ist von der Gestalt $x = (x_1, x_2, \dots, x_{l_n/l_k})$ mit eindeutigen $x_i \in \mathbb{F}_k$ für $1 \leq i \leq l_n/l_k$. Es ist $\gamma_k^n(\cdot, x) = \frac{l_k}{l_n} \sum_{i=1}^{l_n/l_k} \delta_{x_i}$. Der Simplex $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ ist kanonisch isomorph zur Menge aller Funktionen $p : \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_n \rightarrow [0, 1]$ mit $\sum_{y \in \mathbb{F}_n} p(y) = 1$ und $p(x) = \sum_{y \in \mathbb{F}_n} \gamma_k^n(x, y)p(y)$ für alle $1 \leq k \leq n$ und $x \in \mathbb{F}_k$. Es sei $\mathcal{P}_1(\gamma)$ die Menge aller dieser Funktionen. Es sei $k \geq 1$ und $\epsilon > 0$. Man findet nun ein hinreichend großes n und ein $y \in \mathbb{F}_n$ sodass $|p(x) - \gamma_k^n(x, y)| < \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{F}_k$ gilt. Man betrachte die Folge $(z_m)_{m \geq n}$ mit $z_m \in \mathbb{F}_m$ welche rekursiv definiert wird durch $z_n := y$ und $z_{m+1} := z_m^{r_{m+1}}$. Per Konstruktion erfüllt diese Folge nun auch $\gamma_k^n(\cdot, y) = \gamma_k^m(\cdot, z_m)$ für alle $m \geq n$. Die Folge $\mathbf{z} := (z_m)_{m \geq 1}$ ist γ -konvergent. Es sei $P^{\mathbf{z}} \in \mathcal{M}_1(\gamma)$ der zugehörige Limes. Ein Prozess $X = (X_n)_{n \geq 1}$ mit

Verteilung $\mathbb{P}^X = P^{\mathbf{z}}$ erfüllt $X_m = z_m$ fast sicher für alle $m \geq n$. Insbesondere ist damit also $P^{\mathbf{z}} \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\gamma))$. Die zu diesem X gehörige markierte Version $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ist stark, denn alle X_m mit $m \geq n$ sind deterministisch und damit trivialerweise messbar bzgl. $\sigma(\eta_{m+1}, \dots)$ und für $m < n$ ist $X_m = \Lambda_m^n(X_n, \eta_{m+1}, \dots, \eta_n) = \Lambda_m^n(z_n, \eta_{m+1}, \dots, \eta_n)$. Also ist X_m auch hier messbar bzgl. $\sigma(\eta_{m+1}, \dots)$.

Die Behauptung ist nun gezeigt, wenn man begründen kann, dass die Menge der so konstruierten $P^{\mathbf{z}}$ dicht in $\mathcal{M}_1(\gamma)$ liegen. Es sei $p^{\mathbf{z}} \in \mathcal{P}_1(\gamma)$ die zugehörige Funktion und A die Menge aller dieser $p^{\mathbf{z}}$. Per Konstruktion findet man zu jedem $p \in \mathcal{P}_1(\gamma)$ und jedem $k \geq 1$ eine Folge p^j aus A mit $p(x) = \lim_j p^j(x)$ für alle $x \in \mathbb{F}_k$. Damit findet man also zu jedem solchen p und jedem k ein $q^k \in \bar{A}$ mit $p(x) = q^k(x)$ für alle $x \in \mathbb{F}_k$. Mit $k \rightarrow \infty$ erhält man damit dann aber auch $p \in \bar{A}$. Also $\mathcal{P}_1(\gamma) \subseteq \bar{A}$. Umgekehrt ist $A \subseteq \mathcal{P}_1(\gamma)$ und da $\mathcal{P}_1(\gamma)$ abgeschlossen ist, ist damit auch $\bar{A} \subseteq \mathcal{P}_1(\gamma)$. Da $A \subseteq \text{ex}(\mathcal{P}_1(\gamma))$ ist $\mathcal{P}_1(\gamma)$ damit der Poulsensimplex. Der Simplex $\mathcal{P}_1(\gamma)$ ist nun kanonisch isomorph zu $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ und damit ist auch dieser der Poulsensimplex. Ferner überführt ein Homöomorphismus dichte Menge in dichte Mengen und damit ist auch die Menge aller $P^{\mathbf{z}}$ dicht in $\mathcal{M}_1(\Lambda)$. Damit folgt die Behauptung. \square

Die Beispiele zeigen: Der Poulsensimplex kann über verschiedene HMB erhalten werden, aber je nach Darstellung können sich extremale starke Verteilungen bedeutend unterscheiden. Die Ausführungen bis hierhin sollen auch dazu dienen, später formulierte „Gutartigkeitsaussagen“ der auftretenden Diagramme wertschätzen zu können.

3. Konsistente Systeme

Die Motivation für die gleich formulierte Definition wurde zu Beginn in Abschnitt 1.1 geliefert. Wie dort angekündigt folgt nun die präzise Definition und die Fixierung der nachfolgend verwendeten Schreibweisen. Zu jedem $k \geq 1$ und $E_1, E_2 \in \mathfrak{P}_k(\mathbb{N})$ sei $\mathbb{S}(E_1, E_2)$ die Menge der bijektiven Abbildungen $\pi : E_1 \rightarrow E_2$. Ist $\pi \in \mathbb{S}(E_1, E_2)$ und zusätzlich $E_3 \in \mathfrak{P}_k(\mathbb{N})$ sowie $\sigma \in \mathbb{S}(E_2, E_3)$, so wird $\sigma.\pi := \sigma \circ \pi \in \mathbb{S}(E_1, E_3)$ für die Verknüpfung von Funktionen geschrieben. $\text{id}_{E_1} \in \mathbb{S}(E_1, E_1)$ ist die Identität und $\pi^{-1} \in \mathbb{S}(E_2, E_1)$ ist das Inverse zu π . Ist $k \geq 2$ und $F_1 \subseteq E_1$, so wird $\pi|_{F_1}$ für die Einschränkung von π auf die Menge F_1 geschrieben. Mit $F_2 := \pi(F_1) = \{\pi(x) : x \in F_1\} \subseteq E_2$ ist damit also $\pi|_{F_1} \in \mathbb{S}(F_1, F_2)$. Nun zum Begriff des *konsistenten Systems*:

Definition 3.0.1. Ein *konsistentes System* ist ein Tupel $\mathbf{F} = (\mathbb{F}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{F})$ mit

- a) $\mathbb{F} = (\mathbb{F}(E) : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ ist eine Kollektion endlicher nicht-leerer Mengen mit $|\mathbb{F}(\emptyset)| = 1$.
- b) $\text{pr} = (\text{pr}_{E_1}^{E_2}, E_1 \subseteq E_2 \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ ist eine Kollektion von Abbildungen $\text{pr}_{E_1}^{E_2} : \mathbb{F}(E_2) \rightarrow \mathbb{F}(E_1)$, sodass für alle $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ gilt, dass $\text{pr}_{E_1}^{E_2} \circ \text{pr}_{E_2}^{E_3} = \text{pr}_{E_1}^{E_3}$ ist und sodass $\text{pr}_{E_1}^{E_1} = \text{id}_{\mathbb{F}(E_1)}$ ist.
- c) $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{F}$ ist eine Kollektion von Abbildungen der Form $\pi. : \mathbb{F}(E_1) \rightarrow \mathbb{F}(E_2)$ für alle $k \geq 1, E_1, E_2 \in \mathfrak{P}_k(\mathbb{N})$ und $\pi \in \mathbb{S}(E_1, E_2)$, sodass mit $\pi.x := \pi.(x)$ gilt
 - i) $\text{id}_E .x = x$ für alle $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), |E| > 0$ und $x \in \mathbb{F}(E)$.
 - ii) Für alle $k \geq 1$ und $E_1, E_2, E_3 \in \mathfrak{P}_k(\mathbb{N})$ und $x \in \mathbb{F}(E_1), \pi \in \mathbb{S}(E_1, E_2), \sigma \in \mathbb{S}(E_2, E_3)$ gilt $\sigma.(\pi.x) = (\sigma.\pi).x$.
- d) Es gilt die *Konsistenzeigenschaft*: Für alle $k \geq 2$ und $E_1, E_2 \in \mathfrak{P}_k(\mathbb{N}), \pi \in \mathbb{S}(E_1, E_2), \emptyset \neq F_2 \subseteq E_2$ und $x \in \mathbb{F}(E_1)$ gilt mit $F_1 := \pi^{-1}(F_2) \subseteq E_1$, dass

$$\text{pr}_{F_2}^{E_2}(\pi.x) = \pi|_{F_1} . \text{pr}_{F_1}^{E_1}(x).$$

Die Punkte a) und b) können zusammengefasst werden zu: (\mathbb{F}, pr) ist ein projektives System nicht-leerer endlicher Mengen über der gerichteten Menge $(\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq)$ mit $|\mathbb{F}(\emptyset)| = 1$, siehe dazu auch Abschnitt 1.3. Punkte a) und c) können zusammengefasst werden zu: $(\mathbb{F}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{F})$ ist eine *Species of Structures* (im Sinne von A.Joyal, siehe Abschnitt 1.1), welche auf endliche Teilmengen der natürlichen Zahlen eingeschränkt ist. Alle im weiteren Verlauf vorgestellten Definitionen bauen auf der eben getroffenen Definition auf, für die formulierten Sätze werden keine zusätzlichen Forderungen mehr an ein konsistentes System gestellt. Als fortgeführtes Beispiel soll das wohl „einfachste“ konsistente System betrachtet werden: Das der Wörter über einem endlichen Alphabet.

Beispiel 3.0.2 (Das konsistente System der Wörter). Es sei Σ eine endliche, nicht-leere Menge, das Alphabet. Für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ sei

$$\mathbb{F}(E) := \Sigma^E$$

die Menge der durch E indizierten Wörter über Σ und es sei $\mathbb{F}(\emptyset) := \{\epsilon\}$, wobei ϵ das leere Wort bezeichnet. Ein Wort $w \in \Sigma^E = \mathbb{F}(E)$ wird als Funktion $w : E \rightarrow \Sigma$ oder auch als Menge $w = \{(i, w(i)) : i \in E\}$ aufgefasst. Für $E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ und $w \in \Sigma^F$ sei

$$\text{pr}_E^F(w) := w|_E = \{(i, w(i)) : i \in E\}$$

die Einschränkung von w auf die Menge E . So ist für $\Sigma = \{a, \dots, z\}$ und $F = \{1, 2, 4, 5, 6, 9, 10\}$ und $w = \{(1, a), (2, b), (4, c), (5, d), (6, e), (9, f), (10, g)\} \in \Sigma^F = \mathbb{F}(F)$ sowie $E = \{2, 4, 5, 9\} \subseteq F$ ist $\text{pr}_E^F(w) = \{(2, b), (4, c), (5, d), (9, f)\}$, symbolisch:

$$\begin{array}{rcccccccccc} F = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ w = & a & b & & c & d & e & & & f & g \\ \text{pr}_E^F(w) = & & b & & c & d & & & & f & \\ E = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Allgemein sei wieder für $E, F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $0 < |E| = |F|$ und $\pi \in \mathbb{S}(E, F)$ sowie $w \in \Sigma^E$

$$\pi.w := w \circ \pi^{-1} = \{(\pi(i), w(i)) : i \in E\}.$$

Beispiel: Es sei $E_1 = F = \{1, 2, 4, 5, 6, 9, 10\}$ und $w \in \Sigma^F$ wie eben. Es sei $E_2 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ und $\pi \in \mathbb{S}(E_1, E_2)$ sei definiert über

$$\pi(i) = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 9 & 10 & \\ \hline 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 5 & 3 & \end{array} \right|.$$

Damit ist $\pi.w = \{(1, a), (6, b), (8, c), (2, d), (7, e), (5, f), (3, g)\}$. Dynamischer gezeichnet:

$$\begin{array}{rcccccccccc} E_1 = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ w = & a & b & & c & d & e & & & f & g \\ & \downarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ \pi.w = & a & d & g & f & b & e & & & c & \\ E_2 = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Die Eigenschaften $b)$ und $c)$ eines konsistenten Systems sind offensichtlich. Die Konsistenz-eigenschaft selbst folgt so: Sind $E_1, E_2 \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $|E_1| = |E_2| > 0$ und ist $\pi \in \mathbb{S}(E_1, E_2)$ und ist $\emptyset \neq F_2 \subseteq E_2$ und $w \in \Sigma^{E_1}$ und $F_1 := \pi^{-1}(F_2)$, so gilt damit aufgrund der Rechenregeln für Einschränkungen und Inversion sowie Verknüpfung von Funktionen:

$$\text{pr}_{F_2}^{E_2}(\pi.w) = (w \circ \pi^{-1})|_{F_2} = w|_{\pi^{-1}(F_2)} \circ (\pi|_{F_1})^{-1} = \pi|_{F_1} \cdot \text{pr}_{F_1}^{E_1}(w).$$

Es sei **Word**(Σ) das konsistente System der Wörter über dem Alphabet Σ . ◁

Eine kurze Auflistung weiterer Beispiele:

Beispiel 3.0.3. Es seien $E, E' \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), F \subseteq E$ und $\pi \in \mathbb{S}(E, E')$. Die einzelnen Beispiele werden beschrieben, indem die Grundmengen $\mathbb{F}(E)$, die Projektionen $\text{pr}_F^E(x)$ und die Ummarkierungen $\pi.x \in \mathbb{F}(E')$ für ein $x \in \mathbb{F}(E)$ erklärt werden. Die in der Definition eines konsistenten System gestellten Forderungen werden an dieser Stelle nicht überprüft. Einige der aufgelisteten Systeme werden an späterer Stelle präzise eingeführt und teilweise analysiert.

1. **Lineare Ordnungen:** Hier ist $\mathbb{F}(E)$ die Menge der linearen Ordnungen auf E und $\text{pr}_F^E(x)$ ist die Einschränkung der linearen Ordnung x auf E auf die Menge F . Schreibt man für $i, j \in E$ den Ausdruck ixj , falls i bzgl. x kleiner als j ist, so ist $\pi.x$ definiert durch $i \pi.x j \Leftrightarrow \pi^{-1}(i) x \pi^{-1}(j)$. Das System der linearen Ordnungen wird später eine wichtige Rolle in der allgemeinen Theorie einnehmen.
2. **Partitionen:** Hier ist $\mathbb{F}(E)$ die Menge der Partitionen der Menge E . Ist $x = \{A_1, \dots, A_k\} \in \mathbb{F}(E)$ eine Partition von E , so ist $\text{pr}_F^E(x) := \{A_1 \cap F, \dots, A_k \cap F\} \setminus \{\emptyset\} \in \mathbb{F}(F)$ eine Partition auf F . Ferner setzt man $\pi.x := \{\pi(A_1), \dots, \pi(A_k)\}$.
3. **Hierarchien:** Eine Hierarchie auf E ist eine Teilmenge $x \subseteq \mathfrak{P}_{\text{fin}}(E)$ mit den Eigenschaften $\emptyset \in x, \{j\} \in x$ für alle $j \in E$ und $A, B \in x \Rightarrow A \cap B \in \{A, B, \emptyset\}$. Es sei $\mathbb{F}(E)$ die Menge der Hierarchien auf E . Ist $x = \{A_1, \dots, A_k\}$ eine Hierarchie, so ist $\text{pr}_F^E(x) := \{A_1 \cap F, \dots, A_k \cap F\} \in \mathbb{F}(F)$ eine Hierarchie auf F und $\pi.x := \{\pi(A_1), \dots, \pi(A_k)\} \in \mathbb{F}(E')$ eine Hierarchie auf E' . Eine **gewurzelte Hierarchie** auf E ist eine Hierarchie x auf E , welche zusätzlich $E \in x$ erfüllt. Projektionen und Ummarkierungen wie eben erklärt überführen gewurzelte Hierarchien wieder in gewurzelte Hierarchien. Damit kann man auch das kleinere konsistente System der gewurzelten Hierarchien betrachten. Diese Systeme werden in Kapitel 5 unter Verwendung der bis dahin erhaltenen Aussagen umfassend analysiert und die Ergebnisse mit bekannten Resultaten aus der Literatur verglichen.
4. **Graphen:** Hier ist $\mathbb{F}(E)$ die Menge der ungerichteten und schleifenfreien Graphen mit Knotenmenge E . Ein solcher Graph kann als Funktion $x : E \times E \rightarrow \{0, 1\}$ mit $x(i, i) := 0$ und $x(i, j) = x(j, i)$ aufgefasst werden. Es sei $\text{pr}_F^E(x) := x|_{F \times F}$ die Einschränkung von x auf Knotenmenge F . Anschaulich entsteht $\text{pr}_F^E(x)$ also aus x , indem alle Knoten $E \setminus F$ samt allen dieser Menge adjazenten Kanten entfernt werden. Es sei $\pi.x(i, j) := x(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)) \in \mathbb{F}(E')$ der Graph, der durch Umbenennung der Knoten $i' \mapsto \pi(i')$ entsteht. Allgemein bekannte Resultate werden in Kapitel 6 mit den in dieser Arbeit vorgestellten Sichtweisen verglichen.
5. **Markierte gerichtete Graphen:** Es sei Σ ein beliebiges Alphabet. $\mathbb{F}(E)$ besteht aus allen Funktionen $x : E \times E \rightarrow \Sigma$ mit Projektionen $\text{pr}_F^E(x) := x|_{F \times F}$ und Ummarkierungen $\pi.x(i, j) := x(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j))$.
6. **Hypergraphen:** Ein Hypergraph auf E ist eine Teilmenge $x \subseteq \mathfrak{P}_{\text{fin}}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Es sei $\mathbb{F}(E)$ die Menge aller Hypergraphen auf E und für $x = \{A_1, \dots, A_k\} \in \mathbb{F}(E)$ sei $\text{pr}_F^E(x) := \{A_1 \cap F, \dots, A_k \cap F\} \setminus \{\emptyset\}$ und $\pi.x := \{\pi(A_1), \dots, \pi(A_k)\}$.

7. **Partielle Ordnungen:** Hier sei $\mathbb{F}(E)$ die Menge der partiellen Ordnungen auf E und $\text{pr}_F^E(x)$ die übliche Einschränkung der partiellen Ordnung x auf E auf die Teilmenge F und $\pi.x$ ist die durch $i\pi.xj \Leftrightarrow \pi^{-1}(i)x\pi^{-1}(j)$ definierte partielle Ordnung.
8. **Permutation:** Hier ist $\mathbb{F}(E)$ die Menge der Permutationen $x : E \rightarrow E$. Es sei $\text{pr}_F^E(x)$ die Permutation von F , deren Zykelschreibweise aus der von x entsteht, indem man alle Elemente $E \setminus F$ entfernt. Ferner sei $\pi.x := \pi \circ x \circ \pi^{-1}$.
9. **Ungewurzelte binäre Bäume mit markierten Blättern:** Die Menge $\mathbb{F}(E)$ besteht aus allen ungewurzelten binären Bäumen, deren Blätter bijektiv durch die Menge E markiert sind. Ist $x \in \mathbb{F}(E)$, so sei $\text{pr}_F^E(x)$ die Baumstruktur des Baumes, der entsteht, wenn man alle Blätter aus F über Kanten in x miteinander verbindet. $\pi.x$ entsteht durch Umbenennung der Blätter gemäß π . \triangleleft

Schließlich noch ein Beispiel, bei dem die Konsistenzbedingung nicht erfüllt ist:

Beispiel 3.0.4. Ein *Antibeispiel*: Es sei $\mathbb{F}(E)$ die Menge der Permutationen von E und $\pi.x := \pi \circ x \circ \pi^{-1}$ wie im Beispiel „Zykel“. Jede endliche Teilmenge E von \mathbb{N} ist von der Form $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ mit $1 \leq e_1 < e_2 < \dots < e_n$. Nun erklärt man die Projektionen anders: Man schreibe die Permutation $x \in \mathbb{F}(E)$ in der One-Line-Notation $(x(e_1), \dots, x(e_n))$ und entferne alle Einträge $E \setminus F$ aus diesem Vektor und schiebe den restlichen Vektor zusammen. Das Ergebnis fasse man als One-Line-Notation einer Permutation $F \rightarrow F$ auf. Auf diese Weise erhält man ebenfalls Projektionen $\text{pr}_F^E : \mathbb{F}(E) \rightarrow \mathbb{F}(F)$. Diese sind *nicht* zu den anfangs erklärten Ummarkierungen konsistent: Dazu seien $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $E_2 = \{4, 5, 6\}$ und $F_2 = \{4, 5\} \subseteq E_2$, sowie

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}(E_1) \quad \text{und} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}(E_1, E_2).$$

Damit ist

$$\pi.x = \pi \circ x \circ \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{pr}_{F_2}^{E_2}(\pi.x) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Auf der anderen Seite ist $\pi^{-1}(F_2) = \{1, 2\}$ und damit

$$\pi_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{pr}_{\{1,2\}}^{E_1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_{\{1,2\}} \cdot \text{pr}_{\{1,2\}}^{E_1}(x) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Also ist Konsistenzeigenschaft d) *nicht* erfüllt, alle anderen Bestandteile eines konsistenten Systems sind aber vorhanden.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass man Permutationen und lineare Ordnungen nicht immer uneingeschränkt miteinander identifizieren sollte; zwar existieren gewisse „kanonische“ Bijektionen zwischen ihnen, fasst man Permutationen und lineare Ordnungen allerdings als reichhaltigere Strukturen auf (nicht nur als Menge; ebenso kanonisch wie die Bijektionen zwischen ihnen wirken Permutationen auf beiden Räumen und man kann jeweils Projektionen einführen), so sind diese Strukturen nicht mehr notwendigerweise isomorph zueinander. \triangleleft

3.1. Strukturelle Konstruktionen

In diesem Abschnitt wird erarbeitet, wie man einem konsistenten System ein topologisches dynamisches System zuordnet. Zusätzlich werden Begriffe wie Homomorphismen zwischen konsistenten Systemen bereitgestellt und Produkte konsistenter Systeme eingeführt. Ein großer Teil der Arbeit dieses Abschnittes wird darin bestehen, projektive Limesysteme einzuführen und die Ummarkierungsabbildungen mithilfe der Konsistenzeigenschaft auf die projektiven Limesysteme fortzusetzen. Die allgemeine Definition eines konsistenten Systems beinhaltet zunächst keine Möglichkeit, einer unendlichen Grundmenge (von Individuen) eine Menge an möglichen Datensätzen zuzuordnen. Dieser Abschnitt wird zeigen, dass dies auch nicht nötig ist. Die *tatsächlichen unendlichen Datensätze* ergeben sich intrinsisch aus den projektiven konsistenten endlichen Strukturen. Viele der nachfolgenden Aussagen sind eine konsequente Anwendung der Begriffe aus Abschnitt 1.3 zusammen mit der Konsistenzeigenschaft.

3.1.1. Projektive Limiten und Fortsetzung der Ummarkierungen

Es sei $\mathbf{F} = (\mathbb{F}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{F})$ ein konsistentes System. Zunächst geht es nun nur um die Eigenschaften von (\mathbb{F}, pr) , aufgefasst als projektives System endlicher nicht-leerer Mengen über der gerichteten Menge $(\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Die gerichtete Menge $(\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq)$ erlaubt es, nicht nur *ein* projektives Limesystem zu betrachten, sondern liefert die Möglichkeit, projektive Limesysteme entlang jeder unendlichen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ einzuführen. Es sei $\mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ die Menge aller unendlichen Teilmengen von \mathbb{N} . Die Aussagen, die hinter den nun vorgestellten Konstruktionen stehen, wurden im einführenden Abschnitt 1.3 vorgestellt.

1. Zu $A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ betrachtet man die gerichtete Menge $(\mathfrak{P}_{\text{fin}}(A), \subseteq)$ aller endlichen Teilmengen von A . Die Kollektion der endlichen Mengen $\mathbb{F}(E), E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$ liefert zusammen mit den Projektionen $\text{pr}_{E_1}^{E_2}$ mit $E_1 \subseteq E_2 \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$ ein projektives System endlicher Mengen, bezeichnet mit $\mathcal{T}(A)$. Es sei $\mathbb{F}(A)$ zusammen mit Abbildungen $\text{pr}_E^A : \mathbb{F}(A) \rightarrow \mathbb{F}(E), E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$ ein projektives Limesystem von $\mathcal{T}(A)$.
2. Sind $A, B \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ mit $A \subseteq B$ und sind

$$(\mathbb{F}(A), \text{pr}_E^A, E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)) \quad \text{und} \quad (\mathbb{F}(B), \text{pr}_E^B, E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B))$$

jeweils projektive Limesysteme zu $\mathcal{T}(A)$ bzw. $\mathcal{T}(B)$, so ist $(\mathbb{F}(B), \text{pr}_E^B, E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A))$ ein zu $\mathcal{T}(A)$ kompatibles Limesystem. Es gibt also eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\text{pr}_A^B : \mathbb{F}(B) \rightarrow \mathbb{F}(A)$ mit $\text{pr}_E^A \circ \text{pr}_A^B = \text{pr}_E^B$ für alle $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$.

3. Für $A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ ist das kanonische projektive Limesystem von $\mathcal{T}(A)$ gegeben durch den Raum

$$\text{Proj}(\mathbb{F}, A) := \left\{ (x_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)} : x_E \in \mathbb{F}(E), \text{pr}_{E_1}^{E_2}(x_{E_2}) = x_{E_1} \quad \forall E_1 \subseteq E_2 \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A) \right\}.$$

Die Topologie auf $\text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ ist die Teilraumtopologie des Produktraumes $\prod_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)} \mathbb{F}(E)$. Die Abbildungen $\text{pr}_E^A : \text{Proj}(\mathbb{F}, A) \rightarrow \mathbb{F}(E)$ mit $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$ sind

gegeben durch $\text{pr}_E^A((x_F)_{F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)}) = x_E$. Ist $A \subseteq B$ und sind $A, B \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$, so ist die Abbildung

$$\text{pr}_A^B : \text{Proj}(\mathbb{F}, B) \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$$

gegeben durch

$$\text{pr}_A^B((x_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B)}) = (x_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)}.$$

In den meisten Beispielen ist es natürlicher, nicht direkt mit $\text{Proj}(\mathbb{F}, A)$, sondern mit anderen projektiven Limiten $\mathbb{F}(A)$ zu arbeiten:

Beispiel 3.1.1 (Konsistentes System der Wörter). Betrachtet wird das konsistente System $\mathbf{Word}(\Sigma)$ der Wörter über dem Alphabet Σ aus Beispiel 3.0.2. Ist $A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$, so ist eine Folge $(x_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)} \in \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ eine Folge von Funktionen $x_E : E \rightarrow \Sigma$ mit $(x_F)|_E = x_E$ für alle $E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$. Eine solche projektive Folge definiert auf eindeutige Weise eine Funktion $x : A \rightarrow \Sigma$ und umgekehrt definiert jede solche Funktion via Projektionen $\text{pr}_E^A(x) := x|_E$ eine Folge in $\text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ auf eindeutige Weise. Als projektives Limesystem bietet sich also $\mathbb{F}(A) := \Sigma^A$ an und die Projektionen pr_E^A sind die üblichen Einschränkungen von Funktionen. Die Topologie auf Σ^A ist dann die übliche diskrete Produkttopologie $\Sigma^A = \prod_{a \in A} \Sigma$. \triangleleft

Tatsächlich kann es manchmal schwierig oder gar unnötig sein, andere projektive Limesysteme als die kanonischen zu betrachten. Das später diskutierte Beispiel der Hierarchien (Kapitel 5) fällt in diese Kategorie.

Bemerkung 3.1.2. Später wird hauptsächlich mit einem projektiven Limesystem $\mathbb{F}(\mathbb{N})$ zum uneingeschränkten System gearbeitet. Für gewisse Konstruktionen und zukünftige Arbeiten wird es aber wichtig sein, auch unendliche Teilsysteme zu betrachten. ∇

Wie im einführenden Abschnitt über projektive Systeme schon angedeutet und im Abschnitt über EGGs gesehen, übertragen sich zusätzlich vorhandene Operationen auf den Grundmengen der projektiven Systeme häufig auf das projektive Limesystem, wenn die Projektionen mit diesen Operationen verträglich sind. Dies wurde in der Definition eines konsistenten Systems durch die Konsistenzeigenschaft sichergestellt. Es wird nun eine Fortsetzung von $\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{F}$ auf die projektiven Limesysteme mit Hilfe der Konsistenzeigenschaft durchgeführt. Diese Konstruktion wird konkret für die kanonischen projektiven Limesysteme $\text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ angegeben und darüber dann für beliebige projektive Limesysteme $\mathbb{F}(A)$ über die eindeutig existieren Homöomorphismen $\text{Proj}(\mathbb{F}, A) \rightarrow \mathbb{F}(A)$ erklärt. Es sei $\mathbb{S}(A, B)$ die Menge der bijektiven Abbildungen von $A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ nach $B \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$. Es sei $\text{id}_A : A \rightarrow A$ die Identität. Ziel ist es für alle $A, B \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ und zu jeder bijektiven Abbildung $\pi : A \rightarrow B$ eine Abbildung

$$\pi. : \text{Proj}(\mathbb{F}, A) \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{F}, B)$$

derart zu konstruieren, dass für alle $A, B, C \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ und $\pi \in \mathbb{S}(A, B), \sigma \in \mathbb{S}(B, C)$ und $x \in \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ neben $\text{id}_A . x = x$ auch

$$\sigma.(\pi.x) = (\sigma.\pi).x$$

gilt. Für die kanonischen projektiven Limesysteme gelingt dies wie folgt:

Definition 3.1.3. Es seien $A, B \in \mathfrak{P}_\infty(\mathbb{N})$ und $\pi \in \mathbb{S}(A, B)$ sowie $x = (x_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)} \in \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$. Dann sei $\pi.x := (y_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B)}$ definiert durch

$$y_E := \pi|_{\pi^{-1}(E)}.x_{\pi^{-1}(E)} \quad \text{für alle } E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B).$$

Folgender Satz fasst die wesentlichen Eigenschaften der so konstruierten Abbildung zusammen:

Satz 3.1.4. Es seien $A, B, C \in \mathfrak{P}_\infty(\mathbb{N})$ und $\pi \in \mathbb{S}(A, B), \sigma \in \mathbb{S}(B, C)$ und $x \in \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$. Dann gilt:

- a) $\pi.x \in \text{Proj}(\mathbb{F}, B)$.
- b) $\text{id}_A.x = x$ und $\sigma.(\pi.x) = (\sigma.\pi).x$.
- c) Die Abbildung $\pi. : \text{Proj}(\mathbb{F}, A) \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{F}, B)$ ist stetig.
- d) Ist $B_1 \subseteq B$ mit $|B_1| > 0$, so gilt $\text{pr}_{B_1}^B(\pi.x) = \pi|_{\pi^{-1}(B_1)}. \text{pr}_{\pi^{-1}(B_1)}^A(x)$.

Beweis. a): Es seien $E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B)$. Dann gilt

$$(\pi|_{\pi^{-1}(F)})^{-1}(E) = \pi^{-1}(E)$$

und mit der Konsistenzeigenschaft sowie der Projektivität von $x \in \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ folgt

$$\text{pr}_E^F(y_F) = \text{pr}_E^F(\pi|_{\pi^{-1}(F)}.x_{\pi^{-1}(F)}) = \pi|_{\pi^{-1}(E)}. \text{pr}_{\pi^{-1}(E)}^{\pi^{-1}(F)}(x_{\pi^{-1}(F)}) = \pi|_{\pi^{-1}(E)}.x_{\pi^{-1}(E)} = y_E.$$

Also ist $\pi.x := y = (y_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B)}$ projektiv.

b): $\text{id}_A.x = x$ ist klar. Es sei $y := \pi.x$ und $w := \sigma.y$ und $z := (\sigma.\pi).x$. Zu zeigen ist $z = w$. Es gilt für alle $F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B)$ per Definition von $\pi.y$

$$y_F = \pi|_{\pi^{-1}(F)}.x_{\pi^{-1}(F)}.$$

Es sei $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(C)$. Damit gilt mit $w = \sigma.y$ per Definition

$$w_E = \sigma|_{\sigma^{-1}(E)}.(\pi|_{(\pi^{-1}(\sigma^{-1}(E)))}.x_{\pi^{-1}(\sigma^{-1}(E))}).$$

Per Definition gilt für $z = (\sigma.\pi).x$ damit ferner

$$z_E = (\sigma.\pi)|_{(\sigma.\pi)^{-1}(E)}.x_{(\sigma.\pi)^{-1}(E)}.$$

Die Behauptung folgt damit aus der Assoziativität von $\pi.(\sigma.x) = (\pi.\sigma).x$ für endliche Permutationen/Objekte und den Identitäten

$$\pi^{-1}(\sigma^{-1}(E)) = (\sigma.\pi)^{-1}(E) \quad \text{und} \quad \sigma|_{\sigma^{-1}(E)}. \pi|_{(\pi^{-1}(\sigma^{-1}(E)))} = (\sigma.\pi)|_{(\sigma.\pi)^{-1}(E)}.$$

c): Es sei $x^n = (x_E^n)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)}$ eine Folge in $\text{Proj}(\mathbb{F}, A)$, welche mit $n \rightarrow \infty$ gegen ein $x = (x_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)}$ in $\text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ konvergiert. Das heißt konkret: Für alle $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$ bleibt der Wert x_E^n mit $n \rightarrow \infty$ schließlich konstant und hat den Wert x_E . Es bleibt zu begründen, dass damit auch $\pi.x^n$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen $\pi.x$ konvergiert. Es sei $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B)$ und $y^n := \pi.x^n$ und $y := \pi.x$. Dann ist

$$y_E^n = \pi|_{\pi^{-1}(E)}.x_{\pi^{-1}(E)}^n$$

und $x_{\pi^{-1}(E)}^n$ bleibt mit $n \rightarrow \infty$ schließlich konstant mit Wert $x_{\pi^{-1}(E)}$. Damit folgt die Behauptung.

d): Ist B_1 endlich, so folgt $\text{pr}_{B_1}^B(\pi.x) = \pi|_{\pi^{-1}(B_1)} \cdot x_{\pi^{-1}(B_1)}$ direkt mit der Definition von $\pi.x$. Es ist $x_{\pi^{-1}(B_1)} = \text{pr}_{\pi^{-1}(B_1)}^A(x)$. Für unendliche Teilmengen $B_1 \subseteq B$ ist die Gleichheit genau dann erfüllt, wenn die Projektionen auf alle endlichen Teilmengen $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B_1)$ auf beiden Seiten übereinstimmen. Auf der linken Seite erhält man mit dem bereits Bewiesenen

$$\text{pr}_E^{B_1}(\text{pr}_{B_1}^B(\pi.x)) = \text{pr}_E^B(\pi.x) = \pi_{\pi^{-1}(E)} \cdot x_{\pi^{-1}(E)}.$$

Auf der rechten Seite erhält man mit $\sigma := \pi|_{\pi^{-1}(B_1)}$ und $y := \text{pr}_{\pi^{-1}(B_1)}^A(x)$ damit $\text{pr}_E^{B_1}(\sigma.y) = \sigma|_{\sigma^{-1}(E)} \cdot y_{\sigma^{-1}(E)}$. Wegen $\sigma^{-1}(E) = \pi^{-1}(E)$ und $\sigma|_{\sigma^{-1}(E)} = \pi|_{\pi^{-1}(E)}$ sowie $y_{\sigma^{-1}(E)} = \text{pr}_{\pi^{-1}(E)}^{\pi^{-1}(B_1)}(\text{pr}_{\pi^{-1}(B_1)}^A(x)) = x_{\pi^{-1}(E)}$ folgt

$$\text{pr}_E^{B_1}(\pi|_{\pi^{-1}(B_1)} \cdot \text{pr}_{\pi^{-1}(B_1)}^A(x)) = \pi|_{\pi^{-1}(E)} \cdot x_{\pi^{-1}(E)}. \quad \square$$

Nun sei zu jeder Menge $A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ ein beliebiges projektives Limesystem $(\mathbb{F}(A), \text{pr}_E^A : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A))$ von $(\mathbb{F}(E), \text{pr}_E^F : E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A))$ gegeben. Zu diesen gibt es dann eindeutig bestimmte Homöomorphismen $f_A : \mathbb{F}(A) \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$, welche mit den Projektionen vertauschen:

$$\text{pr}_E^A(x) = \text{pr}_E^A(f_A(x)) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{F}(A),$$

wobei sich die ersten Projektionen auf $\mathbb{F}(A)$ und die zweiten auf $\text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ beziehen. Einfaches Nachrechnen liefert dann folgenden Satz:

Satz 3.1.5. *Für $A, B \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ und $\pi \in \mathbb{S}(A, B)$ sowie $x \in \mathbb{F}(A)$ sei $\pi.x := f_B^{-1}(\pi.f_A(x))$. Die so erklärten Zuordnungen $\pi : \mathbb{F}(A) \rightarrow \mathbb{F}(B)$ erfüllen alle in Satz 3.1.4 formulierten Eigenschaften mit $\mathbb{F}(A), \mathbb{F}(B), \mathbb{F}(C)$ anstelle von $\text{Proj}(\mathbb{F}, A), \text{Proj}(\mathbb{F}, B), \text{Proj}(\mathbb{F}, C)$.*

Das Fazit nun bisher:

Korollar 3.1.6. *Es sei $\mathbf{F} = (\mathbb{F}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{F})$ ein konsistentes System. Dann kann man die Bestandteile*

- *endliche nicht-leere Mengen $\mathbb{F}(E), E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$,*
- *Projektionen $\text{pr}_E^F : \mathbb{F}(F) \rightarrow \mathbb{F}(E), E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$,*
- *Ummarkierungen $\pi : \mathbb{F}(E) \rightarrow \mathbb{F}(F)$ für alle $E, F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $0 < |E| = |F|$ und $\pi \in \mathbb{S}(E, F)$*

in dem oben beschriebenen Sinn eindeutig und kompatibel um die Bestandteile

- *nicht-leere kompakte metrisierbare Räume $\mathbb{F}(A), A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$,*
- *stetige Projektionen $\text{pr}_G^A : \mathbb{F}(A) \rightarrow \mathbb{F}(G)$ für alle $G \subseteq A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$,*
- *Ummarkierungen (Homöomorphismen) $\pi : \mathbb{F}(A) \rightarrow \mathbb{F}(B)$ für alle $A, B \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ und $\pi \in \mathbb{S}(A, B)$*

erweitern. Die Konsistenz Eigenschaft setzt sich ebenfalls fort.

Beispiel 3.1.7 (Konsistentes System der Wörter). Betrachtet wird das konsistente System $\mathbf{Word}(\Sigma)$ der Wörter über dem Alphabet Σ aus Beispiel 3.0.2 zusammen mit den projektiven Limesystemen $\mathbb{F}(A) = \Sigma^A$. Die Konstruktion der Gruppenwirkungen $\pi \in \mathbb{S}(A, B)$ mit $A, B \in \mathfrak{P}_\infty(\mathbb{N})$ und $w \in \Sigma^A$ ist hier nichts anderes als die Abbildung

$$\pi.w = w \circ \pi^{-1} = \{(\pi(i), w(i)) : i \in A\}.$$

Man bemerke: Der vollständige projektive Limes ist in dieser Situation $\mathbb{F}(\mathbb{N}) = \Sigma^{\mathbb{N}}$, also die Menge der Σ -wertigen Folgen. Schreibt man ein $w \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ wie üblich als $w = (w_1, w_2, \dots)$ und betrachtet eine Bijektion $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ so gilt

$$\pi.w = \{(\pi(i), w_i) : i \in \mathbb{N}\} = (w_{\pi^{-1}(1)}, w_{\pi^{-1}(2)}, \dots).$$

◁

Bemerkung 3.1.8. Bisher wurden für zwei unendliche Mengen A, B alle Bijektionen $\pi : A \rightarrow B$ betrachtet. Später wird diese Klasse eingeschränkt. Für die stochastischen Invarianzbegriffe reicht es aus, *endliche* Bijektionen zu betrachten. ▽

In der Folge wird immer ein konsistentes System \mathbf{F} mit fixierten projektiven Limesystemen $\mathbb{F}(A)$, $A \in \mathfrak{P}_\infty(\mathbb{N})$ und induzierten Abbildungen betrachtet. Die Aussagen hängen nicht von der speziellen Wahl dieser Limesysteme ab.

3.1.2. Homomorphismen $h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ konsistenter Systeme

Angenommen es liegen zwei konsistente Systeme $\mathbf{F} = (\mathbb{F}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{F})$ und $\mathbf{G} = (\mathbb{G}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{G})$ vor. In beiden Systemen wird pr für die Projektionen verwendet, je nach Kontext handelt es sich dann um die Projektionen in \mathbf{F} bzw. \mathbf{G} ; ebenso für die Ummarkierungen $\pi..$ Eine Abbildung

$$h : \bigcup_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})} \mathbb{F}(E) \longrightarrow \bigcup_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})} \mathbb{G}(E)$$

heißt *Homomorphismus*, wenn

1. Für alle $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ und $x \in \mathbb{F}(E)$ ist $h(x) \in \mathbb{G}(E)$.
2. Für alle $E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ und $x \in \mathbb{F}(F)$ ist $\text{pr}_E^F(h(x)) = h(\text{pr}_E^F(x))$.
3. Für alle $E, F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $0 < |E| = |F|$ und $\pi \in \mathbb{S}(E, F)$ sowie $x \in \mathbb{F}(E)$ ist $\pi.h(x) = h(\pi.x)$.

Ein Homomorphismus h heißt *Einbettung*, falls h injektiv ist und *Isomorphismus*, falls h bijektiv ist. Ist h ein Homomorphismus von \mathbf{F} nach \mathbf{G} , so wird für diesen Sachverhalt $h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ geschrieben. Sind \mathbf{F}, \mathbf{G} konsistente Systeme für die ein Isomorphismus $h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ existiert, so wird $\mathbf{F} \simeq \mathbf{G}$ geschrieben.

Beispiel 3.1.9. Man betrachte zwei Alphabete Σ_1, Σ_2 und eine Abbildung $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$. Diese induziert einen Homomorphismus h_f zwischen den Systemen $\mathbf{Word}(\Sigma_1)$ und $\mathbf{Word}(\Sigma_2)$ wie folgt: Ist $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ und $w \in \Sigma_1^E$ so definiert man $h_f(w) := f \circ w$. Die Abbildung ist genau dann ein Isomorphismus, wenn f bijektiv ist. ▽

Beispiel 3.1.10. Zu einer Partition $x = \{E_1, \dots, E_k\}$ von E sei der Graph $h(x) : E \times E \rightarrow \{0, 1\}$ auf Knotenmenge E definiert durch $h(x)(i, j) = 1 \Leftrightarrow i \neq j \wedge \exists l : i, j \in E_l$. Partitionsmengen in x werden zu disjunkten Cliques in $h(x)$. Dies liefert eine Einbettung vom System der Partitionen in das System der Graphen. \triangleleft

Satz 3.1.11. Jeder Homomorphismus $h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ lässt sich eindeutig zu einer Abbildung

$$h^* : \bigcup_{A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})} \mathbb{F}(A) \longrightarrow \bigcup_{A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})} \mathbb{G}(A)$$

derart fortsetzen, dass gilt:

1. Die Einschränkung von h^* auf $\bigcup_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})} \mathbb{F}(E)$ ist h .
2. Für alle $A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ und $x \in \mathbb{F}(A)$ ist $h^*(x) \in \mathbb{G}(A)$ und $h^*_{\mathbb{F}(A)} : \mathbb{F}(A) \rightarrow \mathbb{G}(A)$ ist stetig.
3. Für alle $A \subseteq B \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und $x \in \mathbb{F}(B)$ gilt $\text{pr}_A^B(h^*(x)) = h^*(\text{pr}_A^B(x))$.
4. Für alle $A, B \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ mit $0 < |A| = |B| \leq \infty$ und $\pi \in \mathbb{S}(A, B)$ sowie $x \in \mathbb{F}(A)$ gilt $h^*(\pi.x) = \pi.h^*(x)$.

Beweis. Man betrachte zunächst die kanonischen projektiven Limesräume

$\mathbb{F}(A) = \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ und $\mathbb{G}(A) = \text{Proj}(\mathbb{G}, A)$. Es sei h^* eine Abbildung mit den genannten Eigenschaften. Es sei $x = (x_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)} \in \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ und $y = (y_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)} := h^*(x) \in \text{Proj}(\mathbb{G}, A)$ aus der dritten und ersten Eigenschaft für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$

$$y_E = \text{pr}_E^A(y) = \text{pr}_E^A(h^*(x)) = h^*(\text{pr}_E^A(x)) = h^*(x_E) = h(x_E),$$

sodass für die spezielle Wahl der kanonischen projektiven Limiten die Gestalt einer solchen Funktion h^* allein durch die ersten drei Eigenschaften determiniert ist. Es ist also $h^*(x) = (h(x_E))_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)}$. Die Stetigkeit dieser Funktion (Punkt 2) ist klar. Für $A, B \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ und $\pi \in \mathbb{S}(A, B)$ sowie $x = (x_E)_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)} \in \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ gilt mit der Definition von $\pi.x$ in diesem Fall

$$h^*(\pi.x) = (h(\pi_{|\pi^{-1}(E)}.x_{\pi^{-1}(E)}))_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B)} = (\pi_{|\pi^{-1}(E)}.h(x_{\pi^{-1}(E)}))_{E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(B)} = \pi.h^*(x).$$

Die Argumentation zeigt, dass es im Fall der kanonischen projektiven Limiten eine eindeutig bestimmte Funktion h^* mit den genannten Eigenschaften gibt.

Angenommen es sind nun beliebige andere projektive Limiten $\mathbb{F}(A), \mathbb{G}(A)$ gewählt. Dann gibt es zu jedem A eindeutig bestimmte Homöomorphismen $f_A : \mathbb{F}(A) \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{F}, A)$ und $g_A : \mathbb{G}(A) \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{G}, A)$, welche mit den Projektionen verträglich sind. Auch hier muss gezeigt werden, dass es eine eindeutige Fortsetzung gibt. Angenommen h^* ist eine solche Fortsetzung. Dann erfüllt die Abbildung $h' : \text{Proj}(\mathbb{F}, A) \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{G}, A)$ definiert über $h'(x) := g_A(h^*(f_A^{-1}(x)))$ die Eigenschaften 1, 2, 3 für die kanonischen projektiven Limiten und ist wie oben gesehen eindeutig. Damit ist aber auch h^* eindeutig, da g_A und f_A eindeutig und invertierbar sind.

Zur Existenz: Für $x \in \mathbb{F}(A)$ sei h^* definiert über $h^*(x) := f_A \circ h' \circ g_A^{-1}(x)$ mit h' als

eindeutiger Fortsetzung auf den kanonischen projektiven Limiten. Diese Funktion erfüllt automatisch wieder 1, 2, 3 und Punkt 4 per Definition der Gruppenwirkung auf allgemeinen projektiven Limiten. \square

Aufgrund der Eindeutigkeit der Fortsetzung von Homomorphismen $h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ auf die gewählten projektiven Limiten wird im Folgenden auch für die Fortsetzung h^* einfach nur h geschrieben.

3.1.3. Produktsysteme $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ und weitere Konstruktionen

Nun wird gezeigt, wie man aus konsistenten Systemen \mathbf{F} und \mathbf{G} ein neues konsistentes System, das Produktsystem $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, konstruieren kann. Diese Konstruktion wird im weiteren Verlauf der Arbeit eine wichtige Rolle einnehmen.

Definition 3.1.12. Das Produktsystem $\mathbf{F} \times \mathbf{G} = (\mathbb{F} \times \mathbb{G}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{F} \times \mathbb{G})$ besteht aus

a) den Grundmengen

$$(\mathbb{F} \times \mathbb{G})(E) := \mathbb{F}(E) \times \mathbb{G}(E)$$

für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$,

b) den Projektionen $\text{pr}_E^F : (\mathbb{F}(F) \times \mathbb{G}(F)) \rightarrow (\mathbb{F}(E) \times \mathbb{G}(E))$ mit

$$\text{pr}_E^F((x, y)) := (\text{pr}_E^F(x), \text{pr}_E^F(y))$$

für alle $E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, wobei pr je nach Kontext wieder die Projektionen in \mathbf{F} bzw. \mathbf{G} beschreibt, und

c) den *Diagonalwirkungen* $\pi. : (\mathbb{F}(E) \times \mathbb{G}(E)) \rightarrow (\mathbb{F}(F) \times \mathbb{G}(F))$ definiert über

$$\pi.(x, y) := (\pi.x, \pi.y)$$

für $E, F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $0 < |E| = |F|$ und $\pi \in \mathbb{S}(E, F)$.

Direktes Überprüfen der Definitionen zeigt, dass auch $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ ein konsistentes System ist und man erkennt auch sofort, dass die Produktoperation assoziativ ist: Sind drei konsistente Systeme $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ gegeben, so gilt

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \times \mathbf{H} =: \mathbf{F} \times \mathbf{G} \times \mathbf{H}.$$

Sind $\mathbb{F}(A), \mathbb{G}(A)$ projektive Limiten für \mathbf{F}, \mathbf{G} , so ist $\mathbb{F}(A) \times \mathbb{G}(A)$ ein projektiver Limes für $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ und es ist $\pi.(x, y) = (\pi.x, \pi.y)$ die induzierte Diagonalwirkung auf $\mathbb{F}(A) \times \mathbb{G}(A)$.

Beispiel 3.1.13. Sind Σ_1, Σ_2 zwei Alphabete, so ist $\mathbf{Word}(\Sigma_1) \times \mathbf{Word}(\Sigma_2) \simeq \mathbf{Word}(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$. Ein Isomorphismus ist durch die kanonische Identifikation $\Sigma_1^E \times \Sigma_2^E$ mit $(\Sigma_1 \times \Sigma_2)^E$ gegeben. \triangleleft

Bemerkung 3.1.14. Ähnlich wie bei den *Species of Structures* kann man neben der Produktbildung weitere Operationen vornehmen. Dazu seien $\mathbf{G} = (\mathbb{G}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{G})$ und $\mathbf{H} = (\mathbb{H}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{H})$ beliebige konsistente Systeme und es werden kurz drei Möglichkeiten vorgestellt, daraus ein neues System \mathbf{F} zu konstruieren:

1. **P(G):** Ein Element $x \in \mathbb{F}(E)$ ist von der Form $x = \{x_1, \dots, x_k\}$ mit $x_i \in \mathbb{G}(E_i)$ und $\{E_1, \dots, E_k\}$ ist eine Partition von E . Es sei $\text{pr}_F^E(x) := \{\text{pr}_{E_i \cap F}^{E_i}(x_i) : x_i \in x, E_i \cap F \neq \emptyset\}$ und $\pi.x := \{\pi_{|E_i}.x_i : x_i \in x\}$. Ist **P** das System der Partitionen wie in Beispiel 3.0.3 erklärt, so erhält man einen Homomorphismus $\mathbf{P} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{G})$ durch die Abbildung $h(\{\{E_1, \dots, E_k\}, x\}) \mapsto \{\text{pr}_{E_1}^E(x), \dots, \text{pr}_{E_k}^E(x)\}$.
2. **G \sqcup H:** $\mathbb{F}(E) := \mathbb{G}(E) \sqcup \mathbb{H}(E)$ als disjunkter Vereinigung. $\text{pr}_F^E(x)$ und $\pi.x$ sind wie zuvor erklärt, je nachdem was der Input ist.
3. **G • H:** $\mathbb{F}(E) := \{(x, y) : \text{es gibt } E_1, E_2 \text{ disjunkt, nicht-leer mit } E = E_1 \cup E_2, x \in \mathbb{G}(E_1), y \in \mathbb{H}(E_2)\} \sqcup \mathbb{G}(E) \sqcup \mathbb{H}(E)$. Für ein $(x, y) \in \mathbb{F}(E)$ mit $x \in \mathbb{G}(E_1)$ und $y \in \mathbb{H}(E_2)$ ist $\text{pr}_F^E((x, y)) := \text{pr}_F^{E_1}(x)$, falls $F \cap E_2 = \emptyset$, $\text{pr}_F^E((x, y)) := \text{pr}_F^{E_2}(y)$, falls $F \cap E_1 = \emptyset$ und $\text{pr}_F^E((x, y)) := (\text{pr}_F^{E_1}(x), \text{pr}_F^{E_2}(y))$ sonst. Es sei $\pi.(x, y) := (\pi_{|E_1}.x, \pi_{|E_2}.y)$.

Diese Operationen spielen im weiteren Verlauf der Arbeit keine Rolle mehr. ∇

3.1.4. Wahrscheinlichkeitsmaße auf konsistenten Systemen

Es sei wieder **F** ein konsistentes System. Für jedes $A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist dann $\mathbb{F}(A)$ ein kompakter metrisierbarer topologischer Raum: Ist A endlich, so wird $\mathbb{F}(A)$ mit der diskreten Topologie ausgestattet. Sei nun $\mathcal{B}(\mathbb{F}(A))$ die Borelsche σ -Algebra des topologischen Raumes $\mathbb{F}(A)$ und es sei $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}(A))$ die Menge der Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{F}(A), \mathcal{B}(\mathbb{F}(A)))$. Wie üblich wird $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}(A))$ mit der Topologie der schwachen Konvergenz ausgestattet und damit zu einem kompakten metrisierbaren Raum. Die Konvergenz in dieser Topologie lässt sich leicht beschreiben: Ist $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, so ist $\mathbb{F}(E)$ endlich, $\mathcal{B}(\mathbb{F}(E))$ ist die Potenzmenge auf $\mathbb{F}(E)$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}(E))$ ist eindeutig durch die Werte $P(\{x\}), x \in \mathbb{F}(E)$ festgelegt. Eine Folge $(P_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{M}_1(\mathbb{F}(E))$ konvergiert schwach gegen $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}(E))$ genau dann wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\{x\}) = P(\{x\})$ für alle $x \in \mathbb{F}(E)$ gilt. Die analoge Charakterisierung der schwachen Topologie auf den Mengen $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}(A))$ für $A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ ist im folgenden Satz beschrieben, der ohne Beweis angegeben wird.

Satz 3.1.15. *Für $A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$ ist $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}(A))$ eindeutig durch die Familie der endlich-dimensionalen Randverteilungen, also der Menge aller Verteilungen $P^{\text{pr}_E^A}$ mit $E \subseteq A$ endlich, bestimmt. Ferner konvergiert eine Folge $(P_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{M}_1(\mathbb{F}(A))$ genau dann schwach gegen ein $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}(A))$, wenn für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq A$ die Folge $(P_n^{\text{pr}_E^A})_{n \geq 1}$ schwach gegen $P^{\text{pr}_E^A}$ konvergiert.*

Eine Begründung für die diese Aussage zur Verteilungskonvergenz findet man für den Fall $A = \mathbb{N}$ im untenstehenden Lemma 3.1.16. Ist (Ω, \mathcal{F}) ein messbarer Raum und $A \in \mathfrak{P}_{\infty}(\mathbb{N})$, so ist eine Abbildung $X_A : \Omega \rightarrow \mathbb{F}(A)$ genau dann $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F}(A)))$ -messbar, wenn die Abbildungen $\text{pr}_E^A(X_A) : \Omega \rightarrow \mathbb{F}(E)$ für alle endlichen Teilmengen $E \subseteq A$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F}(E)))$ -messbar sind. Im nächsten Abschnitt geht es nun um Teilräume von $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}(A))$. Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so nennt man X_A nun eine $\mathbb{F}(A)$ -wertige Zufallsgröße mit Verteilung $\mathcal{L}(X_A) := \mathbb{P}^{X_A} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}(A))$. Wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie üblich bleibt

der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum in der Folge gelegentlich im Hintergrund und man spricht von $\mathbb{F}(A)$ -wertigen Zufallsgrößen und ihren Verteilungen. Ist $(X_A^n)_{n \geq 1}$ eine Folge von $\mathbb{F}(A)$ -wertigen Zufallsgrößen, so konvergiert diese in Verteilung gegen eine $\mathbb{F}(A)$ -wertige Zufallsgröße X_A genau dann wenn für alle endlichen $E \subseteq A$ die Folge $\text{pr}_E^A(X_A^n)$ mit $n \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen $\text{pr}_E^A(X)$ konvergiert. Diese Notationen sind aber nicht für alle Aussagen und Konstruktionen günstig. Wie bereits in Abschnitt 1.2 erläutert wird für Wahrscheinlichkeitsmaße auf im Hintergrund liegenden Wahrscheinlichkeitsräumen das Symbol \mathbb{P} und für Verteilungen von $\mathbb{F}(A)$ -wertigen Zufallsgrößen, also für Elemente von $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}(A))$, das Symbol P benutzt.

Für ein konsistentes System \mathbf{F} mit fixierten projektiven Limesystemen $\mathbb{F}(A)$, $A \in \mathfrak{P}_\infty(\mathbb{N})$ und darauf erklärten fortgesetzten Projektionen und Ummarkierungen werden nun folgende Schreibweisen vereinbart:

$$\mathbb{F}_n := \mathbb{F}([n]) \text{ und } \mathbb{S}_n := \mathbb{S}([n], [n]) \text{ für } n \geq 1 \text{ sowie } \text{pr}_k^n := \text{pr}_{[k]}^{[n]} : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_k \text{ für } 1 \leq k \leq n.$$

Ferner seien

$$\mathbb{F}_\infty := \mathbb{F}(\mathbb{N}) \text{ und } \text{pr}_n := \text{pr}_{[n]}^{\mathbb{N}} : \mathbb{F}_\infty \rightarrow \mathbb{F}_n \text{ für } n \geq 1.$$

Insbesondere ist damit $\mathcal{B}(\mathbb{F}_\infty)$ die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{F}_∞ .

Lemma 3.1.16. *Das Mengensystem*

$$\mathcal{E} = \{ \{x_\infty \in \mathbb{F}_\infty : \text{pr}_k(x_\infty) = x\} : k \geq 1, x \in \mathbb{F}_k \} \cup \{ \emptyset \}$$

ist ein \cap -stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{F}_\infty)$. Insbesondere konvergiert eine Folge X_∞^n von \mathbb{F}_∞ -wertigen Zufallsvariablen genau dann schwach gegen X_∞ , wenn

$$\mathbb{P}(\text{pr}_k(X_\infty^n) = x) \rightarrow \mathbb{P}(\text{pr}_k(X_\infty) = x)$$

für alle $k \geq 1, x \in \mathbb{F}_k$ gilt.

Beweis. \mathbb{F}_∞ ist ein kompakter metrisierbarer Raum. Eine Metrik, welche diese Topologie erzeugt, ist beispielsweise durch

$$d(x_\infty, y_\infty) = \sum_{n \geq 1} \frac{1(\text{pr}_n(x_\infty) = \text{pr}_n(y_\infty))}{2^n}$$

gegeben. Die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{F}_∞ wird nun von den offenen Kugeln bzgl. d erzeugt und die offenen Kugeln bzgl. d sind genau die nicht-leeren Mengen aus \mathcal{E} .

Für $A, B \in \mathcal{E}$ gilt ferner $A \cap B \in \{A, B, \emptyset\}$, insbesondere ist \mathcal{E} damit also \cap -stabil.

Die Mengen aus \mathcal{E} sind sowohl offen als auch abgeschlossen. Damit impliziert die schwache Konvergenz sofort die Konvergenz der Wahrscheinlichkeiten. Nun zur umgekehrten Implikation. Da \mathbb{F}_∞ separabel und durch d metrisierbar ist, ist jede offene Menge U eine abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln, also von Mengen aus \mathcal{E} . Wie oben gesehen sind zwei Mengen aus \mathcal{E} entweder disjunkt, oder die eine ist in der anderen enthalten. Damit kann man jede offene Menge U in \mathbb{F}_∞ als abzählbare disjunkte Vereinigung von Mengen aus \mathcal{E} schreiben. Es sei $U = \sum_{i \geq 1} U_i$ in dieser Form. Damit und mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\liminf_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_\infty^n \in U) = \liminf_{n \geq 1} \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X_\infty^n \in U_i) \geq \sum_{i \geq 1} \liminf_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_\infty^n \in U_i) = \mathbb{P}(X_\infty \in U).$$

Aus der Konvergenz der Wahrscheinlichkeiten folgt nun die Verteilungskonvergenz. \square

Die Abbildungen $\text{pr}_k^n : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_k$ für $1 \leq k \leq n$ werden nun auch als Abbildung $\text{pr}_k^n : \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_k)$ über $P \mapsto P^{\text{pr}_k^n}$ aufgefasst. Ferner werden die Projektionen $\text{pr}_n : \mathbb{F}_\infty \rightarrow \mathbb{F}_n$ als Push-Forward-Abbildung $\text{pr}_n : \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$ durch $P \mapsto P^{\text{pr}_n}$ aufgefasst. Insbesondere ist also ein $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty)$ eindeutig durch die Folge $(\text{pr}_n(P))_{n \geq 1}$ festgelegt. Umgekehrt existiert zu jeder Folge $(P_n)_{n \geq 1}$ mit $\text{pr}_k^n(P_n) = P_k$ für alle $1 \leq k \leq n$ ein eindeutig bestimmtes $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty)$ mit $P_n = \text{pr}_n(P)$ für alle $n \geq 1$ (siehe zum Beispiel [Kal02], Korollar 6.15). Man kann damit $(\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty), \text{pr}_n)$ als projektives Limesystem zum projektiven System $(\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_k), \text{pr}_k^n : 1 \leq k \leq n)$ auffassen. In Symbolen:

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_1) \xleftarrow{\text{pr}_1^2} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_2) \xleftarrow{\text{pr}_2^3} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_3) \xleftarrow{\text{pr}_3^4} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_4) \xleftarrow{\text{pr}_4^5} \dots \xleftarrow{\text{pr}_n} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty).$$

Bemerkung 3.1.17. Das *kanonische* Limesystem zu $(\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_k), \text{pr}_k^n, 1 \leq k \leq n)$ besteht aus bzgl. pr_k^n konsistenten Folgen von Verteilungen $P_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$. Erst mithilfe des Erweiterungssatzes von Kolmogorov kann man dieses Limesystem mit $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty)$ identifizieren. ∇

3.1.5. Die abgeleiteten Strukturen

Das durch \mathbf{F} induzierte topologische dynamische System ist

$$(\mathbb{F}_\infty, \mathbb{S}_\infty), \tag{3.1}$$

wobei \mathbb{S}_∞ die Menge der bijektiven Abbildungen $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\pi(i) = i$ für alle bis auf endlich viele i bezeichnet. Die Gruppenwirkung von \mathbb{S}_∞ auf \mathbb{F}_∞ ist wie in Satz 3.1.5 erklärt. Wie in Abschnitt 1.5 erhält man damit den Simplex der bzgl. \mathbb{S}_∞ invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{F}_∞ als $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty) := \mathcal{M}_1(\mathbb{S}_\infty)$; man spricht auch von *austauschbaren Verteilungen*. Es sei $\mathcal{I}^{\text{sym}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{F}_\infty)$ die Unter- σ -Algebra der \mathbb{S}_∞ -invarianten Ereignisse, diese werden auch *austauschbare Ereignisse* genannt. Ein $A \in \mathcal{B}(\mathbb{F}_\infty)$ ist genau dann austauschbar, wenn $\pi.A = \{\pi.a : a \in A\} = A$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_\infty$ gilt.

Bemerkung 3.1.18. Der stochastische Invarianzbegriff der Austauschbarkeit ändert sich nicht, wenn man die Wirkungen *aller* Bijektionen $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ betrachtet. Die invariante σ -Algebra würde im Allgemeinen aber sehr wohl kleiner werden. Betrachtet man $\mathbf{Word}(\Sigma)$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$ und $\mathbb{F}_\infty = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ mit $\pi.(w_1, w_2, \dots) = (w_{\pi^{-1}(1)}, \dots)$, so ist zum Beispiel $A_p = \{w \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_1 + \dots + w_n}{n} = p\}$ für alle $p \in [0, 1]$ ein Element von \mathcal{I}^{sym} . Es sei $w = (w_1, w_2, \dots) \in A_p$ für ein $p \in (0, 1)$ fest. Damit sind die Mengen

$$N_0 := \{i \in \mathbb{N} : w_i = 0\} \quad \text{und} \quad N_1 = \mathbb{N} \setminus N_0 = \{i \in \mathbb{N} : w_i = 1\}$$

beide abzählbar unendlich. Es seien $N_0 = \{j_1, j_2, \dots\}$ und $N_1 = \{k_1, k_2, \dots\}$ Aufzählungen. Damit definiert man die Bijektion $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$(\pi^{-1}(1), \pi^{-1}(2), \pi^{-1}(3), \pi^{-1}(4), \dots) := (j_1, k_1, j_2, k_2, \dots).$$

Für diese Bijektion gilt damit offensichtlich $\pi.w = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ und damit $\pi.w \in A_{0.5}$. Ist $p \neq 0.5$, so ist die Bijektion π nicht endlich. Tatsächlich kann man jede Folge w ,

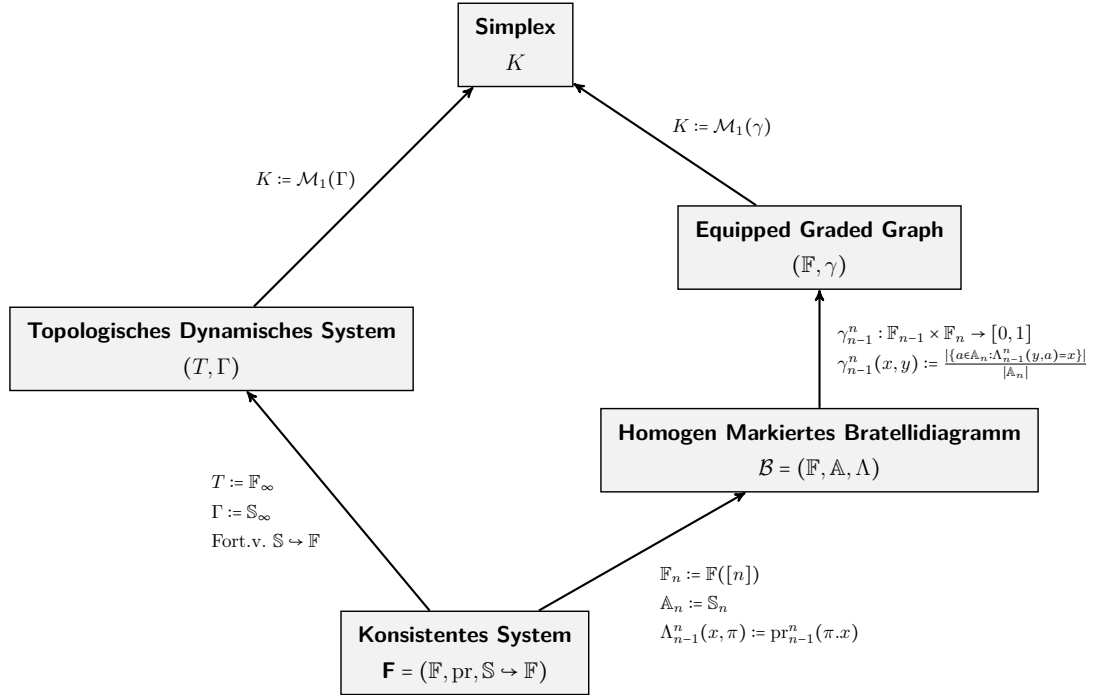


Abb. 3.1.: Ein konsistentes System liefert sowohl das topologische dynamische System $(\mathbb{F}_\infty, \mathbb{S}_\infty)$, als auch ein HMB.

die unendlich oft die Werte 0 und 1 enthält, durch eine allgemeine Bijektion π in jede Menge $A_p, p \in [0, 1]$ abbilden. Es gibt bedeutend weniger Mengen, die invariant bezüglich allen Bijektionen sind. ▽

Das durch \mathbf{F} induzierte homogen markierte Bratellidiagramm besteht aus

$$\mathbb{F}_n := \mathbb{F}([n]), \mathbb{A}_n := \mathbb{S}_n \text{ und } \Lambda_{n-1}^n(x, \pi) := \text{pr}_{n-1}^n(\pi.x). \quad (3.2)$$

Hier werden die zentralen Prozessverteilungen betrachtet, es geht also um die Simplizes $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ und $\mathcal{M}_1(\gamma)$. Damit kann man nun die Strukturabbildungen (siehe Abbildung 2.3) fortführen; siehe Abbildung 3.1.

Damit induziert ein konsistentes System \mathbf{F} nun auf verschiedene Arten Simplizes. Der nächste Abschnitt zeigt, dass diese alle auf kanonische Weise isomorph sind und führt einen weiteren Simplex ein. Es folgt eine lange Bemerkung über die Verbindung zur Kategorientheorie, die aber im weiteren Verlauf der Arbeit nicht benötigt wird.

Bemerkung 3.1.19. Die strukturellen Zusammenhänge, welche bisher entwickelt wurden, können über Kategorien, Funktoren und deren Eigenschaften ausgedrückt werden. Zu den grundlegenden Begriffen siehe auch [Mac71]. Eine Kategorie wird in der Folge über Spezifikation der Objekte und der Morphismen zwischen zwei Objekten angegeben. Die Morphismen sind in allen nachfolgend vorgestellten Kategorien Abbildungen zwischen Mengen und die Verknüpfung dieser ist auch die Verknüpfung der Morphismen. Die Identität ist hier stets die identische Abbildung.

1. **Simplex** enthält als Objekte Simplizes. Die Morphismen zwischen Simplizes K_1, K_2 sind stetige affine Abbildungen $f : K_1 \rightarrow K_2$ mit $f(\text{ex}(K_1)) \subseteq \text{ex}(K_2)$.

2. EGG enthält als Objekte Equipped Graded Graphs. Ein Morphismus $f : (\mathbb{F}, \theta) \rightarrow (\mathbb{G}, \psi)$ ist eine (Folge von) Funktion(en) $f = (f_0, f_1, \dots)$ mit $f_n : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{G}_n$ für alle $n \geq 0$, sodass für alle $n \geq 1$, $y \in \mathbb{F}_n$ und $x' \in \mathbb{G}_{n-1}$ die Gleichung

$$\psi_{n-1}^n(x', f_n(y)) = \sum_{x \in \mathbb{F}_{n-1}, f_{n-1}(x)=x'} \theta_{n-1}^n(x, y)$$

gilt (f ist eine starke Markovfunktion im Sinne von [Hag16]).

3. TDS enthält als Objekte topologische dynamische Systeme (T, Γ) mit amenabler Gruppe Γ . Ein Morphismus $f = (f_1, f_2) : (T_1, \Gamma_1) \rightarrow (T_2, \Gamma_2)$ besteht aus einer stetigen Abbildung $f_1 : T_1 \rightarrow T_2$ und einem Gruppenisomorphismus $f_2 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$, sodass $f_1(\pi \cdot x) = f_2(\pi) \cdot f_1(x)$ für alle $\pi \in \Gamma_1$ und $x \in T_1$ gilt.

4. HMB enthält als Objekte homogen markierte Bratellidiagramme. Ein Morphismus $f : (\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda) \rightarrow (\mathbb{G}, \mathbb{B}, \Psi)$ besteht aus Folgen von Funktionen $f = (f_0, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots)$ mit $f_n : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{G}_n$ für alle $n \geq 0$ und Bijektionen $g_n : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$ für alle $n \geq 1$, sodass

$$f_{n-1}(\Lambda_{n-1}^n(x, a)) = \Psi_{n-1}^n(f_n(x), g_n(a)) \quad \text{für alle } n \geq 1, x \in \mathbb{F}_n, a \in \mathbb{A}_n$$

gilt.

5. KS enthält als Objekte konsistente Systeme. Ein Morphismus f zwischen konsistenten Systemen ist ein Homomorphismus wie in Abschnitt 3.1.2.

Zwei Objekte einer Kategorie heißen isomorph, wenn Morphismen zwischen ihnen bestehen, welche sich jeweils zur Identität verknüpfen. In den Kategorien **Simplex** und **KS** stimmt der Isomorphismusbegriff mit den zuvor eingeführten überein. In obiger Situation kann man in allen Kategorien von Teilmengen und injektiven Morphismen sprechen. Sind A, B Objekte und ist $f : A \rightarrow B$ ein injektiver Morphismus, so heißt f eine Einbettung von A nach B .

Das Strukturbild 3.1 zeigt nun Übergänge von Objekten der eben eingeführten Kategorien. Diese Übergänge kann man auf natürliche Weise um Übergängen der zugehörigen Morphismenmengen erweitern und erhält damit *Funktoren*, dabei steht L für die linke und R für die rechte Seite der Abbildung 3.1.

- (i) $L_1 : \text{KS} \rightarrow \text{TDS}$. Ein konsistentes System $(\mathbb{F}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{F})$ wird durch L_1 auf das topologische dynamische System $(\mathbb{F}_\infty, \mathbb{S}_\infty)$ abgebildet (siehe (3.1)). Ist f ein Morphismus zwischen konsistenten Systemen, so kann man diesen nach Satz 3.1.11 eindeutig fortsetzen. Es sei f^* diese Fortsetzung. Dabei ist stets \mathbb{S}_∞ die wirkende Gruppe. Der Funktor L_1 ordnet dem Morphismus f den Morphismus (f^*, id) zu.
- (ii) $L_2 : \text{TDS} \rightarrow \text{Simplex}$. Einem TDS (T, Γ) wird durch L_2 der Simplex der invarianten Maße $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ zugeordnet. Ist $f = (f_1, f_2) : (T_1, \Gamma_1) \rightarrow (T_2, \Gamma_2)$ ein Morphismus, so wird diesem der Morphismus $\mu \mapsto \mu^{f_1}$ zugeordnet. Dieses ist tatsächlich ein Morphismus: Es sei X ein T_1 -wertiges Zufallselement mit Γ_1 -invarianter Verteilung, also $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\Gamma_1)$. Da f_2 ein Gruppenisomorphismus ist, ist jedes $\pi \in \Gamma_2$ von der Form $\pi = f_2(\gamma)$ mit $\gamma \in \Gamma_1$. Damit ist $\pi \cdot f_1(X) = f_1(\gamma \cdot X) \sim f_1(X)$. Also ist

$\mu^{f_1} \in \mathcal{M}_1(\Gamma_2)$ für alle $\mu \in \mathcal{M}_1(\Gamma_1)$. Man muss nur noch begründen, dass ergodische Verteilungen auf ergodische Verteilungen abgebildet werden, aber dies folgt aus $f_1^{-1}(\mathcal{I}(\Gamma_2)) \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$ zusammen mit der Charakterisierung der Extremalität durch Ergodizität.

(iii) $R_1 : \text{KS} \rightarrow \text{HMB}$. Ein konsistentes System $(\mathbb{F}, \text{pr}, \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{F})$ wird durch L_1 auf das HMB aus (3.2) abgebildet. Ist f ein Morphismus konsistenter Systeme so ordnet R_1 diesem den Morphismus $f_n := f|_{\mathbb{F}_n}$ und $h_n := \text{id}_{\mathbb{S}_n}$ zu. Ist $x \in \mathbb{F}_n$ und $\pi \in \mathbb{S}_n$ so erhält man $\text{pr}_{n-1}^n(\pi \cdot f_n(x)) = f_{n-1}(\text{pr}_{n-1}^n(\pi \cdot x))$ direkt aus der definierenden Eigenschaft eines Homomorphismus konsistenter Systeme.

(iv) $R_2 : \text{HMB} \rightarrow \text{EGG}$. Jedem $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ wird durch R_2 der Equipped Graded Graph (\mathbb{F}, γ) mit $\gamma_{n-1}^n(x, y) := \#\mathbb{A}_n^{-1} \#\{a \in \mathbb{A}_n : \Lambda_{n-1}^n(y, a) = x\}$ zugeordnet. Ist $f = (f_0, f_1, g_1, f_2, \dots)$ ein Morphismus zwischen HMBs, so ordnet R_2 diesem den Morphismus $(f_n)_{n \geq 0}$ zwischen den zugehörigen EGGs zu. Dieses ist tatsächlich ein Morphismus, denn für $y \in \mathbb{F}_n$ und $x' \in \mathbb{G}_{n-1}$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\#\{b \in \mathbb{B}_n : \Psi_{n-1}^n(f_n(y), b) = x'\}}{\#\mathbb{B}_n} &= \frac{\#\{a \in \mathbb{A}_n : \Psi_{n-1}^n(f_n(y), g_n(a)) = x'\}}{\#\mathbb{A}_n} \\ &= \frac{\#\{a \in \mathbb{A}_n : f_{n-1}(\Lambda_{n-1}^n(y, a)) = x'\}}{\#\mathbb{A}_n} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{F}_{n-1}, f_{n-1}(x) = x'} \frac{\#\{a \in \mathbb{A}_n : \Lambda_{n-1}^n(y, a) = x\}}{\#\mathbb{A}_n}. \end{aligned}$$

(v) $R_3 : \text{EGG} \rightarrow \text{Simplex}$. Der Funktor R_3 ordnet jedem EGG (\mathbb{F}, θ) den Simplex $\mathcal{M}_1(\theta)$ zu. Ist $f = (f_n)_{n \geq 0}$ ein Morphismus zwischen den EGGs (\mathbb{F}, θ) und (\mathbb{G}, ψ) und $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\theta)$, so ist $f(X) := (f_n(X_n))_{n \geq 0}$ eine Markovkette mit Rückwärtsdynamik γ (f ist eine starke Markovfunktion). Hat X eine triviale terminale σ -Algebra, so auch $f(X)$. Damit ist der Übergang $\mu \in \mathcal{M}_1(\theta) \mapsto \mu^f \in \mathcal{M}_1(\psi)$ ein Morphismus in **Simplex**.

Durch Verknüpfung von Funktoren erhält man wiederum Funktoren. Damit erhält man durch $L := L_2 \circ L_1$ und $R := R_3 \circ R_2 \circ R_1$ zwei Funktoren von **KS** nach **Simplex**. Im nächsten Abschnitt wird insbesondere gezeigt: Für alle konsistenten Systeme \mathbf{F} sind die Simplexes der austauschbaren Verteilungen $L(\mathbf{F}) = \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ und der Simplex der Markovverteilungen $R(\mathbf{F}) = \mathcal{M}_1(\gamma)$ isomorph. Tatsächlich wird sogar gezeigt, dass die Funktoren L und R selbst *natürlich isomorph* sind, die Konstruktion in Satz 3.2.11 liefert einen natürlichen Isomorphismus der Funktoren. ∇

3.2. Austauschbarkeit und Markovketten

Da \mathbb{S}_∞ amenabel ist und auf den kompakten Raum \mathbb{F}_∞ als Gruppe von Homöomorphismen wirkt, erhält man sofort mit Satz 1.5.1:

Satz 3.2.1. $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ ist ein Simplex. Bezeichnet $\text{ex}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ die Extrempunkte von \mathcal{M} , so bilden diese eine nicht-leere G_δ -Teilmenge von \mathcal{M} . Es seien $\mathcal{M}_1(\text{ex}(\mathcal{M}))$

die Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\text{ex}(\mathcal{M})$. Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}_1(\text{ex}(\mathcal{M}))$ ist

$$P^\mu := \int_{\text{ex}(\mathcal{M})} Q \, d\mu(Q) \in \mathcal{M}.$$

Die so erhaltene Zuordnung $\mathcal{M}_1(\text{ex}(\mathcal{M})) \rightarrow \mathcal{M}$, $\mu \mapsto P^\mu$ ist affin, bijektiv und stetig. Für jedes $P \in \mathcal{M}$ gilt $P \in \text{ex}(\mathcal{M})$ genau dann wenn P ergodisch ist, also $P(I) \in \{0, 1\}$ für alle $I \in \mathcal{I}^{\text{sym}}$ gilt. Ferner ist $P(\cdot | \mathcal{I}^{\text{sym}})$ P -fast-sicher ein Element in $\text{ex}(\mathcal{M})$ und die Verteilung von $P(\cdot | \mathcal{I}^{\text{sym}})$ unter P , bezeichnet mit $\mu^P \in \mathcal{M}_1(\text{ex}(\mathcal{M}))$, ist das eindeutige Wahrscheinlichkeitsmaß mit Barycenter P , in Zeichen $P^{\mu^P} = P$.

In der Folge wird häufig mithilfe von \mathbb{F}_∞ -wertigen Zufallsgrößen X_∞ argumentiert, deren Verteilung austauschbar ist, die also $\pi.X_\infty \sim X_\infty$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_\infty$ erfüllen (äquivalent $\mathbb{P}^{X_\infty} \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$). Die bzgl. X_∞ austauschbaren Ereignisse sind dann $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty) := X_\infty^{-1}(\mathcal{I}^{\text{sym}})$. Der Satz von Birkhoff (siehe auch Satz 1.5.2) lautet in dieser speziellen Situation:

Satz 3.2.2. *Es seien $\mathbb{P}^{X_\infty} \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ und $k \geq 1, x \in \mathbb{F}_k$. Dann gilt*

$$(n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi.\text{pr}_n(X_\infty)) = x\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{pr}_k(X_\infty) = x | \mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty)) \quad \mathbb{P}\text{-fast-sicher.}$$

Ferner erzeugt die zufällige Funktion $(k, x) \mapsto \mathbb{P}(\text{pr}_k(X_\infty) = x | \mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty))$ die σ -Algebra $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty)$ \mathbb{P} -fast sicher.

Beweis. Setzt man jedes $\pi \in \mathbb{S}_n$ durch die Identität auf ganz \mathbb{N} fort, so ist $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \dots$ eine temperierte Følner-Sequenz in \mathbb{S}_∞ und zusätzlich gilt $\text{pr}_k(\pi.X_\infty) = \text{pr}_k^n(\text{pr}_n(\pi.X_\infty)) = \text{pr}_k^n(\pi.\text{pr}_n(X_\infty))$ wegen der Konsistenzeigenschaft. Die Aussage zur fast sicheren Konvergenz ist damit Inhalt von Satz 1.5.2. Die letzte Behauptung folgt aus Lemma A.2.5, denn die Kollektion der Mengen $\{x_\infty \in \mathbb{F}_\infty : \text{pr}_k(x_\infty) = x\}, k \geq 1, x \in \mathbb{F}_k$ ist bei Hinzunahme der leeren Menge ein \cap -stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{F}_\infty)$, siehe Lemma 3.1.16. \square

Auch $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty) \subseteq \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty)$ kann als projektives Limesystem aufgefasst werden.

Definition 3.2.3. Für $n \geq 1$ sei $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$ die Menge aller $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$ mit $P^{\pi \cdot} = P$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_n$. Eine Zufallsgröße X mit Werten in \mathbb{F}_n hat also genau dann Verteilung $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$, wenn $\pi.X \sim X$, also $\mathbb{P}(\pi.X = x) = \mathbb{P}(X = x)$ oder äquivalent $\mathbb{P}(X = \pi.x) = \mathbb{P}(X = x)$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_n$ und $x \in \mathbb{F}_n$ gilt.

Beispiel 3.2.4. Im Beispiel der Wörter $\mathbf{Word}(\Sigma)$ ist $\mathbb{F}_n = \Sigma^n$ und $X = (Y_1, \dots, Y_n) \in \Sigma^n$ hat Verteilung $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$ genau dann wenn $(Y_{\pi(1)}, \dots, Y_{\pi(n)}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Y_1, \dots, Y_n)$ für alle $n \geq 1$ und $\pi \in \mathbb{S}_n$ gilt. \triangleleft

Bemerkung 3.2.5. Alle $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$ sind endlich-dimensionale Simplexes. Die Dimension ist die Mächtigkeit der Menge der Äquivalenzklassen (oder Orbits) von \mathbb{F}_n modulo \mathbb{S}_n . $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n) \subseteq \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$ ist im Allgemeinen keine abgeschlossene Fläche. Zu den Orbits später mehr. ∇

Lemma 3.2.6. *Es gelten folgende Aussagen*

1. Für alle $1 \leq k \leq n$ und $P \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$ ist $\text{pr}_k^n(P) \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_k)$.

2. Für jedes $P \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ und jedes $n \geq 1$ ist $\text{pr}_n(P) \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$.
3. Zu jeder Folge $(P_n)_{n \geq 1}$ mit $P_n \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$ für alle $n \geq 1$ und $\text{pr}_k^n(P_n) = P_k$ für alle $1 \leq k \leq n$ existiert ein eindeutiges $P \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ mit $P_n = \text{pr}_n(P)$ für alle $n \geq 1$.

In Symbolen zusammengefasst:

$$\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_1) \xleftarrow{\text{pr}_1^2} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_2) \xleftarrow{\text{pr}_2^3} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_3) \xleftarrow{\text{pr}_3^4} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_4) \xleftarrow{\text{pr}_4^5} \dots \xleftarrow{\text{pr}_n} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty).$$

Beweis. Zu 1: Es sei $1 \leq k \leq n$ und $X \in \mathbb{F}_n$ habe symmetrische Verteilung $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$. Es sei $\pi \in \mathbb{S}_k$ eine beliebige Permutation und $\pi^* \in \mathbb{S}_n$ die Fortsetzung von π durch $\pi^*(i) := i$ für $k < i \leq n$. Dann gilt mit der Konsistenzeigenschaft und weil X eine symmetrische Verteilung hat

$$\pi \cdot \text{pr}_k^n(X) = \text{pr}_k^n(\pi^* \cdot X) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \text{pr}_k^n(X).$$

Also hat auch $\text{pr}_k^n(X)$ eine symmetrische Verteilung.

Zu 2: Es sei $X_\infty \in \mathbb{F}_\infty$ mit symmetrischer Verteilung in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$. Wie eben setzt man eine beliebige Permutation $\pi \in \mathbb{S}_n$ durch die Identität zu einer Permutation $\pi^* \in \mathbb{S}_\infty$ fort und erhält mit der Konsistenzeigenschaft wieder direkt $\pi \cdot \text{pr}_n(X_\infty) = \text{pr}_n(\pi^* \cdot X_\infty) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \text{pr}_n(X_\infty)$.

Zu 3: Die Existenz eines eindeutigen P liefert der Kolmogorovsche Erweiterungssatz. Man muss nur begründen, dass dieses P symmetrisch, also Element von $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ ist. Dazu sei $X_\infty \in \mathbb{F}_\infty$ mit Verteilung P . Es sei $\pi \in \mathbb{S}_\infty$. Da π eine endliche Permutation ist, gibt es ein n und ein $\sigma \in \mathbb{S}_n$, sodass $\sigma = \pi|_{[n]}$ und $\pi(i) = i$ für alle $i > n$ ist. Mit der Konsistenzeigenschaft folgt nun

$$\text{pr}_n(\pi \cdot X_\infty) = \sigma \cdot \text{pr}_n(X_\infty) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \text{pr}_n(X_\infty).$$

Damit gilt für jede Permutation $\pi \in \mathbb{S}_\infty$ und für alle hinreichend großen n schließlich $\text{pr}_n(\pi \cdot X_\infty) \sim \text{pr}_n(X_\infty)$. Da die Verteilung von X_∞ über die Verteilungen von $\text{pr}_n(X_\infty)$ für hinreichend große n bestimmt ist, ist die Verteilung von X_∞ symmetrisch. \square

3.2.1. Markovketten und Isomorphismen von Simplizes

Definition 3.2.7. Für $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{F}_n$ sei $[x] := \{\pi \cdot x : \pi \in \mathbb{S}_n\}$ der *Orbit* von x unter \mathbb{S}_n , $[x]$ wird auch die zu x gehörige *Äquivalenzklasse* genannt. Es sei $[\mathbb{F}_n] := \{[x] : x \in \mathbb{F}_n\}$ die Menge der Orbits zu den Objekten der Größe n .

Bemerkung 3.2.8. Die Simplizes $\mathcal{M}_1([\mathbb{F}_n])$ und $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$ sind isomorph. Der kanonische Isomorphismus bildet ein Einpunktmaß $\delta_{[x]} \in \text{ex}(\mathcal{M}_1([\mathbb{F}_n]))$ auf $\text{unif}([x]) \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n))$ ab. ∇

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass ein Simplex der Form $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ auf kanonische Weise mit zwei anderen Formen von Simplizes identifiziert werden kann:

1. Über die Simplizes der zentralen Maße $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ bzw. den zugehörigen Simplex der unmarkierten Versionen $\mathcal{M}_1(\gamma)$ für das homogen markierte Bratellidiagramm aus

Abschnitt 3.1.5. Die unmarkierten Versionen beschreiben dann Verteilungen von Markovketten wachsender Strukturen $(X_n)_{n \geq 1}$ mit $X_n \in \mathbb{F}_n$, welche im Allgemeinen nicht mehr projektiv sind, aber dieselben Randverteilungen wie austauschbare projektive Objekte besitzen (gemeint ist die Verteilung von $\text{pr}_n(X_\infty)$). Die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten γ liefern später im Beispiel von Graphen die bekannten Konvergenzbegriffe von Lovasz et al. für dichte Graphen (siehe [Lov12], mehr dazu in Kapitel 6). Diese Verbindung wurde bereits in [Grü15] (in der Sprache der Doob-Martin-Theorie, siehe Bemerkung 1.6.14) dargestellt.

2. Übergänge zu Orbits: Ist $\mathbb{P}^{X_\infty} \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$, so ist $([\text{pr}_n(X_\infty)])_{n \geq 1}$ eine Markovkette und die Menge der so erhaltenen Verteilungen ist von der Form $\mathcal{M}_1(\tau)$ für ein System von Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten τ auf dem Orbit-Pfadraum $[\mathbb{F}_1] \times [\mathbb{F}_2] \times [\mathbb{F}_3] \times \dots$. Im Kontext von $\mathbf{Word}(\Sigma)$ sind Orbits von Wörtern Besetzungsvektoren von Urnen. Auch hier kann man Bratellidiagramme konstruieren, die Markierung ist allerdings nicht kanonisch. Im Sinne von S. Lauritzen wird hierdurch ein Übergang zu Werten einer suffizienten Statistik beschrieben. Einen allgemeinen Rahmen hierfür findet man in [Lau88].

Das kanonische zu \mathbf{F} gehörende HMB ist das Tupel $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ mit $\mathbb{F}_n := \mathbb{F}([n])$, $\mathbb{A}_n := \mathbb{S}_n$ und

$$\Lambda_{n-1}^n(x, \pi) : \mathbb{F}_n \times \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{F}_{n-1}, (x, \pi) \mapsto \text{pr}_{n-1}^n(\pi \cdot x),$$

wie bereits in Abschnitt 3.1.5, (3.2) eingeführt.

Beispiel 3.2.9. Für das System $\mathbf{Word}(\Sigma)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$ werden in Abbildung 3.2 die ersten 4 Ebenen des zugehörigen Bratellidiagramms wiedergegeben. Die Knoten der n -ten Ebene entsprechen dabei den Wörtern über $\{a, b\}$ mit Länge n , es befinden sich also jeweils 2, 4, 8, 16 Knoten in den Ebenen. Innerhalb einer Ebene werden die Wörter gemäß lexikographischer Anordnung und die Kanten $(\Lambda_{n-1}^n(x, \pi), x)$ ohne Markierung, aber gemäß Multiplizität, gezeichnet. \triangleleft

Wie bereits angekündigt werden die zentralen Prozessverteilungen $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ und die zugehörigen unmarkierten Versionen $\mathcal{M}_1(\gamma)$ genauer betrachtet. Die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten γ auf $\text{Path}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \dots$ sind also von der Gestalt

$$\gamma_{n-1}^n(x, y) = \frac{1}{n!} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_{n-1}^n(\pi \cdot y) = x\}.$$

Oder anders ausgedrückt: Ist $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ eine gleichverteilte Permutation, so ist

$$\gamma_{n-1}^n(\cdot, y) = \mathcal{L}(\text{pr}_{n-1}^n(S_n \cdot y)).$$

Wie zuvor seien $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ die Verteilungen von zentralen Prozessen: Ein Prozess $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit $(X_n, S_n) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{S}_n$ heißt hier zentral, wenn

1. $\Lambda_{n-1}^n(X_n, S_n) = \text{pr}_{n-1}^n(S_n \cdot X_n) = X_{n-1}$ fast sicher für alle $n \geq 2$,
2. S_1, S_2, \dots sind unabhängig und $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ für alle $n \geq 1$,

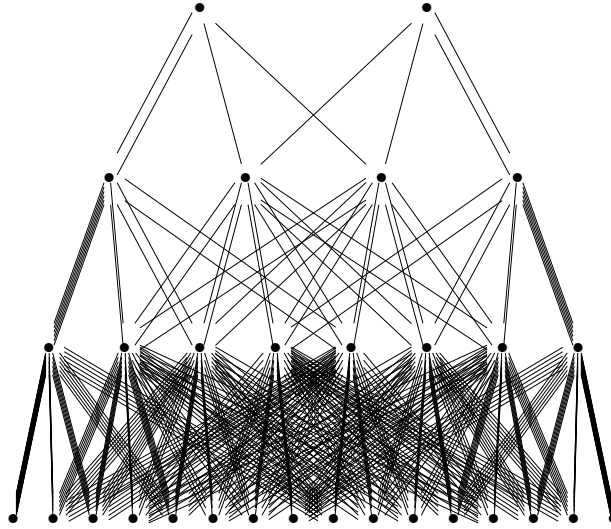


Abb. 3.2.: Die Knoten der n -ten Ebene entsprechen den Wörtern $\{a, b\}^n$ und in die Ebene $n - 1$ gehen jeweils $n!$ Kanten ab.

3. (S_1, \dots, S_n) und X_n sind unabhängig für alle $n \geq 1$

gilt. Mithilfe der Konsistenzeigenschaft lassen sich dann auch die Mehr-Schritt-Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten γ_k^n leicht darstellen:

Lemma 3.2.10. *Es sei $1 \leq k < n$ und $x \in \mathbb{F}_k$ und $y \in \mathbb{F}_n$. Dann gilt*

$$\gamma_k^n(x, y) = \frac{\#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi \cdot y) = x\}}{n!}.$$

Anders ausgedrückt: Ist $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ eine gleichverteilte Permutation, so gilt

$$\gamma_k^n(\cdot, y) = \mathcal{L}(\text{pr}_k^n(S_n \cdot y)).$$

Beweis. Es sei $\tilde{\gamma}_k^n(x, y) := (n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi \cdot y) = x\}$. Zu zeigen ist $\gamma_k^n(x, y) = \tilde{\gamma}_k^n(x, y)$. Per Definition gilt $\gamma_{n-1}^n(x, y) = \tilde{\gamma}_{n-1}^n(x, y)$ für alle $n \geq 2$ und $x \in \mathbb{F}_{n-1}, y \in \mathbb{F}_n$. Ferner erfüllt γ_k^n als System von Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen

$$\sum_{z \in \mathbb{F}_m} \gamma_k^m(x, z) \gamma_m^n(z, y) = \gamma_k^n(x, y) \text{ für alle } 1 \leq k \leq m \leq n, x \in \mathbb{F}_k, y \in \mathbb{F}_n.$$

Damit genügt es zu zeigen, dass auch $\tilde{\gamma}$ diese Chapman-Kolmogorov-Gleichungen erfüllen. Es seien $1 \leq k < m < n$ und $S_m \sim \text{unif}(\mathbb{S}_m)$ und $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ seien unabhängig. Es sei $\iota_m^n(S_m)$ die Fortsetzung von S_m auf $[n]$ durch die Identität. Damit erhält man für $x \in \mathbb{F}_k, z \in \mathbb{F}_m, y \in \mathbb{F}_n$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_k^m(x, z) \tilde{\gamma}_m^n(z, y) &= \mathbb{P}(\text{pr}_k^m(S_m \cdot z) = x) \mathbb{P}(\text{pr}_m^n(S_n \cdot y) = z) \\ &= \mathbb{P}(\text{pr}_k^m(S_m \cdot z) = x, \text{pr}_m^n(S_n \cdot y) = z) \\ &= \mathbb{P}(\text{pr}_k^m(S_m \cdot \text{pr}_m^n(S_n \cdot y)) = x, \text{pr}_m^n(S_n \cdot y) = z) \\ &= \mathbb{P}(\text{pr}_k^n((\iota_m^n(S_m) \cdot S_n) \cdot y) = x, \text{pr}_m^n(S_n \cdot y) = z), \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichheit die Unabhängigkeit und in der vierten Gleichheit die Konsistenzeigenschaft verwendet wurde. Da S_m, S_n unabhängig und $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ ist auch $\iota_m^n(S_m) \cdot S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$. Summiert man obige Gleichheit nun über $z \in \mathbb{F}_m$, so ergibt sich

$$\sum_{z \in \mathbb{F}_m} \tilde{\gamma}_k^m(x, z) \tilde{\gamma}_m^n(z, y) = \mathbb{P}(\text{pr}_k^n((\iota_m^n(S_m) \cdot S_n) \cdot y) = x) = \tilde{\gamma}_k^n(x, y). \quad \square$$

Man vergleiche die nachfolgende Aussage und den Beweis auch mit Satz 2.4.2.

Satz 3.2.11. *Es sei X_∞ eine Zufallsgröße mit Verteilung in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$. Ferner sei $S = (S_n)_{n \geq 1}$ ein von X_∞ unabhängiger Prozess von unabhängigen Permutationen mit $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ für alle $n \geq 1$. Es sei*

$$X_n := S_n^{-1} S_{n-1}^{-1} \dots S_1^{-1} \cdot \text{pr}_n(X_\infty),$$

wobei Permutationen $\sigma \in \mathbb{S}_k$ für $1 \leq k \leq n$ stets durch die Identität zu Permutationen von $[n]$ fortgesetzt werden, falls der Kontext das verlangt. Dann ist $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ ein zentraler Prozess und die so erhaltene Zuordnung $g: \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty) \rightarrow \mathcal{M}_1(\Lambda)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Der Prozess $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ ist ein Pfad im HMB aus 3.1.5, (3.2):

$$\begin{aligned} \Lambda_{n-1}^n(X_n, S_n) &= \text{pr}_{n-1}^n(S_n \cdot X_n) \\ &= \text{pr}_{n-1}^n(S_n \cdot (S_n^{-1} S_{n-1}^{-1} \dots S_1^{-1} \text{pr}_n(X_\infty))) \\ &= \text{pr}_{n-1}^n(S_{n-1}^{-1} \dots S_1^{-1} \text{pr}_n(X_\infty)) \\ &= S_n^{-1} \dots S_1^{-1} \text{pr}_{n-1}^n(\text{pr}_n(X_\infty)) \\ &= X_{n-1}, \end{aligned}$$

wobei in der vierten Gleichung die Konsistenzeigenschaft benutzt wurde. Als nächstes ist zu begründen, dass (S_1, \dots, S_n) und X_n unabhängig sind. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) = (\pi_1, \dots, \pi_n), X_n = x) \\ &= \mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) = (\pi_1, \dots, \pi_n), \pi_n^{-1} \dots \pi_1^{-1} \cdot \text{pr}_n(X_\infty) = x) \\ &= \mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) = (\pi_1, \dots, \pi_n)) \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x), \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichheit die Austauschbarkeit von $\text{pr}_n(X_\infty)$ benutzt wurde. Es ist $S_n^{-1} \dots S_1^{-1} \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ unabhängig von $\text{pr}_n(X_\infty)$ und wieder mit der Austauschbarkeit erhält man damit $X_n \sim \text{pr}_n(X_\infty)$. Damit folgt insgesamt:

1. $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ ist ein zentraler Prozess.
2. Die betrachtete Zuordnung ist stetig, affin und injektiv.

Bleibt nur die Surjektivität zu zeigen. Begründet werden muss, dass es zu jeder Markovkette $X = (X_n)_{n \geq 1}$ mit Verteilung in $\mathcal{M}_1(\gamma)$ eine Zufallsvariable X_∞ mit Verteilung in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ und $\text{pr}_n(X_\infty) \sim X_n$ für alle $n \geq 1$ gibt. Dazu bemerkt man zunächst, dass die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten $\gamma_k^n(x_k, x_n)$ über x_k und x_n nur von den Orbits abhängen, für alle $1 \leq k < n$ und $\sigma \in \mathbb{S}_k, \pi \in \mathbb{S}_n$ gilt $\gamma_k^n(\sigma x_k, \pi x_n) =$

$\gamma_k^n(x_k, x_n)$. Ist $X = (X_n)_{n \geq 1}$ eine Markovkette mit Rückwärtsdynamik γ , so folgt damit sofort $\pi \cdot X_n \sim X_n$ für alle $n \geq 1$. Ist nun $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ unabhängig von X_n , so liefert dies $X_{n-1} \sim \text{pr}_{n-1}^n(S_n \cdot X_n) \sim \text{pr}_{n-1}^n(X_n)$, also folgt die Behauptung aus Lemma 3.2.6. \square

Bemerkung 3.2.12. Satz 3.2.11 gibt einen *natürlichen Isomorphismus* der Funktoren $L, R: \mathbf{KS} \rightarrow \mathbf{Simplex}$ aus Bemerkung 3.1.19. Für das konsistente System $\mathbf{F} = (\mathbb{F}, \text{pr}, \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{F})$ sei $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbf{F}) := \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty) = L(\mathbf{F})$ und $\mathcal{M}_1(\mathbf{F}, \gamma) := \mathcal{M}_1(\gamma) = R(\mathbf{F})$. Es sei g^* die Verknüpfung von g (Satz 3.2.11) mit dem kanonischen Isomorphismus von $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ und $\mathcal{M}_1(\gamma)$ (Übergang von markierter zu unmarkierter Version). Damit sei nun

$$\eta_{\mathbf{F}} := g^* : \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbf{F}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathbf{F}, \gamma).$$

Die Kollektion η ist der behauptete natürlicher Isomorphismus der Funktoren L und R , das bedeutet: Für alle \mathbf{F} ist $\eta_{\mathbf{F}}$ ein Isomorphismus und η ist eine *natürliche Transformation*: Es sei \mathbf{G} ein weiteres konsistentes System und $f: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ ein Morphismus. Die Funktoren L und R liefern jeweils die Morphismen $L(f)$ und $R(f)$ wie in Bemerkung 3.1.19 beschrieben. Damit gilt hier tatsächlich $\eta_{\mathbf{F}} \circ L(f) = R(f) \circ \eta_{\mathbf{F}}$ für alle Objekte \mathbf{F} und alle Morphismen $f: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$. ∇

Satz 3.2.13. *Es seien $X_\infty, S_1, S_2, \dots$ wie in Satz 3.2.11 und $X_n := S_n^{-1} \cdots S_1^{-1} \cdot \text{pr}_n(X_\infty)$. Es sei $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty)$ die bzgl. X_∞ invariante σ -Algebra und $\mathcal{G}_\infty(X)$ die bzgl. $X = (X_n)_{n \geq 1}$ terminale σ -Algebra. Dann gilt $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty(X)$.*

Beweis. Nach Satz 3.2.2 wird $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty)$ von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} 1(\text{pr}_k^n(\pi \cdot \text{pr}_n(X_\infty)) = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^n(x, \text{pr}_n(X_\infty)) = \mathbb{P}(\text{pr}_k(X_\infty) = x | \mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty))$$

über $k \geq 1, x \in \mathbb{F}_k$ erzeugt. Analog wird $\mathcal{G}_\infty(X)$ von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^n(x, S_n^{-1} \cdots S_1^{-1} \cdot \text{pr}_n(X_\infty))$$

über $k \geq 1, x \in \mathbb{F}_k$ erzeugt. Nun hängt γ_k^n von seinen Argumenten nur über deren Äquivalenzklassen ab und damit ist

$$\gamma_k^n(x, \text{pr}_n(X_\infty)) = \gamma_k^n(x, X_n)$$

für alle $1 \leq k \leq n, x \in \mathbb{F}_k$. Damit folgt die Behauptung. \square

Symbolisch kann man $\mathcal{M}_1(\gamma)$ als projektiven Limes auffassen:

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_1) \xleftarrow{\gamma_1^2} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_2) \xleftarrow{\gamma_2^3} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_3) \xleftarrow{\gamma_3^4} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_4) \xleftarrow{\gamma_4^5} \dots \xleftarrow{\mathbb{P}^X \mapsto \mathbb{P}^{X_n}} \mathcal{M}_1(\gamma).$$

Der Beweis hat gezeigt, dass man für die Approximation von $\mathcal{M}_1(\gamma)$ auch $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$ statt $\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_n)$ verwenden kann, symbolisch:

$$\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_1) \xleftarrow{\gamma_1^2} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_2) \xleftarrow{\gamma_2^3} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_3) \xleftarrow{\gamma_3^4} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_4) \xleftarrow{\gamma_4^5} \dots \xleftarrow{\mathbb{P}^X \mapsto \mathbb{P}^{X_n}} \mathcal{M}_1(\gamma).$$

Satz 3.2.14. *In der Situation von Satz 3.2.11 ist die Verteilung eines extremalen zentralen Prozesses $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ genau dann stark, wenn $(X_n)_{n \geq 1}$ degeneriert, also fast sicher konstant ist.*

Beweis. Es sei $\Gamma_k^n(\cdot) := \Lambda_k^n(\cdot, S_{k+1}, S_{k+2}, \dots, S_n)$. Die Konsistenzeigenschaft liefert

$$\Gamma_k^n(x) = \text{pr}_k^n(S_{k+1} \cdot S_{k+2} \cdot \dots \cdot S_n \cdot x),$$

wobei jedes S_k mit $k < n$ durch die Identität auf \mathbb{S}_n fortgesetzt wird. Für $n \geq k + 1$ sei $R_n := S_{k+1} \cdot S_{k+2} \cdot \dots \cdot S_n$. Damit ist Γ_k^n also eine Funktion von R_n . Da S_k, S_{k+1}, \dots alle unabhängig und $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ für alle n ist auch die Folge R_{k+1}, R_{k+2}, \dots unabhängig. Mit dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov folgt $\bigcap_{n>k} \sigma(\Gamma_k^n, \Gamma_k^{n+1}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \{\emptyset, \Omega\}$. Damit folgt die Behauptung des Satzes aus der Äquivalenz $1a \Leftrightarrow 2$ in Satz 2.2.7. \square

Lemma 3.2.15. *Für alle $1 \leq k < n$ und $x_k \in \mathbb{F}_k, x_n \in \mathbb{F}_n$ hängt der Wert von $\gamma_k^n(x_k, x_n)$ von x_k und x_n nur über $[x_k]$ und $[x_n]$ ab. Es sei*

$$\tau_k^n([x_k], [x_n]) := \frac{\#[x_k] \cdot \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi \cdot x_n) = x_k\}}{n!} = \#[x_k] \cdot \gamma_k^n(x_k, x_n).$$

Es sei $\tau_n^n([y_n], [x_n]) := 1([x_n] = [y_n])$. Für jedes $[x_n] \in [\mathbb{F}_n]$ ist $\tau_k^n(\cdot, [x_n])$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[\mathbb{F}_k]$ und das System $\tau = (\tau_k^n, 1 \leq k \leq n)$ erfüllt die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen.

Beweis. Da $\pi \mapsto \pi \cdot \sigma$ eine Bijektion von \mathbb{S}_n nach \mathbb{S}_n ist, hängt $\gamma_k^n(x_k, x_n)$ im zweiten Argument nur von $[x_n]$ ab. Zusammen mit der Konsistenzeigenschaft folgt damit ebenso, dass $\gamma_k^n(x_k, x_n)$ auch im ersten Argument nur von $[x_k]$ abhängt. Damit ist $x \mapsto [x]$ eine starke Markov-Funktion und damit folgt der Rest der Behauptung. Details hierzu findet man in [Hag16]. \square

Damit liegt nun also ein weiterer EGG $([\mathbb{F}], \tau)$ vor, wobei nun $\mathcal{M}_1(\tau)$ aus Verteilungen von Markovketten $Z = (Z_1, Z_2, Z_3, \dots)$ mit $Z_n \in [\mathbb{F}_n]$ für alle $n \geq 1$ und Rückwärtsdynamik τ besteht. Symbolisch hat man wieder:

$$\mathcal{M}_1([\mathbb{F}_1]) \xleftarrow{\tau_1^2} \mathcal{M}_1([\mathbb{F}_2]) \xleftarrow{\tau_2^3} \mathcal{M}_1([\mathbb{F}_3]) \xleftarrow{\tau_3^4} \mathcal{M}_1([\mathbb{F}_4]) \xleftarrow{\tau_4^5} \dots \xleftarrow{\mathbb{P}^Z \mapsto \mathbb{P}^{Z_n}} \mathcal{M}_1(\tau).$$

Es überrascht nicht, dass auch $\mathcal{M}_1(\tau)$ isomorph ist zu $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ bzw. $\mathcal{M}_1(\gamma)$:

Satz 3.2.16. *Es sei $\mathbb{P}^{X_\infty} \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ und für jedes $n \geq 1$ sei $X_n := \text{pr}_n(X_\infty)$. Dann ist der Prozess $([X_n])_{n \geq 1}$ eine Markovkette mit Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten τ . Die so konstruierte Zuordnung $\mathcal{L}(X_\infty) \mapsto \mathcal{L}([X_n])_{n \geq 1}$ ist ein affiner Homöomorphismus zwischen $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ und $\mathcal{M}_1(\tau)$.*

Beweis. Es ist $[\text{pr}_n(X_\infty)] = [S_n^{-1} \cdot S_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot S_1^{-1} \cdot \text{pr}_n(X_\infty)]$, damit ist für jede austauschbare X_∞ der Prozess $([\text{pr}_n(X_\infty)])_{n \geq 1}$ eine Markovkette mit Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten τ , wegen Satz 3.2.11 und Lemma 3.2.15. Die Zuordnung ist offenbar affin und stetig. Die Verteilung eines austauschbaren Objektes $X_n \in \mathbb{F}_n$ ist eindeutig durch die Verteilung von $[X_n]$ determiniert, damit ist die Zuordnung injektiv. Die Zuordnung ist surjektiv: Ist $(Z_n)_{n \geq 1}$ eine Markovkette mit Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten τ , so definiert man $P_n : \mathbb{F}_n \rightarrow [0, 1]$ durch $P_n(x) := \mathbb{P}(Z_n = [x]) / \#[x]$. Es ist P_n offensichtlich Element von $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_n)$ und man erhält direkt, dass $P_{n-1} = \gamma_{n-1}^n P_n$ gilt. Damit folgt die Surjektivität aus Satz 3.2.11. \square

Die Zusammenfassung bis hierhin: Die drei Simplizes

1. Austauschbare Verteilungen auf \mathbb{F}_∞ :

$$\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_1) \xleftarrow{\text{pr}_1^2} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_2) \xleftarrow{\text{pr}_2^3} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_3) \xleftarrow{\text{pr}_3^4} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_4) \xleftarrow{\text{pr}_4^5} \dots \xleftarrow{\text{pr}_n} \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty).$$

2. Verteilungen von Markovketten auf $\text{Path}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_3 \times \dots$ mit Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten γ :

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_1) \xleftarrow{\gamma_1^2} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_2) \xleftarrow{\gamma_2^3} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_3) \xleftarrow{\gamma_3^4} \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_4) \xleftarrow{\gamma_4^5} \dots \xleftarrow{\mathbb{P}^X \mapsto \mathbb{P}^{X_n}} \mathcal{M}_1(\gamma).$$

3. Verteilungen von Markovketten auf $[\mathbb{F}_1] \times [\mathbb{F}_2] \times [\mathbb{F}_3] \times \dots$ mit Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten τ :

$$\mathcal{M}_1([\mathbb{F}_1]) \xleftarrow{\tau_1^2} \mathcal{M}_1([\mathbb{F}_2]) \xleftarrow{\tau_2^3} \mathcal{M}_1([\mathbb{F}_3]) \xleftarrow{\tau_3^4} \mathcal{M}_1([\mathbb{F}_4]) \xleftarrow{\tau_4^5} \dots \xleftarrow{\mathbb{P}^Z \mapsto \mathbb{P}^{Z_n}} \mathcal{M}_1(\tau).$$

sind isomorph. Nun wird gezeigt, dass das oben konstruierte HMB in einem gewissen Sinne einige die Beschreibung der Simplexstrukturen betreffende Redundanzen enthält.

Definition 3.2.17. Es sei $n \geq 1$, $E_1, E_2 \in \mathfrak{P}_n(\mathbb{N})$ und $x \in \mathbb{F}(E_1), y \in \mathbb{F}(E_2)$.

1. Es sei $\text{Aut}(x, y) := \{\pi \in \mathbb{S}(E_1, E_2) : \pi.x = y\}$ und $\text{Aut}(x) := \text{Aut}(x, x)$.
2. Es wird $x \simeq y$ geschrieben, falls $\text{Aut}(x, y) \neq \emptyset$.
3. Es sei $[x] := \{z \in \mathbb{F}(E_1) : z \sim y\} = \{\pi.x : \pi \in \mathbb{S}(E_1, E_1)\}$ und es sei $[\mathbb{F}(E_1)] := \{[x] : x \in \mathbb{F}(E_1)\}$.

Speziell für $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{F}_n$ sind $[x]$ und $[\mathbb{F}_n]$ also wie in Definition 3.2.7 erklärt.

Bemerkung 3.2.18. Man bemerke, dass mit der hier gewählten Schreibweise $[x]$ im Allgemeinen *nicht* mit $\{y : y \simeq x\}$ übereinstimmt, letztere Menge enthält in der Regel unendlich viele Elemente. ∇

Lemma 3.2.19. Für $1 \leq k \leq n$ sei $(k : n) := \mathfrak{P}_k([n])$ die Menge der k -elementigen Teilmengen von $[n] = \{1, \dots, n\}$.

1. Für alle $k \geq 1$ und $x \in \mathbb{F}_k$ gilt $\#[x] \cdot \#\text{Aut}(x) = k!$.
2. Es seien $E_1, E_2 \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $0 < |E_1| = |E_2|$ und $x \in \mathbb{F}(E_1), y \in \mathbb{F}(E_2)$. Gilt $\text{Aut}(x, y) \neq \emptyset$, so gilt $\#\text{Aut}(x, x) = \#\text{Aut}(y, y) = \#\text{Aut}(x, y)$.
3. Für $1 \leq k \leq n, x_k \in \mathbb{F}_k, x_n \in \mathbb{F}_n$ gilt

$$\#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi.x_n) = x_k\} = (n - k)! \cdot \#\text{Aut}(x_k) \cdot \#\{A \in (k : n) : \text{pr}_A^n(x_n) \simeq x_k\}.$$

4. Für $1 \leq k < n$ und $x_k \in \mathbb{F}_k, x_n \in \mathbb{F}_n$ gilt

$$\gamma_k^n(x_k, x_n) = \frac{\#\text{Aut}(x_k)}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \#\{A \in (k : n) : \text{pr}_A^n(x_n) \simeq x_k\}.$$

und

$$\tau_k^n([x_k], [x_n]) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \#\{A \in (k : n) : \text{pr}_A^n(x_n) \simeq x_k\}$$

Beweis. 1: Das ist die Bahnformel.

2: Es sei $\text{Aut}(x, y) \neq \emptyset$. Man fixiere $\pi \in \text{Aut}(x, y)$. Für jedes $\sigma \in \text{Aut}(x, y)$ ist dann $\sigma^{-1} \cdot \pi \cdot x = \sigma^{-1} \cdot y = x$. Die Zuordnung $\text{Aut}(x, y) \rightarrow \text{Aut}(x, x), \sigma \mapsto \sigma^{-1} \cdot \pi$ ist offenbar injektiv und auch surjektiv, denn für $\sigma^* \in \text{Aut}(x, x)$ ist $\sigma^* = (\pi \cdot \sigma^*)^{-1} \cdot \pi$ und $\pi \cdot \sigma^* \in \text{Aut}(x, y)$. Damit folgt $\#\text{Aut}(x, y) = \#\text{Aut}(x, x)$.

3: Über die Konsistenzeigenschaft wird die Menge disjunkt zerlegt, in der letzten Gleichheit wird 2. verwendet.

$$\begin{aligned}
\#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi \cdot x_n) = x_k\} &= \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \pi|_{\pi^{-1}([k])} \cdot \text{pr}_{\pi^{-1}([k])}^n(x_n) = x_k\} \\
&= \sum_{\substack{A \in (k:n) \\ \text{pr}_A^n(x_n) \simeq x_k}} (n-k)! \cdot \#\{\sigma \in \mathbb{S}(A, [k]) : \sigma \cdot \text{pr}_A^n(x_n) = x_k\} \\
&= (n-k)! \cdot \sum_{\substack{A \in (k:n) \\ \text{pr}_A^n(x_n) \simeq x_k}} \#\text{Aut}(\text{pr}_A^n(x_n), x_k) \\
&= (n-k)! \cdot \#\text{Aut}(x_k) \cdot \#\{A \in (k:n) : \text{pr}_A^n(x_n) \simeq x_k\}.
\end{aligned}$$

4: Der erste Teil folgt direkt aus 3. und die Gleichung für τ folgt dann daraus zusammen mit 1. \square

Damit kann man ausgehend von einem konsistenten System \mathbf{F} ein weiteres homogenes Bratellidiagramm konstruieren, welches auf die Rückwärtsdynamik τ führt: Die Knoten der n -ten Ebene sind durch die Menge $[\mathbb{F}_n]$ gegeben. Zwischen den Knoten $[x_{n-1}]$ und $[x_n]$ der Ebenen $n-1$ und n werden $\#\{j \in [n] : \text{pr}_{[n] \setminus \{j\}}^n(x_n) = x_{n-1}\}$ Kanten gezeichnet. Insbesondere gehen von jedem Knoten der n -ten Ebene nun genau n Kanten in die Ebene $n-1$. Wählt man aus jeder Äquivalenzklasse einen Vertreter aus, so kann man diese Kanten homogen durch $[n]$ markieren, indem man eine Kante der Form $([\text{pr}_{[n] \setminus \{j\}}^n(x_n)], x_n)$ durch $j \in [n]$ markiert. Die so konstruierte Markierung der Diagramme hängt von der Wahl der Vertreter ab.

Beispiel 3.2.20. Für $\Sigma = \{a, b\}$ kann $[\Sigma^n]$ mit der Menge $\{(0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)\}$ identifiziert werden. Tatsächlich kann man auf leichte Weise kanonische Vertreter auswählen: $a^k b^{n-k}$. Das wie oben beschriebene HMB ist nun genau der Pascalgraph aus Abbildung 2.2. \triangleleft

Beispiel 3.2.21. Das Beispiel des konsistenten Systems der Wörter $\mathbf{Word}(\Sigma)$. Der Simplex $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^{\mathbb{N}})$ ist in diesem Beispiel die Menge aller Verteilungen austauschbarer Σ -wertiger Prozesse. Für ein Wort $w = (w_1, \dots, w_n) \in \Sigma^n$ kann der Orbit $[w]$ von w unter \mathbb{S}_n eindeutig durch den Besetzungsvektor des Wortes beschrieben werden. Dieser ist im empirischen Maß $\mu_w := \sum_{j=1}^n \delta_{w_j}$ kodiert. Für alle $w, v \in \mathbb{F}_n$ gilt also $[w] = [v] \Leftrightarrow \mu_w = \mu_v$. Insbesondere ist also μ_w ein Maß auf Σ mit $\mu_w(\Sigma) = n$ und $\mu_w(a) = \#\{j \in [n] : w_j = a\}$ für alle $a \in \Sigma$. Über Punkt 4. in Lemma 3.2.19 erhält man sofort die bekannte explizite Darstellung für τ : Setzt man den Binomialkoeffizienten $\binom{h}{i}$ für $i > h$ als 0, so erhält man für alle $1 \leq k \leq n$, $v \in \Sigma^k$ und $w \in \Sigma^n$

$$\tau_k^n(\mu_v, \mu_w) = \frac{\prod_{a \in \Sigma} \binom{\mu_w(a)}{\mu_v(a)}}{\binom{n}{k}}.$$

Insbesondere ist $\tau_k^n(\cdot, \delta_w)$ also eine multivariate hypergeometrische Verteilung. Algorithmisch ausgedrückt: Man stellt sich μ_w als Besetzung einer Urne vor. Dabei nimmt Σ die Rolle der Farben ein und die Urne hat Besetzung μ_w wenn sie insgesamt $\mu_w(\Sigma)$ Kugeln enthält, von denen genau $\mu_w(a)$ Kugeln die Farbe $a \in \Sigma$ haben. Die Verteilung $\tau_k^n(\cdot, \mu_w)$ auf den möglichen Besetzungen vom Umfang k wird nun wie folgt erhalten: Iterativ wird eine Kugel aus der Urne mit Besetzung δ_w gleichverteilt ausgewählt und entfernt. Dieses wiederholt man $n - k$ -mal. Die verbleibende Besetzung der Urne hat Umfang k und Verteilung $\tau_k^n(\cdot, \mu_w)$.

Die Sätze dieses Kapitels besagen nun: Jede Markovkette $Z = (Z_n)_{n \geq 1}$ wachsender Besetzungen einer Urne mit Rückwärtsdynamik τ entsteht in Verteilung eindeutig aus einem Σ -wertigen austauschbaren Prozess $Y = (Y_1, Y_2, \dots)$ via $Z_n = \sum_{j=1}^n \delta_{Y_j}$. Tatsächlich kann man in diesem Beispiel aus dem Prozess $Z = (Z_n)_{n \geq 1}$ eindeutig einen darstellenden austauschbaren Prozess Y rekonstruieren: Es ist $Z_1 = \delta_{Y_1}$ und $Z_{n+1} - Z_n = \delta_{Y_{n+1}}$ für alle $n \geq 1$. Dieses Phänomen tritt in vielen anderen Beispielen nicht auf: Beim Übergang von X_∞ zu $([\text{pr}_n(X_\infty)])_{n \geq 1}$ geht im Allgemeinen Information über X_∞ verloren.

Die Rückwärtsdynamik γ auf $\Sigma^1 \times \Sigma^2 \times \Sigma^3 \times \dots$ ist algorithmisch wie folgt erklärt: Liegt $w \in \mathbb{F}_n = \Sigma^n$ vor und ist $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$, so hat $\text{pr}_k^n(S_n \cdot w)$ Verteilung $\gamma_k^n(\cdot, w)$; zunächst werden die Einträge im Wort w also mit einer unabhängigen gleichverteilten Permutation permutiert und im Anschluss werden die letzten $n - k$ Buchstaben gelöscht. Ein Prozess $X = (X_1, X_2, \dots)$ mit Verteilung in $\mathcal{M}_1(\gamma)$ ist in diesem Beispiel dann eine Markovkette wachsender Wörter $X_n = (X_{n,1}, \dots, X_{n,n}) \in \Sigma^n$ mit oben beschriebener Rückwärtsdynamik. Für jeden solchen Prozess ist $([X_n])_{n \geq 1} = (\sum_{j=1}^n \delta_{X_{n,j}})_{n \geq 1}$ eine Markovkette mit Verteilung in $\mathcal{M}_1(\gamma)$ und diese Darstellungen sind eindeutig. Die in diesem Beispiel diskutierte Verbindung von Urnenprozessen und austauschbaren Prozessen findet man zum Beispiel auch in [GGH16]. Dort wird ein Beweis des Satzes von de Finetti basierend auf den Resultaten über EGGs in Verbindung mit Bemerkung 1.6.14 gegeben. \triangleleft

3.2.2. Limiten diskreter Strukturen (I), Unabhängigkeit, Bauersimplex

Es sei nun wie zuvor für $1 \leq k \leq n$ und $x_k \in \mathbb{F}_k, x_n \in \mathbb{F}_n$

$$\gamma_k^n(x_k, x_n) = \frac{1}{n!} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi \cdot x_n) = x_k\}.$$

Das Hauptresultat in diesem Kapitel ist Satz 3.2.23, welcher nicht nur besagt, dass der Martinrand im Equipped Graded Graph (\mathbb{F}, γ) mit den Extrempunkten übereinstimmt, sondern auch die Extremalität über Unabhängigkeitseigenschaften charakterisiert. Diese Aussagen sind in speziellen Fällen wohlbekannt und die Charakterisierung der Unabhängigkeit hinsichtlich der Darstellungsergebnisse von Aldous-Hoover-Kallenberg über austauschbare Arrays keine Überraschung. Dazu noch einmal kurz zum Begriff des Martinrandes: Eine Folge $\mathbf{y} = (y^n)_{n \geq 1}$ mit $y_n \in \mathbb{F}_{m_n}$ heißt γ -konvergent, falls $m_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und $\gamma_k^{m_n}(x, y_n)$ für alle $k \geq 1, x \in \mathbb{F}_k$ mit $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Jede γ -konvergente

Folge \mathbf{y} liefert damit für jedes $k \geq 1$ das Element $p_k^{\mathbf{y}} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_k)$ über

$$p_k^{\mathbf{y}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^{m_n}(x, y_n)$$

und diese erfüllen

$$p_k^{\mathbf{y}}(x_k) = \sum_{x_n \in \mathbb{F}_n} \gamma_k^n(x_k, x_n) p_n^{\mathbf{y}}(x_n)$$

für alle $1 \leq k \leq n$ und $x_k \in \mathbb{F}_k$. Damit existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $P_k^{\mathbf{y}}(x) \in \mathcal{M}_1(\gamma)$, welches die Verteilung einer Markovkette $X = (X_1, X_2, \dots)$ ist, die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten γ hat und $\mathcal{L}(X_k) = p_k^{\mathbf{y}}$ für alle $k \geq 1$ erfüllt. Es ist

$$\partial\mathcal{M}_1(\gamma) := \{P^{\mathbf{y}} : \mathbf{y} \text{ ist } \gamma\text{-konvergente Folge}\} \subseteq \mathcal{M}_1(\gamma)$$

der Martinrand (bzgl. γ). Aus der allgemeinen Theorie bekannt ist nun, dass $\partial\mathcal{M}_1(\gamma)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{M}_1(\gamma)$ ist, welche die Extrempunkte $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\gamma))$ umfasst (siehe Satz 1.6.6). Tatsächlich folgt in der hier vorgestellten Situation stets $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\gamma)) = \partial\mathcal{M}_1(\gamma)$ und damit insbesondere auch, dass $\mathcal{M}_1(\gamma)$ ein Bauersimplex ist. Das zeigt man mit folgender einfacher Aussage über große gleichverteilte Permutationen, welche im Wesentlichen besagt: *Ziehen von k aus N mit und ohne Zurücklegen ist beinahe gleich, wenn $k \ll N$ ist.*

Lemma 3.2.22. *Es seien $2 \leq k \leq n$ und $A, B \subseteq [k]$ nicht-leer mit $A \cap B = \emptyset$. Es seien $S, R \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ unabhängig. Es sei $D_n := \{S(A) \cap R(B) = \emptyset\}$. Dann gilt:*

1. $\mathcal{L}((S|_A, S|_B)) = \mathcal{L}((S|_A, R|_B)|D_n)$: Die gemeinsame Verteilung der beiden Einschränkungen von S auf A und B , gegeben durch $(S|_A, S|_B)$ stimmt überein mit der Verteilung, die man erhält, wenn man $S|_B$ durch eine von S unabhängige Kopie $R|_B$ ersetzt und dann darauf bedingt, dass die Bilder $S(A)$ und $R(B)$ disjunkt sind.
2. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D_n konvergiert mit $n \rightarrow \infty$ gegen 1.

Beweis. Es sei $a := |A|$ und $b := |B|$. Insbesondere gilt $a + b \leq k \leq n$. Sind $f : A \rightarrow [n]$ und $g : B \rightarrow [n]$ injektive Funktionen mit $f(A) \cap g(B) = \emptyset$, so gilt

$$\mathbb{P}(S|_A = f, S|_B = g) = \frac{(n - a - b)!}{n!}.$$

Ferner gilt

$$\mathbb{P}(D_n) = \frac{(n - a)!(n - b)!}{n!(n - a - b)!}.$$

Sind f, g wie oben, so ist $D_n \subseteq \{S|_A = f, R|_B = g\}$ und damit

$$\mathbb{P}(S|_A = f, R|_B = g|D_n) = \frac{\mathbb{P}(S|_A = f)\mathbb{P}(R|_B = g)}{\mathbb{P}(D_n)} = \frac{(n - a - b)!}{n!},$$

insgesamt folgt also die erste Behauptung. Die zweite Behauptung erhält man direkt aus

$$\mathbb{P}(D_n) = \frac{(n - b)}{n} \frac{(n - b - 1)}{n - 1} \frac{(n - b - 2)}{n - 2} \dots \frac{(n - b - a + 1)}{n - a + 1},$$

da a, b fest und $n \rightarrow \infty$ betrachtet wird. \square

Nun zum Hauptsatz:

Satz 3.2.23. *Es sei $X = (X_1, X_2, \dots)$ eine Markovkette mit Verteilung $\mathbb{P}^X \in \mathcal{M}_1(\gamma)$. Dann sind äquivalent*

1. $\mathbb{P}^X \in \partial\mathcal{M}_1(\gamma)$.
2. Für alle $k \geq 1$ und $A, B \subseteq [k]$ mit $A \cap B = \emptyset$ sind $\text{pr}_A^k(X_k)$ und $\text{pr}_B^k(X_k)$ unabhängig.
3. $\mathbb{P}^X \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\gamma))$.

Beweis. 1 \Rightarrow 2: Es sei $\mathbb{P}^X \in \partial\mathcal{M}_1(\gamma)$. Per Definition von $\partial\mathcal{M}_1(\gamma)$ gibt es eine γ -konvergente Folge $\mathbf{y} = (y_n)_{n \geq 1}$ mit $y_n \in \mathbb{F}_{m_n}$ und $m_n \rightarrow \infty$, sodass

$$\mathbb{P}(X_k = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^{m_n}(x, y_n)$$

für alle k und $x \in \mathbb{F}_k$ gilt. Wegen $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_{m_n})$ ist dies äquivalent zu

$$\mathcal{L}(\text{pr}_k^{m_n}(S_n \cdot y_n)) \rightarrow \mathcal{L}(X_k) \quad \text{mit } n \rightarrow \infty.$$

Nun seien $A, B \subseteq [k]$ disjunkt. Dann gilt für $x \in \mathbb{F}_A, y \in \mathbb{F}_B$ zunächst

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{pr}_A^k(X_k) = x, \text{pr}_B^k(X_k) = y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{pr}_A^k(\text{pr}_k^{m_n}(S_n \cdot y_n)) = x, \text{pr}_B^k(\text{pr}_k^{m_n}(S_n \cdot y_n)) = y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{pr}_A^{m_n}(S_n \cdot y_n) = x, \text{pr}_B^{m_n}(S_n \cdot y_n) = y). \end{aligned}$$

Es seien

$$E_1^n := \{\text{pr}_A^{m_n}(S_n \cdot y_n) = x\} \quad \text{und} \quad E_2^n := \{\text{pr}_B^{m_n}(S_n \cdot y_n) = y\}.$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_1^n) = \mathbb{P}(\text{pr}_A^k(X_k) = x) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_2^n) = \mathbb{P}(\text{pr}_B^k(X_k) = y).$$

Wegen der Konsistenzeigenschaft hängt der Wert von $\text{pr}_A^{m_n}(S_n \cdot y_n)$ über S_n nur von $(S_n^{-1})|_A$ ab. Analog hängt der Wert von $\text{pr}_B^{m_n}(S_n \cdot y_n)$ über S_n nur von $(S_n^{-1})|_B$ ab. Nun wird Lemma 3.2.22 verwendet: Es sei $R_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_{m_n})$ von S_n unabhängig. Man betrachte die Ereignisse

$$D_n := \{S_n^{-1}(A) \cap R_n^{-1}(B) = \emptyset\} \quad \text{und} \quad C_2^n := \{\text{pr}_B^{m_n}(R_n \cdot y_n) = y\}.$$

Damit gilt nun auch $\mathbb{P}(C_2^n) = \mathbb{P}(E_2^n) \rightarrow \mathbb{P}(\text{pr}_B^k(X_k) = y)$ und mit vorangegangenen Lemma neben $\mathbb{P}(D_n) \rightarrow 1$ auch

$$\mathcal{L}(((S_n^{-1})|_A, (S_n^{-1})|_B)) = \mathcal{L}(((S_n^{-1})|_A, (R_n^{-1})|_B)|D_n).$$

Damit folgt direkt

$$\mathbb{P}(E_1^n \cap E_2^n) = \mathbb{P}(E_1^n \cap C_2^n | D_n).$$

Nun sind E_1^n und C_2^n für alle n unabhängig und $\mathbb{P}(D_n) \rightarrow 1$, und man erhält schließlich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{pr}_A^k(X_n) = x, \text{pr}_B^k(X_n) = y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_1^n \cap E_2^n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_1^n \cap E_2^n | D_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_1^n \cap C_2^n | D_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_1^n \cap C_2^n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_1^n) \mathbb{P}(C_2^n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_1^n) \mathbb{P}(E_2^n) \\
&= \mathbb{P}(\text{pr}_A^k(X_n) = x) \mathbb{P}(\text{pr}_B^k(X_n) = y).
\end{aligned}$$

2 \Rightarrow 3: Nach Satz 1.6.4 genügt es zu zeigen, dass die Varianz von $\gamma_k^n(x, X_n)$ für alle $k \geq 1$ und $x \in \mathbb{F}_k$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Nun ist

$$\gamma_k^n(x, X_n) = \frac{1}{n!} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi.X_n) = x\} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} 1(\text{pr}_k^n(\pi.X_n) = x).$$

Wegen der Konsistenzeigenschaft ist $1_\pi := 1(\text{pr}_k^n(\pi.X_n) = x) = 1(\pi|_{\pi^{-1}([k])} \cdot \text{pr}_{\pi^{-1}([k])}^n(X_n) = x)$. Insbesondere hängt diese Indikatorfunktion also über X_n nur von $\text{pr}_{\pi^{-1}([k])}^n(X_n)$ ab. Nach Voraussetzung sind damit 1_π und 1_σ unabhängig, sobald $\pi^{-1}([k])$ und $\sigma^{-1}([k])$ disjunkt sind. Es gilt

$$\text{Var}(\gamma_k^n(x, X_n)) = \text{Cov}(\gamma_k^n(x, X_n), \gamma_k^n(x, X_n)) = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{Cov}(1_\pi, 1_\sigma).$$

Für jedes $\pi \in \mathbb{S}_n$ hat $\#\{\sigma \in \mathbb{S}_n : \sigma^{-1}([k]) \cap \pi^{-1}([k]) \neq \emptyset\}$ denselben Wert. Damit erhält man mit $\text{Cov}(1_\pi, 1_\sigma) = 0$ falls $\sigma^{-1}([k]) \cap \pi^{-1}([k]) = \emptyset$ und $|\text{Cov}(1_\pi, 1_\sigma)| \leq 1$ sonst mittels Dreieckungleichung die Abschätzung

$$\text{Var}(\gamma_k^n(x, X_n)) \leq \frac{\#\{\sigma \in \mathbb{S}_n : \sigma^{-1}([k]) \cap [k] \neq \emptyset\}}{n!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gleichverteilte Permutation von $[n]$ einen der Werte aus $[k]$ wieder auf einen der Werte aus $[k]$ abbildet, konvergiert für festes k mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0.

3 \Rightarrow 1: Das ist Teil der allgemeinen Theorie über EGG, siehe Satz 1.6.6. \square

Korollar 3.2.24. *Die Simplizes $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$, $\mathcal{M}_1(\gamma)$ und $\mathcal{M}_1(\tau)$ sind allesamt Bauer-simplizes. Ist X_∞ ein Zufallselement mit Verteilung in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$, so ist die Verteilung von X_∞ genau dann extremal, wenn für alle disjunkten $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gilt, dass $\text{pr}_A(X_\infty)$ und $\text{pr}_B(X_\infty)$ unabhängig sind.*

Beispiel 3.2.25. Betrachtet man das Beispiel der Wörter $\mathbf{Word}(\Sigma)$ so erhält man nun: Ein austauschbarer stochastischer Prozess $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ hat genau dann eine extremale Verteilung, wenn für alle disjunkten $A, B \subseteq \mathbb{N}$ die Kollektionen $(Y_i)_{i \in A}$ und $(Y_i)_{i \in B}$ unabhängig sind. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn $Y_1, Y_2, Y_3 \dots$ unabhängig sind. Wegen der Austauschbarkeit haben sowieso alle Y_i zusätzlich die selbe Verteilung. Insgesamt erhält man so, dass ein austauschbarer Prozess $(Y_i)_{i \geq 1}$ genau dann eine extremale Verteilung besitzt, wenn der Prozess iid ist. Die ergodische Zerlegung liefert: Jeder austauschbare Prozess ist eine Mischung von iid Prozessen. Für die zugehörigen Urnenprozesse $Z = (Z_n)_{n \geq 1}$

mit $Z_n = \sum_{j=1}^n \delta_{Y_j}$ erhält man so, dass jeder extremale Urnenprozess eine Irrfahrt mit Parameter $\mathcal{L}(Y_1) \in \mathcal{M}_1(\Sigma)$ ist. \triangleleft

Satz 3.2.26. *Eine Folge $\mathbf{y} = (y_n)_{n \geq 1}$ mit $y_n \in \mathbb{F}_{m_n}$ und $m_n \rightarrow \infty$ ist genau dann γ -konvergent, wenn die Folge der Äquivalenzklassen $[\mathbf{y}] = ([y_n])_{n \geq 1}$ τ -konvergent ist. Darüberhinaus stimmen auch im EGG $([\mathbb{F}], \tau)$ Martinrand und Extrempunkte überein.*

Beweis. Es ist $\tau_k^n([x_k], [x_n]) = \gamma_k^n(x_k, x_n) \cdot \#[x_k]$ per Definition. Ist $X = (X_n)_{n \geq 1}$ ein Prozess mit Verteilung in $\partial\mathcal{M}_1(\gamma)$ via einer γ -konvergenten Folge \mathbf{y} , so ist

$$\mathbb{P}([X_k] = [x_k]) = \sum_{x \in [x_k]} \mathbb{P}(X_k = x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in [x_k]} \gamma_k^{m_n}(x, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_k^n([x_k], [y_n]),$$

denn $\gamma_k^{m_n}(x, y_n)$ ist für alle $x \in [x_k]$ identisch und hängt von y_n nur über $[y_n]$ ab. Damit folgt die Behauptung. \square

Beispiel 3.2.27. Im Beispiel der Wörter $\mathbf{Word}(\Sigma)$ konvergiert eine Folge von Wörtern $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,n}) \in \Sigma^n$ genau dann bzgl. γ , wenn die Folge der Orbits $([x_n])_{n \geq 1}$ bzgl. τ konvergiert. Das ist genau dann der Fall, wenn $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{x_{n,j}}$ schwach konvergiert. Der Limes ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\alpha \in \mathcal{M}_1(\Sigma)$. Dieses α ist der Parameter der zugehörigen Irrfahrt. \triangleleft

Bemerkung 3.2.28. In vielen konkreten Beispielen rund um Austauschbarkeit in diskreten Strukturen (Partitionen, Graphen,...) ist eine Charakterisierung der ergodischen (extremalen) Verteilungen durch Unabhängigkeit von disjunkt induzierten Teilstrukturen wohlbekannt. Speziell in [EGW17] wurde mit einem analogen Argument wie in obiger Beweisrichtung 1. \Rightarrow 2. und unter Zuhilfenahme der allgemeinen Darstellungsergebnisse von Aldous-Hoover-Kallenberg gezeigt, dass Martinrand und Menge der Extrempunkte im von Rémys Kette erzeugten Equipped Graded Graph übereinstimmen. Eine allgemeine Verbindung zu den genannten Darstellungsergebnissen findet man später in Abschnitt 3.4.5. ∇

Bemerkung 3.2.29. Die bis hierhin vorgestellten Verbindungen zwischen Limiten diskreter Strukturen (Limiten γ -konvergenter Folgen), ergodischen austauschbaren Verteilungen und Markovketten sind in konkreten Situationen wohlbekannt. Speziell für Partitionen betrachte man die Originalarbeit von Kingman [Kin78], in welcher nicht direkt von austauschbaren Partitionen, sondern vielmehr von den Äquivalenzklassenprozessen gesprochen wird (Partition Structures). Die Arbeit [DJ08] führt den Zusammenhang bei Graphen aus. Auch die Arbeit [FHP17] beschreibt und beweist strukturelle Zusammenhänge im Kontext von Hierarchien. Ebenso wird in [Gne97] der Zusammenhang von Limiten diskreter Strukturen, Markovketten und Austauschbarkeit erläutert und im speziellen Fall diskutiert. Alle in dieser Bemerkung genannten Arbeiten werden später noch genauer in Kontext gestellt. ∇

Bemerkung 3.2.30. Konsistente Systeme eignen sich nicht nur für die Analyse von austauschbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen; man kann aus Projektionen und Ummarkierungen eine Vielzahl von Selbstabbildungen auf \mathbb{F}_∞ zusammensetzen und invariante Wahrscheinlichkeitsmaße bzgl. dieser betrachten. Ist $A \in \mathfrak{P}_\infty(\mathbb{N})$ eine unendliche Menge und

$\pi : A \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so ist $T_\pi : \mathbb{F}_\infty \rightarrow \mathbb{F}_\infty$ mit $T_\pi(x) := \pi.\text{pr}_A(x)$ eine surjektive stetige Abbildung. Speziell mit $A = \{2, 3, 4, \dots\}$ und $\pi(i) := i - 1$ ist $S := T_A$ die *Shiftabbildung* und man könnte die Menge aller $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty)$ mit $P^S = P$ betrachten. In dieser Weise könnte man viele weitere Invarianzen einführen und miteinander in Bezug setzen. Speziell ist auch ein Hewitt-Savage-Theorem im Stil von Korollar 1.6 in [Kal06] denkbar. Auf diese Dinge wird im Weiteren nicht mehr eingegangen. ∇

3.2.3. Zusammenspiel mit Homomorphismen und Produktsystemen

Lemma 3.2.31. *Es sei $h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ ein Homomorphismus konsistenter Systeme. Weiter sei $\mathbf{y} = (y_n)_{n \geq 1}$ eine γ -konvergente Folge in \mathbf{F} . Dann ist $h(\mathbf{y}) := (h(y_n))_{n \geq 1}$ eine γ -konvergente Folge in \mathbf{G} , wobei sich γ je nach Kontext auf die Systeme \mathbf{F} bzw. \mathbf{G} bezieht.*

Beweis. Es sei $y_n \in \mathbb{F}_{m_n}$ mit $m_n \rightarrow \infty$ und $k \geq 1$ und $x \in \mathbb{G}_k$. Es sei $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_{m_n})$. Dann ist

$$\gamma_k^{m_n}(x, h(y_n)) = \mathbb{P}(\text{pr}^{m_n}(S_n \cdot h(y_n)) = x) = \mathbb{P}(h(\text{pr}_k^{m_n}(S_n \cdot y_n)) = x),$$

aufgrund der Eigenschaften eines Homomorphismus. Es ist $h^{-1}(x) \subseteq \mathbb{F}_k$ und damit ist

$$\gamma_k^{m_n}(x, h(y_n)) = \sum_{x' \in h^{-1}(x)} \mu_k^{m_n}(x', y_n).$$

Da die Summation endlich ist und jeder Summand nach Voraussetzung konvergiert, folgt die Behauptung. \square

Für den nächsten Satz erinnere man sich daran, dass Homomorphismen zwischen konsistenten Systemen eindeutig auf die projektiven Limiten fortgesetzt werden können (siehe Satz 3.1.11). Insbesondere kann man h auch als stetige Abbildung $h : \mathbb{F}_\infty \rightarrow \mathbb{G}_\infty$ ansehen und damit Bildmaße $P^h \in \mathcal{M}_1(\mathbb{G}_\infty)$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty)$ betrachten.

Satz 3.2.32. *Es sei $h : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ ein Homomorphismus konsistenter Systeme. Dann ist*

$$h(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)) := \{P^h : P \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)\} \subseteq \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty)$$

eine abgeschlossene Fläche. Insbesondere gilt also $h(\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))) \subseteq \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$ und es gilt Gleichheit, falls h surjektiv ist. In der Sprache von Zufallsvariablen: Ist X_∞ austauschbar mit Werten in \mathbb{F}_∞ , so ist $h(X_\infty)$ austauschbar mit Werten in \mathbb{G}_∞ und ist X_∞ ergodisch, so ist es auch $h(X_\infty)$.

Beweis. Ist X_∞ ein Zufallselement mit Verteilung $P = \mathbb{P}^{X_\infty} \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ und ist $\pi \in \mathbb{S}_\infty$ so ist $\pi \cdot h(X_\infty) = h(\pi \cdot X_\infty) \sim h(X_\infty)$, also ist $P^h \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty)$. Konvexität und Abgeschlossenheit von $h(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))$ sind klar. Man muss also begründen, dass es sich um eine Fläche handelt. Dazu reicht es zu zeigen, dass

$$\text{ex}(h(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))) \subseteq \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$$

gilt. Die Abbildung $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty) \rightarrow h(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)), P \mapsto P^h$ ist affin und surjektiv. Deswegen ist jeder Extrempunkt in $h(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))$ von der Form P^h mit $P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))$.

Es gibt dann also eine γ -konvergente Folge $\mathbf{y} = (y_n)_{n \geq 1}$ in \mathbf{F} , welche P darstellt. Nach obigem Lemma ist $h(\mathbf{y})$ γ -konvergent in \mathbf{G} und liefert damit einen Extrempunkt in $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$. Ferner stellt der Limes von $h(y_n)$ das Maß P^h dar, also gilt $P^h \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$ und damit folgt die Behauptung. \square

Beispiel 3.2.33. Angenommen $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$ und $\Sigma_2 = \{a, b\}$ und $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ ist die Abbildung $f(a) = a$, $f(b) = b$ und $f(c) = b$. Ist $x \in \Sigma_1^n$ ein Wort über a, b, c so ist $f(x) := f \circ x$ das Wort, in welchem alle c durch b ersetzt werden. Dieses liefert einen Homomorphismus $\mathbf{Word}(\Sigma_1) \rightarrow \mathbf{Word}(\Sigma_2)$. Wie bereits gesehen ist eine Folge wachsender Wörter (w_n) über Σ_1 genau dann γ -konvergent, wenn die relativen Anteile der einzelnen Buchstaben konvergieren. Ist das der Fall, so konvergieren auch die relativen Anteile der Buchstaben in $f(w_n)$. Ist $(Y_i)_{i \geq 1}$ ein austauschbarer Prozess über Σ_1 , so ist $(f(Y_i))_{i \geq 1}$ ein austauschbarer Prozess über Σ_2 und ist $(Y_i)_{i \geq 1}$ iid, so ist auch $(f(Y_i))_{i \geq 1}$ iid. \triangleleft

Es sei $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ ein Produkt konsistenter Systeme. Die Charakterisierung der Extremalität durch die Unabhängigkeitseigenschaft liefert nun Aussagen für die Simplizes $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty)$. Es seien dazu $P_1 \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))$ und $P_2 \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$. Es seien $\pi_1: \mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty \rightarrow \mathbb{F}_\infty$ und $\pi_2: \mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty \rightarrow \mathbb{G}_\infty$ die Projektionsabbildungen. Betrachtet wird die Menge der gemeinsam austauschbaren *Joinings* von P_1 und P_2 :

$$\mathcal{J}(P_1, P_2) := \{P \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty) : P^{\pi_1} = P_1, P^{\pi_2} = P_2\}.$$

Satz 3.2.34. $\mathcal{J}(P_1, P_2)$ ist eine abgeschlossene Fläche in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty)$, also selbst ein Simplex, und $P_1 \otimes P_2$ ist Extrempunkt von $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty)$ und damit von $\mathcal{J}(P_1, P_2)$. Insbesondere ist $\mathcal{J}(P_1, P_2)$ nicht-leer. Ist $P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty))$, so sind $P^{\pi_1} \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))$ und $P^{\pi_2} \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$.

Beweis. Konvexität und Abgeschlossenheit von $\mathcal{J}(P_1, P_2)$ sind klar. Es sei $P \in \mathcal{J}(P_1, P_2)$ und $\alpha \in (0, 1)$ sowie $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty)$ mit $P = \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2$. Dann gilt $P^{\pi_1} = \alpha Q_1^{\pi_1} + (1 - \alpha)Q_2^{\pi_1}$. Da sowohl $Q_1^{\pi_1}, Q_2^{\pi_1} \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ und $P_1 \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))$ folgt $P_1 = Q_1^{\pi_1} = Q_2^{\pi_1}$. Analog folgt $P_2 = Q_1^{\pi_2} = Q_2^{\pi_2}$. Damit sind aber $Q_1, Q_2 \in \mathcal{J}(P_1, P_2)$. Also ist $\mathcal{J}(P_1, P_2)$ eine abgeschlossene Fläche.

Nun zur zweiten Behauptung. (X_∞^1, X_∞^2) habe Verteilung $P_1 \otimes P_2$. Es seien A, B disjunkt. Dann ist

$$\text{pr}_A((X_\infty^1, X_\infty^2)) = (\text{pr}_A(X_\infty^1), \text{pr}_A(X_\infty^2))$$

und

$$\text{pr}_B((X_\infty^1, X_\infty^2)) = (\text{pr}_B(X_\infty^1), \text{pr}_B(X_\infty^2))$$

Aus der Unabhängigkeit von X_∞^1 und X_∞^2 folgt

$$\mathbb{P}(\text{pr}_A(X_\infty^1), \text{pr}_B(X_\infty^1), \text{pr}_A(X_\infty^2), \text{pr}_B(X_\infty^2)) = \mathbb{P}(\text{pr}_A(X_\infty^1), \text{pr}_B(X_\infty^1)) \otimes \mathbb{P}(\text{pr}_A(X_\infty^2), \text{pr}_B(X_\infty^2))$$

und aus der Extremalität der Verteilungen von X_∞^1 und X_∞^2 folgt damit

$$\mathbb{P}(\text{pr}_A(X_\infty^1), \text{pr}_B(X_\infty^1), \text{pr}_A(X_\infty^2), \text{pr}_B(X_\infty^2)) = \mathbb{P}^{\text{pr}_A(X_\infty^1)} \otimes \mathbb{P}^{\text{pr}_B(X_\infty^1)} \otimes \mathbb{P}^{\text{pr}_A(X_\infty^2)} \otimes \mathbb{P}^{\text{pr}_B(X_\infty^2)},$$

also die Unabhängigkeit aller vier auftretenden Größen und damit auch die Unabhängigkeit von $\text{pr}_A((X_\infty^1, X_\infty^2))$ und $\text{pr}_B((X_\infty^1, X_\infty^2))$ und damit die Extremalität der Verteilung von (X_∞^1, X_∞^2) .

Die letzte Behauptung folgt sofort daraus, dass $h : \mathbf{F} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{F}$ mit $h((x, y)) = x$ ein surjektiver Homomorphismus ist. Analog für $h((x, y)) = y$. \square

Bemerkung 3.2.35. Insbesondere besagt der Satz, dass mit jedem ergodischen P das Wahrscheinlichkeitsmaß $P \otimes P$ ergodisch im Produktsystem ist, ergodische P sind im hier vorgestellten Kontext also stets *schwach mischend*, siehe hierzu auch Definition 3.9 und Theorem 3.11 in [Gla03]. Im genannten Buch sind viele verschiedene Arten von Joinings ergodischer Wahrscheinlichkeitsmaße beschrieben. *Graph-Joinings* spielen später noch eine wichtige Rolle (siehe Satz 3.4.15). ∇

Beispiel 3.2.36. Betrachtet werden zwei Alphabete Σ_1 und Σ_2 und das Produktsystem

$$\mathbf{Word}(\Sigma_1) \times \mathbf{Word}(\Sigma_2) \simeq \mathbf{Word}(\Sigma_1 \times \Sigma_2).$$

Ist $Y = (Y_i)_{i \geq 1}$ ein iid Prozess über Σ_1 und $Z = (Z_i)_{i \geq 1}$ ein iid Prozess über Σ_2 und sind beide Prozesse unabhängig, so ist der zusammengesetzte Prozess $(Y_i, Z_i)_{i \geq 1}$ ebenfalls ein iid Prozess. Konkret sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $P_1 = P_2 = \otimes_{n \geq 1} \text{unif}(\Sigma) \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty))$. Dann besteht $\text{ex}(\mathcal{J}(P_1, P_2))$ aus den Verteilungen aller iid Prozesse $(Y_i, Z_i)_{i \geq 1}$ mit $\mathbb{P}(Y_1 = a) = \mathbb{P}(Z_1 = a) = 0.5$. Alle diese Verteilungen sind von der Form

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 = a, Z_1 = a) &= q, & \mathbb{P}(Y_1 = a, Z_1 = b) &= 0.5 - q, \\ \mathbb{P}(Y_1 = b, Z_1 = a) &= 0.5 - q, & \mathbb{P}(Y_1 = b, Z_1 = b) &= q \end{aligned}$$

für ein $q \in [0, 0.5]$. Der Simplex $\mathcal{J}(P_1, P_2)$ hier damit isomorph zu $\mathcal{M}_1([0, 0.5])$. Insbesondere sind Prozesse $(Y_i, Z_i)_{i \geq 1}$ mit Verteilung aus $\mathcal{J}(P_1, P_2) \setminus \text{ex}(\mathcal{J}(P_1, P_2))$ derart, dass sowohl der Prozess $(Y_i)_{i \geq 1}$ als auch der Prozess $(Z_i)_{i \geq 1}$ aus iid fairen Münzwürfen besteht, der zusammengesetzte Prozess $(Y_i, Z_i)_{i \geq 1}$ aber nicht iid ist. Allgemein erhält man: Ist (X_∞^1, X_∞^2) ein gemeinsam austauschbares Zufallselement in einem Produktsystem $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, so gilt für die gemeinsam austauschbare σ -Algebra $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty^1, X_\infty^2)$ stets die Beziehung

$$\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty^1) \vee \mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty^2) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty^1, X_\infty^2),$$

die Inklusion kann echt sein. \triangleleft

Satz 3.2.37. Ist $Q \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$, so ist die Zuordnung

$$i_Q : \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty) \rightarrow \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty), \quad P \mapsto P \otimes Q$$

injektiv, affin und ein Isomorphismus auf das Bild $i_Q(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)) \subseteq \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty)$, und dieser Teilsimplex ist eine abgeschlossene Fläche.

Beweis. Die beschriebene Zuordnung i_Q ist offensichtlich affin, stetig und injektiv und damit ein affiner Homöomorphismus auf das Bild. Dass das Bild eine abgeschlossene Fläche ist, folgt dann aus Satz 3.2.34. \square

Später werden Simplex der Form $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ über abgeschlossene Flächen $F \subseteq \mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty)$ via $\pi_1(F) = \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ beschrieben und uneindeutige Beschreibungen rühren daher, dass $\pi|_F$ nicht injektiv ist. Im weiteren Verlauf der Arbeit geht es besonders um Produktsysteme der Form $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$, wobei **Lin** das konsistente System der linearen Ordnungen ist. Dieses wird im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt.

3.3. Das konsistente System **Lin** der linearen Ordnungen

Definition 3.3.1 (Konsistentes System **Lin** der linearen Ordnungen). Es sei $\mathbf{Lin} = (\mathbb{L}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{L})$ definiert durch:

1. Für jedes $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ sei $\mathbb{L}(E)$ die Menge der linearen Ordnungen auf E . Sind $i, j \in E$ und $l \in \mathbb{L}(E)$, so wird $i \ l \ j$ geschrieben, falls i bzgl. l kleiner als j ist.
2. Für $E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ und $l \in \mathbb{L}(F)$ sei $\text{pr}_E^F(l)$ die Einschränkung der linearen Ordnung l auf die Menge E .
3. Für $E, F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $0 < |E| = |F|$ und $l \in \mathbb{L}(E)$ sowie $\pi \in \mathbb{S}(E, F)$ sei $\pi.l \in \mathbb{L}(F)$ definiert durch

$$i \ \pi.l \ j \ :\Leftrightarrow \ \pi^{-1}(i) \ l \ \pi^{-1}(j).$$

Satz 3.3.2. *Das Tupel **Lin** ist ein konsistentes System.*

Beweis. Die Projektionseigenschaft ist klar.

Mit $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ und $|A| = |B| = |C|$ und $l \in \mathbb{L}(A), \pi \in \mathbb{S}(A, B), \sigma \in \mathbb{S}(B, C)$ gilt

$$i \ \sigma.(\pi.l) \ j \ \Leftrightarrow \ \sigma^{-1}(i) \ \pi.l \ \sigma^{-1}(j) \ \Leftrightarrow \ \pi^{-1}(\sigma^{-1}(i)) \ l \ \pi^{-1}(\sigma^{-1}(j)) \ \Leftrightarrow \ i \ (\sigma.\pi).l \ j,$$

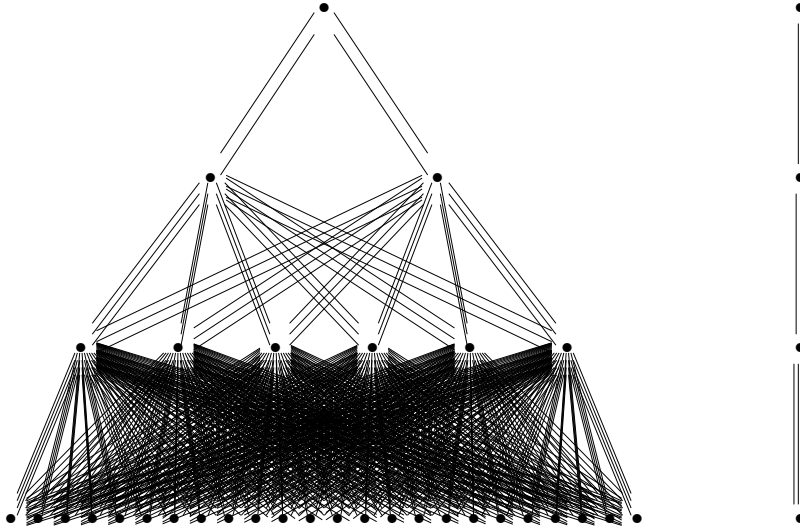
also $\sigma.(\pi.l) = (\sigma.\pi).l$.

Zur Konsistenz eigenschaft: mit $|A| = |B|$ und $C \subseteq B$ sowie $l \in \mathbb{L}(A)$ und $\pi \in \mathbb{S}(A, B)$ ist $\text{pr}_C^B(\pi.l) =: r \in \mathbb{L}(C)$ die Einschränkung von $\pi.l \in \mathbb{L}(B)$ auf die Menge C , also für alle $i, j \in C$ ist

$$i \ \text{pr}_C^B(\pi.l) \ j \ \Leftrightarrow \ \pi^{-1}(i) \ l \ \pi^{-1}(j) \ \Leftrightarrow \ (\pi|_{\pi^{-1}(C)})^{-1}(i) \ \text{pr}_{\pi^{-1}(C)}^A(l) \ (\pi|_{\pi^{-1}(C)})^{-1}(j),$$

wegen $(\pi|_{\pi^{-1}(C)})^{-1} = (\pi^{-1})|_C$. □

Für $A \in \mathfrak{P}_\infty(\mathbb{N})$ sei $\mathbb{L}(A)$ die Menge der linearen Ordnungen auf A und für $B \subseteq A$ und $l \in \mathbb{L}(A)$ sei $\text{pr}_B^A(l)$ die Einschränkung von l auf B . Sind $A, B \in \mathfrak{P}_\infty(\mathbb{N})$ und ist $\pi \in \mathbb{S}(A, B)$ sowie $l \in \mathbb{L}(A)$, so sei $\pi.l \in \mathbb{L}(B)$ definiert über $i \ \pi.l \ j \ :\Leftrightarrow \ \pi^{-1}(i) \ l \ \pi^{-1}(j)$. Für $A \in \mathfrak{P}_\infty(\mathbb{N})$ definiert man die Topologie auf $\mathbb{L}(A)$ als die Initialtopologie der Einschränkungen $\text{pr}_E^A : \mathbb{L}(A) \rightarrow \mathbb{L}(E)$ für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$. Auf diese Weise wird $(\mathbb{L}(A), \text{pr}_E^A)$ zu einem projektiven Limesystem von $(\mathbb{L}(E), \text{pr}_F^E : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(A))$ und die oben erklärten Ummarkierungsfunktionen sind genau die kanonisch erklärten Ummarkierungen. In dieser Situation ist $\mathbb{L}_n := \mathbb{L}([n])$ die Menge der linearen Ordnungen auf $[n]$ und $\mathbb{L}_\infty := \mathbb{L}(\mathbb{N})$ die Menge der linearen Ordnungen auf \mathbb{N} .

Abb. 3.3.: Die zu \mathbf{Lin} gehörigen Diagramme.

Im Folgenden geht es um wohlbekannte Dinge rund um *die* gleichverteilte lineare Ordnung auf den natürlichen Zahlen im Kontext der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Theorie.

Satz 3.3.3. *Der Simplex $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty)$ besteht aus nur einem Punkt, dieses Wahrscheinlichkeitsmaß wird mit $\text{unif}(\mathbb{L}_\infty) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{L}_\infty)$ bezeichnet und ist wie folgt charakterisiert: Eine zufällige lineare Ordnung L auf \mathbb{N} hat genau dann Verteilung $\text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$, wenn $\text{pr}_n(L) \in \mathbb{L}_n$ für alle n die Gleichverteilung auf \mathbb{L}_n hat.*

Beweis. Es sei L eine zufällige lineare Ordnung auf \mathbb{N} mit symmetrischer Verteilung. Es gilt $\pi \cdot \text{pr}_n(L) \sim \text{pr}_n(L)$ für alle $n \geq 1$ und $\pi \in \mathbb{S}_n$. Da die Wirkung von \mathbb{S}_n auf \mathbb{L}_n transitiv ist, gilt $\text{pr}_n(L) \sim \text{unif}(\mathbb{L}_n)$. Da die Verteilung eines projektiven Objektes durch die Folge der Verteilungen von Einschränkungen auf endliche Mengen festgelegt ist, folgt die Behauptung. \square

Die ersten vier Stufen des Bratellidiagramm mit Kanten $(\text{pr}_{n-1}^n(\pi \cdot l), l), l \in \mathbb{L}_n, \pi \in \mathbb{S}_n$ für lineare Ordnungen auf der linken Seite und das zugehörige (unmarkierte) Bratellidiagramm der Äquivalenzklassen auf der rechten Seite findet man in Abbildung 3.3.

Die zu \mathbf{Lin} assoziierten Simplexe $\mathcal{M}_1(\gamma)$ und $\mathcal{M}_1(\tau)$ bestehen damit auch nur aus einem einzigen Punkt. Da für alle $n \geq 1$ und $l \in \mathbb{L}_n$ der Orbit von l unter \mathbb{S}_n ganz \mathbb{L}_n ist, also $[l] = \mathbb{L}_n$ gilt, existiert nur ein einziger Orbitpfad, bezeichnet mit e , auf dem das eindeutige $P \in \mathcal{M}_1(\tau)$ konzentriert ist: $P = \delta_e$. Umgekehrt stimmt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\gamma_k^n(\cdot, l_n)$ auf \mathbb{L}_k für jedes $l_n \in \mathbb{L}_n$ mit der Gleichverteilung auf \mathbb{L}_k überein. Damit ist die eindeutige Verteilung in $\mathcal{M}_1(\gamma)$ die Verteilung eines Prozesses (L_1, L_2, \dots) , wobei alle L_1, L_2, \dots unabhängig und jeweils auf \mathbb{L}_n gleichverteilt sind. Insgesamt:

$$\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty) = \{\text{unif}(\mathbb{L}_\infty)\}, \quad \mathcal{M}_1(\tau) = \{\delta_e\} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_1(\gamma) = \left\{ \bigotimes_{n \geq 1} \text{unif}(\mathbb{L}_n) \right\}.$$

Insbesondere ist *jede* Folge von linearen Ordnungen $(l_n)_{n \geq 1}$ mit $l_n \in \mathbb{L}_{m_n}$ und $m_n \rightarrow \infty$ in diesem Beispiel γ -konvergent und alle haben denselben Limes.

3.3.1. Homöomorphe Pfadräume $\mathbb{L}_\infty \leftrightarrow \text{Proj}(\mathbb{S}) \leftrightarrow \prod_{k \geq 1} [k]$

Lineare Ordnungen auf \mathbb{N} werden nun mit anderen Objekten identifiziert. Für $\pi \in \mathbb{S}_n$ sei die lineare Ordnung $l(\pi) \in \mathbb{L}_n$ definiert über

$$i \ l(\pi) \ j \ :\Leftrightarrow \ \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j),$$

also $l(\pi) = \pi \cdot <_n$, wobei $<_n$ die übliche lineare Ordnung auf $[n]$ bezeichnet. Es sei $\text{pr}_k^n(\pi)$ diejenige Permutation mit $l(\text{pr}_k^n(\pi)) = \text{pr}_k^n(l)$. Es entsteht $\text{pr}_k^n(\pi)$ aus π indem in der Tabellenschreibweise von π die Ziffern $k+1, \dots, n$ entfernt werden.

Für eine lineare Ordnung $l \in \mathbb{L}_\infty$ und $n \geq 1$ sei $\pi_n(l)$ diejenige Permutation, welche die Einschränkung von l auf $[n]$ darstellt. Es sei

$$\text{Proj}(\mathbb{S}) := \{(\pi_n)_{n \geq 1} : \pi_n \in \mathbb{S}_n, \text{pr}_k^n(\pi_n) = \pi_k\}$$

die Menge der Folgen projektiver Permutationen. Für jede lineare Ordnung $l \in \mathbb{L}_\infty$ ist damit $\mathbf{g}(l) := (\pi_n(l))_{n \geq 1}$ ein Element von $\text{Proj}(\mathbb{S})$. Eine lineare Ordnung auf den natürlichen Zahlen ist eindeutig durch die Einschränkung der linearen Ordnung auf alle Mengen $\{1, \dots, n\}$ determiniert und umgekehrt. Stattet man $\text{Proj}(\mathbb{S})$ wie üblich mit den diskreten Produkttopologien aus, so ist die Abbildung

$$\mathbf{g} : \mathbb{L}_\infty \rightarrow \text{Proj}(\mathbb{S}), \ l \mapsto (\pi_n(l))_{n \geq 1} \quad (3.3)$$

ein Homöomorphismus. Eine Folge $(\pi_n)_{n \geq 1} \in \text{Proj}(\mathbb{S})$ projektiver Permutationen startet notwendigerweise mit $\pi_1 = (1) \in \mathbb{S}_1$. Im Übergang von n nach $n+1$ erzwingt die Projektivität der Folge, dass π_{n+1} aus π_n durch Einschieben der Ziffer „ $n+1$ “ in eine der $n+1$ möglichen Zwischenräume in der Tabellenschreibweise von π_n entsteht. Insgesamt bestimmt die Folge dieser Einschiebepositionen die projektive Folge von Permutationen ebenfalls eindeutig. Die im Übergang von n nach $n+1$ verwendete Position ist genau der Wert $\pi_{n+1}^{-1}(n+1)$, der *relative Rang* von $n+1$ bzgl. der durch $l(\pi_{n+1})$ beschriebenen linearen Ordnung auf $[n+1]$. Für jede Folge $(\pi_n)_{n \geq 1} \in \text{Proj}(\mathbb{S})$ ist $\mathbf{f}((\pi_n)_{n \geq 1}) := (\pi_k^{-1}(k))_{k \geq 1}$ ein Element von $\prod_{k \geq 1} [k]$. Stattet man auch letzten Raum mit der Produkttopologie aus, so ist die Zuordnung

$$\mathbf{f} : \text{Proj}(\mathbb{S}) \rightarrow \prod_{k \geq 1} [k], \ (\pi_n)_{n \geq 1} \mapsto (\pi_k^{-1}(k))_{k \geq 1} \quad (3.4)$$

ebenfalls ein Homöomorphismus. Insbesondere ist eine lineare Ordnung auf $l \in \mathbb{L}_\infty$ auf den natürlichen Zahlen eindeutig durch die Folge der relativen Ränge $(a_1, a_2, \dots) := \mathbf{f}(\mathbf{g}(l)) \in [1] \times [2] \times [3] \times \dots$ determiniert, für alle $k \geq 1$ gilt $a_k = \#\{i \in [k] : i \ l \ k\}$.

3.3.2. Darstellung der gleichverteilten linearen Ordnung über einen U -Prozess

Ist $L \sim \text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$ eine gleichverteilte lineare Ordnung auf \mathbb{N} , so ist $\mathbf{g}(L) =: S = (S_n)_{n \geq 1}$ eine Folge mit $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ und $\text{pr}_k^n(S_n) = S_k$ \mathbb{P} -fast-sicher für alle $1 \leq k \leq n$ und

$\mathbf{f}((S_n)_{n \geq 1}) =: \eta = (\eta_k)_{k \geq 1}$ ist ein Prozess, in welchem η_1, η_2, \dots unabhängig sind und $\eta_k \sim \text{unif}([k])$ für alle $k \geq 1$ gilt. Also: Ist $L \sim \text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$, so hat der Prozess der zu L gehörigen relativen Ränge, $\eta := \mathbf{f}(\mathbf{g}(L))$, die Verteilung $\bigotimes_{k \geq 1} \text{unif}([k])$. Da die Abbildungen \mathbf{f} und \mathbf{g} Homöomorphismen sind, gilt $\sigma(L) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(S) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(\eta)$. Eine Sichtweise fehlt noch: Ein U -Prozess ist eine Folge $U = (U_i)_{i \geq 1}$ von unabhängigen je auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Diese nehmen ab sofort eine dominante Rolle ein.

Definition 3.3.4. Sind $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen, so sei $\pi := \pi(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{S}_n$ die eindeutige Permutation mit $u_{\pi(1)} < \dots < u_{\pi(n)}$. Ferner sei $u_{i:n} := u_{\pi(i)}$ für $1 \leq i \leq n$.

Lemma 3.3.5. Ist $\sigma \in \mathbb{S}_n$ so gilt $\pi(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \sigma^{-1} \circ \pi(u_1, \dots, u_n)$.

Satz 3.3.6. Es sei U ein U -Prozess. Dieser induziert fast sicher ein Tripel $(L, S, \eta) = (L, \mathbf{g}(L), \mathbf{f}(\mathbf{g}(L)))$ mit $L \sim \text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$ wie folgt:

1. Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ definiert man $i L j := \Leftrightarrow U_i < U_j$
2. Für alle $n \geq 1$ definiert man S_n als diejenige Permutation mit $U_{S_n(1)} < \dots < U_{S_n(n)}$, also $S_n = \pi(U_1, \dots, U_n)$.
3. Für alle $k \geq 1$ definiert man $\eta_k := 1 + \sum_{i=1}^{k-1} I(U_i < U_k)$.

Umgekehrt erhält man den U -Prozess aus L bzw. S fast sicher über

$$U_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{j \in [n] : j L i\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n^{-1}(i) \quad \text{fast sicher für alle } i \geq 1$$

zurück. Es gilt $\sigma(U) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(L) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(S) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(\eta)$.

Beweis. Die Rekonstruktion der U_i aus L folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen. □

Bemerkung 3.3.7. Die Bezeichnung „ η “ ist bewusst wie im Abschnitt über HMBs gewählt, später werden die aus einer zufälligen austauschbaren linearen Ordnung L erhaltenen relativen Ränge η genau zu den Markierungen markierter Prozesse in gewissen HMBs. ▽

Eine gleichverteilte lineare Ordnung auf \mathbb{N} kommt also in unterschiedlicher Gestalt daher: als konsistente Folge von jeweils gleichverteilten Permutationen, als Folge unabhängiger Zufallsgrößen, wobei das k -te Folgeglied auf $\{1, \dots, k\}$ gleichverteilt ist oder als U -Prozess.

Beispiel 3.3.8. Es werden Ausschnitte einer möglichen Realisierung eines Tupels

$$(L, S, \eta, U)$$

wie in Satz 3.3.6 angegeben. Lineare Ordnungen werden dabei in One-Line-Notation geschrieben.

$$L = (\dots, 2, \dots, 6, \dots, 4, \dots, 1, \dots, 5, \dots, 3, \dots).$$

Natürlich ist L mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Ordnung vom \mathbb{Q} -Typ, das heißt: Sind i, j verschieden mit $i L j$, so gibt es mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele k mit $i L k L j$. Daher die Punkte zwischen den angegebenen Werten. Die ersten 6 Werte des Prozesses S sind damit fixiert:

$$S = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, \dots) \\ = \\ \left(\binom{1}{1}, \binom{1 \ 2}{2 \ 1}, \binom{1 \ 2 \ 3}{2 \ 1 \ 3}, \binom{1 \ 2 \ 3 \ 4}{2 \ 4 \ 1 \ 3}, \binom{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5}{2 \ 4 \ 1 \ 5 \ 3}, \binom{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6}{2 \ 6 \ 4 \ 1 \ 5 \ 3}, \dots \right).$$

Die One-Line-Notation von S_n entspricht genau der One-Line-Notation der linearen Ordnung $\text{pr}_n(L)$. Damit sind auch die ersten 6 Werte des relativen Rangprozesses η bestimmt: Es ist $\eta_k = S_k^{-1}(k)$, also

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \dots) = (1, 1, 3, 2, 4, 2, \dots).$$

Bisher haben alle drei Darstellungen genau dieselben Informationen enthalten und es wurde genau dieselbe Information einer vollständigen Realisierung durch „...“ nicht angegeben. Will man nun Realisierungen zu den passenden U -Variablen angeben, so können diese nicht exakt dieselbe Menge an Informationen bereithalten. Eine mit den bisherigen Informationen konsistente Realisierung von U könnte zum Beispiel so beginnen:

$$U = (U_i)_{i \geq 1} = (0.232, 0.98, 0.52, 0.09, 0.778, 0.291, \dots).$$

Die Information dieser ersten 6 U -Werte determiniert nicht nur die Gestalt der zuvor angegebenen Objekte, sondern beinhaltet auch einige zuvor durch „...“ verschwiegene *terminale* Information; genauer zerlegt sich die Information aus (U_1, \dots, U_6) in einerseits S_6 , diejenige Permutation welche die Werte U_1, \dots, U_6 der Größe nach anordnet und der zuvor gegeben Information entspricht, und in

$$(U_{1:6}, \dots, U_{6:6}) := (U_{S_6(1)}, \dots, U_{S_6(6)}) = (0.09, 0.232, 0.291, 0.52, 0.778, 0.98).$$

Dieser Vektor enthält zusätzliche asymptotische Information: $U_{1:6} = 0.09$ besagt, dass der Anteil aller $i \in [n]$ mit $i L 2$ (2 ist unter den ersten 6 die bzgl. L kleinste Zahl) mit $n \rightarrow \infty$ genau 0.09 sein wird. Analog für die anderen Werte dieses Vektors. \triangleleft

Satz 3.3.9. *Ist $\pi \in \mathbb{S}_\infty$, U ein U -Prozess und $L(U)$ die zu U gehörige lineare Ordnung, so gilt*

$$\pi.L(U) = L((U_{\pi^{-1}(i)})_{i \geq 1}).$$

Ist η der zu U gehörige Prozess relativer Ränge, so gilt für alle $n \geq 1$

$$\sigma(\eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(U_{1:n}, \dots, U_{n:n}, U_{n+1}, U_{n+2}, \dots)$$

wobei $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n}) := (U_{S_n(1)}, \dots, U_{S_n(n)})$ ist.

Beweis. Es ist $i \pi.L(U) j \Leftrightarrow \pi^{-1}(i) L(U) \pi^{-1}(j) \Leftrightarrow U_{\pi^{-1}(i)} < U_{\pi^{-1}(j)}$, also folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt, da $\sigma(\eta_1, \dots, \eta_n) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(S_n)$ und S_n die fast sicher eindeutig bestimmte Permutation mit $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n}) = (U_{S_n(1)}, \dots, U_{S_n(n)})$ ist. \square

Notation 3.3.10. Für $1 \leq k \leq n$ seien

1. $[k : n] := \{(j_1, \dots, j_k) \in [n]^k : 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n\}$.
2. $(k : n) := \{A \subseteq [n] : \#A = k\}$.
3. Für $A \in (k : n)$ sei $j(A) \in [k : n]$ der eindeutige Vektor mit $\{j(A)_1, \dots, j(A)_k\} = A$.

Zum Beispiel ist $(2, 3, 6, 7, 9, 12) \in [6 : 14]$, $A = \{3, 1, 6, 5\} \in (4 : 7)$ und $j(A) = (1, 3, 5, 6)$.

Satz 3.3.11. Es sei (L, S, η, U) wie in Satz 3.3.6. Für $1 \leq k \leq n$ sei

$$J^{n,k} = (J_1^{n,k}, \dots, J_k^{n,k}) := j(S_n^{-1}([k])).$$

Dann gilt

1. $J^{n,k} = (S_n^{-1}(S_k(1)), \dots, S_n^{-1}(S_k(k)))$.
2. $n^{-1}J^{n,k} \rightarrow (U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ mit $n \rightarrow \infty$ fast sicher.
3. $\bigcap_{n \geq k} \sigma(J^{n,k}, J^{n+1,k}, J^{n+2,k}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$.

Beweis. Für die erste Aussage muss nur begründet werden, dass

$$S_n^{-1}(S_k(1)) < S_n^{-1}(S_k(2)) < \dots < S_n^{-1}(S_k(k))$$

gilt. Für $k = n$ ist die Gleichheit erfüllt, denn dort ist $J^{k,k} = (1, \dots, k)$. Angenommen die Monotonie gilt für ein $n \geq k$. Für $i, j \in [n+1]$ gilt $iLj \Leftrightarrow S_{n+1}^{-1}(i) < S_{n+1}^{-1}(j)$ und für $i, j \in [n]$ damit auch $S_n^{-1}(i) < S_n^{-1}(j)$. Also bleibt die Anordnung von $(S_n^{-1}(1), \dots, S_n^{-1}(k))$ für $n \geq k$ konstant.

Die zweite Aussage und dritte Aussage folgen aus der Darstellung

$$J^{n,k} = \left(1 + \sum_{i=k+1}^n I(U_i < U_{1:k}), 2 + \sum_{i=k+1}^n I(U_i < U_{2:k}), \dots, k + \sum_{i=k+1}^n I(U_i < U_{k:k}) \right). \quad \square$$

Bemerkung 3.3.12. Für beliebiges $k \geq 1$ ist mit

$$X^{n,k} := (X_1^{n,k}, \dots, X_{k+1}^{n,k}) := (J^{n,k}, J_2^{n,k} - J_1^{n,k}, J_3^{n,k} - J_2^{n,k}, \dots, J_k^{n,k} - J_{k-1}^{n,k}, n+1 - J_k^{n,k})$$

der Prozess $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$ mit $Y_n := X^{n+k,k}$ der Besetzungsvektoren Prozess zur *Standard $k+1$ -Farben-Pólya-Urne*, die Verteilung also wie folgt gegeben: Zum Zeitpunkt $n = 0$ starte man mit einer Urne in der sich $k+1$ unterschiedlich gefärbte Kugeln befinden. Im Übergang von n nach $n+1$ wähle man gleichverteilt eine Kugel aus der Urne und lege diese zusammen mit einer weiteren Kugel derselben Farbe zurück. Tatsächlich liefert eine austauschbare lineare Ordnung L auf \mathbb{N} damit also eine verschachtelte Folge von Standard-Pólya-Urnen beliebiger endlicher Farbzahlen. Aus diesem Grund könnte man später auch von *durch Pólyaurnen angetriebenen Prozessen* sprechen. ∇

3.4. Konsistente Systeme der Form $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$

Es sei \mathbf{F} ein konsistentes System und $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ das Produktsystem von \mathbf{F} mit dem System der linearen Ordnungen \mathbf{Lin} . In diesem Kapitel wird $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ näher betrachtet; es geht also insbesondere um Verteilungen von $\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty$ -wertigen Zufallsobjekten (X_∞, L) mit $(\pi.X_\infty, \pi.L) \sim (X_\infty, L)$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_\infty$. Für solche Zufallsgrößen hat die zweite Komponente L damit stets die Verteilung $\text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$ und die erste Komponente X_∞ stets eine Verteilung aus $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$. Hierbei können interessante Kopplungen auftreten. Da auch $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ ein konsistentes System ist, kann man auch den Simplex $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ mit Simplex der Form $\mathcal{M}_1(\gamma)$ bzw. $\mathcal{M}_1(\tau)$ identifizieren, wobei die Rückwärtsdynamik γ im Produktsystem $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ nun wie folgt beschrieben wird:

$$\gamma_k^n : (\mathbb{F}_k \times \mathbb{S}_k) \times (\mathbb{F}_n \times \mathbb{S}_n) \rightarrow [0, 1],$$

$$\gamma_k^n((x_k, \pi_k), (x_n, \pi_n)) = (n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi.x_n) = x_k \text{ und } \text{pr}_k^n(\pi.\pi_n) = \pi_k\}.$$

Hierbei wurde \mathbb{S}_n mit \mathbb{L}_n über die Bijektion $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{L}_n, \pi \mapsto \pi.<_n$ (wie oben eingeführt bezeichnet $<_n$ die übliche lineare Ordnung auf $[n]$) identifiziert. Für jedes $\pi_n \in \mathbb{S}_n$ durchläuft $\pi.\pi_n^{-1}$ über $\pi \in \mathbb{S}_n$ ganz \mathbb{S}_n und man erhält

$$\begin{aligned} \gamma_k^n((\pi_k, x_k), (\pi_n, x_n)) &= \frac{1}{n!} |\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi.(\pi_n^{-1}.x_n)) = x_k \text{ und } \text{pr}_k^n(\pi) = \pi_k\}| \\ &= \frac{1}{n!} |\{\pi \in \mathbb{S}_n : \text{pr}_k^n(\pi)^{-1}.\text{pr}_k^n(\pi.(\pi_n^{-1}.x_n)) = \pi_k^{-1}.x_k \text{ und } \text{pr}_k^n(\pi) = \pi_k\}|. \end{aligned}$$

Für $1 \leq k \leq n$ sei $\Phi_k^n : \mathbb{F}_n \times \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{F}_k$ definiert durch $\Phi_k^n(x, \pi) := \text{pr}_k^n(\pi)^{-1}.\text{pr}_k^n(\pi.x)$. Damit erhält man

$$\gamma_k^n((\pi_k, x_k), (\pi_n, x_n)) = (n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \Phi_k^n(\pi_n^{-1}.x_n, \pi) = \pi_k^{-1}.x_k \text{ und } \text{pr}_k^n(\pi) = \pi_k\}. \quad (3.5)$$

Der Wert von $\gamma_k^n((\pi_k, x_k), (x_n, \pi_n))$ hängt also von (x_n, π_n) nur über $\pi_n^{-1}.x_n \in \mathbb{F}_n$ ab. Eine andere kanonische Möglichkeit den Simplex $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ darzustellen verlief über die Äquivalenzklassenprozesse. Im Produktsystem kann man kanonische Vertreter der Äquivalenzklassen leicht auswählen: Ist $(x, \pi) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{S}_n$ gegeben, so ist die Äquivalenzklasse $[(x, \pi)] = \{(\sigma.x, \sigma.\pi) : \sigma \in \mathbb{S}_n\}$. Man wählt den Vertreter $(\pi^{-1}.x, \text{id})$ und identifiziert diesen mit $\pi^{-1}.x$. Das zeigt sofort: Ist (X_∞, L) ein gemeinsam austauschbares Objekt, so ist der Prozess $(S_n^{-1}.\text{pr}_n(X_\infty))_{n \geq 1}$ eine Markovkette mit Werten in \mathbb{F} . Der zum Produktsystem $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ gehörige Limesbegriff (Limesbegriff II) diskreter Strukturen kann also auch hier über Folgen in $(z_m) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_n$ analysiert und mit dem Limesbegriff in \mathbf{F} (Limesbegriff I) verglichen werden. Die Limiten im zweiten Limesbegriff beschreiben die Extrempunkte in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ und die Limiten im ersten Limesbegriff die Extrempunkte in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$: Die durch den zweiten Limesbegriff beschriebene Topologie ist feiner als die zum ersten gehörige; weniger Folgen konvergieren gegen eine reichhaltigere Menge von Limiten.

Die Zusammenhänge werden im nächsten Abschnitt systematisch als Bilder von Pfadräumen angegeben.

3.4.1. Homöomorphe Pfadräume $\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty \leftrightarrow \text{Path}(\Phi) \leftrightarrow \text{Path}(\Lambda)$

Man erinnere sich an die Homöomorphismen (3.3) und (3.4) aus Abschnitt 3.3.1:

$$\mathbb{L}_\infty \xrightarrow{\mathbf{g}} \text{Proj}(\mathbb{S}) \xrightarrow{\mathbf{h}} \prod_{k \geq 1} [k].$$

In diesem Abschnitt wird eine Analogie für Produktsysteme der Form $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ vorgestellt. Genauer werden Pfadräume $\text{Path}(\Phi)$, ein HMB $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ mit Pfadraum $\text{Path}(\Lambda)$ und diskrete Homöomorphismen $\mathbf{g} : \mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty \rightarrow \text{Path}(\Phi)$ und $\mathbf{h} : \text{Path}(\Phi) \rightarrow \text{Path}(\Lambda)$ angegeben:

$$\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty \xrightarrow{\mathbf{g}} \text{Path}(\Phi) \xrightarrow{\mathbf{h}} \text{Path}(\Lambda).$$

Zunächst werden $\text{Path}(\Phi)$ und \mathbf{g} eingeführt:

Definition 3.4.1. Für $1 \leq k \leq n$ sei $\Phi_k^n : \mathbb{F}_n \times \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{F}_k$ wie oben definiert durch

$$\Phi_k^n(x, \pi) := \text{pr}_k^n(\pi)^{-1} \cdot \text{pr}_k^n(\pi \cdot x).$$

Damit sei $\text{Path}(\Phi) \subset \text{Path}(\mathbb{F}) \times \text{Proj}(\mathbb{S})$ definiert durch

$$\text{Path}(\Phi) := \{(x_n, \pi_n)_{n \geq 1} \in \text{Path}(\mathbb{F}) \times \text{Proj}(\mathbb{S}) : \Phi_k^n(x_n, \pi_n) = x_k \text{ für alle } 1 \leq k \leq n\}.$$

Die Menge $\text{Path}(\Phi)$ wird mit der üblichen Pfadraumtopologie ausgestattet. Für $(x, l) \in \mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty$ sei $(\pi_n)_{n \geq 1} := \mathbf{g}(l) \in \text{Proj}(\mathbb{S})$ und $x_n := \pi_n^{-1} \cdot \text{pr}_n(x) \in \mathbb{F}_n$. Damit sei $\mathbf{g}(x, l) := (x_n, \pi_n)_{n \geq 1}$.

Lemma 3.4.2. Die so definierte Funktion \mathbf{g} ist ein Homöomorphismus von $\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty$ nach $\text{Proj}(\Phi)$.

Beweis. Dass $\mathbf{g}(x, l) \in \text{Path}(\Phi)$ ist, rechnet man elementar nach. Die Umkehrfunktion von \mathbf{g} ist wie folgt gegeben: Ist $(x_n, \pi_n)_{n \geq 1}$ ein Element in $\text{Proj}(\Phi)$, so ist $(\pi_n \cdot x_n)_{n \geq 1}$ eine projektive Folge in \mathbb{F} und liefert ein eindeutiges Element $x \in \mathbb{F}_\infty$ mit $\text{pr}_n(x) = \pi_n \cdot x_n$ für alle n . Die Zuordnung $(x_n, \pi_n)_{n \geq 1} \mapsto (x, \mathbf{g}^{-1}((\pi_n)_{n \geq 1}))$ ist die Umkehrfunktion \mathbf{g}^{-1} . Die Stetigkeit beider Zuordnungen ist klar. \square

Bevor das Ganze am Beispiel $\mathbf{F} = \mathbf{Word}(\Sigma)$ näher erläutert wird, folgt noch eine weitere fundamentale Beobachtung. Das oben angekündigte HMB $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ wird nun direkt in „reduzierter“ Form definiert. Dies gelingt über folgende Eigenschaft:

Lemma 3.4.3. Für alle $1 \leq k \leq n$ und $x \in \mathbb{F}_n, \pi \in \mathbb{S}_n$ hängt der Wert von $\Phi_k^n(x, \pi)$ nur von x und der Menge $\pi^{-1}([k])$ ab. Insbesondere gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $\Psi_k^n : \mathbb{F}_n \times [k : n] \rightarrow \mathbb{F}_k$, sodass $\Phi_k^n(x, \pi) = \Psi_k^n(x, (j_1, \dots, j_k))$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_n$ mit $\pi^{-1}([k]) = \{j_1, \dots, j_k\}$ gilt.

Das Lemma folgt sofort aus der Konsistenzeigenschaft zusammen mit folgender Aussage:

Lemma 3.4.4. Es sei $1 \leq k \leq n, \pi \in \mathbb{S}_n$ und $A := \pi^{-1}([k])$ sowie $j = (j_1, \dots, j_k) := j(A)$. Es sei $\pi^* \in \mathbb{S}_n$ die Einbettung von $\text{pr}_k^n(\pi)^{-1}$ nach \mathbb{S}_n , also $\pi^*(j) := \text{pr}_k^n(\pi)^{-1}(j)$ für $1 \leq j \leq k$ und $\pi^*(j) := j$ für $k < j \leq n$. Damit ist $\sigma := \pi^* \cdot \pi \in \mathbb{S}_n$ diejenige Permutation mit $\sigma|_{A^c} = \pi|_{A^c}$ und $\sigma(j_i) = i$ für $1 \leq i \leq k$.

Beweis. Es sei $s \in A^C$. Dann ist $\pi(s) \in \{k+1, \dots, n\}$. Es wird $\text{pr}_k^n(\pi)$ als Permutation von $[n]$ aufgefasst via $\text{pr}_k^n(\pi)(r) = r$ für $r \in \{k+1, \dots, n\}$. Damit ist auch $\text{pr}_k^n(\pi)^{-1}(r) = r$ für $r \in \{k+1, \dots, n\}$, also $\sigma(i) = \text{pr}_k^n(\pi)^{-1}(\pi(s)) = \pi(s)$ für $s \in A^C$. Nun wird für $1 \leq i \leq k$ der Wert $j_i \in A$ betrachtet. Es ist $\pi(j_i) \in [k]$ und bzgl. der linearen Ordnung $l(\text{pr}_k^n(\pi))$ ist $\pi(j_i)$ das i -te Element, also $\text{pr}_k^n(\pi)^{-1}(\pi(j_i)) = i$. \square

Beispiel 3.4.5. Es sei $\mathbf{Word}(\Sigma)$ das konsistente System der Wörter. Für $(w_1, \dots, w_n) \in \Sigma^n = \mathbb{F}_n$ und $\pi \in \mathbb{S}_n$ mit $\pi^{-1}([k]) = \{j_1, \dots, j_k\}$ und $(j_1, \dots, j_k) \in [k:n]$ ist

$$\Phi_k^n((w_1, \dots, w_n), \pi) = \Psi_k^n((w_1, \dots, w_n), (j_1, \dots, j_k)) = (w_{j_1}, \dots, w_{j_k}).$$

Also: $\Phi_k^n((w_1, \dots, w_n), \pi)$ entsteht aus dem Wort (w_1, \dots, w_n) indem das Teilwort an den Positionen $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ induziert wird. In diesem Beispiel ist $\mathbb{F}_\infty = \Sigma^\mathbb{N}$ ein geeignetes Limesystem. Es sei $w = (w_j)_{j \geq 1} \in \Sigma^\mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{L}_\infty$ sei eine lineare Ordnung. Dann ist $(x_n, \pi_n)_{n \geq 1} := \mathbf{g}(w, l)$ wie folgt erklärt: Es ist $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,n}) = \pi_n^{-1} \cdot (w_1, \dots, w_n) = (w_{\pi_n(1)}, \dots, w_{\pi_n(n)}) \in \Sigma^n$. Das Wort x_{n+1} entsteht aus x_n , indem an Position $\pi_{n+1}^{-1}(n+1)$ der Buchstabe w_{n+1} eingefügt wird. In π_n ist die Reihenfolge gespeichert, in welcher die einzelnen Ziffern in x_n aufgenommen wurden. Konkret: Ist

$$w = (a, b, c, d, e, f, \dots) \quad \text{und} \quad l = (\dots, 6, \dots, 4, \dots, 2, \dots, 5, \dots, 1, \dots, 3, \dots),$$

so ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und weiter

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b & a & c \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_5 \\ \pi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & b & e & a & c \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad \triangleleft$$

Nun zur bereits angekündigten Definition des Diagramms $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$:

Definition 3.4.6. Für $n \geq 2$ ist jeder Vektor aus $[n-1:n]$ von der Form $(1, \dots, j-1, j+1, \dots, n)$ für ein eindeutig bestimmtes $j \in [n]$. Man definiert das HMB $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ wie folgt: $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}([n])$ wie zuvor, $\mathbb{A}_n := [n]$ und $\Lambda_{n-1}^n: \mathbb{F}_n \times [n] \rightarrow \mathbb{F}_{n-1}$ durch $\Lambda_{n-1}^n(x, j) := \Psi_{n-1}^n(x, (1, \dots, j-1, j+1, \dots, n))$. Es sei $\text{Path}(\Lambda)$ die Menge der Pfade in diesem Diagramm.

Damit erhält man nun sofort:

Lemma 3.4.7. Für alle $(x_n, \pi_n)_{n \geq 1} \in \text{Path}(\Phi)$ ist $\mathbf{h}((x_n, \pi_n)_{n \geq 1}) := (x_n, \pi_n^{-1}(n))_{n \geq 1} \in \text{Path}(\Lambda)$ und die so konstruierte Zuordnung $\mathbf{h}: \text{Path}(\Phi) \rightarrow \text{Path}(\Lambda)$ ist ein Homöomorphismus.

Zuletzt in diesem Unterabschnitt noch einige elementare Rechenregeln für die Funktionen Ψ_k^n , ohne Beweis:

Lemma 3.4.8. Ist $1 \leq k \leq m \leq n$ und $x \in \mathbb{F}_n$ sowie $j = (j_1, \dots, j_m) \in [m:n]$ und $h = (h_1, \dots, h_k) \in [k:m]$, so gilt

$$\Psi_k^m(\Psi_m^n(x, j), h) = \Psi_k^n(x, (j_{h_1}, j_{h_2}, \dots, j_{h_k})).$$

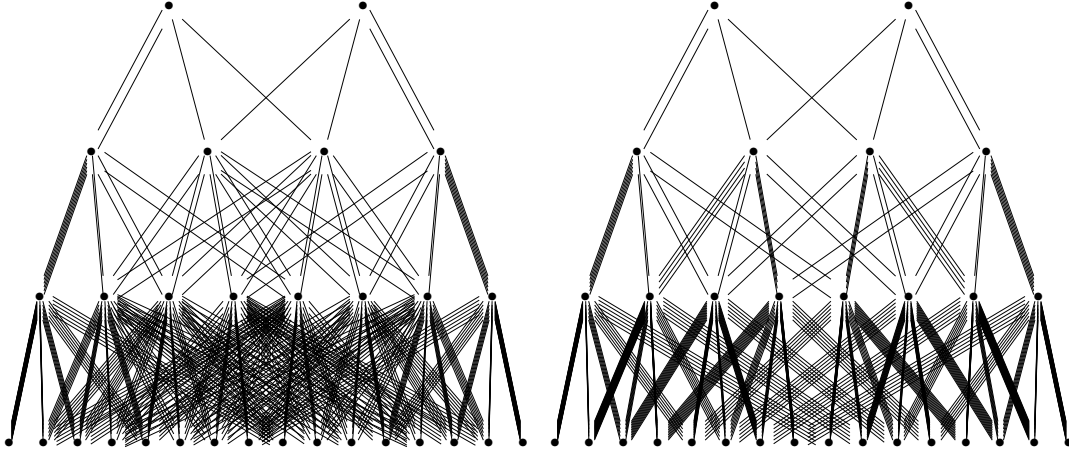


Abb. 3.4.: Knoten der Ebene n entsprechen $\{a, b\}^n$. Links sind Kanten der Form $(\text{pr}_{n-1}^n(\pi.x), x)$ gezeichnet, rechts die Kanten $(\text{pr}_{n-1}^n(\pi)^{-1} \cdot \text{pr}_{n-1}^n(\pi.x), x)$. Die zentralen Maße links entsprechen (sind isomorph zu) $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty)$, rechts $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty \times \mathbb{L}_\infty)$.

Über die Bijektion $(k : n) \rightarrow [k : n]$, $A \mapsto j(A)$ werden die Funktionen Ψ_k^n auch als Funktionen $\Psi_k^n : \mathbb{F}_n \times (k : n) \rightarrow \mathbb{F}_k$ aufgefasst. Ist $1 \leq k \leq m \leq n$ und $x \in \mathbb{F}_n$ sowie $\pi \in \mathbb{S}_n$ und $A \subseteq [m]$ mit $|A| = k$ so gilt

$$\Psi_k^m(\Phi_m^n(x, \pi), \text{pr}_m^n(\pi)^{-1}(A)) = \Psi_k^n(x, \pi^{-1}(A)).$$

Beispiel 3.4.9. Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Erklärt werden die zu $\mathbf{Word}(\Sigma)$ und $\mathbf{Word}(\Sigma) \times \mathbf{Lin}$ assoziierten Bratellidiagramme. Zunächst zu Abbildung 3.4: Im linken Diagramm werden alle Kanten der Form $(\text{pr}_{n-1}^n(\pi.x), x)$, $x \in \mathbb{F}_n$, $\pi \in \mathbb{S}_n$ und im rechten Diagramm alle Kanten der Form $(\Phi_{n-1}^n(x, \pi), x)$, $x \in \mathbb{F}_n$, $\pi \in \mathbb{S}_n$ gezeichnet. Die zentralen Prozesse im ersten Diagramm entsprechen $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty)$ und im zweiten Diagramm $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty \times \mathbb{L}_\infty)$. In beiden Diagrammen sind die Kanten durch \mathbb{S}_n markiert, aber die Markierung wird wieder weggelassen: Beide Diagramme enthalten viele Redundanzen, wenn es darum geht, die zentralen Maße zu determinieren. Im ersten Fall muss man nicht jeden Knoten zeichnen: Man wählt aus jeder Äquivalenzklasse einen Knoten aus. Im Fall der Wörter entsprechen die Äquivalenzklassen der Ebene n den Punkten $(0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)$ und man erhält ein unmarkiertes Diagramm vom Grad n (siehe Beispiel 3.2.21 und Lemma 3.2.19). Im zweiten Fall besteht die Bereinigung der Redundanzen darin, dass $\Phi_{n-1}^n(x, \pi)$ von π nur über $\pi^{-1}(n)$ abhängt. Man kann also je $(n-1)!$ Kanten auf kanonische Weise zu einer Kante zusammenfassen. Anders als im ersten Fall hat man zusätzlich eine kanonische Möglichkeit die Kanten zu markieren (durch $\pi^{-1}(n)$) und erhält ein HMB vom Grad n . Man erhält die beiden Diagramme in Abbildung 3.5, welche wiederum $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty)$ bzw. $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ repräsentieren. \triangleleft

3.4.2. Simplizes und Limiten diskreter Strukturen (II)

In der Situation der linearen Ordnungen auf \mathbb{N} bestand der Simplex der austauschbaren Verteilungen $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty)$ einzig aus der Verteilung der gleichverteilten linearen Ordnung,

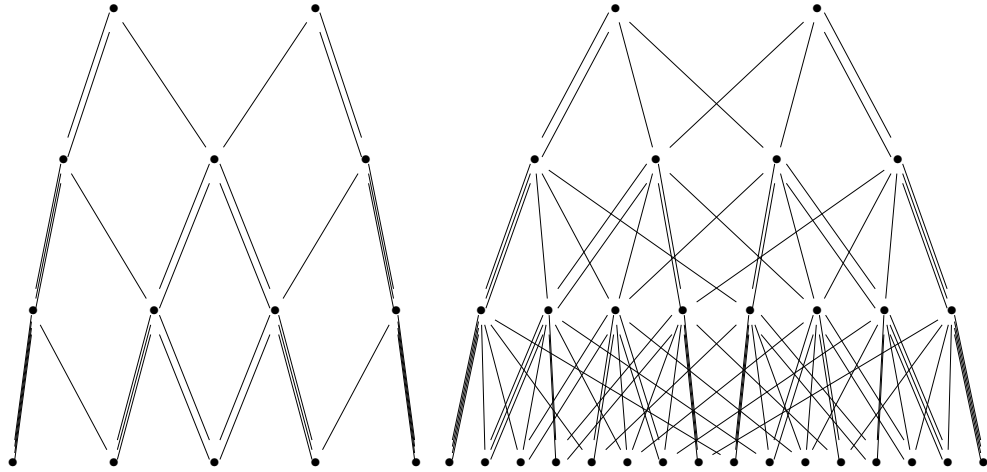


Abb. 3.5.: Im Vergleich zu Abbildung 3.4 sind die Graphen nun „auf das Wesentliche“ reduziert. Die Knoten der Ebene n im linken Diagramm entsprechen den Worten $a^j b^{n-j}$ für $j = 0, \dots, n$, im rechten Diagramm nach wie vor $\{a, b\}^n$. Wie die Kanten entstehen, ist in Beispiel 3.4.9 erklärt.

$\text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$, auf \mathbb{N} . Diese Verteilung wurde über die Homöomorphismen \mathbf{g} und \mathbf{h} auf eindeutige Verteilungen in $\text{Proj}(\mathbb{S})$ bzw. $\prod_k [k]$ transferiert. Im Fall der Homöomorphismen \mathbf{g} und \mathbf{h} wird nun zunächst der Simplex $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ betrachtet. Dieser besteht in der Regel aus weit mehr als einem Punkt. Die Bilder des Simplex $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ unter den Push-Forward Abbildungen $P \mapsto P^{\mathbf{g}}$ bzw. $P \mapsto P^{\mathbf{h} \circ \mathbf{g}}$ werden nun beschrieben und im letzten Fall mit den zentralen Verteilungen des Diagrammes aus Definition 3.4.6 identifiziert. Zunächst sei

$$\mathcal{M}_1(\Phi) := \{P^{\mathbf{g}} : P \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)\} \subseteq \mathcal{M}_1(\text{Path}(\Phi)).$$

Satz 3.4.10. *Ein stochastischer Prozess $(X, S) = (X_n, S_n)_{n \geq 1}$ hat genau dann Verteilung $\mathbb{P}^{(X, S)} \in \mathcal{M}_1(\Phi)$, wenn die Eigenschaften*

- für alle $1 \leq k \leq n$ gilt $\Phi_k^n(X_n, S_n) = X_k$ fast sicher und $\text{pr}_k^n(S_n) = S_k$ fast sicher (kurz $\mathbb{P}((X, S) \in \text{Path}(\Phi)) = 1$),*
- $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ für alle $n \geq 1$ und*
- S_n und (X_n, X_{n+1}, \dots) sind für alle $n \geq 1$ unabhängig*

gelten. Ferner ist $\{P^{\mathbf{h}} : P \in \mathcal{M}_1(\Phi)\} = \mathcal{M}_1(\Lambda)$ die Menge der Verteilungen von zentralen Prozessen im HMB $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$.

Beweis. Es sei (X_∞, L) austauschbar mit Werten in $\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty$ und $(X, S) := \mathbf{g}(X_\infty, L)$. Man muss begründen, dass S_n und X_n unabhängig sind. Es ist $X_n = S_n^{-1} \cdot \text{pr}_n(X_\infty)$. Es sei $x \in \mathbb{F}_n$ und $\pi \in \mathbb{S}_n$. Man erhält

$$\mathbb{P}(X_n = x, S_n = \pi) = \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = \pi \cdot x, S_n = \pi).$$

Da (X_∞, L) gemeinsam austauschbar ist, gilt $(\sigma \cdot \text{pr}_n(X_\infty), \sigma \cdot S_n) \sim (\text{pr}_n(X_\infty), S_n)$ für alle $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Mit $\sigma = \pi$ erhält man damit

$$\mathbb{P}(X_n = x, S_n = \pi) = \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x, S_n = \text{id}). \quad (3.6)$$

Summiert man über alle $\pi \in \mathbb{S}_n$, so folgt

$$\mathbb{P}(X_n = x) = n! \cdot \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x, S_n = \text{id}).$$

Da $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ liefert das zusammen mit Gleichung (3.6) die Behauptung: $\mathbb{P}(X_n = x)\mathbb{P}(S_n = \pi) = \mathbb{P}(X_n = x, S_n = \pi)$. Also hat jede Verteilung aus $\mathcal{M}_1(\Phi)$ die genannten Eigenschaften a), b) und c).

Umgekehrt sei ein Prozess $(X, S) = (X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit den genannten Eigenschaften a), b) und c) gegeben. Es sei $(X_\infty, L) := \mathbf{g}^{-1}(X, S)$. Man muss begründen, dass (X_∞, L) gemeinsam austauschbar ist. Es ist $\text{pr}_n(X_\infty) = S_n \cdot X_n$. Damit muss man zeigen, dass $(S_n \cdot X_n, S_n)$ für jedes n gemeinsam austauschbar ist. Nun sind X_n und S_n für alle n unabhängig und $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$. Damit ist $\sigma \cdot S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_n$ und man erhält $(X_n, S_n) \sim (X_n, \sigma \cdot S_n)$ für alle n und $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Damit auch $(S_n \cdot X_n, S_n) \sim (\sigma \cdot S_n \cdot X_n, \sigma \cdot S_n)$ für alle n . Also die gemeinsame Austauschbarkeit. Insgesamt folgt die erste Behauptung. Die letzte Aussage folgt mit ähnlich elementaren Argumenten. \square

Betrachtet man das HMB $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$, so ergeben sich die Mehr-Schritt-Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten aus dem vorangegangenen Satz zu

$$\begin{aligned} \psi_k^n &: \mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_n \rightarrow [0, 1], \\ \psi_k^n(x_k, x_n) &= (n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \Phi_k^n(x_n, \pi) = x_k\}. \end{aligned}$$

Satz 3.4.11. *Es gilt $\gamma_k^n((x_k, \pi_k), (x_n, \pi_n)) = (k!)^{-1} \psi_k^n(\pi_k^{-1} \cdot x_k, \pi_n^{-1} \cdot x_n)$. Ist (X_∞, L) ein gemeinsam austauschbares Objekt und $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty, L)$ die gemeinsam austauschbare σ -Algebra und ist*

$$(X_n, S_n)_{n \geq 1} := \mathbf{g}(X_\infty, L),$$

so stimmt die terminale σ -Algebra $\mathcal{G}_\infty(X) = \bigcap_n \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ mit $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty, L)$ modulo \mathbb{P} überein.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Darstellung (3.5) für γ_k^n und der Tatsache, dass $\Phi_k^n(\cdot, \pi)$ nur von der Menge $\pi^{-1}([k])$ abhängt. Die zweite Aussage folgt dann direkt daraus und aus der Tatsache, dass die beteiligten σ -Algebren von den fast sicheren Limiten $\lim_n \gamma_k^n(\cdot, (\text{pr}_n(X_\infty), \text{pr}_n(L)))$ bzw. $\lim \psi_k^n(\cdot, X_n)$ erzeugt werden. \square

Aufgrund der Definitionen ist klar, dass die Simplizes $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$, $\mathcal{M}_1(\Phi)$ und $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ bzw. $\mathcal{M}_1(\psi)$ allesamt isomorph sind (siehe dazu unter anderem Satz 1.4.3). Insbesondere sind alle diese Simplizes Bauersimplizes. Ferner gilt eine *geordnete Variante* von Satz 3.2.23; nachfolgenden Satz beweist man entweder direkt analog oder man verwendet Satz 3.2.23 im Zusammenspiel mit weiteren Argumenten:

Satz 3.4.12. *Es sei $X = (X_n)_{n \geq 1}$ eine Markovkette mit Verteilung in $\mathcal{M}_1(\psi)$. Dann sind äquivalent*

1. $\mathbb{P}^X \in \partial \mathcal{M}_1(\psi)$.

2. Für alle $n \geq 1$ gilt: Ist $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ von X_n unabhängig und sind $A, B \subseteq [n]$ disjunkt mit $|A| = k$ und $|B| = j$, so sind $\Psi_j^n(X_n, S_n^{-1}(A))$ und $\Psi_k^n(X_n, S_n^{-1}(B))$ unabhängig.

3. $\mathbb{P}^X \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\psi))$.

Achtung: Das nachfolgende γ bezieht sich auf das System \mathbf{F} , nicht wie bisher in diesem Abschnitt auf das Produktsystem $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$. Eine Folge $\mathbf{y} = (y_n)_{n \geq 1}$ mit $y_n \in \mathbb{F}_{m_n}$ und $m_n \rightarrow \infty$ heißt γ -konvergent (Konvergenz bzgl. \mathbf{F}), falls

$$\gamma_k^{m_n}(x, y_n) = (m_n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_{m_n} : \text{pr}_k^{m_n}(\pi \cdot y_n) = x\}$$

für alle $k \geq 1$ und $x \in \mathbb{F}_k$ konvergiert. Die Folge heißt ψ -konvergent (Konvergenz bzgl. $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$), falls

$$\psi_k^{m_n}(x, y_n) = (m_n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_{m_n} : \text{pr}_k^{m_n}(\pi \cdot y_n) = \text{pr}_k^{m_n}(\pi) \cdot x\}$$

für alle $k \geq 1$ und $x \in \mathbb{F}_k$ konvergiert. Man erhält zunächst folgenden einfachen Zusammenhang zwischen ψ und γ :

Lemma 3.4.13. Für alle $1 \leq k \leq n$ und $x_k \in \mathbb{F}_k, x_n \in \mathbb{F}_n$ gilt

$$\frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_k} \psi_k^n(\pi \cdot x_k, x_n) = \gamma_k^n(x_k, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} \psi_k^n(x_k, \pi \cdot x_n).$$

Insbesondere ist jede ψ -konvergente Folge auch γ -konvergent.

Beweis. Es seien $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ und $S_k \sim \text{unif}(\mathbb{S}_k)$ unabhängig. Dann gilt

$$\frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_k} \psi_k^n(\pi \cdot x_k, x_n) = \mathbb{P}(\Phi_k^n(x_n, S_n) = S_k \cdot x_k) = \mathbb{P}(\text{pr}_k^n(S_n \cdot x_n) = \text{pr}_k^n(S_n) \cdot S_k \cdot x_k).$$

Nun sind S_n und $\text{pr}_k^n(S_n) \cdot S_k$ unabhängig und man erhält damit

$$\mathbb{P}(\text{pr}_k^n(S_n \cdot x_n) = \text{pr}_k^n(S_n) \cdot S_k \cdot x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_k} \gamma_k^n(\pi \cdot x_k, x_n) = \gamma_k^n(x_k, x_n),$$

da γ_k^n über seine Argumente nur von den Äquivalenzklassen abhängt. Die zweite Gleichheit folgt analog: Es sei $R_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ von S_n unabhängig. Dann ist

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} \psi_k^n(x_k, \pi \cdot x_n) = \mathbb{P}(\Psi_k^n(R_n \cdot x_n, S_n) = x_k) = \mathbb{P}(\text{pr}_k^n(S_n \cdot R_n \cdot x_n) = \text{pr}_k^n(S_n) \cdot x_k).$$

Nun sind $S_n \cdot R_n$ und $\text{pr}_k^n(S_n)$ unabhängig und es gilt $S_n \cdot R_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$. Wie zuvor erhält man damit die Behauptung. \square

Beispiel 3.4.14. Im System $\mathbf{Word}(\Sigma)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$ betrachte man die Folgen $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n = a^n b^n$ und $\mathbf{y} = (y_n)_{n \geq 1}$ mit $y_n = (ab)^n$. Beide Folgen sind γ -konvergent, denn die relativen Anteile der a und b konvergieren in beiden Fällen gegen $1/2$. Insbesondere stimmen die Limiten in der γ -Topologie beider Folgen überein. Beide Folgen sind auch ψ -konvergent. Ist $w = (w_1, \dots, w_k) \in \{a, b\}^k$ erhält man für die Folge \mathbf{x} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_k^{2n}(w, a^n b^n) = \begin{cases} \binom{k}{j} \frac{1}{2^k}, & \text{falls } w = a^j b^{k-j}, j = 0, \dots, k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Folge \mathbf{y} erhält man hingegen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_k^{2n}(w, (ab)^n) = \frac{1}{2^k}.$$

Also sind sowohl \mathbf{x} als auch \mathbf{y} ψ -konvergent, haben in dieser Topologie aber *unterschiedliche* Limiten. Die Folge $\mathbf{z} = (z_n)_{n \geq 1}$ mit $z_n = x_n$ falls n gerade und $z_n = y_n$ falls n ungerade ist damit ein Beispiel für eine Folge, die zwar γ -konvergent, aber nicht ψ -konvergent ist. \triangleleft

3.4.3. Starke Verteilungen in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$

Nun zu den starken Verteilungen im Diagramm $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ (siehe Definition 3.4.6). Anders als in früheren Situationen können hier interessante nicht-triviale starke Verteilungen existieren. Zu einer gleichverteilten linearen Ordnung L auf \mathbb{N} sei nach wie vor $U = (U_i)_{i \geq 1}$ der iid Prozess mit $U_i = \lim_n n^{-1} \#\{j \in [n] : jLi\}$ und $U_{1:k} < \dots < U_{k:k}$ sei die Ordnungst Statistik zu U_1, \dots, U_k . Prozesse $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ mit Verteilung in $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ werden rückwärts in der Zeit von *Pólya-Urnenprozessen angetrieben*, genauer: $\Gamma_k^n(\cdot, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ ist messbar bzgl. der Menge $S_n^{-1}([k])$. Für festes k verhält sich der Prozess $(S_n^{-1}([k]))_{n \geq k}$, wie in Bemerkung 3.3.12 gesehen, wie ein Standard- $k+1$ -Farben-Pólyaurnenprozess. Insbesondere sind die terminalen σ -Algebren dieser Prozesse *nicht* trivial und genau das macht eine Suche nach *nicht degenerierten* extremalen starken Verteilungen in diesen Diagrammen zumindest von vornherein nicht unnötig. Der nachfolgende Satz zeigt sogar, dass die extremalen starken Verteilungen in der Repräsentation von $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ durch (X_∞, L) im Sinne der Ergodentheorie (vgl. [Gla03]) genau mit den *Graph-Joinings* der Form $(f(L), L)$ übereinstimmen.

Satz 3.4.15. *Es sei (X_∞, L) mit Verteilung in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ und zugehörigem zentralen Prozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1} := \mathbf{h}(\mathbf{g}(X_\infty, L))$. Es sei $\mathcal{G}_\infty(X)$ die terminale σ -Algebra von $X = (X_n)_{n \geq 1}$ und $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty, L)$ die austauschbare σ -Algebra von (X_∞, L) im Produktsystem. Dann sind äquivalent:*

1. Die Verteilung von $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ist stark.
2. Für alle $k \geq 1$ gilt $\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{G}_\infty(X) \vee \sigma(U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$.
3. Für alle $k \geq 1$ gilt $\sigma(\text{pr}_k(X_\infty)) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty, L) \vee \sigma(U_1, \dots, U_k)$.
4. $\sigma(X_\infty, L) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty, L) \vee \sigma(L)$.

Beweis. Nach Satz 3.4.11 gilt $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty, L) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}(X)$.

1. \Rightarrow 2.: Es ist $\Lambda_k^n(\cdot, a_{k+1}, \dots, a_n) = \Psi_k^n(\cdot, j(\pi^{-1}([k])))$ für $\pi = \pi(a_1, \dots, a_n)$ konstruiert aus $(a_1, \dots, a_n) \in [1] \times [2] \times \dots \times [n]$ via $\text{pr}_k^n(\pi)^{-1}(k) = a_k$. Damit gilt

$$\bigcap_{n > k} \sigma(\Gamma_k^n, \Gamma_k^{n+1}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \bigcap_{n > k} \sigma(J^{n,k}, J^{n+1,k}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \dots).$$

Wegen

$$\bigcap_{n > k} \sigma(J^{n,k}, J^{n+1,k}, \dots) = \sigma(U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$$

folgt damit 2. aus 1. mithilfe von Satz 2.2.7.

2. \Rightarrow 3. : Es gilt $\mathcal{G}_\infty(X) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty, L)$. Für $k \geq 1$ ist $\text{pr}_k(X_\infty) = S_k \cdot X_k$ und damit $\sigma(\text{pr}_k(X_\infty)) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(X_k) \vee \sigma(S_k)$. Per Annahme erhält man

$$\sigma(\text{pr}_k(X_\infty)) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{G}_\infty(X) \vee \sigma(U_{1:k}, \dots, U_{k:k}) \vee \sigma(S_k) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty, L) \vee \sigma(U_1, \dots, U_k)$$

und damit 3..

3. \Rightarrow 4. : Es ist $\sigma(X_\infty) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(\text{pr}_1(X_\infty), \text{pr}_2(X_\infty), \text{pr}_3(X_\infty), \dots)$ und $\sigma(L) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(U_1, U_2, \dots)$.

4. \Rightarrow 1. : Es ist $\sigma(X_\infty, L) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma((X_n, \eta_n)_{n \geq 1})$ und $\mathcal{I}^{\text{sym}}(X_\infty, L) \vee \sigma(L) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_\infty(X) \vee \sigma((\eta_n)_{n \geq 1})$. \square

Die äquivalenten Formulierungen aus Satz 2.2.7 der Eigenschaft „stark“ einer Verteilung können in Worten wie folgt ausgedrückt werden:

Satz 3.4.16. *Es sei $(X_n)_{n \geq 1}$ ein Prozess mit Verteilung in $\mathcal{M}_1(\psi)$. Für jedes $k \geq 1$ sei $(J_1^n, J_2^n - J_1^n, \dots, n+1 - J_k^n)_{n \geq k}$ ein Standard- $k+1$ -Farben-Pólyaurnenprozess, unabhängig von $(X_n)_{n \geq 1}$. Die Verteilung von $(X_n)_{n \geq 1}$ ist genau dann stark, wenn $\Psi_k^n(X_n, (J_1^n, \dots, J_k^n))$ für alle $k \geq 1$ mit $n \rightarrow \infty$ in Wahrscheinlichkeit konvergiert.*

Satz 3.4.17. *Es seien (X_∞, L) und $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ wie in Satz 3.4.15. Genau dann sind X_∞ und L unabhängig, wenn $\pi \cdot X_n \sim X_n$ für alle $n \geq 1$ und $\pi \in \mathbb{S}_n$ gilt.*

Beweis. Sind X_∞ und L unabhängig, so ist $X_n = S_n^{-1} \cdot \text{pr}_n(X_\infty)$ mit $S_n = \pi_n(L)$ offensichtlich austauschbar. Gilt umgekehrt $\pi \cdot X_n \sim X_n$ für alle n und π , so erhält man für $x \in \mathbb{F}_n$ und $\pi \in \mathbb{S}_n$ zunächst mit der gemeinsamen Austauschbarkeit von X_∞ und L :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = x) &= \mathbb{P}(S_n^{-1} \cdot \text{pr}_n(X_\infty) = x) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = \sigma \cdot x, S_n = \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x, S_n = \text{id}_n) \end{aligned}$$

und wegen $X_n \sim \pi \cdot X_n$ damit wieder aufgrund der gemeinsamen Austauschbarkeit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\pi \cdot X_n = x) &= \mathbb{P}(\pi \cdot S_n^{-1} \cdot \text{pr}_n(X_\infty) = x) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = \sigma \cdot \pi^{-1} \cdot x, S_n = \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x, S_n = \pi). \end{aligned}$$

Hiermit folgt

$$\mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x, S_n = \text{id}_n) = \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x, S_n = \pi)$$

für alle π und damit schlussendlich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x, S_n = \pi) &= \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x, S_n = \text{id}_n) = \frac{1}{n!} \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x) \\ &= \mathbb{P}(\text{pr}_n(X_\infty) = x) \mathbb{P}(S_n = \pi). \end{aligned}$$

Dies liefert die Unabhängigkeit von $\text{pr}_n(X_\infty)$ und $\pi_n(L) = S_n$ für alle $n \geq 1$ und damit die Behauptung. \square

Korollar 3.4.18. *Ist $P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))$ so ist die zu $P \otimes \text{unif}(\mathbb{L}_\infty) \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ gehörige Verteilung genau dann stark, wenn P degeneriert ist.*

Beispiel 3.4.19. Betrachtet wird wieder $\mathbf{Word}(\Sigma)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$. Es sei

$$P = \bigotimes_k \text{unif}(\{a, b\}).$$

Nach dem vorangegangenen Korollar ist die zu $P \otimes \text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$ gehörige Verteilung nicht stark. Wie passt dies mit Satz 3.4.16 zusammen? Angenommen $((Y_i)_{i \geq 1}, L)$ hat Verteilung $P \otimes \text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$. Es sei $S_n = \pi_n(L)$. Satz 3.4.16 macht nun eine Aussage über den Prozess $(X_n)_{n \geq 1}$ mit $X_n = S_n^{-1} \cdot (Y_1, \dots, Y_n) = (Y_{S_n(1)}, \dots, Y_{S_n(n)})$. Der Prozess $(X_n)_{n \geq 1}$ ist eine Markovkette mit folgender *Vorwärtsdynamik*: Gegeben $X_n = (w_1, \dots, w_n) \in \{a, b\}^n$ wählt man im Übergang von n nach $n+1$ gleichverteilt eine Zwischenposition $J \in \{1, \dots, n+1\}$ aus und fügt an dieser Stelle je mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ entweder den Buchstaben a oder b ein. Dieser Prozess besitzt keine starke Verteilung, tatsächlich wird das Kriterium aus Satz 3.4.16 bereits für $k=1$ verletzt. Ist $(J_1^n)_{n \geq 1}$ der Prozess, welcher die Anzahlen der weißen Kugeln in einem Standard-2-Farben-Pólyaurnenprozess beschreibt und ist dieser Prozess unabhängig von $(X_n)_{n \geq 1}$, so ist $\Psi_1^n(X_n, J_1^n) = Y_{S_n(J_1^n)} \in \{a, b\}$. Tatsächlich sind benachbarte Buchstaben im Wort X_n stets unabhängig und die Position J_1^n fluktuiert, eine stochastische Konvergenz der Buchstabenfolge $Y_{S_n(J_1^n)}$ liegt nicht vor. \triangleleft

3.4.4. Überdeckende und Φ -stabile Teilmengen

Will man $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ beschreiben, gelingt dies häufig dadurch, indem man eine Teilmenge $\mathcal{M}^* \subseteq \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ beschreibt, welche die Eigenschaft hat, dass das Bild von \mathcal{M}^* unter der Projektion $\pi_1 : \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty) \rightarrow \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$, $\mathcal{L}((X_\infty, L)) \mapsto \mathcal{L}(X_\infty)$ den Simplex $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ überdeckt. Häufig gelingt dies sogar mit einer abgeschlossenen Fläche \mathcal{M}^* . Wie man auf solche abgeschlossenen Flächen geführt werden kann, wird in diesem Abschnitt vorgestellt. Nach wie vor sei $\Phi_k^n : \mathbb{F}_n \times \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{F}_k$ definiert durch $\Phi_k^n(x, \pi) := \text{pr}_k^n(\pi)^{-1} \cdot \text{pr}_k^n(\pi \cdot x)$ und $\mathcal{M}_1(\Phi)$ sei der Simplex aller Verteilungen von stochastischen Prozessen $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit $\Phi_k^n(X_n, S_n) = X_k$ fast sicher, $\text{pr}_k^n(S_n) = S_k$ fast sicher und $X_n, S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ unabhängig für alle $1 \leq k \leq n$. Die Simplizes $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ und $\mathcal{M}_1(\Phi)$ sind wie oben beschrieben isomorph und darüber werden auch die abgeschlossenen Flächen miteinander identifiziert. Die Rückwärtsdynamik ψ auf \mathbb{F} ist gegeben durch

$$\psi_k^n : \mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_n \rightarrow [0, 1], \psi_k^n(x, y) = (n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_n : \Phi_k^n(y, \pi) = x\}.$$

Interessante abgeschlossene Flächen in $\mathcal{M}_1(\Phi)$ entstehen direkt über folgende Definition.

Definition 3.4.20. Für jedes $n \geq 1$ sei $\mathbb{G}_n \subseteq \mathbb{F}_n$ derart, dass $\Phi_k^n(\mathbb{G}_n, \mathbb{S}_n) \subseteq \mathbb{G}_k$ für alle $1 \leq k \leq n$ gilt. Eine solche Teilmengenfolge $\mathbb{G} = (\mathbb{G}_n, n \geq 1)$ heißt Φ -stabil. Es werden dann die Funktionen Φ_k^n, Ψ_k^n und damit auch ψ_k^n auf \mathbb{G} eingeschränkt. Es sei $\mathcal{M}_1(\psi, \mathbb{G}) \subseteq \mathcal{M}_1(\psi)$ der Simplex aller Verteilungen von Markovketten $X = (X_1, X_2, \dots)$ mit Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten ψ und $X_n \in \mathbb{G}_n$ für alle $n \geq 1$. Analog seien $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{G}) \subseteq \mathcal{M}_1(\Phi)$ und $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mathbb{G}) \subseteq \mathcal{M}_1(\Lambda)$ die assoziierten Verteilungsmengen.

Insbesondere ist $\mathcal{M}_1(\psi, \mathbb{G})$ der zum Teilgraph (\mathbb{G}, ψ) assoziierte Simplex von (\mathbb{F}, ψ) und Satz 1.6.9 liefert zusammen mit Satz 3.4.12 über die Gleichheit von Extrempunkten

und Martinrand in $\mathcal{M}_1(\psi)$, dass $\mathcal{M}_1(\psi, \mathbb{G}), \mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{G}), \mathcal{M}_1(\Lambda, \mathbb{G})$ allesamt abgeschlossene Flächen sind und dass $\partial\mathcal{M}_1(\psi, \mathbb{G}) = \text{ex}(\mathcal{M}_1(\psi, \mathbb{G}))$ gilt. Flächen dieser Form beschreiben über die Projektion π_1 nun den Simplex $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ surjektiv, sobald die Teilmengefølge \mathbb{G} folgende Eigenschaft besitzt:

Definition 3.4.21. Eine Teilmengefølge $\mathbb{G} = (\mathbb{G}_n, n \geq 1)$ mit $\mathbb{G}_n \subseteq \mathbb{F}_n$ heißt *überdeckend*, falls $\mathbb{S}_n \cdot \mathbb{G}_n := \{\pi \cdot y : \pi \in \mathbb{S}_n, y \in \mathbb{G}_n\} = \mathbb{F}_n$ für alle $n \geq 1$ gilt, es also zu jedem $x \in \mathbb{F}_n$ ein $y \in \mathbb{G}_n$ und eine Permutation $\pi \in \mathbb{S}_n$ mit $x = \pi \cdot y$ gibt.

Beispiel 3.4.22. Wählt man für jedes $n \geq 1$ und jede Äquivalenzklasse $[x] \in [\mathbb{F}_n]$ genau ein Element aus und fasst diese in der Menge \mathbb{G}_n zusammen, so ist \mathbb{G} eine überdeckende Teilmenge. Offenbar muss man aus jeder Äquivalenzklasse *mindestens* ein Element auswählen um eine überdeckende Teilmengefølge zu konstruieren. \triangleleft

Beispiel 3.4.23. Betrachtet wird **Word**(Σ). Fixiert man eine Aufzählung der Buchstaben des Alphabetes, also $\Sigma = \{b_1, \dots, b_m\}$, so erhält man eine kanonische Φ -stabile und überdeckende Teilmengefølge auf einfache Weise: Es sei $\mathbb{G}_n \subseteq \Sigma^n$ definiert als die Menge aller Wörter von der Gestalt $b_1^{n_1} b_2^{n_2} \dots b_m^{n_m}$ mit $n_i \geq 0$ und $n_1 + \dots + n_m = n$. Da $\Phi_k^n(x, \pi)$ hier so agiert, dass Buchstaben aus dem Wort entfernt und die restlichen Buchstaben dann zusammengeschohen werden, ist \mathbb{G} eine Φ -stabile Teilmenge. Ferner ist \mathbb{G}_n offenbar überdeckend und enthält aus jeder möglichen Äquivalenzklasse sogar genau ein Element. Das System **Word**(Σ) ist verglichen mit anderen Systemen deshalb so leicht zu beschreiben, weil eine solche minimale Φ -stabile Teilmengefølge existiert. \triangleleft

Satz 3.4.24. Ist \mathbb{G} überdeckend und Φ -stabil, so ist die Zuordnung

$$\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{G}) \rightarrow \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty), \quad \mathcal{L}((X_n, S_n)_{n \geq 1}) \mapsto \mathcal{L}((S_n \cdot X_n)_{n \geq 1})$$

affin, stetig und surjektiv.

Beweis. Es wird mit dem Simplex $\mathcal{M}_1(\gamma)$ gearbeitet. Es sei $\mathbb{P}^Z \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\gamma))$ extremal. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \in \mathbb{F}_n$ und $\mathbb{P}(Z_k = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^n(x, x_n)$ für alle $k \geq 1, x \in \mathbb{F}_k$. $\gamma_k^n(x, y)$ hängt nur über die Äquivalenzklassen von x und y ab. Da \mathbb{G} überdeckend ist, findet man zu jedem $x_n \in \mathbb{F}_n$ ein $y_n \in \mathbb{G}_n$ mit $[x_n] = [y_n]$, also auch $\gamma_k^n(x, x_n) = \gamma_k^n(x, y_n)$. Die Folge $y = (y_n)_{n \geq 1}$ hat nun eine bzgl. ψ konvergente Teilfolge y_{n_m} und liefert damit die Verteilung einer extremalen (Martinrand gleich Menge der Extrempunkte, Satz 3.4.12) markierten Version $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{P}(X_k = x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_k^{y_{n_m}}(x, y_{n_m})$ gilt. Für dieses (X_n, S_n) gilt damit wegen der Unabhängigkeit von S_k und X_k also mit Lemma 3.4.13

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_k \cdot X_k = x) &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_k} \mathbb{P}(X_k = \pi^{-1} \cdot x) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_k} \psi_k^{y_{n_m}}(\pi^{-1} \cdot x, y_{n_m}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_k^{y_{n_m}}(x, y_{n_m}) \\ &= \mathbb{P}(Z_k = x). \end{aligned}$$

Da für jeden extremalen Prozess $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ auch der Prozess $(S_n \cdot X_n)_{n \geq 1}$ extremal ist, hat man somit eine surjektive stetige Abbildung $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\psi, \mathbb{G})) \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1(\gamma))$ konstruiert. Ist $f : K \rightarrow K'$ eine surjektive stetige Abbildung zwischen kompakten metrisierbaren Räumen, so ist $\mathcal{M}_1(K) \rightarrow \mathcal{M}_1(K')$ mit $P \mapsto P^f$ surjektiv stetig und affin. \square

Im später ausführlich diskutierten Beispiel der Hierarchien wird man den Simplex der Form $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ nicht nur surjektiv und stetig über eine Fläche der Form $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}, \Phi)$ mit einer Φ -stabilen und überdeckenden Teilmenge beschreiben; die Beschreibung ist dort sogar so, dass *jede* Verteilung aus $\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \Phi)$ stark ist.

Bemerkung 3.4.25. Ist $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ eine γ -konvergente Folge in \mathbb{F} , welche eine extremale Verteilung $P^{\mathbf{x}} \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty))$ approximiert, so stellt sich die kanonische Frage: Gibt es zu jedem $Q \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty))$ mit erster Randverteilung $\pi_1(Q) = P^{\mathbf{x}}$ eine Folge $\mathbf{y} = (y_n)_{n \geq 1}$ mit $y_n \in [x_n]$, die ψ -konvergent ist und Limes $Q^{\mathbf{y}} = Q$ erfüllt? Im abschließenden Kapitel 6 wird im Kontext von *Regularity Partitions* bei Graphen auf diese Frage noch einmal kurz eingegangen. ∇

3.4.5. Die Aldous-Hoover-Kallenberg-Resultate im Kontext

In vielen konsistenten Systemen \mathbf{F} ist es so, dass projektive Limesräume \mathbb{F}_∞ von ganz besonderer Gestalt angegeben werden können: Es gibt eine endliche Menge S , sodass $\mathbb{F}_\infty \subseteq S^{\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})}$ ist und sodass $\pi \cdot x = x \circ \pi^{-1}$ für alle $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ gilt, wobei $\pi^{-1} : \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), e \mapsto \pi^{-1}(e)$ dabei (und in der Folge je nach Kontext) auch als Funktion auf Mengen aufgefasst wird. Ferner ist $\text{pr}_E(x)$ eine Funktion von $(x(e) : e \subseteq E)$ für alle endlichen $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ und die Topologie auf \mathbb{F}_∞ ist die Spurtopologie der diskreten Produkttopologie auf $S^{\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})}$.

Beispiel 3.4.26. Im System der Wörter $\mathbf{Word}(\Sigma)$ ist das kanonische Limesystem durch $\Sigma^{\mathbb{N}}$ gegeben. Mit $S := \Sigma \cup \{\square\}$, wobei $\square \notin \Sigma$ als Sondersymbol fungieren soll, kann man jedes $(w_i)_{i \geq 1} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ zu einem $x \in S^{\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})}$ mit $x(\{i\}) := w_i$ und $x(e) := \square$ für alle $e \subseteq \mathbb{N}$ mit $|e| \neq 1$ fortsetzen. Es sei $\text{pr}_E(x) \in \Sigma^E$ erklärt durch $\text{pr}_E(x)(i) := x(\{i\})$. Damit ist man genau in der oben beschriebenen Situation. Man sieht hier schon: Häufig besitzen die darstellenden Arrays eine „Dimension“, hier ist es die Dimension 1. \triangleleft

Beispiel 3.4.27. Im System der Graphen ist das kanonische Limesystem durch Graphen mit Knotenmenge \mathbb{N} gegeben. Diese werden durch Funktionen $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $g(i, i) = 0$ und $g(i, j) = g(j, i)$ kodiert. Hier setzt man $S := \{0, 1\} \cup \{\square\}$ mit $\square \notin \{0, 1\}$ und setzt g zu $x \in S^{\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})}$ mit $x(\{i, j\}) := g(i, j)$ für $\{i, j\} \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $|\{i, j\}| = 2$ und $x(e) := \square$ sonst, fort. Mit $\text{pr}_E(x)(i, j) := \text{pr}_E(x)(j, i) := x(\{i, j\})$ und $\text{pr}_E(x)(i, i) := 0$ für $i, j \in E$ mit $i \neq j$ ist man wieder in der oben vorgestellten Situation, nun mit Dimension 2. \triangleleft

Im oben beschriebenen Fall liefern die *Aldous-Hoover-Kallenberg-Resultate* Darstellungssätze für allgemeine symmetrische Wahrscheinlichkeitsmaße auf $S^{\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})}$. Den gleich formulierten Satz findet man neben vielen anderen Darstellungssätzen in dem Buch [Kal06]. Diese gelten nicht nur für endliche Mengen S , sondern sogar für allgemeine Borelräume.

Ein Zufallsobjekt $X_\infty = (X(E) : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ mit Werten in $S^{\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})}$ hat *austauschbare Verteilung*, falls

$$X_\infty \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X(\pi^{-1}(E)) : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})) =: \pi.X_\infty$$

für alle $\pi \in \mathbb{S}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ gilt. Die Darstellungsergebnisse garantieren die Existenz gewisser funktionaler Darstellungen der Verteilung solcher austauschbarer X_∞ über mittelsymmetrische Funktionen und U -Arrays.

Definition 3.4.28. Es sei $k \geq 1$. Eine Funktion $f_k : [0, 1]^{\mathfrak{P}([k])} \rightarrow S$ heißt *mittelsymmetrisch*, falls $f(u) = f(u \circ \pi^{-1})$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_k$ und $u \in [0, 1]^{\mathfrak{P}_{\text{fin}}([k])}$ gilt. Ist f_k eine mittelsymmetrische Funktion und $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $E = \{a_1, \dots, a_k\}$ und $1 \leq a_1 < \dots < a_k$, so definiert man $f_k : [0, 1]^{\mathfrak{P}(E)}$ indem man $\mathfrak{P}(E)$ mit $\mathfrak{P}([k])$ über die Bijektion $\pi : E \rightarrow [k]$, $a_i \mapsto i$ miteinander identifiziert.

Satz 3.4.29. Ist $X_\infty = (X(E) : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ ein Zufallsobjekt mit $X(E) \in S$ für alle $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ und austauschbarer Verteilung, so existieren messbare mittelsymmetrische Funktionen f_1, f_2, \dots mit

$$(X(E) : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (f_{|E|}((U(e) : e \subseteq E)) : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$$

für eine Kollektion $(U(e) : e \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ von unabhängigen und identisch je $\text{unif}[0, 1]$ -verteilten Zufallsvariablen.

Diese Aussage ist Theorem 7.15 in [Kal06] (symmetrischer Fall). Es ist wohl leichter, diese Aussagen nur „entlang einer Dimension“ zu formulieren und zu beweisen; Ausgangspunkt sind dann S -wertige Zufallsobjekte $(X(E) : E \in \mathfrak{P}_k(\mathbb{N}))$ für ein festes $k \geq 1$ mit austauschbarer Verteilung (in den Beispielen 3.4.26 und 3.4.27 geht es um $k = 1$ bzw. $k = 2$). Einen sehr zugänglichen Beweis für den Fall $k = 2$ und weiteres Material im Kontext findet man in [Aus12]. Speziell für $k = 1$ erhält man den Satz von de Finetti für Zufallsvariablen mit Werten in allgemeinen Borelräumen: Ist $(X(i) : i \in \mathbb{N})$ eine austauschbare Kollektion S -wertiger Zufallsgrößen, so existiert eine messbare Funktion $f_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$, sodass

$$(X(i) : i \in \mathbb{N}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (f_1(U_\emptyset, U_i) : i \in \mathbb{N})$$

gilt.

Bemerkung 3.4.30. Eine Kenngröße von konsistenten Systemen, die in den Darstellungsergebnissen von Relevanz ist, aber hier nicht weiter verfolgt wird, ist die der Dimensionalität. Es liege ein konsistentes System \mathbf{F} vor. Es seien $x = (x_E : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$, $y = (y_E : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})) \in \text{Proj}(\mathbb{F}, \mathbb{N})$ projektive Folgen im kanonischen Limesystem. Das System \mathbf{F} hat eine *Dimension* kleiner gleich k , falls für alle x, y gilt:

$$(x_E : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), |E| = k) = (y_E : E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), |E| = k) \implies x = y.$$

Die *Dimension* ist das kleinste k , für die diese Implikation gilt. ∇

Insbesondere hat also $\mathbf{Word}(\Sigma)$ Dimension 1 und das System der Graphen hat Dimension 2. Die spezielle Rolle der Zufallsgröße U_\emptyset in Satz 3.4.29 ist die der Mischung über die

extremalen Verteilungen: Bedingt auf U_\emptyset sind disjunkt induzierte Teilstrukturen $\text{pr}_E(X)$ und $\text{pr}_F(X)$ mit $E \cap F = \emptyset$ unabhängig. Man vergleiche dies mit Satz 3.2.23 und dem anschließenden Korollar. Auf die Bedeutung für Graphen auch hinsichtlich der zuvor entwickelten Begriffe wird im abschließenden Kapitel 6 noch einmal genauer eingegangen.

Allgemein macht man aber schon jetzt folgende Beobachtung: Liegt ein projektives Limes-system \mathbb{F}_∞ wie oben vor und wird die Verteilung $\mathbb{P}^{X_\infty} \in \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$ eines Zufallsobjektes X_∞ durch eine Folge mittelsymmetrischer Funktionen $f = (f_1, f_2, \dots)$ wie in Satz 3.4.29 beschrieben, so beschreibt f auf *kanonische Weise* immer auch die Verteilung eines Joinings (X_∞, L) mit Verteilung in $\mathcal{J}(\mathbb{P}^{X_\infty}, \text{unif}(\mathbb{L}_\infty))$. Mit $X_\infty = f(U(e) : e \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ (im Sinne von Satz 3.4.29) definiert man L als $iLj : \Leftrightarrow U(\{i\}) < U(\{j\})$. Das so erklärte Objekt (X_∞, L) , welches so funktional aus f und $(U(e) : e \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$ konstruiert wurde, hat per Definition eine Verteilung aus $\mathcal{J}(\mathbb{P}^{X_\infty}, \text{unif}(\mathbb{L}_\infty))$. War die Verteilung von X_∞ extremal, so kann man f so wählen, dass f nicht von u_\emptyset abhängt. Für solche f ist dann auch die Verteilung von (X_∞, L) extremal. Hinsichtlich der Approximation von extremalen Verteilungen durch Folgen wachsender diskreter Strukturen erhält man damit: Zu jeder konvergenten Folge $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{F}$ diskreter Strukturen in \mathbb{F} (bzgl. $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$) und jeder Beschreibung der zugehörigen extremalen Limesverteilung f , die nicht von u_\emptyset abhängt, existiert eine Folge $(x'_n)_{n \geq 1}$ in \mathbb{F} , welche bzgl. des feineren Limesbegriffes (Konvergenz bzgl. $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$) konvergiert und die entsprechende Kopplung beschreibt. Im Allgemeinen ist nicht jede Verteilung aus $\mathcal{J}(\mathbb{P}^{X_\infty}, \text{unif}(\mathbb{L}_\infty))$ durch eine solche messbare Funktion f , die \mathbb{P}^{X_∞} beschreibt, auf diese Art konstruierbar. Umgekehrt ist aber jede extremale starke Verteilung von dieser Form (Satz 3.4.15).

Beispiel 3.4.31. Im System $\mathbf{Word}(\Sigma)$ der Wörter über einem endlichen Alphabet Σ erhält man für jeden iid-Prozess $(Y_i)_{i \geq 1}$ mit dem Darstellungssatz die Existenz einer messbaren Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ mit $(f(U_i))_{i \geq 1} \sim (Y_i)_{i \geq 1}$ für eine iid Folge $(U_i)_{i \geq 1}$ auf $[0, 1]$ gleichverteilter Zufallsvariablen. Diese f sind natürlich im Allgemeinen nicht eindeutig und korrespondieren zu Zerlegungen $B_a, a \in \Sigma$ von $[0, 1]$ durch Borelmengen mit $\text{unif}([0, 1])(B_a) = \mathbb{P}(Y_1 = a)$ für alle $a \in \Sigma$. Diese Korrespondenz wird tatsächlich eindeutig, wenn man Borelmengen modulo $\text{unif}([0, 1])$ miteinander identifiziert. Mit $iLj := U_i < U_j$ ist nun $((Y_i)_{i \geq 1}, L)$ das gemeinsam austauschbare extremale Objekt. Mit Wahrscheinlichkeit 1 ist dann jede Realisierung $(x'_n)_{n \geq 1}$ des Prozesses $(f(U_{1:n}), \dots, f(U_{n:n}))_{n \geq 1}$ eine Folge, welche die Verteilung des durch f induzierten Joinings beschreibt. \triangleleft

Bemerkung 3.4.32. Ob sich zu jedem konsistenten System ein projektiver Limesraum mit den eingangs beschriebenen Eigenschaften finden lässt, bleibt zunächst noch offen. Es ist aber denkbar, eine Formulierung der Darstellungsergebnisse für allgemeine konsistente Systeme anzugeben. ∇

4. Die Systeme $\mathbf{Lin}^{(m)}$ und $\mathbf{Word}(\Sigma) \times \mathbf{Lin}$

In diesem Kapitel werden nähere Betrachtungen zu konsistenten Systemen der Form $\mathbf{Lin}^{(m)} = \mathbf{Lin} \times \mathbf{Lin} \times \cdots \times \mathbf{Lin}$, $m \geq 1$ und $\mathbf{Word}(\Sigma) \times \mathbf{Lin}$ angestellt. Diese sind zusammengefasst, weil ein großer Teil der Resultate schon im vorangegangenen Kapitel erarbeitet wurde. Ist $u = (u_i)_{i \geq 1}$ eine Folge paarweise verschiedener reeller Zahlen, so sei $l(u) \in \mathbb{L}_\infty$ die lineare Ordnung auf \mathbb{N} mit $il(u)j : \Leftrightarrow u_i < u_j$. Ist $U = (U_i)_{i \geq 1}$ ein U -Prozess, so ist also $l(U) \sim \text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$.

4.1. $\mathbf{Lin}^{(m)} = \mathbf{Lin} \times \mathbf{Lin} \times \cdots \times \mathbf{Lin}$

In diesem Abschnitt geht es nun um Systeme der Form $\mathbf{Lin}^{(m)}$, wobei induktiv $\mathbf{Lin}^{(1)} := \mathbf{Lin}$ und $\mathbf{Lin}^{(m+1)} := \mathbf{Lin}^{(m)} \times \mathbf{Lin}$ ist. Die projektiven Limesräume bestehen aus m -Tupeln von linearen Ordnungen auf \mathbb{N} , \mathbb{L}_∞^m . Die Menge der gemeinsam austauschbaren Verteilungen $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty^m)$ kann leicht über m -dimensionale Copulas beschrieben werden (nachfolgender Satz 4.1.1). Dies wird im ersten Abschnitt ausgeführt. Im zweiten Abschnitt werden die vorgestellten Begriffe für Systeme der Form $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$ auf den Fall $\mathbf{F} = \mathbf{Lin}^{(m)}$ mit $m \geq 1$ angewendet. Insbesondere für den Fall $m = 1$ liefert der geordnete Konvergenzbegriff (II) dann sofort eine bekannte Darstellung der Limiten von Permutationen, für die *Pattern-Densities* konvergieren. Das Resultat für $m = 1$ findet man auch in [Hop+13], mehr dazu in Abschnitt 4.1.2.

Es sei $L = (L^1, \dots, L^m)$ nun ein m -Tupel zufälliger linearer Ordnungen auf \mathbb{N} , welches gemeinsam austauschbar ist, also

$$\pi.L = (\pi.L^1, \dots, \pi.L^m) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (L^1, \dots, L^m) = L$$

für alle $\pi \in \mathbb{S}_\infty$ erfüllt. Die Verteilung \mathbb{P}^L ist also Element von $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty^m)$. Da nun $\mathbb{P}^{L^k} = \text{unif}(\mathbb{L}_\infty)$ für alle $1 \leq k \leq m$ gilt, besitzt jedes L^k eine Darstellung über einen U -Prozess $U^k = (U_i^k)_{i \geq 1}$ via $U_i^k = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \#\{l \in [n] : lL^k i\}$ \mathbb{P} -fast sicher mit $L^k = l(U^k)$ fast sicher. Es sei

$$\mathcal{C}_m := \{\mathcal{L}((Z_1, \dots, Z_m)) : Z_i \sim \text{unif}([0, 1]) \text{ für alle } 1 \leq i \leq m\} \subseteq \mathcal{M}_1([0, 1]^m)$$

die Menge der m -dimensionalen Copulas, ausgestattet mit der Topologie der schwachen Konvergenz.

Satz 4.1.1. *Zu $\rho \in \mathcal{C}_m$ sei $Y = (Y_i)_{i \geq 1}$ iid mit $Y_i = (U_i^1, \dots, U_i^m) \sim \rho$. Es sei $U^k = (U_i^k)_{i \geq 1}$ für $1 \leq k \leq m$ und $L^k := l(U^k)$. Dann ist (L^1, \dots, L^m) gemeinsam austauschbar und hat eine extremale Verteilung. Die so erhaltene Zuordnung*

$$\mathcal{C}_m \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty^m)), \rho \mapsto \mathcal{L}((L^1, \dots, L^m))$$

ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Zunächst sei (L^1, \dots, L^m) ein gemeinsam austauschbares m -Tupel linearer Ordnungen auf \mathbb{N} und $U^k = (U_i^k)_{i \geq 1}$ sei der U -Prozess mit $L^k = l(U^k)$ fast sicher. Es sei $Y_i := (U_i^1, \dots, U_i^k)$. Es sei $S_n^k = \text{pr}_n(L^k) \in \mathbb{S}_n$ für alle $1 \leq k \leq m$ und $n \geq 1$. Dann ist

$$Y_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left((S_n^1)^{-1}(i), \dots, (S_n^m)^{-1}(i) \right) \quad \mathbb{P}\text{-fast-sicher}$$

und für $\pi \in \mathbb{S}_\infty$ ist

$$Y_{\pi^{-1}(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left((S_n^1)^{-1}(\pi^{-1}(i)), \dots, (S_n^m)^{-1}(\pi^{-1}(i)) \right) \quad \mathbb{P}\text{-fast-sicher.}$$

Nun gilt $(S_n^1, \dots, S_n^m) \sim (\pi.S_n^1, \dots, \pi.S_n^m)$ für alle $\pi \in \mathbb{S}_n$ und damit erhält man $(Y_i)_{i \geq 1} \sim (Y_{\pi^{-1}(i)})_{i \geq 1}$. Ist umgekehrt $Y = (Y_i)_{i \geq 1}$ ein austauschbarer Prozess mit $Y_i = (U_i^1, \dots, U_i^m)$ und ist $U^k = (U_i^k)_{i \geq 1}$ für alle k ein U -Prozess, so ist das Tupel $(l(U^1), \dots, l(U^m))$ offenbar gemeinsam austauschbar. Mit dem Satz von de Finetti folgt die Bijektivität der Zuordnung. Für eine Copula $\rho \in \mathcal{C}_m$ sei \mathbb{P}_ρ derart, dass der Prozess $Y = (Y_i)_{i \geq 1}$ mit $Y_i = (U_i^1, \dots, U_i^m)$ ein iid-Prozess mit $Y_1 \sim \rho$ ist. Es sei S_n^k die Permutation, welche U_1^k, \dots, U_n^k anordnet und es seien $\pi^1, \dots, \pi^m \in \mathbb{S}_n$. Es sei $(\rho_k)_{k \geq 1}$ eine Folge von Copulas, welche schwach gegen ρ konvergiert. Die Stetigkeit von $\mathcal{C}_m \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty^m))$ bedeutet nun gerade, dass

$$\mathbb{P}_{\rho_k} (S_n^1 = \pi^1, \dots, S_n^m = \pi^m) \longrightarrow \mathbb{P}_\rho (S_n^1 = \pi^1, \dots, S_n^m = \pi^m) \quad \text{mit } k \rightarrow \infty$$

gilt. Für alle $n \geq 1$ ist die Zuordnung $\rho \mapsto \otimes_{i=1}^n \rho$ stetig. Dies sieht man so: Die Abbildung

$$([0, 1]^m)^n \rightarrow \mathbb{S}_n^m,$$

welche Vektoren (u_i^1, \dots, u_i^m) , $i = 1, \dots, n$ auf das Tupel derjenigen Permutationen $\pi^1, \dots, \pi^m \in \mathbb{S}_n$ mit

$$u_{\pi^k(1)}^k < \dots < u_{\pi^k(n)}^k$$

abbildet, ist definiert auf solchen Tupeln, in welchen die m Werte u_1^k, \dots, u_n^k für jedes $k \in [m]$ paarweise verschieden sind. Auf solchen Tupeln ist diese Zuordnung darüber hinaus stetig und $\otimes_{i=1}^n \rho$ ist auf solchen Tupeln konzentriert. Damit folgt die behauptete Konvergenz aus dem Continuous Mapping Theorem. \square

4.1.1. Starke Verteilungen in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty^m \times \mathbb{L}_\infty)$

Es wird $\mathbf{Lin}^{(m)} \times \mathbf{Lin}$ betrachtet, wobei die letzte lineare Ordnung nun im Sinne von Abschnitt 3.4 eine besondere Rolle einnimmt. Es sei $X_\infty := (L^1, \dots, L^m)$ und (X_∞, L) habe extremale austauschbare Verteilung. Nach Satz 3.4.15 ist die Verteilung von $(X_\infty, L) \in \mathbb{L}_\infty^m \times \mathbb{L}_\infty$ genau dann stark, wenn

$$\sigma(X_\infty) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(L)$$

gilt. Die gemeinsame Verteilung von (X_∞, L) wird in der hier vorliegenden Situation nun über Copulas $\rho \in \mathcal{C}_{m+1}$ beschrieben. Welche Copulas führen also auf starke Verteilungen?

Satz 4.1.2. Die Copula $\rho \in \mathcal{C}_{m+1}$ führt genau dann auf eine starke Verteilung, wenn es eine messbare Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^m$ gibt, sodass $\rho \sim (f(U), U)$ mit $U \sim \text{unif}[0, 1]$ gilt.

Beweis. Ist ρ von der genannten Bauart, so folgt sofort

$$\sigma(X_\infty) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma((U_i^1, \dots, U_i^k)_{i \geq 1}) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma((U_i)_{i \geq 1}) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(L).$$

Umgekehrt gelte $\sigma(X_\infty) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(L)$. Dann gibt es eine messbare Funktionen $g_i : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]^m$ mit $g_i((U_j)_{j \geq 1}) = (U_i^1, \dots, U_i^m) =: Y_i$ fast sicher für alle $i \geq 1$. Da die Verteilung extremal ist, sind $(Y_i, U_i)_{i \geq 1}$ iid, insbesondere also sind (Y_i, U_i) und $(U_1, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots)$ für alle $i \geq 1$ unabhängig. Hieraus folgt zunächst

$$\sigma(Y_i) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(U_i) \vee \sigma(U_1, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots)$$

und mit Lemma A.2.1 damit $\sigma(Y_i) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(U_i)$. Also gibt es für alle $i \geq 1$ eine messbare Funktion $f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^m$ mit $Y_i = f_i(U_i)$ fast sicher. Da (Y_i, U_i) iid ist, kann man alle Funktionen f_i identisch $f := f_1 \equiv f_i$ wählen und damit folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 4.1.3. Offen bleibt an dieser Stelle, ob alle extremalen Verteilungen in $\mathbf{Lin}^{(m)} \times \mathbf{Lin}$ auf Standardfiltrationen führen. ∇

4.1.2. Pattern-Densities und Permutons

In der Literatur werden häufig *Pattern-Densities* betrachtet, siehe z.B. [Hop+13], [Bas+17] oder [Bas+16]. Diese sind wie folgt definiert:

Definition 4.1.4. Ist $\pi \in \mathbb{S}_n$ eine Permutation und $1 \leq k \leq n$ sowie $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$, so gibt es genau eine Permutation $\sigma \in \mathbb{S}_k$ mit $\sigma(r) < \sigma(s) \Leftrightarrow \pi(j_r) < \pi(j_s)$ für alle $r, s \in [k]$. Es sei $f_k^n(\pi, j) := \sigma$. Sind σ, π gegeben so sagt man, dass π das Muster σ enthält, wenn es ein $j \in [k : n]$ mit $\sigma = f_k^n(\pi, j)$ gibt und sagt auch, dass σ in π eingebettet ist. Die Dichte von σ in π ist definiert als

$$\widetilde{\text{occ}}(\sigma, \pi) := \frac{1}{\binom{n}{k}} \#\{j \in [k : n] : f_k^n(\pi, j) = \sigma\}$$

(Bezeichnung wie in [Bas+17]). Man sagt, dass eine Folge $(\pi_n)_{n \geq 1}$ von wachsenden Permutationen konvergiert, wenn $\widetilde{\text{occ}}(\sigma, \pi_n)$ für alle $\sigma \in \mathbb{S}_k, k \geq 1$ mit $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Um diesen Konvergenzbegriff zu den anderen sprachlich abzugrenzen wird auch gesagt, die Folge $(\pi_n)_{n \geq 1}$ *konvergiert bzgl. $\widetilde{\text{occ}}$* .

In [Hop+13] wurde gezeigt, dass man die Menge der Limiten von bzgl. $\widetilde{\text{occ}}$ konvergenten Permutationen mit zweidimensionalen Copulas identifizieren kann. In diesem Kontext ist es in der Literatur auch geläufig, statt von Copulas von *Permutons* zu sprechen. Die $\widetilde{\text{occ}}$ -Konvergenz von Permutationen lässt sich über die ψ -Konvergenz im System $\mathbf{Lin} \times \mathbf{Lin}$ ausdrücken. Um das zu sehen, wird die Abbildung $\Phi_k^n : \mathbb{L}_n \times \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{L}_k$ genauer betrachtet. Für $1 \leq k \leq n$ und $l \in \mathbb{L}_n$ sowie $\pi \in \mathbb{S}_n$ ist

$$\Phi_k^n(l, \pi) = \text{pr}_k^n(\pi)^{-1} \cdot \text{pr}_k^n(\pi.l) = (\text{pr}_k^n(\pi))^{-1} \cdot \pi_{|\pi^{-1}([k])} \cdot \text{pr}_{\pi^{-1}([k])}^n(l).$$

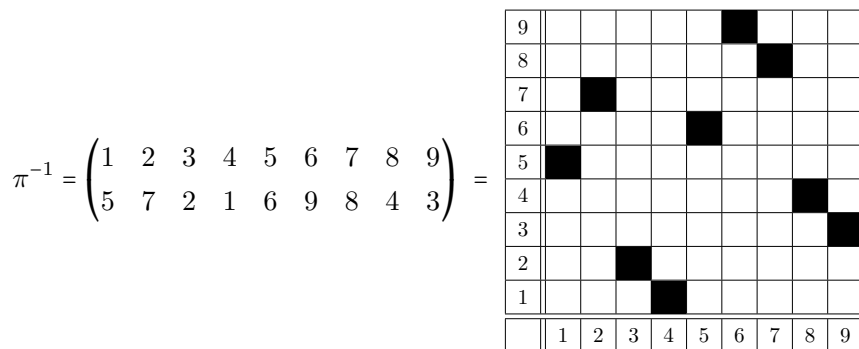
Zunächst wird die lineare Ordnung l auf $\pi^{-1}([k])$ eingeschränkt und dann wird die Menge $\pi^{-1}([k])$ mit der eindeutigen streng monotonen Funktion

$$(\text{pr}_k^n(\pi))^{-1} \cdot \pi|_{\pi^{-1}([k])} : \pi^{-1}([k]) \rightarrow [k]$$

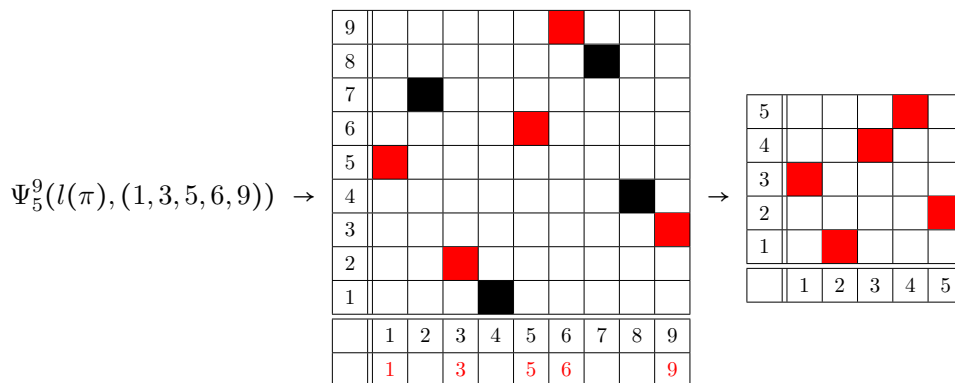
umbenannt. Für $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ und $l \in \mathbb{L}_n$ ist also

$$\Psi_k^n(l, j) = l' \quad \text{mit} \quad r l' s \Leftrightarrow j_r l j_s \quad \text{für alle } r, s \in [k].$$

Jede lineare Ordnung $l \in \mathbb{L}_n$ ist von der Form $l = l(\pi)$ mit $\pi \in \mathbb{S}_n$, also $i l j \Leftrightarrow \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$. Damit bietet es sich an, eine lineare Ordnung als Graph der Funktion π^{-1} zu zeichnen: So führt die lineare Ordnung $l = l(\pi) = (4, 3, 9, 8, 1, 5, 2, 7, 6)$ auf die Permutation $\pi^{-1} = (5, 7, 2, 1, 6, 9, 8, 4, 3)$ und auf die Darstellung



Für $j = (1, 3, 5, 6, 9) \in [5 : 9]$ ist $\Psi_5^9(l, j)$ die lineare Ordnung, welche auf die Menge $\{1, 3, 5, 6, 9\}$ eingeschränkt und deren Elemente dann monoton gemäß $(1, 3, 5, 6, 9) \mapsto (1, 2, 3, 4, 5)$ umbenannt werden. Der Mechanismus ist im folgenden Bild festgehalten:



Das Resultat ist die Permutation $\sigma^{-1} = (3, 1, 4, 5, 2)$, welche genau diejenige mit $l(\sigma) = \Psi_5^9(l, j)$ ist. Mit der Funktion f_k^n wie in Definition 4.1.4 gilt dann

$$f_k^n(\pi^{-1}, j) = \sigma^{-1} \Leftrightarrow \Psi_k^n(l(\pi), j) = l(\sigma).$$

Damit erhält man sofort: Eine Folge von linearen Ordnungen $l(\pi_n)$ konvergiert genau dann bzgl. ψ , wenn (π_n^{-1}) bzgl. $\widetilde{\text{öc}}$ konvergiert. Aus Satz 4.1.1 und der Gleichheit von Martinrand und Extrempunkten in dieser Situation (Satz 3.4.12) erhält man folgende Variante von Theorem 1.6 aus [Hop+13]:

Korollar 4.1.5. *Es sei $(\pi_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Permutationen, für die \widetilde{oc} für alle σ mit $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Dann gibt es eine eindeutige Copula $\mu \in \mathcal{C}_2$ sodass mit $(Y_i, U_i)_{i \geq 1}$ iid $\sim \mu$ und $S_k = \pi(U_1, \dots, U_k), R_k = \pi(Y_1, \dots, Y_k)$ gilt, dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{oc}(\sigma, \pi_n) = \mathbb{P}(S_k^{-1} \cdot R_k = \sigma^{-1})$$

für alle $k \geq 1, \sigma \in \mathbb{S}_k$ gilt.

Bemerkung 4.1.6. Die Arbeiten [Bas+16] und [Bas+17] untersuchen *Verteilungsasymptotiken*. Genauer wird jeder Permutation $\pi \in \mathbb{S}_n$ zunächst die Funktion $f_\pi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $f_\pi(u) = \pi(i)/n \Leftrightarrow (i-1)/n \leq u < i/n$ und mit $U \sim \text{unif}[0, 1]$ darüber dann die Copula $\mu_\pi := \mathcal{L}((U, f_\pi(U))) \in \mathcal{C}_2$ zugeordnet. Es wird gezeigt, dass für gewisse Folgen zufälliger Permutationen (gleichverteilt aus gewissen Teilmengen von \mathbb{S}_n ausgewählt) X_1, X_2, \dots die Folge μ_{X_n} mit $n \rightarrow \infty$ in Verteilung im Raum \mathcal{C}_2 konvergiert. Die erhaltene Limesverteilung ist nicht-degeneriert und wird (in parametrisierter Form) für verschiedene Folgen von Verteilungen zugleich erhalten und daher von den Autoren *Brownian separable Permuton* genannt. Die in den zitierten Arbeiten angebotenen Abbildungen legen die Vermutung nahe, dass das Brownian separable Permuton mit Wahrscheinlichkeit 1 Werte in denjenigen Copulas annimmt, welche starke Verteilungen beschreiben. Eine interessante Frage ist, ob man die (nicht-extremalen) Markovketten $(X_n)_{n \geq 1}$ wachsender Permutationen mit passender Rückwärtsdynamik, deren Verteilung durch das Brownian separable Permuton beschrieben ist, zufällig algorithmisch *vorwärts in der Zeit* beschreiben kann, ähnlich wie dies bei Rémys Kette der Fall ist. \square

4.2. $\mathbf{Word}(\Sigma) \times \mathbf{Lin}$

Es sei $\Sigma = \{b_1, \dots, b_m\}$ das Alphabet, $m \geq 2$. Über $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty)$ ist beinahe alles gesagt. Betrachtet wird nun das Produktsystem $\mathbf{Word}(\Sigma) \times \mathbf{Lin}$. Es sei (X_∞, L) ein austauschbares Objekt, also $X_\infty = (Y_i)_{i \geq 1}$ und $L = l(U)$ mit $U = (U_i)_{i \geq 1}$. Das Darstellungsergebnis zu $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ ist sehr ähnlich zu dem von $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{L}_\infty^m)$. Es sei

$$\mathcal{C}(\Sigma) := \{\mathcal{L}((Y_1, U_1)) \in \mathcal{M}_1(\Sigma \times [0, 1]) : U_1 \sim \text{unif}[0, 1]\}.$$

Die Menge $\mathcal{C}(\Sigma)$ wird mit der Topologie der schwachen Konvergenz ausgestattet. Analog zu Satz 4.1.1 erhält man direkt

Satz 4.2.1. *Für $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma)$ sei $(Y_i, U_i)_{i \geq 1}$ ein iid-Prozess mit Verteilung $(Y_1, U_1) \sim \rho$. Dann hat (Y, L) mit $Y = (Y_i)_{i \geq 1}$ und $L = l((U_i)_{i \geq 1})$ Verteilung in $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty \times \mathbb{L}_\infty))$ und die so erhaltene Zuordnung*

$$\mathcal{C}(\Sigma) \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty \times \mathbb{L}_\infty)), \rho \mapsto \mathcal{L}((Y, L))$$

ist ein Homöomorphismus.

Für ein Wort $y = (y_1, \dots, y_n)$ und ein weiteres Wort $x = (x_1, \dots, x_k)$ ist

$$\psi_k^n(x, y) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \#\{(j_1, \dots, j_k) \in [k : n] : y_{j_1} = x_1, \dots, y_{j_k} = x_k\}.$$

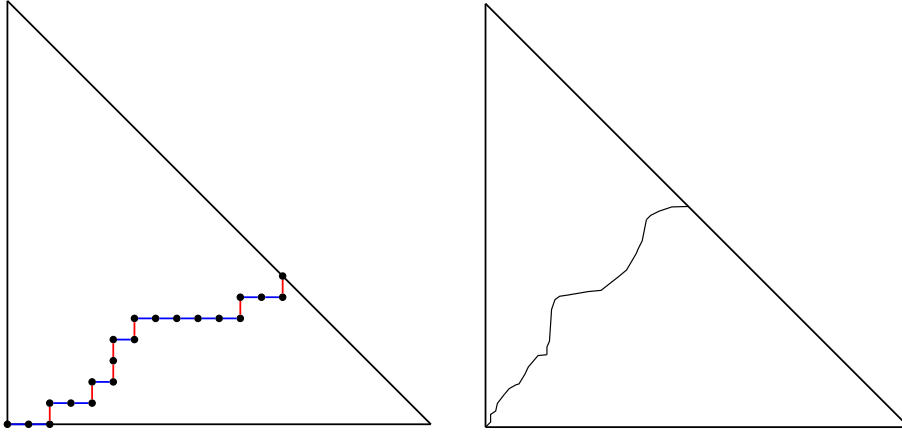


Abb. 4.1.: Das Dreieck entspricht der Menge $\{(x, y) \in [0, 1]^2 : x+y \leq 1\}$. Für das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ wird das Wort $x = abbaababbabaaaaabab \in \Sigma^{20}$ betrachtet. Die schwarzen Punkte links sind das Bild der Funktion $t \in [0, 1] \mapsto (F_x(a, t), F_x(b, t))$. Man kann zeigen: Eine Folge von Wörtern ist ψ -konvergent genau dann wenn diese Bilder mit $n \rightarrow \infty$ konvergieren. Rechts abgebildet ein möglicher Limes, das Bild einer Funktion $t \in [0, 1] \mapsto (\rho(\{a\} \times [0, t]), \rho(\{b\} \times [0, t]))$ für ein $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma)$.

Insbesondere wird jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma)$ durch ψ -konvergente Folgen wachsender Wörter approximiert. Mit *elementaren Methoden* lässt sich zeigen, dass eine Folge $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ von Wörtern $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n}) \in \Sigma^{m_n}$ mit $m_n \rightarrow \infty$ genau dann ψ -konvergent ist, wenn für alle $a \in \Sigma$ und $0 \leq t \leq 1$ der Wert $F_{x_n}(a, t) = n^{-1} \#\{1 \leq i \leq [nt] : x_{n,i} = a\}$ mit $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Das zur ψ -konvergenten Folge \mathbf{x} gehörige $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma)$ ist genau das mit $\rho(\{a\} \times [0, t]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{x_n}(a, t)$ für alle $a \in \Sigma$ und $0 \leq t \leq 1$. Eine Ausführung dieser elementaren Argumente findet man in [The17]. Speziell für den Fall $m = 2$ kann man sich die ψ -Konvergenz von Wörtern damit bildlich veranschaulichen, siehe Abbildung 4.1.

Bemerkung 4.2.2. Man beachte die Ähnlichkeit der Fragestellung und der Resultate mit der Arbeit [CE17]. Die dort untersuchte Fragestellung kann man durch folgendes homogen markiertes Bratellidiagramm ausdrücken: $\mathbb{F}_n \subseteq \{a, b\}^{2n}$ ist die Menge aller Wörter der Länge $2n$ in denen jeweils genau n Buchstaben a bzw. b vorkommen; $\mathbb{A}_n = [n] \times [n]$. Für $w = (w_1, \dots, w_{2n}) \in \mathbb{F}_n$ und $(j_1, j_2) \in [n] \times [n] = \mathbb{A}_n$ sei $\Lambda_{n-1}^n(w, (j_1, j_2)) \in \mathbb{F}_{n-1}$ dasjenige Wort, welche aus w dadurch entsteht, dass das j_1 -te a und das j_2 -te b in w (von links gezählt) entfernt und das übrige Wort zusammengeschoben wird. In der genannten Arbeit wurde die Simplexstruktur der zentralen Prozessverteilungen beschrieben: Die extremalen Verteilungen korrespondieren zu allen Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{L}((Y_1, U_1)) \in \mathcal{C}(\{a, b\})$ mit $Y_1 \sim \text{unif}(\{a, b\})$. Die dort vorgestellte Darstellung dieser Verteilungen war über die bedingten Verteilungen $(\mu_1, \mu_2) = (\mathcal{L}(U_1 | Y_1 = a), \mathcal{L}(U_1 | Y_1 = b))$ angegeben. ∇

4.2.1. Starke Verteilungen

Ebenfalls analog zur Aussage bei den linearen Ordnungen erhält man direkt

Satz 4.2.3. $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma)$ beschreibt genau dann eine starke Verteilung, wenn es eine messbare

Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ mit $\rho \sim (f(U), U)$ für $U \sim \text{unif}[0, 1]$ gibt.

Für den Fall $\Sigma = \{0, 1\}$ wird also jede starke Verteilung durch eine messbare Funktion f mit $f = 1_B$ und $B \in \mathcal{B}([0, 1])$ beschrieben. Dabei beschreiben $B, B' \in \mathcal{B}([0, 1])$ genau dann dieselbe Verteilung, wenn $\text{unif}([0, 1])(B \Delta B') = 0$ ist. Insbesondere wird jede messbare Menge (modulo $\text{unif}[0, 1]$) also durch diskrete Folgen von Wörtern beschrieben. Die Approximation einer solchen Menge B geschieht in der Form

$$(1_B(U_{1:n}), 1_B(U_{2:n}), \dots, 1_B(U_{n-1:n}), 1_B(U_{n:n})).$$

Satz 3.4.16 besagt nun: Ist $Z = (Z_i)_{i \geq 1}$ ein von $U = (U_i)_{i \geq 1}$ unabhängiger U -Prozess und ist $R_n = \pi(Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{S}_n$, so erhält man für alle Borelschen Teilmengen $B \in \mathcal{B}([0, 1])$, dass

$$1_B(U_{R_n^{-1}(1):n}) \rightarrow 1_B(Z_1) \quad \text{in Wahrscheinlichkeit mit } n \rightarrow \infty.$$

4.2.2. Standardness

In diesem Unterabschnitt wird das Hauptresultat über das System $\mathbf{Word}(\Sigma) \times \mathbf{Lin}$ ausgearbeitet: *Alle extremalen Verteilungen sind standard.* Auch das hier vorgestellte Resultat ist nicht disjunkt zu Resultaten in der Literatur. In [Lau16] wurde folgender Satz bewiesen:

Satz 4.2.4 ([Lau16]). *Es sei Σ ein polnischer Raum und ρ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Borel'schen σ -Algebra von Σ . Es sei $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein Prozess mit*

1. $X_n = (X_{n,1}, \dots, X_{n,n})$ mit $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ iid je mit Verteilung ρ .
2. $\eta_n \sim \text{unif}([n])$ für alle $n \geq 1$.
3. (η_1, \dots, η_n) und $\mathcal{F}_n := (X_n, \eta_{n+1}, X_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots)$ sind für alle $n \geq 1$ unabhängig.
4. $X_{n-1} = (X_{n,1}, \dots, X_{n,\eta_n-1}, X_{n,\eta_n+1}, \dots, X_{n,n})$ fast sicher für alle $n \geq 2$.

Dann ist die Rückwärtsfiltration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ standard.

Es sei nun Σ wieder eine endliche Menge und $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1} = \mathbf{h}(\mathbf{g}(X_\infty, L))$ und (X_∞, L) habe Verteilung in $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty \times \mathbb{L}_\infty))$. Mit $X_\infty = (Y_i)_{i \geq 1}$ und $S_n = \pi_n(L)$ ist also $\eta_n = S_n^{-1}(n)$ und $X_n = S_n^{-1} \cdot (Y_1, \dots, Y_n) = (Y_{S_n(1)}, \dots, Y_{S_n(n)})$ für alle n . Mit $X_{n,i} = Y_{S_n(i)}$ für $1 \leq i \leq n$ sind nach Satz 3.4.17 die Buchstaben $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ genau dann unabhängig und identisch verteilt, wenn X_∞ und L unabhängig sind. Satz 4.2.4 liefert damit:

Korollar 4.2.5. *Hat (X_∞, L) Verteilung in $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty \times \mathbb{L}_\infty))$ und sind X_∞ und L unabhängig, so ist die Verteilung von $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1} := \mathbf{h}(\mathbf{g}(X_\infty, L))$ standard.*

Der Beweis in [Lau16] verläuft so, dass die Aussage zunächst speziell für endliche Alphabete Σ und $\rho = \text{unif}(\Sigma)$ bewiesen wird und von dort aus dann zunächst auf den Fall $\Sigma = [0, 1]$ und $\rho = \text{unif}[0, 1]$ und von dort aus dann auf allgemeine Alphabete und Verteilungen geschlossen wird. Dabei werden allgemeine strukturelle Resultate aus vorherigen

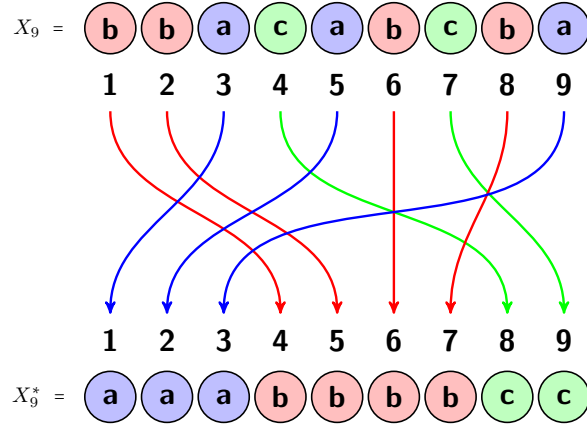


Abb. 4.2.: Oben das Wort $X_9 = w = (b, b, a, c, a, b, c, b, a) \in \{a, b, c\}^9$, die gewählte Reihenfolge der Buchstaben in Σ ist $a < b < c$. Unten das Wort X_9^* . Ein Pfeil $i \rightarrow j$ bedeutet $\pi_w(i) = j$.

Arbeiten von S. Laurant und A. Vershik verwendet. Der hier vorgestellte Beweis behandelt nur endliche Alphabete und verallgemeinert den ersten Teil der Aussage in [Lau16] dahingehend, dass die Buchstaben in X_n nicht mehr notwendigerweise iid sein müssen. Präziser wird gezeigt:

Satz 4.2.6. *Ist Σ ein endliches Alphabet und hat (X_∞, L) Verteilung in $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Sigma^\infty \times \mathbb{L}_\infty))$, so ist der Prozess $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1} := \mathbf{h}(\mathbf{g}(X_\infty, L))$ standard.*

Der Beweis von S. Laurent konstruierte im ersten Schritt zu jedem Wort $w \in \Sigma^n$ eine Permutation $\sigma_w \in \mathbb{S}_n$. Es wurde dann $\eta_n^* := \sigma_{X_n}(\eta_n)$ betrachtet und begründet, dass man X_k mit hoher Wahrscheinlichkeit aus $\eta_{k+1}^*, \dots, \eta_n^*$ für hinreichend große n rekonstruieren kann. Eine finale fast sichere funktionale Darstellung über den generierenden Prozess wurde nicht angegeben. Ferner funktionierte die dort verwendete Konstruktion von σ_w tatsächlich nur für solche Prozesse, bei denen X_n aus unabhängigen und gleichverteilten Buchstaben besteht.

Ähnlich wie dort wird nun hier zu jedem Wort $w \in \Sigma^n$ eine andere Permutation $\pi_w \in \mathbb{S}_n$ definiert und ebenfalls $\eta_n^* = \pi_{X_n}(\eta_n)$ betrachtet. Es wird gezeigt, dass der so entstehende Prozess η^* stets generierend ist. Die Konstruktion von π_w ist wie folgt:

Konstruktion 4.2.7. *Es sei $\Sigma = \{b_1, \dots, b_m\}$. Für jedes Wort $w = (w_1, \dots, w_n) \in \Sigma^n$ sei $n_i := \#\{1 \leq k \leq n : w_k = b_i\}$. Es sei $w^* := b_1^{n_1} b_2^{n_2} \dots b_m^{n_m} \in \Sigma^n$. Es sei $\pi_w \in \mathbb{S}_n$ die eindeutige Permutation mit $\pi_w \cdot w = w^*$ und π_w^{-1} ist monoton wachsend auf den Mengen $\{1, \dots, n_1\}, \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}, \dots, \{n_1 + \dots + n_{m-1}, \dots, n\}$. Man betrachte hierzu auch Abbildung 4.2.*

Bewiesen wird nun folgender Satz, welcher insbesondere Satz 4.2.6 impliziert:

Satz 4.2.8. *Es sei $\eta_n^* := \pi_{X_n}(\eta_n)$. Es sei L^* die durch die relativen Ränge $\eta^* = (\eta_n^*)_{n \geq 1}$ determinierte gleichverteilte lineare Ordnung. Dann hat das Tupel (X_∞, L, L^*) eine gemeinsam austauschbare extremale und starke Verteilung. Insbesondere ist der Prozess η^* also generierend damit ist $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ standard.*

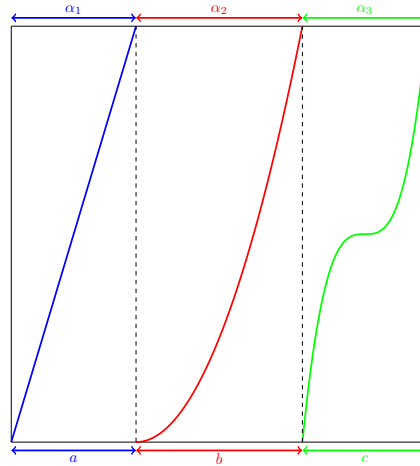


Abb. 4.3.: In diesem Beispiel ist $\Sigma = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = a, b_2 = b, b_3 = c$. Abgebildet ist das schematische Bild einer Funktion c . Die hier abgebildete Funktion ist allerdings nicht aus einem $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma)$ konstruiert, denn $\text{unif}[0, 1]^c = \text{unif}[0, 1]$ ist bei der abgebildeten Funktion sicherlich nicht erfüllt.

Insbesondere zeigt der Beweis, dass das HMB $\mathcal{B} = (\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ mit $\mathbb{F}_n = \Sigma^n, \mathbb{A}_n = [n]$ und $\Lambda_{n-1}^n((x_1, \dots, x_n), j) := (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ durch $\pi = (\pi_w : w \in \Sigma^*)$ im Sinne von Definition 2.3.6 zu einem Diagramm \mathcal{B}^π derart ummarkiert werden kann, dass im neuen Diagramm *alle* zentralen Verteilungen stark sind. Wie gesehen ist jede extremale Verteilung (X_∞, L) in dieser Situation durch ein $\rho \in \mathcal{C}_2$ determiniert. Tatsächlich kann man aus ρ eindeutig eine Funktion konstruieren, welche in einem gewissen Sinn die Umkehrfunktion von π_{X_n} mit $n \rightarrow \infty$ ist. Diese Konstruktion wird jetzt beschrieben, dazu betrachte man auch Abbildung 4.3.

Konstruktion 4.2.9. *Es sei $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Man definiert*

1. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ mit $\alpha_j := \rho(\{b_j\} \times [0, 1])$.
2. $f : [0, 1) \rightarrow \Sigma$ mit $f(v) = b_j \Leftrightarrow \alpha_1 + \dots, \alpha_{j-1} \leq v < \alpha_1 + \dots + \alpha_j$.
3. Für $j = 1, \dots, m$ sei $\rho_j = \rho(\{b_j\} \times \cdot)$. ρ_j ist ein Maß auf $[0, 1]$ mit $\rho_j([0, 1]) = \alpha_j$. Die Quantilfunktion zu ρ_j ist die Funktion

$$F_j^{-1} : [0, \alpha_j] \rightarrow [0, 1], \quad F_j^{-1}(v) := \inf\{s \in [0, 1] : \rho_j([0, s]) \geq v\}.$$

4. Insgesamt sei $c : [0, 1) \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$c(v) := F_{f(v)}^{-1}(v - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{f(v)-1})).$$

Zu nachfolgendem Lemma betrachte man auch Abbildung 4.4.

Lemma 4.2.10. *Es seien $(v_1, \dots, v_n) \in [0, 1]^n$ paarweise verschieden. Ferner seien*

$$(u_1, \dots, u_n) := (c(v_1), \dots, c(v_n)) \in [0, 1]^n$$

auch paarweise verschieden. Es seien

1. $\pi^* := \pi(v_1, \dots, v_n)$ und $(v_{1:n}, \dots, v_{n:n}) := (v_{\pi^*(1)}, \dots, v_{\pi^*(n)})$.
2. $(u'_1, \dots, u'_n) := (c(v_{1:n}), \dots, c(v_{n:n}))$ und $\sigma := \pi(u'_1, \dots, u'_n)$.
3. $\pi := \pi(u_1, \dots, u_n)$, $(y_1, \dots, y_n) := (f(v_1), \dots, f(v_n))$ und $w := \pi^{-1} \cdot (y_1, \dots, y_n) = (y_{\pi(1)}, \dots, y_{\pi(n)}) \in \Sigma^n$.
4. π_w sei wie in Konstruktion 4.2.7.

Dann gilt: (i) $\pi^* \circ \sigma = \pi$, (ii) $\sigma \cdot w = (f(v_{1:n}), \dots, f(v_{n:n})) = w^*$ und (iii) $\sigma = \pi_w$.

Beweis. Es ist

$$\pi = \pi(u_1, \dots, u_n) = \pi(u_{(\pi^*)^{-1}(\pi^*(1))}, \dots, u_{(\pi^*)^{-1}(\pi^*(n))}) = \pi^* \circ \pi(u_{\pi^*(1)}, \dots, u_{\pi^*(n)})$$

und $u_{\pi^*(i)} = c(v_{\pi^*(i)}) = c(v_{i:n})$, also $\pi(u_{\pi^*(1)}, \dots, u_{\pi^*(n)}) = \sigma$. Damit folgt (i). Aus (i) folgt dann direkt

$$\begin{aligned} \sigma \cdot w &= (\pi^*)^{-1} \cdot \pi \cdot w \\ &= (\pi^*)^{-1} \cdot (f(v_1), \dots, f(v_n)) \\ &= (f(v_{\pi^*(1)}), \dots, f(v_{\pi^*(n)})) \\ &= (f(v_{1:n}), \dots, f(v_{n:n})). \end{aligned}$$

Per Konstruktion ist nun $(f(v_{1:n}), \dots, f(v_{n:n}))$ von der Gestalt $b_1^{n_1} b_2^{n_2} \dots b_m^{n_m}$ und ist das eindeutige Wort w^* wie in Konstruktion 4.2.7, also folgt (ii). Wegen (ii) bleibt zu begründen, dass σ^{-1} auf den Mengen $\{n_1 + \dots + n_{j-1} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_j\}$ monoton wachsend ist. Das folgt daraus, dass $\sigma = \pi(u'_1, \dots, u'_n)$ mit $u'_i = c(v_{i:n})$ und die Funktion c per Definition auf den Intervallen $[\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1}, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_j)$ monoton wachsend ist. Dadurch werden die Werte $v_{n_1 + \dots + j - 1 : n}, \dots, v_{n_1 + \dots + n_j : n}$ durch c monoton abgebildet und das liefert die behauptete Monotonieeigenschaft von σ^{-1} . Damit folgt $\sigma = \pi_w$, also (iii). \square

Lemma 4.2.11. *Es sei $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma)$ und alle Größen wie eben konstruiert. Dann gilt*

1. Für alle $j \in [m]$, $v \in [0, \alpha_j]$, $u \in [0, 1]$ gilt $F_j^{-1}(v) \leq u \Leftrightarrow v \leq \rho_j([0, u])$.
2. Ist $V \sim \text{unif}[0, 1]$, so hat $(f(V), c(V))$ Verteilung ρ .

Beweis. Für $\alpha_j = 0$ ist $F_j^{-1}(0) = 0$ und $0 = F_1^{-1}(0) \leq u$ ist immer erfüllt genau wie $0 \leq \rho_j([0, u]) = 0$. Ist $\alpha_j > 0$ so betrachte man $\alpha_j^{-1} \rho_j$. Dies ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß und die inverse Quantilfunktion ist $G_j^{-1}(v) = F_j^{-1}(v \alpha_j)$. Für Wahrscheinlichkeitsmaße gilt für alle $u, v \in [0, 1]$ nun $G_j^{-1}(v) \leq u \Leftrightarrow v \leq \alpha_j^{-1} \rho_j([0, u])$. Damit erhält man also $F_j^{-1}(v \alpha_j) \leq u \Leftrightarrow \alpha_j v \leq \rho_j([0, u])$ und durch Substituieren erhält man die erste Behauptung.

Nun sei $V \sim \text{unif}[0, 1]$ und $b_j \in \Sigma$ mit $\alpha_j > 0$ und $u \in [0, 1]$. Es sei $(Y, U) := (f(V), c(V))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = b_j, U \leq u) &= \mathbb{P}(f(V) = b_j, F_{b_j}^{-1}(V - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1})) \leq u) \\ &= \mathbb{P}(V - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1}) \leq \rho_j([0, u]) | f(V) = b_j) \mathbb{P}(f(V) = b_j). \end{aligned}$$

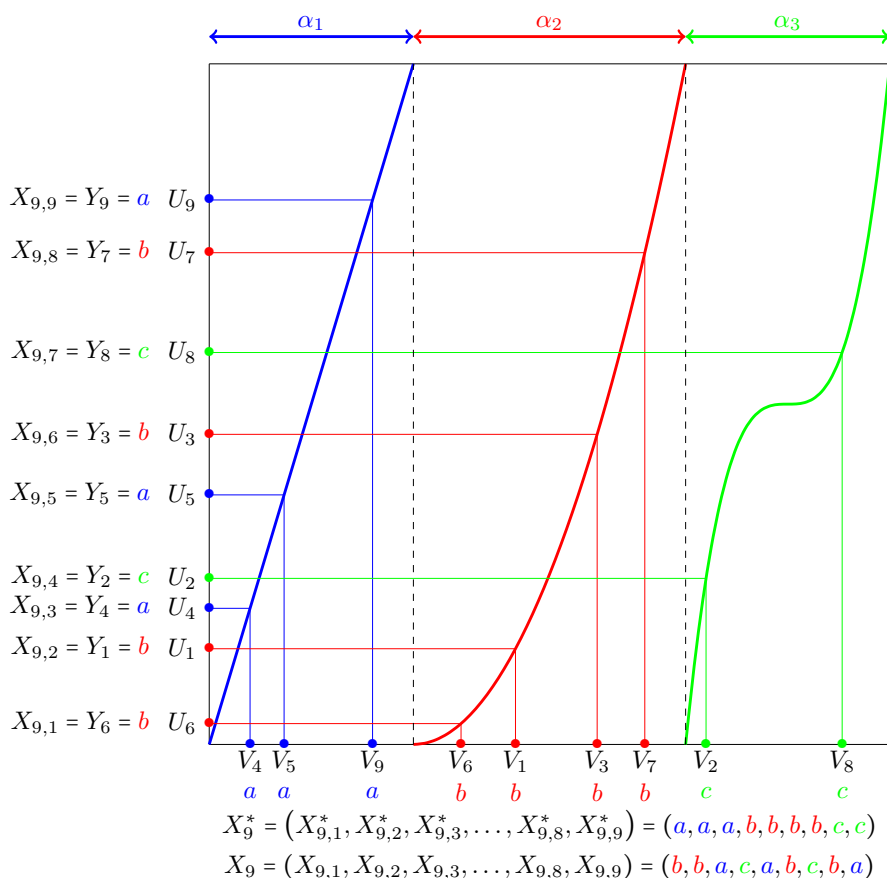


Abb. 4.4.: Das Bild visualisiert die Aussagen von Lemma 4.2.10. Die drei dicken farbigen Kurven repräsentieren den Graph einer Funktion c . Die dargestellte Funktion und die gewählten Werte V_1, \dots, V_9 sind so, dass über die Konstruktionen 4.2.9 das Wort X_9 aus Abbildung 4.2 entsteht.

Unter der Bedingung $\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1} \leq V < \alpha_1 + \dots + \alpha_j$ hat $V - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1})$ die Gleichverteilung auf $[0, \alpha_j]$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1}) \leq \rho_j([0, u]) | f(V) = b_j) \mathbb{P}(f(V) = b_j) &= \frac{\rho_j([0, u])}{\alpha_j} \mathbb{P}(f(V) = b_j) \\ &= \rho_j([0, u]) \end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\mathbb{P}(Y = b_j, U \leq u) = \rho_j([0, u]) = \rho(\{b_j\} \times [0, u]). \quad \square$$

Beweis von Satz 4.2.8. Es sei $\rho \in \mathcal{C}(\Sigma)$ und f, c wie in Konstruktion 4.2.9. Es sei $V = (V_i)_{i \geq 1}$ ein U -Prozess. Es sei

$$(Y_i, U_i) := (f(V_i), c(V_i)), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Damit seien

$$X_\infty = (Y_i)_{i \geq 1} \quad \text{und} \quad L := l((U_i)_{i \geq 1}) \quad \text{und} \quad L^* := l((V_i)_{i \geq 1}).$$

Per Konstruktion hat (X_∞, L) eine extremale austauschbare Verteilung, welche, wie in Lemma 4.2.11 gesehen, durch ρ beschrieben wird. Ferner hat das Tupel (X_∞, L, L^*) per Konstruktion eine gemeinsam austauschbare extremale Verteilung und es gilt

$$\sigma(X_\infty, L) \stackrel{P}{\subseteq} \sigma(L^*).$$

Also ist die Verteilung von (X_∞, L, L^*) stark. Man muss nur noch begründen, dass L^* tatsächlich die lineare Ordnung aus dem Satz ist. Es sei also $S_n = \pi_n(L)$ und $X_n = S_n^{-1} \cdot (Y_1, \dots, Y_n)$. Ferner sei $S_n^* = \pi_n(L^*)$. Mit den Punkten (a) und (c) aus Lemma 4.2.10 folgt

$$S_n^* = S_n \circ \pi_{X_n}^{-1}$$

fast sicher. Damit folgt insbesondere: $(S_n^*)^{-1}(n) = \pi_{X_n}(S_n^{-1}(n))$ fast sicher. Also ist $\eta_n^* = (S_n^*)^{-1}(n)$. Damit ist L^* die lineare Ordnung, welche aus den relativen Rängen $(\eta_n^*)_{n \geq 1}$ mit $\eta_n^* = \pi_{X_n}(\eta_n)$ konstruiert wurde. \square

5. Hierarchien

In diesem Kapitel steht das konsistente System \mathbf{H} der Hierarchien im Mittelpunkt, dieses wurde bereits in Beispiel 3.0.3 kurz vorgestellt. Die formale Definition:

Definition 5.0.1. Das System $\mathbf{H} = (\mathbb{H}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{H})$ besteht aus

1. Für jedes $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ sei $\mathbb{H}(E)$ die Menge der Hierarchien auf E . Dabei ist eine Hierarchie H auf E eine Teilmenge $H \subseteq \mathcal{P}(E)$ mit den Eigenschaften
 - a) $\emptyset \in H$ und $\{j\} \in H$ für alle $j \in E$.
 - b) $A, B \in H \implies A \cap B \in \{A, B, \emptyset\}$.
2. Für $E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ und $H \in \mathbb{H}(F)$ sei $\text{pr}_E^F(H) := \{A \cap E : A \in H\}$.
3. Für $E, F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ mit $0 < |E| = |F|$ und $H \in \mathbb{H}(E)$ sowie $\pi \in \mathbb{S}(E, F)$ sei $\pi.H := \{\pi(A) : A \in H\}$.

Für jedes $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ ist

$$H_E^0 := \{\emptyset\} \cup \{\{j\} : j \in E\}$$

die kleinste Hierarchie auf E . Für alle $H \in \mathbb{H}(E)$ gilt damit stets $H_E^0 \subseteq H$. In das System \mathbf{H} sind einige interessante konsistente Systeme eingebettet. Zunächst werden drei Systeme vorgestellt, deren Einbettungen nach \mathbf{H} durch die Identität gegeben sind, es werden also für jedes $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ Teilmengen von $\mathbb{H}(E)$ spezifiziert, welche insgesamt unter den Operationen pr und π . abgeschlossen sind.

$\mathbf{H}^r = (\mathbb{H}^r, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{H}^r)$ das System der *gewurzelten Hierarchien*. Dabei nennt man eine Hierarchie $H \in \mathbb{H}(E)$ gewurzelt, falls $E \in H$ ist. Für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ sei $\mathbb{H}^r(E) \subseteq \mathbb{H}(E)$ die Menge der gewurzelten Hierarchien auf E .

$\mathbf{B} = (\mathbb{B}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{B})$ das System der *binären Hierarchien*. Dabei nennt man eine Hierarchie $H \in \mathbb{H}(E)$ binär, falls zu allen nicht-leeren und paarweise disjunkten $A_1, A_2, A_3 \in H$ ein $D \in H$ mit $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)} \subseteq D$ und $A_{\sigma(3)} \cap D = \emptyset$ für ein $\sigma \in \mathbb{S}_3$ existiert. Für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ sei $\mathbb{B}(E) \subseteq \mathbb{H}(E)$ die Menge der binären Hierarchien auf E .

$\mathbf{B}^r = (\mathbb{B}^r, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{B}^r)$ das System der *gewurzelten binären Hierarchien*. Für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ ist hier $\mathbb{B}^r(E) := \mathbb{B}(E) \cap \mathbb{H}^r(E)$ die Menge der gewurzelten binären Hierarchien auf E .

Des Weiteren ist das System der *Partitionen* \mathbf{P} in \mathbf{H} eingebettet.

$\mathbf{P} = (\mathbb{P}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{P})$ das System der Partitionen. Für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ ist eine Partition P auf E eine Menge $P = \{A_1, \dots, A_k\}$ von nicht-leeren Mengen mit $A_i \cap A_j = \emptyset$

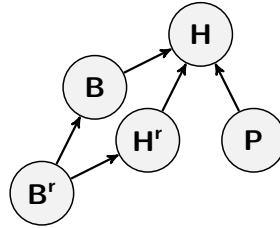


Abb. 5.1.: In diesem Kapitel geht es hauptsächlich um \mathbf{H} .

für $i \neq j$ und $\cup_{i=1}^k A_i = E$. Es ist $\mathbb{P}(E)$ die Menge der Partitionen von E und für $F \subseteq E$ und $P \in \mathbb{P}(E)$ sei $\text{pr}_F^E(P) := \{A_1 \cap E, \dots, A_k \cap F\} \setminus \{\emptyset\}$. Für $\pi \in \mathbb{S}(E, F)$ sei $\pi.P := \{\pi(A_1), \dots, \pi(A_k)\}$. Jede Partition $P \in \mathbb{P}(E)$ liefert durch Übergang zu $P \cup H_E^0$ eine Hierarchie auf E und diese Abbildung ist eine injektive Einbettung $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{H}$.

Für jedes $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ ist die einzige Partition $P \in \mathbb{P}(E)$, welche durch Einbettung nach \mathbf{H} auf eine gewurzelte Hierarchie $P \cup H_E^0 \in \mathbb{H}^r(E)$ führt, die Partition $P = \{E\}$. Für $|E| > 3$ gibt es *keine* Partitionen, die durch Übergang zu $P \cup H_E^0$ auf binäre Hierarchien führen. Im Folgenden werden Hierarchien $H \in \mathbb{H}(E)$ bildlich als Bäume (oder Wälder, je nach Vorhandensein einer Wurzel) dargestellt. Die Blätter in H entsprechen den einelementigen Teilmengen $\{j\}$ mit $j \in E$. Die inneren Knoten entsprechen den Mengen $A \in H$ mit $|A| \geq 2$. Man sagt nun, dass ein Knoten $A \in H$ Vorgänger eines Knoten $B \in H$ ist, falls $B \subseteq A$ gilt. Insbesondere beschreibt die Menge $A \in H$ selbst genau die Menge der Blätter, die Nachkommen von A sind. Die Hierarchieforderung $A, B \in H \Rightarrow A \cap B \in \{A, B, \emptyset\}$ liefert nun gerade, dass diese Interpretation tatsächlich einen Baum ergibt; entweder ein Knoten ist Nachkomme eines anderen, oder die beiden Knoten haben keinerlei gemeinsame Nachkommen. Die auf diese Weise konstruierten Bäume sind ferner so, dass jeder innere Knoten mindestens zwei Nachkommen hat. In einer allgemeinen Hierarchie ist nicht gefordert, dass es eine Wurzel gibt, ein Wurzelknoten hat nämlich die Eigenschaft, dass alle Blätter Nachkommen des Wurzelknotens sind, es ist also $\mathbb{H}^r(E)$ die Menge derjenigen Bäume mit Blattmenge E in denen eine Wurzel existiert. $\mathbb{B}(E)$ besteht aus denjenigen Bäumen, bei denen jeder innere Knoten genau zwei Nachkommen hat. Wichtig ist, dass die Blätter hier markiert sind. Die Bäume haben allerdings selbst keine Anordnung und die inneren Knoten sind eindeutig durch die Namen der Blätter, die Nachkommen des Knotens sind, benannt. Abbildung 5.2 zeigt die Visualisierungen einiger Hierarchien auf $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und Abbildung 5.3 zeigt die Funktionsweise von pr und $\mathbb{S} \leftrightarrow \mathbb{H}$. Das System \mathbf{H} wird nun hinsichtlich austauschbarer Verteilungen analysiert. Gearbeitet wird dabei mit den kanonischen projektiven Limesräumen, man beachte hier auch Beispiel 5.0.2.

Beispiel 5.0.2. Angenommen es liegt eine Teilmenge $H \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ mit den Eigenschaften $\emptyset \in H$ und $\{j\} \in H$ für alle $j \in \mathbb{N}$ sowie $A, B \in H \Rightarrow A \cap B \in \{\emptyset, A, B\}$ vor. Es sei $H \cap [n] := \{A \cap [n] : A \in H\}$. Man sieht leicht, dass $H \cap [n] \in \mathbb{H}([n])$ und die Folge $(H \cap [n])_{n \geq 1}$ projektiv ist. Allerdings sind Teilmengen H mit der oben genannten Eigenschaft *nicht*

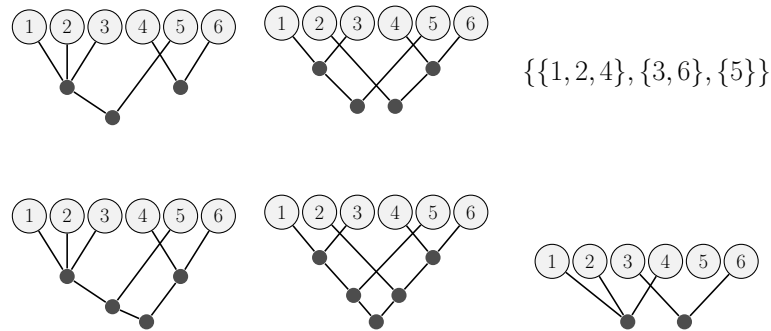


Abb. 5.2.: Oben links die Hierarchie $H = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6\}\} \cup H_{[6]}^0 \in \mathbb{H}([6])$. Diese ist weder binär, noch enthält sie eine Wurzel. Darunter ist $H \cup \{[6]\} \in \mathbb{H}^r([6])$. In der Mitte oben ist eine binäre Hierarchie ohne Wurzel. Darunter ist eine binäre Hierarchie mit Wurzel. Rechts oben ist eine Partition $P \in \mathbb{P}([6])$, darunter das Bild $P \cup H_{[k]}^0 \in \mathbb{H}([6])$.

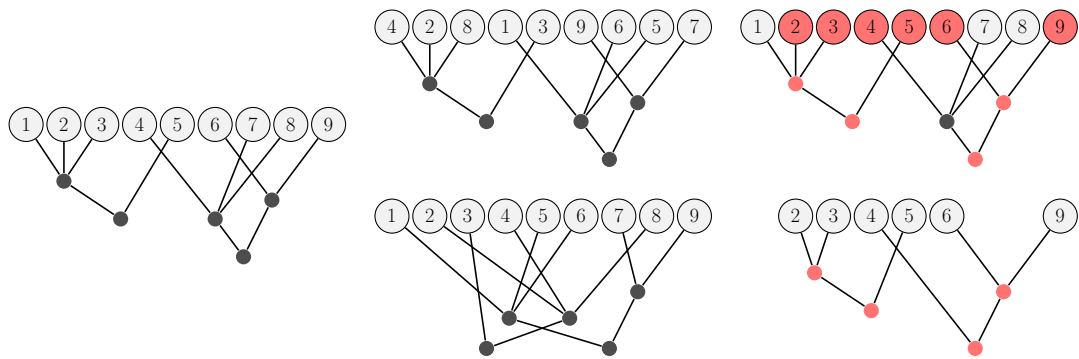


Abb. 5.3.: Links die Hierarchie $H = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{4, 7, 8\}, \{6, 9\}, \{4, 6, 7, 8, 9\}\} \cup H^0([9]) \in \mathbb{H}_9$. In der Mitte oben wurde die Permutation $\pi = (4, 2, 8, 1, 3, 9, 6, 5, 7) \in \mathbb{S}_9$ auf H angewendet, darunter ist dieselbe Hierarchie, $\pi.H$, wie darüber abgebildet, nur dass die Blätter lexikographisch dargestellt sind. Die lexikographische Zeichnung ist kein Bestandteil des Objektes, die in der Mitte abgebildeten Hierarchien sind gleich. Rechts sieht man unten $\text{pr}_{\{2,3,4,5,6,9\}}^{[9]}(H) \in \mathbb{H}(\{2, 3, 4, 5, 6, 9\})$ und darüber die Entstehung. Der Knoten $\{4, 7, 8\}$ ist nicht schwarz eingefärbt, da $\{4, 7, 8\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 9\} = \{4\}$ nur einen Nachfolger enthält.

eindeutig über die Folge $(H \cap [n])_{n \geq 1}$ determiniert, die Kollektion all dieser Mengen eignet sich nicht als projektiver Limesraum. Speziell betrachte man $H = \{\{2, 3, \dots, m\} : m \geq 2\} \cup \{\{j\} : j \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ und $H' = H \cup \{\{2, 3, \dots\}\}$. Es ist $H \neq H'$ aber für alle $n \geq 1$ gilt

$$H \cap [n] = H' \cap [n] = \{\{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \dots, \{2, 3, \dots, n\}\} \cup \{\{j\} : j \in [n]\} \cup \{\emptyset\}. \quad \triangleleft$$

Eine Hierarchie auf \mathbb{N} ist nun eine Folge $(H_n)_{n \geq 1}$ mit $H_n \in \mathbb{H}_n := \mathbb{H}([n])$ für alle $n \geq 1$ und $\text{pr}_k^n(H_n) = H_k$ für alle $1 \leq k \leq n$. Die Menge aller Hierarchien auf \mathbb{N} ist \mathbb{H}_∞ . In diesem Kapitel geht es hauptsächlich um eine Analyse von $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{H}_\infty)$ durch Betrachtung einer abgeschlossenen Fläche in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{H}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$ wie in Kapitel 3.4.4 beschrieben.

In [FHP17] wurde die Menge aller Verteilungen von austauschbaren gewurzelten Hierarchien auf \mathbb{N} beschrieben (dort nur Hierarchien genannt). Analog zu den allgemeinen Hierarchien betrachtet man hier den kanonischen projektiven Limesraum und erhält die Menge \mathbb{H}_∞^r aller gewurzelten Hierarchien auf \mathbb{N} . Die Arbeit dort beschrieb die ergodischen Verteilungen des Simplex $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{H}_\infty^r)$. Dabei entspricht Theorem 2 in [FHP17] dem Korollar 3.2.24 im Spezialfall des Systems \mathbf{H}^r . In diesem Kapitel wird insbesondere Theorem 4 aus [FHP17] in einer verstärkten Form herausgearbeitet und um topologische Aspekte bereichert.

Die Ähnlichkeit der Resultate und Methoden der Arbeiten [FHP17] und [EGW17] wird im Anschluss an das hier angebotene Hauptresultat systematisch erklärt.

Konkret wird die in Abschnitt 3.4.4 vorgestellte Methode verwendet um eine Beschreibung von $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{H}_\infty)$ zu erhalten: Es wird eine Φ -stabile und überdeckende Teilmengenfolge $\mathbb{I}\mathbb{H} = (\mathbb{I}\mathbb{H}_n)_{n \geq 1}$ im System \mathbf{H} angegeben und die dadurch induzierte Fläche $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{H})$ wird präzise (isomorph) beschrieben. Neben $\mathbb{I}\mathbb{H}$ werden nun gleich weitere Teilmengen von \mathbb{H}_n eingeführt, welche die strukturellen Zusammenhänge der Fragestellungen in [FHP17] und [EGW17] später dann genauer erklären.

Definition 5.0.3. Es sei $n \geq 1$.

1. $\mathbb{I}\mathbb{H}_n \subseteq \mathbb{H}_n$ sei die Menge der *Intervallhierarchien* auf $[n]$. Das sind diejenigen $H \in \mathbb{H}_n$, für die jedes nicht-leere $A \in H$ von der Form $A = [l, r] := \{i \in [n] : l \leq i \leq r\}$ für gewisse $1 \leq l \leq r \leq n$ ist.
2. $\mathbb{I}\mathbb{H}_n^r := \mathbb{I}\mathbb{H}_n \cap \mathbb{H}_n^r$ ist die Menge der *Schröderbäume* mit n Blättern (zu dem Begriff „Schröderbaum“ siehe [Bas+16] oder [ARS97]).
3. $\mathbb{I}\mathbb{B}_n := \mathbb{I}\mathbb{H}_n \cap \mathbb{B}_n$ sei die Menge der *binären Intervallhierarchien* auf $[n]$.
4. $\mathbb{I}\mathbb{B}_n^r := \mathbb{I}\mathbb{H}_n^r \cap \mathbb{B}_n$ ist die Menge der *binären Bäume* mit n Blättern.

Man betrachte hierzu auch Abbildung 5.4.

Um einzusehen, dass es sich bei $\mathbb{I}\mathbb{H}$ um eine Φ -stabile Teilmengenfolge handelt, wird nun geklärt, wie die Φ -Funktion im System der Hierarchien operiert. Für $1 \leq k \leq n$ sind diese definiert als

$$\Phi_k^n : \mathbb{H}_n \times \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{H}_k, (H, \pi) \mapsto \text{pr}_k^n(\pi)^{-1} \cdot \text{pr}_k^n(\pi.H).$$

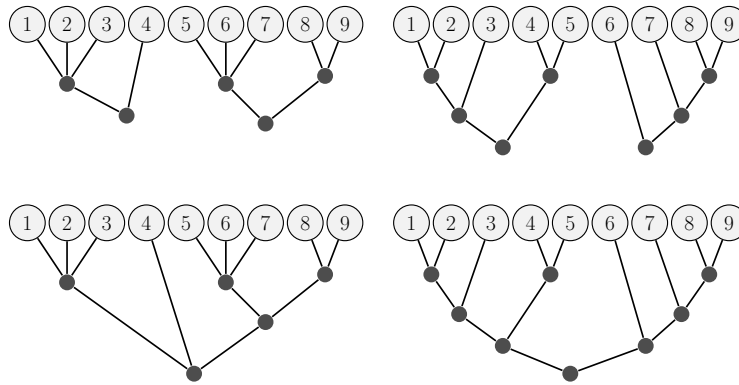


Abb. 5.4.: Links oben ist ein Element von \mathbb{IH}_9 (Intervallhierarchie), darunter ein Element von \mathbb{IH}_9^s (Schröderbaum). Rechts oben ein Element von \mathbb{IB}_9 (binäre Intervallhierarchie) und darunter ein Element von \mathbb{IB}_9^r (binärer Baum).

Aus der Vorarbeit weiß man, dass der Wert von $\Phi_k^n(H, \pi)$ nur von H und der Menge $\pi^{-1}([k]) \in (k : n)$ oder alternativ dem Vektor $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ mit $\pi^{-1}([k]) = \{j_1, \dots, j_k\}$ abhängt. Es sei also

$$\Psi_k^n : \mathbb{H}_n \times [k : n] \rightarrow \mathbb{H}_k$$

die dadurch eindeutig bestimmte Funktion.

Lemma 5.0.4. *Für alle $H \in \mathbb{H}_n$ und $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ gilt*

$$\Psi_k^n(H, j) = \{A \subseteq [k] : \text{es gibt } B \in H \text{ mit } i \in A \Leftrightarrow j_i \in B\}.$$

Beweis. Für $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ und eine Permutation $\pi \in \mathbb{S}_n$ mit $\{j_1, \dots, j_k\} = \pi^{-1}([k])$ ist bekanntlich $\sigma := \text{pr}_k^n(\pi)^{-1} \cdot \pi \in \mathbb{S}_n$ eine Permutation mit $\sigma(j_i) = i$ für $1 \leq i \leq k$. Damit ist

$$\Phi_k^n(H, \pi) = \text{pr}_k^n(\sigma.H) = \{\sigma(B) \cap [k] : B \in H\}.$$

Also ist $A \in \Psi_k^n(H, j)$ genau dann wenn ein $B \in H$ mit $A = \sigma(B) \cap [k]$ existiert. Für $i \in [k]$ gilt $i \in \sigma(B) \cap [k] \Leftrightarrow j_i \in B$. \square

Zur Wirkungsweise von Ψ auf \mathbb{IH} betrachte man auch Abbildung 5.5. Damit kann man nun leicht folgenden Satz begründen:

Satz 5.0.5. *Die Folge $\mathbb{IH} = (\mathbb{IH}_n)_{n \geq 1}$ ist Φ -stabil und überdeckend in \mathbf{H} . Dasselbe gilt für \mathbf{H}^r in \mathbb{H}^r , \mathbb{IB} in \mathbf{B} und \mathbb{IB}^r in \mathbf{B}^r .*

Wie in Abschnitt 3.4.4 beschrieben, lohnt es sich, nun stochastische Prozesse $(X, S) = (X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit den Eigenschaften

1. $X_n \in \mathbb{IH}_n$ und $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ sind für alle $n \geq 1$ unabhängig,
2. $\text{pr}_k^n(S_n) = S_k$ für alle $1 \leq k \leq n$ fast sicher,
3. $\Phi_k^n(X_n, S_n) = X_k$ für alle $1 \leq k \leq n$ fast sicher

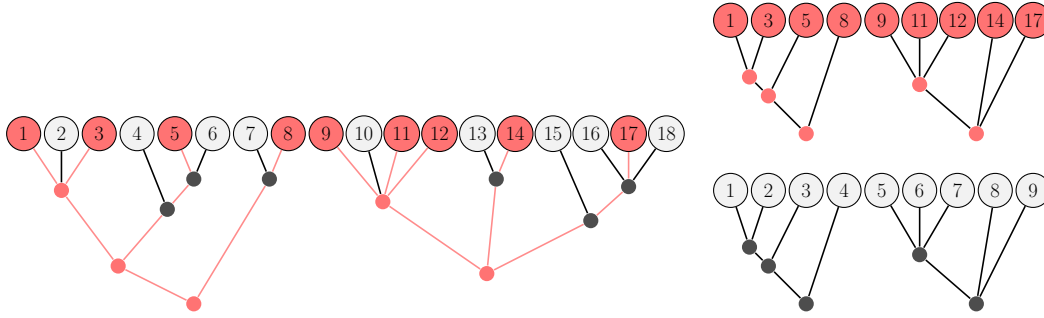


Abb. 5.5.: Links eine Intervallhierarchie $H \in \mathbb{IH}_{18}$, rot eingezeichnet sind die Blätter an den Positionen $j = (j_1, \dots, j_9) = (1, 3, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 17) \in [9 : 18]$. Unten rechts das Resultat $\Psi_9^{18}(H, j) \in \mathbb{IH}_9$.

zu betrachten. Es ist $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH})$ die Menge aller Verteilungen von Prozessen (X, S) mit diesen Eigenschaften. Insbesondere gilt nach Satz 3.4.24 damit: Für jedes $\mathcal{L}((X, S)) \in \mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH})$ ist $(S_n \cdot X_n)_{n \geq 1}$ eine austauschbare Hierarchie auf \mathbb{N} und die Zuordnung

$$\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH}) \rightarrow \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{IH}_\infty), \quad \mathcal{L}((X, S)) \mapsto \mathcal{L}((S_n \cdot X_n)_{n \geq 1})$$

ist affin, stetig und surjektiv. Im ersten Abschnitt wird $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Phi, \mathbb{IH})$ analysiert und die Menge der Extrempunkte wird homöomorph beschrieben. Insbesondere wird gezeigt, dass jede Verteilung stark ist. Im zweiten Abschnitt werden darauf aufbauend dann Resultate aus [FHP17],[EGW17],[Kin78],[Gne97] in einen gemeinsamen Kontext gestellt.

5.1. Beschreibung von $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH})$

Notation 5.1.1. Es sei

$$\Delta = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq y\} \quad \text{und} \quad \text{diag} := \{(x, x) : x \in [0, 1]\} \subseteq \Delta.$$

Für $1 \leq k \leq n$ sei wie zuvor schon $[0, 1]_<^k := \{(u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]^k : 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_k\}$. Ist $u = (u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]_<^k$ so setzt man $u_0 := -1$ und $u_{k+1} := 2$. Analog setzt man für $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ die Werte $j_0 := -n$ und $j_{k+1} := 2n$.

Intervallhierarchien \mathbb{IH}_n mit $n \rightarrow \infty$ werden zu „Intervallhierarchien auf $[0, 1]$ “. Ein Teilintervall von $[0, 1]$ kann offene oder abgeschlossene Grenzen haben, aber das ist für die Definition nun zunächst bedeutungslos: Wichtiger ist die Sichtweise, dass ein Intervall Grenzen hat und man diese Grenzen zu Koordinaten eines Punktes zusammenfassen kann; Intervallhierarchien auf $[0, 1]$ werden als Teilmengen von Δ eingeführt:

Definition 5.1.2. Eine Intervallhierarchie auf $[0, 1]$ ist eine Teilmenge $H \subseteq \Delta$ mit

1. $\text{diag} \subseteq H$.
2. Sind $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H$ mit $x_1 < x_2$ so gilt $y_2 \leq y_1$ oder $y_1 \leq x_2$.

Eine Intervallhierarchie H auf $[0, 1]$ heißt *abgeschlossen*, wenn sie eine abgeschlossene Teilmenge von Δ ist. Es sei \mathcal{H} die Menge der abgeschlossenen Intervallhierarchien auf $[0, 1]$.

Insbesondere ist jedes $H \in \mathcal{H}$ damit eine nicht-leere kompakte Teilmenge von Δ . Eine Topologie auf \mathcal{H} erhält man auf natürliche Weise über den Hausdorff-Abstand. Allgemein:

Definition 5.1.3. Ist (M, d) ein kompakter metrischer Raum und sind $A, B \subseteq M$ nicht-leere Teilmengen, so ist

$$d_{\text{Haus}}(A, B) := \inf\{\epsilon > 0 : B \subset A^\epsilon, A \subset B^\epsilon\}$$

der Hausdorff-Abstand von A und B . Dabei ist $A^\epsilon := \{y \in M : d(y, A) < \epsilon\}$.

Beweise zur nachfolgenden Aussage findet man zum Beispiel in [BBI01], Kapitel 7.3.

Satz 5.1.4. *Bezeichnet $\mathcal{K}(M)$ die nicht-leeren kompakten Teilmengen von M , so ist d_{Haus} eine Metrik auf $\mathcal{K}(M)$ und der metrische Raum $(\mathcal{K}(M), d_{\text{Haus}})$ ist wieder kompakt. Für eine Folge $(K_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{K}(M)$ und $K \in \mathcal{K}(M)$ mit $d_{\text{Haus}}(K_n, K) \rightarrow 0$ gilt, dass K genau aus den Limiten aller Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \in K_n$ für alle $n \geq 1$ besteht.*

Äquivalente Metriken auf M führen zu äquivalenten Hausdorff-Metriken auf $\mathcal{K}(M)$. Man wähle nun eine beliebige Metrik d auf Δ , welche die übliche euklidische Topologie induziert.

Satz 5.1.5. *Die Menge \mathcal{H} der abgeschlossenen Intervallhierarchien ist eine abgeschlossene Teilmenge in $(\mathcal{K}(\Delta), d_{\text{Haus}})$, der Menge der nicht-leeren kompakten Teilmengen von Δ ausgestattet mit dem Hausdorff-Abstand. Insbesondere ist also auch $(\mathcal{H}, d_{\text{Haus}})$ ein kompakter metrischer Raum.*

Beweis. Es sei (H_n) eine Folge in \mathcal{H} und $H \in \mathcal{K}(\Delta)$ mit $d_{\text{Haus}}(H, H_n) \rightarrow 0$. Man muss begründen, dass auch $H \in \mathcal{H}$ ist. Da $\text{diag} \subset H_n$ für jedes n ist auch $\text{diag} \subset H$. Nun zur zweiten Eigenschaft. Es seien $(z_1, z_2), (q_1, q_2) \in H$ mit $z_1 < q_1 < z_2$. Es gibt dann Folgen $z^n = (z_1^n, z_2^n), q^n = (q_1^n, q_2^n) \in H_n$ mit $z^n \rightarrow z$ und $q^n \rightarrow q$. Wegen $z_1 < q_1 < z_2$ muss dann aber für schließlich alle n auch $z_1^n < q_1^n < z_2^n$ gelten. Da alle $H_n \in \mathcal{H}$ Hierarchien sind, muss dann aber für schließlich alle n auch $q_2^n \leq z_2^n$ gelten. Damit muss für die Limiten auch $q_2 \leq z_2$ gelten. Damit erfüllt H die Hierarchieeigenschaft, also $H \in \mathcal{H}$. Damit ist jeder Grenzwert von Folgen aus \mathcal{H} wieder in \mathcal{H} , also ist \mathcal{H} abgeschlossen. \square

Ein Teil des Hauptresultates dieses Kapitels ist nun, dass $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{III}))$ homöomorph zu $(\mathcal{H}, d_{\text{Haus}})$ ist. Wie üblich im Kontext von Austauschbarkeit wird hierfür eine passende *Normierung und Einbettung* der endlichen Objekte in den behaupteten Limesraum in dem Sinne angegeben, dass die Einbettungen der Größen X_n unter den betrachteten Prozessen mit $n \rightarrow \infty$ fast sicher in diesem Raum konvergieren und der Limes die terminale σ -Algebra des Prozesses erzeugt. Die korrekte Normierung eines $H \in \mathbb{III}_n$ in den Raum \mathcal{H} geschieht dabei wie folgt:

Definition 5.1.6. Ist $H \in \mathbb{III}_n$ so sei

$$n^{-1}H := \left\{ \left(\frac{l-1}{n}, \frac{r}{n} \right) : 1 \leq l \leq r \leq n \text{ mit } [l, r] \in H \right\} \cup \text{diag}.$$

Man betrachte dazu auch Abbildung 5.6.

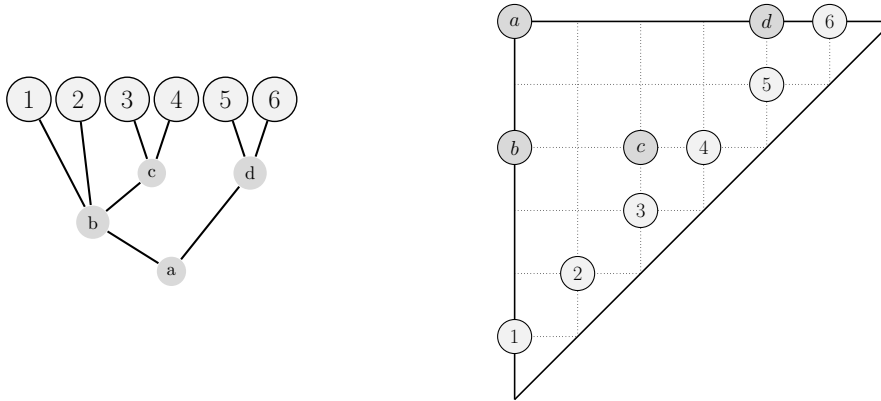


Abb. 5.6.: Links ein Element $H \in \mathbb{IH}_6$, rechts die Punktmenge $(1/6)H \subseteq \Delta$: Diese besteht aus den Mittelpunkten der dicken grauen Punkte und der Diagonalen diag .

Man überprüft leicht, dass dann $n^{-1}H \in \mathcal{H}$ für alle $n \geq 1$ und $H \in \mathbb{IH}_n$ gilt. Damit kann man ein erstes Teilresultat dieses Abschnittes bereits wie folgt formulieren:

Satz 5.1.7. Für jeden Prozess $(X, S) = (X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit $\mathcal{L}((X, S)) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{IH}, \Phi)$ konvergiert $n^{-1}X_n$ mit $n \rightarrow \infty$ fast sicher im Raum $(\mathcal{H}, d_{\text{Haus}})$ und der so erhaltene Limes $H(X) \in \mathcal{H}$ erzeugt die terminale σ -Algebra von X fast sicher. Die darüber erhaltene Zuordnung

$$\text{ex}(\mathcal{M}_1(\mathbb{IH}, \Phi)) \rightarrow \mathcal{H}, \quad \mathcal{L}(X) \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}X_n$$

ist ein Homöomorphismus.

Tatsächlich erhält man das Resultat daraus, dass man das Funktionensystem $\Psi_k^n : \mathbb{H}_n \times [k : n] \rightarrow \mathbb{H}_k$ für festes $k \geq 1$ mit $n \rightarrow \infty$ geeignet fortsetzt; dass dies hier in dieser Form möglich ist, impliziert dann direkt, dass jede extremale Verteilung stark ist. Nun die Definition von Ψ_k^∞ . Diese wird direkt für allgemeine kompakte Mengen $K \in \mathcal{K}(\Delta)$ geliefert.

Definition 5.1.8. Für $H \in \mathcal{K}(\Delta)$ und $(u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]_{<}^k$ sei

$$\Psi_k^\infty(H, u_1, \dots, u_k) := \{ [l, r] \subseteq [k] \mid \exists (z_1, z_2) \in H : u_{l-1} < z_1 < u_l < u_r < z_2 < u_{r+1} \} \cup H_{[k]}^0.$$

Hierzu betrachte man auch Abbildung 5.7.

Nachdem man insbesondere Messbarkeits-eigenschaften der Funktionen Ψ_k^∞ nachgewiesen hat, kann man nun den *Hauptsatz* dieses Kapitels wie folgt formulieren; wie üblich ist dabei $\pi(U_1, \dots, U_n) := S_n$ die eindeutige Permutation mit $U_{S_n(1)} < \dots < U_{S_n(n)}$.

Satz 5.1.9. Ist $H \in \mathcal{H}$ und $U = (U_i)_{i \geq 1}$ ein U -Prozess, so ist der Prozess

$$(\Psi_n^\infty(H, U_{1:n}, \dots, U_{n:n}), \pi(U_1, \dots, U_n))_{n \geq 1}$$

ein Prozess mit Verteilung in $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH}))$. Die so erhaltene Zuordnung

$$\mathcal{H} \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH}))$$

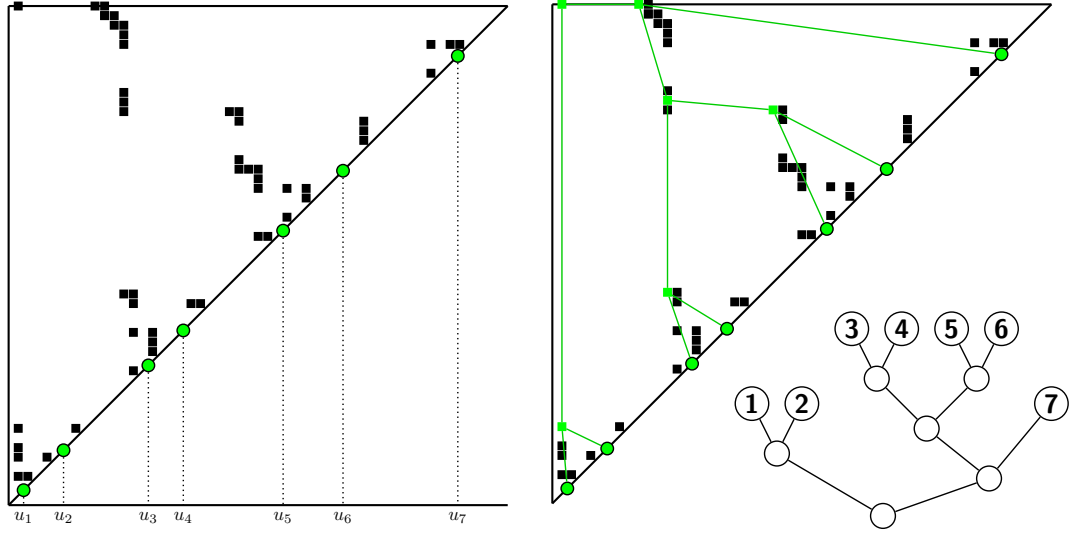


Abb. 5.7.: In der linken Abbildung in schwarz eine kompakte Teilmenge $H \in \mathcal{K}(\Delta)$ und in grün Werte $(u_1, \dots, u_7) \in [0, 1]_{<}^7$. Rechts sieht man die Entstehung von $\Psi_7^\infty(H, u_1, \dots, u_7)$. Dabei sind Punkte in H grün eingezeichnet, welche u -Werte trennen und zur Bildung der diskreten Struktur beitragen. Hier ist ein Baum entstanden, obwohl die kompakte Menge auf der linken Seite natürlich nicht exakt eine Intervallhierarchie ist (die Punkte wurden mit Dicke gezeichnet, was die Hierarchieeigenschaft zerstört). Die grünen u -Werte wurden aber weit genug voneinander entfernt gewählt, sodass dennoch ein Baum entstehen konnte.

ist ein Homöomorphismus. Ist $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ eine beliebige markierte Version, so konvergiert $n^{-1}X_n$ mit $n \rightarrow \infty$ fast sicher im Raum $(\mathcal{H}, d_{\text{Haus}})$ gegen eine Zufallsgröße $H(X)$ und mit $U_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n^{-1}(j)$ gilt

$$X_k = \Psi_k^\infty(H(X), U_{1:k}, \dots, U_{k:k}) \text{ fast sicher für alle } k \geq 1.$$

Insbesondere gilt $\sigma(H(X)) \stackrel{f.s.}{=} \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ für jede markierte Version und jede markierte Version hat eine starke Verteilung.

5.1.1. Beweis von Satz 5.1.9

Der Beweis des Hauptresultates wird in einzelne Stücke aufgeteilt und am Ende werden diese zusammengeführt. Die Aussage zur fast sicheren Konvergenz wird mit ganz analogen Argumenten wie in [EGW17] und [FHP17] begründet, nämlich durch Zurückführung auf den klassischen Satz von de Finetti. Es sei $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ ein Prozess mit Verteilung aus $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Phi, \mathbb{IH})$. Der Beweis wird in die folgenden „Meilensteine“ aufgeteilt:

1. Zunächst wird der Limes $H(X)$ wie im Satz konstruiert. Es wird begründet, dass dieser Limes ein Zufallselement mit Werten in $(\mathcal{H}, d_{\text{Haus}})$ und fast sicher messbar bezüglich der terminalen σ -Algebra von $(X_n)_{n \geq 1}$ ist. Insbesondere ist $H(X)$ für extreme Prozesse also fast sicher konstant. Dass $d_{\text{Haus}}(n^{-1}X_n, H(X)) \rightarrow 0$ fast sicher gilt, wird erst später gezeigt.
2. Ausgehend von der Konstruktion von $H(X)$ aus $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ wird gezeigt, dass

$$\Psi_k^\infty(H(X), U_{1:k}, \dots, U_{k:k}) = X_k$$

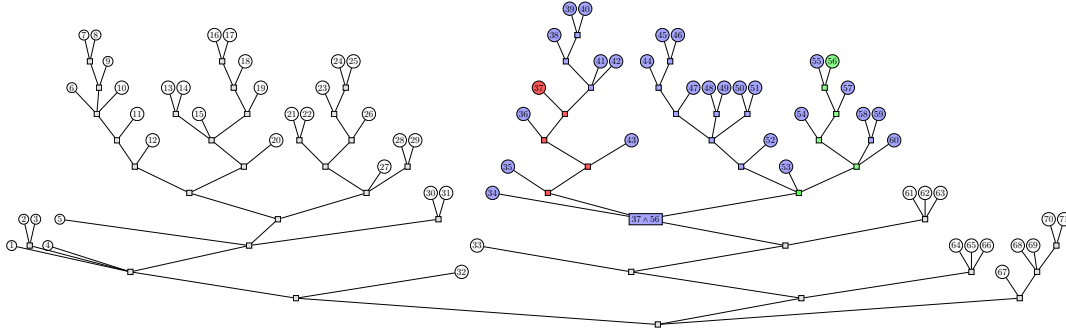


Abb. 5.8.: Eine Intervallhierarchie $H \in \mathbb{IH}_{71}$. Hier hat H eine Wurzel. Es ist $37 \wedge 56 \in H$ der letzte gemeinsame Vorfahre der Blätter 37 (rot) und 56 (grün). Es ist $37 \wedge 56 = \{34, 35, \dots, 60\} = [34, 60]$.

fast sicher für alle $k \geq 1$ gilt, dabei ist Ψ_k^∞ wie oben definiert. Messbarkeits- und algorithmische Eigenschaften von Ψ_k^∞ werden begründet.

3. Unter Anwendung des Satzes von Glivenko-Cantelli auf U -Prozesse wird dann gezeigt, dass $d_{\text{Haus}}(n^{-1}X_n, H(X))$ fast sicher gegen 0 konvergiert.
4. Es wird begründet, dass mit $d_{\text{Haus}}(H_n, H) \rightarrow 0$ auch $\Psi_k^\infty(H_n, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ fast sicher gegen $\Psi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ konvergiert, dies wird für die behauptete *Homöomorphie* von $(\mathcal{H}, d_{\text{Haus}})$ und $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH}))$ benötigt.
5. Schlussendlich werden die Zwischenresultate zu einem Beweis von Satz 5.1.9 zusammengeführt.

An zwei wesentlichen Stellen im Beweis wird auf Satz A.4.2 im Anhang verwiesen; dieser beschreibt das Schnittverhalten zufälliger Rechtecke mit kompakten Mengen. Ist $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ eine markierte Version, hat also Verteilung in $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH})$, so ist der Prozess $(S_n \cdot X_n)_{n \geq 1}$ projektiv und austauschbar, hat also Verteilung in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{H}_\infty)$. Analog zu den Beweisen in [EGW17] und [FHP17] werden nun folgende Größen eingeführt: Für $i, j \in \mathbb{N}$ und $n \geq \max\{i, j\}$ sei

$$i \wedge_n j := \bigcap_{\substack{a \in X_n \\ i, j \in a}} a \quad (\text{siehe dazu auch Abbildung 5.8}).$$

Da X_n eine Hierarchie ist, ist $i \wedge_n j \in X_n$. Ist $X_n \in \mathbb{IH}_n^r$, ist also $[n] \in X_n$, so ist $i \wedge_n j$ niemals leer. Ist $i \wedge_n j$ nicht-leer, so ist $i \wedge_n j$ ein Intervall, da $X_n \in \mathbb{IH}_n$ eine Intervallhierarchie ist. In der Sprache von Bäumen ausgedrückt: $i \wedge_n j$ ist der letzte gemeinsame Vorfahre des i -ten Blattes von links und des j -ten Blattes von links im geordneten Baum X_n .

Durch die Permutationen $(S_n)_{n \geq 1}$ kann man nun, da $(S_n \cdot X_n)_{n \geq 1}$ projektiv ist, Vorfahrenknoten in gewisser Weise *über die Zeit verfolgen*. Für $i, j \in \mathbb{N}$ und $n \geq \max(i, j)$ seien die natürlichen Zahlen $0 \leq l_n(i, j) \leq r_n(i, j) \leq n$ definiert durch:

1. Ist $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j) \neq \emptyset$, so sind $1 \leq l_n(i, j) \leq r_n(i, j) \leq n$ eindeutig erklärt durch

$$S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j) =: [l_n(i, j), r_n(i, j)].$$

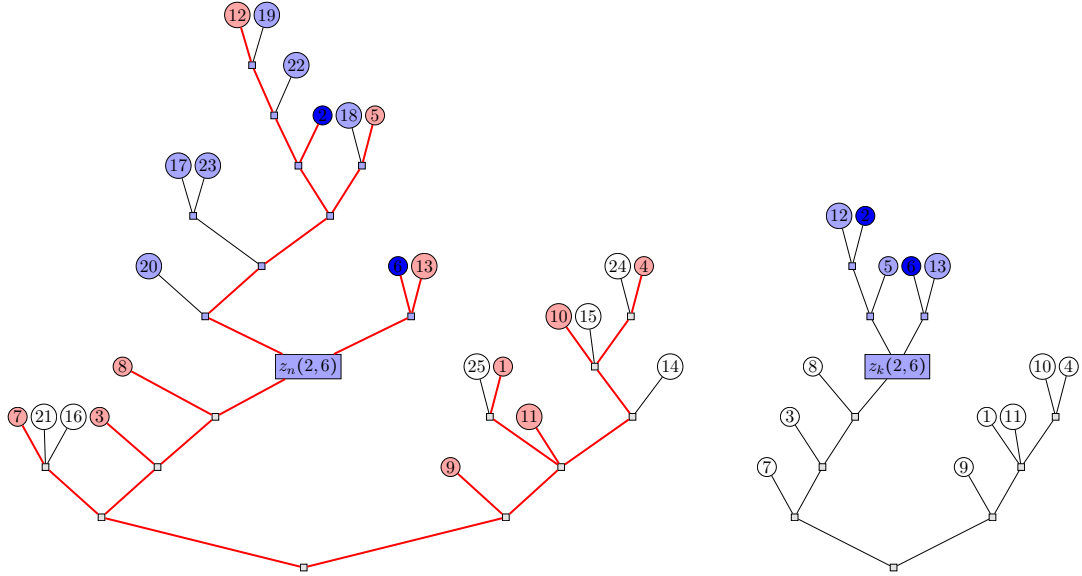


Abb. 5.9.: $n = 25, k = 13$. Links eine Intervallhierarchie $X_n \in \mathbb{IH}_n$. Das i -te Blatt von links ist dort nun aber mit $S_n(i)$ beschriftet, wobei $S_n \in \mathbb{S}_n$. Hier ist $S_n = (7, 21, 16, 3, 8, \dots, 4, 14)$. Die durch S_n mit $i = 2$ und $j = 6$ markierten Blätter sind dunkelblau. Der Vorfahre dieser Blätter $S_n^{-1}(2) \wedge_n S_n^{-1}(6)$ ist mit $z_n(2, 6)$ bezeichnet. Hier ist $[l_n(2, 6), r_n(2, 6)] = [6, 16]$. Rot markiert sind die Blätter $S_n^{-1}([k] \setminus \{i, j\})$. An den Rot markierten Blättern und den beiden dunkelblauen Blättern wird der Baum $\Phi_k^n(X_n, S_n) \in \mathbb{IH}_k$ induziert. Dies geschieht über die dicken roten Linien. Das Ergebnis steht rechts. Mit der Permutation $S_k := \text{pr}_k^n(S_n) \in \mathbb{S}_k$ ist auch dort das i -te Blatt von links mit $S_k(i)$ beziffert und auch dort ist $z_k(2, 6) = S_k^{-1}(2) \wedge S_k^{-1}(6)$. Hier ist $[l_k(2, 6), r_k(2, 6)] = [4, 8]$.

2. Ist $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j) = \emptyset$, so seien

$$l_n(i, j) = r_n(i, j) := 0.$$

Man betrachte hierzu auch Abbildung 5.9. $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j)$ entspricht dem Knoten in X_n , welcher der Vorfahre derjenigen Blätter sind, die durch die Permutation S_n mit i bzw. j markiert sind.

Lemma 5.1.10. Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ konvergiert $n^{-1}(l_n(i, j), r_n(i, j))$ mit $n \rightarrow \infty$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable $(l(i, j), r(i, j))$ mit $0 \leq l(i, j) \leq r(i, j) \leq 1$ fast sicher.

Beweis. Für $i = j$ ist $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(i) = \{S_n^{-1}(i)\}$, da $\{j\} \in X_n$ für alle $j \in [n]$. Damit ist also $l_n(i, i) = r_n(i, i) = S_n^{-1}(i)$ und man erhält $n^{-1}(l_n(i, i), r_n(i, i)) \rightarrow (U_i, U_i)$ fast sicher für alle $i \in \mathbb{N}$.

Die restlichen Argumente sind häufig algorithmischer Natur. Diese basieren darauf, dass die monotone Aufistung von $S_n^{-1}([k])$ für alle $1 \leq k \leq n$ durch den Vektor

$$J^{n,k} = \left(J_1^{n,k}, \dots, J_k^{n,k} \right) = \left(S_n^{-1}(S_k(1)), S_n^{-1}(S_k(2)), \dots, S_n^{-1}(S_k(k)) \right) \in [k : n]$$

gegeben ist und dass

$$\begin{aligned} X_k &= \Psi_k^n(X_n, J^{n,k}) \\ &= \{[l, r] \subseteq [k] : \text{es gibt } [a, b] \in X_n \text{ mit } l \leq i \leq r \Leftrightarrow a \leq S_n^{-1}(S_k(i)) \leq b\} \end{aligned}$$

fast sicher für alle $1 \leq k \leq n$ gilt. Nun seien $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$. Mit den algorithmischen Gegebenheiten erhält man

$$\exists n \geq \max(i, j) : S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j) \neq \emptyset \iff \forall n \geq \max(i, j) : S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j) \neq \emptyset.$$

Für solche $i, j \in \mathbb{N}$ mit $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j) = \emptyset$ ist also $l_n(i, j) = r_n(i, j) = 0$ für alle $n \geq \max\{i, j\}$ und man erhält die behauptete fast sichere Konvergenz von $n^{-1}(l_n(i, j), r_n(i, j))$ gegen den Punkt $(0, 0) \in \Delta$. Nun seien also $i, j \in \mathbb{N}$ verschieden und $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j) = [l_n(i, j), r_n(i, j)]$ mit $1 \leq l_n(i, j) \leq r_n(i, j) \leq n$ für alle $n \geq \max(i, j)$. Es sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}$ und $n \geq m := \max\{i, j, k\}$. Man definiert

$$L_k(n) := 1(S_n^{-1}(k) < l_n(i, j)),$$

dieser Indikator gibt an, ob das $S_n^{-1}(k)$ -te Blatt im Baum X_n weiter links ist als alle diejenigen Blätter aus X_n , welche Nachkommen von $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j)$ sind. Der Indikator

$$D_k(n) := 1(S_n^{-1}(k) \in [l_n(i, j), r_n(i, j)])$$

gibt an, ob das $S_n^{-1}(k)$ -te Blatt im Baum X_n ein Nachkomme des Knotens $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j)$ ist und

$$R_k(n) := 1(S_n^{-1}(k) > r_n(i, j))$$

gibt an, ob das $S_n^{-1}(k)$ -te Blatt im Baum X_n weiter rechts ist als alle diejenigen Blätter aus X_n , welche Nachkommen von $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j)$ sind. Per Definition gilt immer genau eine der drei Alternativen, man erhält also

$$L_k(n) + D_k(n) + R_k(n) = 1.$$

Wieder einzig aufgrund der algorithmischen Gegebenheiten erhält man, dass

$$(L_k(m), D_k(m), R_k(m)) = (L_k(n), D_k(n), R_k(n)) \quad \text{für alle } n \geq m$$

gilt. Es sei

$$Z_k^{i,j} := (L_k, D_k, R_k) := (L_k(m), D_k(m), R_k(m)) \quad \text{und} \quad Z^{i,j} := (Z_k^{i,j})_{k \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}}.$$

Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ ist die Verteilung von $Z_k^{i,j}$ invariant unter endlichen Permutationen $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\pi(i) = i$ und $\pi(k) = k$, es gilt für solche Permutationen also

$$(Z_k^{i,j})_{k \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Z_{\pi(k)}^{i,j})_{k \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}}.$$

Damit sind insbesondere auch die Prozesse $(L_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}}$ und $(R_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{i, j\}}$ austauschbar. Nun ist $l_n(i, j)$ die Nummer desjenigen Blattes, welches das am weitesten links stehende aller Blätter aus X_n ist, die Nachkommen von $S_n^{-1}(i) \wedge_n S_n^{-1}(j)$ sind. Damit erhält man

$$l_n(i, j) = 1 + \sum_{k=1, k \neq i, j}^n L_k \quad \text{und} \quad n - r_n(i, j) = \sum_{k=1, k \neq i, j}^n R_k.$$

Mit dem klassischen Satz von de Finetti über austauschbare $\{0, 1\}$ -Folgen erhält man die fast sicheren Konvergenzen $l_n(i, j)/n \rightarrow l(i, j)$ und $r_n(i, j)/n \rightarrow r(i, j)$ mit $n \rightarrow \infty$. \square

Bemerkung 5.1.11. In [EGW17] wurde ein im gewissen Sinne binärer *Real Tree* mit Sampling-Verteilung auf den Blättern ausgehend von einem Prozess $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit Verteilung in $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IB}^r))$ konstruiert. Die dafür verwendeten Zufallsvariablen $d(i, j)$ sind die Zufallsvariablen $r(i, j) - l(i, j)$ aus dem hier vorgestellten Beweis und $d_n(i, j)$ entspricht $r_n(i, j) - l_n(i, j)$. Beim Übergang von der Kollektion $(l(i, j), r(i, j)) : i, j \in \mathbb{N}$ zur Kollektion $(d(i, j)) : i, j \in \mathbb{N}$ geht aber Information verloren, welche Verteilungen unterscheidet. Genaueres wird sich im weiteren Verlauf dieses Beweises offenbaren: Die Verteilung von $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ ist eindeutig durch die Verteilung von $(l(i, j), r(i, j)) : i, j \in \mathbb{N}$ bestimmt. Die analoge Aussage stimmt nicht für die Kollektion $(d(i, j)) : i, j \in \mathbb{N}$; unterschiedliche Verteilungen aus $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Phi, \mathbb{IH})$ (und auch aus $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Phi, \mathbb{IB}^r)$) können auf dieselbe Verteilung der Arrays $(d(i, j)) : i, j \in \mathbb{N}$ führen. Die fehlende Information wurde in [EGW17] (dort im Kapitel *Distinguishing Between Left And Right*) am Ende durch Zuhilfenahme der allgemeinen Kallenberg-Darstellungsergebnisse wieder zurückgeholt. Dabei entstanden an mehreren Stellen uneindeutige Beschreibungen. ∇

Aus der allgemeinen Theorie zufälliger kompakter Mengen ist bekannt: Liegt eine abzählbare Familie von Zufallsvariablen Y_1, Y_2, \dots mit Werten in einem kompakten metrischen Raum (M, d) vor, so ist der Abschluss $\overline{\{Y_i : i \in \mathbb{N}\}}$ eine Zufallsvariable (messbare Abbildung) mit Werten in den nicht-leeren kompakten Teilmengen $\mathcal{K}(M)$ von M ausgestattet mit der durch den Hausdorff-Abstand d_{Haus} induzierten Borelschen σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{K}(M))$, siehe dazu auch Satz A.4.1 im Anhang und die dort genannten Referenzen. Es sei nach wie vor $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ eine markierte Version. Für $i, j \in \mathbb{N}$ seien $(l(i, j), r(i, j)) \in \Delta$ die wie in Lemma 5.1.10 konstruierten fast sicheren Limiten. Damit sei

$$H(X) := \overline{\{(l(i, j), r(i, j)) : i, j \in \mathbb{N}\}}.$$

Per Konstruktion ist $H(X)$ damit eine Zufallsgröße mit Werten in $(\mathcal{K}(\Delta), \mathcal{B}(\mathcal{K}(\Delta)))$.

Lemma 5.1.12. *Es gilt $\mathbb{P}(H(X) \in \mathcal{H}) = 1$. Ferner ist $H(X)$ fast-sicher messbar bezüglich der terminalen σ -Algebra von $X = (X_n)_{n \geq 1}$. Insbesondere ist $H(X) = H \in \mathcal{H}$ fast sicher konstant, falls die Verteilung von $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ extremal ist.*

Beweis. Es sei $(X_\infty, L) := (S_n \cdot X_n, S_n)_{n \geq 1}$ das zu $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ gehörige projektive Objekt mit Verteilung in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{H}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)$. Aus Satz 3.4.11 ist bekannt, dass die gemeinsam austauschbare σ -Algebra bzgl. (X_∞, L) fast sicher mit der terminalen σ -Algebra von $(X_n)_{n \geq 1}$ übereinstimmt. Ist $((l(i, j), r(i, j)) : i, j \in \mathbb{N})$ die aus (X_∞, L) konstruierte Kollektion von Limiten wie in Lemma 5.1.10 und ist $\pi \in \mathbb{S}_\infty$, so ist

$$((l(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)), r(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j))) : i, j \in \mathbb{N})$$

die aus $(\pi \cdot X_\infty, \pi \cdot L)$ konstruierte Kollektion von Limiten. Damit gilt für die Abschlüsse der Mengen

$$\overline{\{(l(i, j), r(i, j)) : i, j \in \mathbb{N}\}} \quad \text{und} \quad \overline{\{(l(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)), r(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j))) : i, j \in \mathbb{N}\}}$$

die fast sichere Gleichheit. Insbesondere ist damit $H(X)$ messbar bezüglich der gemeinsam austauschbaren σ -Algebra und damit fast sicher auch bzgl. der terminalen σ -Algebra

von X .

Nun zu $\mathbb{P}(H(X) \in \mathcal{H}) = 1$. Im Beweis zu Lemma 5.1.10 wurde gezeigt, dass $(l(i, i), r(i, i)) = (U_i, U_i)$ fast sicher für alle $i \in \mathbb{N}$. Da U_1, U_2, \dots iid je auf $[0, 1]$ -gleichverteilt, ist damit $\text{diag} \subseteq H(X)$ fast sicher. Zur Hierarchieeigenschaft: Es seien $i, j, u, v \in \mathbb{N}$ derart, dass $l(i, j) < l(u, v) < r(i, j)$ gilt. Damit gilt dann aber auch $l_n(i, j) < l_n(u, v) < r_n(i, j)$ für schließlich alle n . Nun ist X_n eine Intervallhierarchie und damit muss auch $r_n(u, v) \leq r_n(i, j)$ für alle diese n gelten. Also erhält man auch für den Limes $r(u, v) \leq r(i, j)$ fast sicher. Hat eine Teilmenge $A \subseteq \Delta$ die Hierarchieeigenschaft, so hat auch der Abschluss $\bar{A} \in \mathcal{K}(\Delta)$ die Hierarchieeigenschaft. Also ist $\mathbb{P}(H(X) \in \mathcal{H}) = 1$. \square

Der Beweis hat noch nicht gezeigt, dass auch tatsächlich $d_{\text{Haus}}(n^{-1}X_n, H(X)) \rightarrow 0$ fast sicher gilt, das folgt später. Für $K \in \mathcal{K}(\Delta)$ und $0 < u_{1:k} < u_{2:k} < \dots < u_{k:k} < 1$ sei wie in Definition 5.1.8 bereits definiert

$$\Psi_k^\infty(K, u_{1:k}, \dots, u_{k:k}) = \left\{ \left[\sum_{i=1}^k 1(u_{i:k} < z_1) + 1, \sum_{i=1}^k 1(u_{i:k} < z_2) \right] : (z_1, z_2) \in K \right\} \cup H^0([k]).$$

Für $1 \leq l < r \leq k$ gilt damit mit der Festlegung $u_{0:k} := -1$ und $u_{k+1:k} := 2$ per Definition sofort

$$\begin{aligned} [l, r] \in \Psi_k^\infty(K, u_{1:k}, \dots, u_{k:k}) &\iff \exists (z_1, z_2) \in K : u_{l-1:k} < z_1 < u_{l:k} \leq u_{r:k} < z_2 < u_{r+1:k} \\ &\iff K \cap (u_{l-1:k}, u_{l:k}) \times (u_{r:k}, u_{r+1:k}) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Im folgenden Lemma werden für spätere Zwecke relevante Aussagen zu diesen Funktionen zusammengefasst.

Lemma 5.1.13. *Es gelten folgende Aussagen, dabei sei nach wie vor*

$$[0, 1]_{<}^k := \{(u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]^k : 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_k < 1\}.$$

1. Die Funktion $\Psi_k^\infty : \mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{<}^k \rightarrow \mathfrak{P}([k])$ ist messbar.
2. Ist $H \in \mathcal{H}$ und $(u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]_{<}^k$, so ist $\Psi_k^\infty(H, u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{IH}_k$.
3. Ist $H \in \mathbb{IH}_n$ und $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ mit $1 \leq k \leq n$ so gilt

$$\Psi_k^n(H, j) = \Psi_k^\infty\left(n^{-1}H, \frac{2j_1 - 1}{2n}, \dots, \frac{2j_k - 1}{2n}\right).$$

4. Für alle $(H, u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{H} \times [0, 1]_{<}^n$ und $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ gilt

$$\Psi_k^n(\Psi_n^\infty(H, u_1, \dots, u_n), j) = \Psi_k^\infty(H, u_{j_1}, \dots, u_{j_k}).$$

5. Ist $1 \leq k \leq n$, $H \in \mathcal{H}$ und sind $u_1, \dots, u_n \in (0, 1)$ paarweise verschieden, so gilt

$$\Phi_k^n(\Psi_k^\infty(H, u_{1:n}, \dots, u_{n:n}), \pi(u_1, \dots, u_n)) = \Psi_k^\infty(H, u_{1:k}, \dots, u_{k:k}).$$

Beweis. Zu 1.: Es sei $1 \leq l < r \leq k$ fest. Begründet werden muss die Messbarkeit der Mengen

$$M(l, k) := \{(H, u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{<}^k : K \cap (u_{l-1}, u_l) \times (u_r, u_{r+1}) \neq \emptyset\},$$

wobei wie oben $u_0 := -1$ und $u_{k+1} := 2$ gesetzt ist. Dies wird nun nur für den Fall $1 < l < r < k$ begründet, die übrigen Randfälle sind im Wesentlichen identisch. Offenbar genügt es für den Fall $1 < l < r < k$ zu zeigen, dass

$$M := \left\{ (H, u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{<}^4 : K \cap (u_1, u_2) \times (u_3, u_4) \neq \emptyset \right\}$$

messbar ist, denn es gilt $(H, u_1, \dots, u_k) \in M(l, r) \Leftrightarrow (H, u_{l-1}, u_l, u_r, u_{r+1}) \in M$. Details zur Messbarkeit hierzu findet man im Anhang, speziell Satz A.4.1, Teil 2(b).

Zu 2.: Es sei $(H, u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{H} \times [0, 1]_{<}^k$ und $T := \Psi_k^\infty(H, u_1, \dots, u_k)$. Per Definition ist $H_k^0 \subseteq T$ und alle $A \in T$ sind Intervalle. Bleibt die Hierarchieeigenschaft. Seien $A = [l, r]$ und $B = [s, t]$ in T mit $1 \leq l < s < t \leq k$ und $l < r \leq k$. Dann gibt es Punkte $(z_1, z_2), (q_1, q_2) \in H$ mit

$$u_{l-1} < z_1 < u_l < u_r < z_2 < u_{r+1} \quad \text{und} \quad u_{s-1} < q_1 < u_s < u_t < q_2 < u_{t+1}.$$

Wegen $l \leq s-1$ ist $u_l \leq u_{s-1}$ und damit $z_1 < q_1$. Wäre nun $t > r$ so wäre auch $u_t \geq u_{r+1}$ und damit $q_2 > z_2$. Aber damit wäre dann $H \notin \mathcal{H}$. Also ist $T \in \mathbb{IH}_k$.

Zu 3.: Es sei $H \in \mathbb{IH}_n$ und $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ mit $1 \leq k \leq n$. Dann gilt für $1 \leq s < t \leq k$

$$\begin{aligned} [s, t] \in \Psi_k^n(H, j_1, \dots, j_k) & \\ \iff \exists [l, r] \in H : j_{s-1} < l \leq j_s \leq j_r \leq r < j_{r+1} & \\ \iff \exists [l, r] \in H : \frac{2j_{s-1} - 1}{2n} < \frac{l-1}{n} < \frac{2j_s - 1}{2n} \leq \frac{2j_t - 1}{2n} < \frac{r}{n} < \frac{2j_{t+1} - 1}{2n} & \\ \iff [s, t] \in \Psi_k^\infty\left(n^{-1}H, \frac{2j_1 - 1}{2n}, \dots, \frac{2j_k - 1}{2n}\right). & \end{aligned}$$

Zu 4.: Es sei $[s, t] \in \Psi_k^n(\Psi_n^\infty(H, u_1, \dots, u_n), (j_1, \dots, j_k))$. Dann gibt es

$[l, r] \in \Psi_n^\infty(H, u_1, \dots, u_n)$ mit $j_{s-1} < l \leq j_s \leq j_t \leq r < j_{t+1}$. Es gibt dann auch ein $z \in H$ mit $u_{l-1} < z_1 < u_l \leq u_r < z_2 < u_{r+1}$. Damit gilt aber $u_{j_{s-1}} < z_1 < u_{j_s} \leq u_{j_t} < z_2 < u_{j_{t+1}}$, also ist $[s, t] \in \Psi_k^\infty(H, u_{j_1}, \dots, u_{j_k})$.

Ist umgekehrt $[s, t] \in \Psi_k^\infty(H, u_{j_1}, \dots, u_{j_k})$, so gibt es ein $z \in H$ mit $u_{j_{s-1}} < z_1 < u_{j_s} \leq u_{j_t} < z_2 < u_{j_{t+1}}$. Es gibt dann $[l, r] \subseteq [n]$ mit

$$u_{l-1} < z_1 < u_l < u_r < z_2 < u_{r+1}.$$

Dies impliziert dann $[l, r] \in \Psi_n^\infty(H, u_1, \dots, u_n)$ und zusätzlich $j_{s-1} < l \leq j_s < j_t \leq r < j_{t+1}$ und damit $[s, t] \in \Psi_k^n(\Psi_n^\infty(H, u_1, \dots, u_n), j_1, \dots, j_k)$.

Zu 5.: Mit $\pi := \pi(u_1, \dots, u_n)$ und $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ als monotoner Auflistung von $\pi^{-1}([k])$ gilt gerade

$$u_{j_1:n} = u_{1:k}, \dots, u_{j_k:n} = u_{k:k}.$$

Damit folgt die Behauptung aus der vorangegangenen Aussage. \square

In der Folge wird häufig für Ereignisse A, B geschrieben, dass $A \Rightarrow B$ fast sicher gilt, damit ist dann $\mathbb{P}(A \cap B^C) = 0$ gemeint. Insbesondere bedeutet $A \Leftrightarrow B$ fast sicher nichts anderes als $\mathbb{P}(A \Delta B) = 0$.

Lemma 5.1.14. *Ist $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ eine extremale markierte Version mit Limes $H(X) \in \mathcal{H}$ wie in Lemma 5.1.12 und ist $U_j = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} S_n^{-1}(j)$, so gilt fast sicher für alle $k \geq 1$*

$$[l, r] \in X_k \iff (U_{l-1:k}, U_{l:k}) \times (U_{r:k}, U_{r+1:k}) \cap H(X) \neq \emptyset,$$

also

$$\Psi_k^\infty(H(X), U_{1:k}, U_{2:k}, \dots, U_{k:k}) = X_k \text{ fast sicher.}$$

Beweis. Für alle $n \geq k$ gilt $\Phi_k^n(X_n, S_n) = X_k$ fast sicher. Es sei $(J_1^{n,k}, \dots, J_k^{n,k}) \in [k : n]$ die monotone Auflistung von $S_n^{-1}([k])$. Es seien $1 < l < r < k$ und $i := S_k(l)$ sowie $j := S_k(r)$. Für alle $n \geq k$ gilt dann

$$\begin{aligned} [l, r] \in X_k &\iff [l, r] = S_k^{-1}(i) \wedge_k S_k^{-1}(j) \\ &\iff J_{l-1}^{n,k} < l_n(i, j) \leq J_l^{n,k} \leq J_r^{n,k} \leq r_n(i, j) < J_{r+1}^{n,k} \end{aligned}$$

fast sicher. An dieser Stelle wird nur $\Phi_k^n(X_n, S_n) = X_k$ und $\text{pr}_k^n(S_n) = S_k$ fast sicher verwendet. Teilt man die Ungleichungskette durch n erhält man mit $n \rightarrow \infty$, dass

$$[l, r] \in X_k \implies U_{l-1:k} \leq l(i, j) \leq U_{l:k} \leq U_{r:k} \leq r(i, j) \leq U_{r+1:k}$$

fast sicher. Mit $H(X) = \overline{\{(l(i, j), r(i, j)) : i, j \in \mathbb{N}\}}$ erhält man

$$[l, r] \in X_k \implies H(X) \cap [U_{l-1:k}, U_{l:k}] \times [U_{r:k}, U_{r+1:k}] \neq \emptyset$$

fast sicher. Nun ist $H(X)$ deterministisch und kompakt. Mit Satz A.4.2 erhält man damit

$$[l, r] \in X_k \implies H(X) \cap (U_{l-1:k}, U_{l:k}) \times (U_{r:k}, U_{r+1:k}) \neq \emptyset$$

fast sicher. Für Fälle $1 \leq l \leq r \leq k$ argumentiert man analog, wobei formal wieder Fallunterscheidungen zu machen sind: Mit $J_0^{n,k} := -n$, $J_{k+1}^{n,k} := 2n$, $U_{0:k} := -1$ und $U_{k+1:k} := 2$ gelangt man zum gewünschten Ergebnis. Insgesamt erhält man hiermit

$$X_k \subseteq \Psi_k^\infty(H(X), U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$$

fast sicher.

Nun sei umgekehrt $1 < l < r < k$ derart, dass $[l, r] \in \Psi_k^\infty(H(X), U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ gilt. Aufgrund der Konstruktion von $H(X)$ als Abschluss einer Menge folgt die Existenz von $i, j \in \mathbb{N}$ mit $U_{l-1:k} < l(i, j) < U_{l:k} < U_{r:k} < r(i, j) < U_{r+1:k}$ fast sicher. Es sei $N := \max(i, j)$. Nun weiß man, dass diese Terme aus fast sicheren Konvergenzen heraus entstanden sind und man erhält für schließlich alle $n \geq N$, dass

$$\frac{2J_{l-1}^{n,k} - 1}{2n} < \frac{l_n(i, j) - 1}{n} < \frac{2J_l^{n,k} - 1}{2n} < \frac{2J_r^{n,k} - 1}{2n} < \frac{r_n(i, j)}{n} < \frac{2J_{r+1}^{n,k} - 1}{2n}.$$

Das bedeutet aber gerade, dass $[l, r] \in \Psi_k^N(X_N, S_N) = X_k$ fast sicher. Analog behandelt man die allgemeinen Fälle $1 \leq l \leq r \leq k$ und erhält schließlich $\Psi_k^\infty(H(X), U_{1:k}, \dots, U_{k:k}) \subseteq X_k$ fast sicher. \square

Lemma 5.1.15. *Ist $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ eine allgemeine markierte Version mit zufälligem Limes $H(X) \in \mathcal{H}$, so gilt ebenfalls*

$$\Psi_k^\infty(H(X), U_{1:k}, \dots, U_{k:k}) = X_k$$

fast sicher für alle $k \geq 1$.

Beweis. Liegt ein Simplex von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1(Y)$ auf einem Raum Y vor und ist ein Ereignis $A \subseteq Y$ gegeben, sodass für jedes $P \in \text{ex}(\mathcal{M})$ gilt, dass $P(A) = 1$ ist, so ist $P(A) = 1$ für alle $P \in \mathcal{M}$. In der hier vorliegenden Situation betrachtet man den Simplex $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH})$. Der Raum Y ist der Pfadraum $\text{Path}(\Phi)$. Für festes $k \geq 1$ betrachtet man das Ereignis $A = \{\Psi_k^\infty(H(X), U_{1:k}, \dots, U_{k:k}) = X_k\}$. Aus der kanonischen Konstruktion $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ heraus sind sowohl $H(X)$ als auch $(U_i)_{i \geq 1}$ als messbare Funktionen von $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ realisiert. \square

Damit hat man den zweiten Meilenstein erreicht. Um eine konkrete Abschätzung zu gewinnen wird nun mit folgender Metrik gearbeitet: Für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sei $d(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Der Hausdorff-Abstand d_{Haus} wird nun bzgl. dieser Metrik betrachtet, speziell für $A, B \in \mathcal{K}(\Delta)$ ist also

$$d_{\text{Haus}}(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y) \right\}.$$

Für diese Darstellung des Hausdorff-Abstandes siehe auch [BBI01], Kapitel 7.3.

Lemma 5.1.16. *Es seien $H \in \mathcal{H}$ und $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_k < 1$. Es sei $F_k(x) := k^{-1} \sum_{i=1}^k 1(u_i < x)$. Damit gilt*

$$k^{-1} \Psi_k^\infty(H, u_1, \dots, u_k) = \{(F_k(z_1), F_k(z_2)) : (z_1, z_2) \in H\} \cup \text{diag},$$

sowie

$$d_{\text{Haus}}(H, k^{-1} \Psi_k^\infty(H, u_1, \dots, u_k)) \leq 2 \sup_{x \in [0,1]} |F_k(x) - x|.$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt sofort aus der Definition. Bei der Betrachtung des Hausdorff-Abstandes genügt es bei der Supremums-Bildung im ersten Schritt nur solche $x \notin \text{diag}$ zu betrachten, da sowohl H als auch $A := k^{-1} \Psi_k^\infty(H, u_1, \dots, u_k)$ die Menge diag per Definition als Teilmenge enthalten. Man erhält

$$\sup_{z \in H} \inf_{w \in A} d(z, w) = \sup_{(z_1, z_2) \in H} \inf_{(q_1, q_2) \in H} d((z_1, z_2), (F_k(q_1), F_k(q_2))).$$

Für festes $(z_1, z_2) \in H$ ist

$$\begin{aligned} \inf_{(q_1, q_2) \in H} d((z_1, z_2), (F_k(q_1), F_k(q_2))) &\leq d((z_1, z_2), (F_k(z_1), F_k(z_2))) \\ &= |z_1 - F_k(z_1)| + |z_2 - F_k(z_2)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in [0,1]} |F_k(x) - x|. \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\sup_{z \in H} \inf_{w \in A} d(z, w) \leq 2 \sup_{x \in [0,1]} |F_k(x) - x|.$$

Auf die gleiche Weise begründet man

$$\sup_{w \in A} \inf_{z \in H} d(z, w) \leq 2 \sup_{x \in [0,1]} |F_k(x) - x|.$$

Insgesamt erhält man damit $d_{\text{Haus}}(H, k^{-1} \Psi_k^\infty(H, u_{1:k}, \dots, u_{k:k})) \leq 2 \sup_{x \in [0,1]} |F_k(x) - x|$, die Behauptung. \square

Lemma 5.1.17. *Es sei $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ eine markierte Version und $H(X)$ wie oben erklärt. Dann gilt*

$$d_{\text{Haus}}(n^{-1}X_n, H(X)) \rightarrow 0$$

fast sicher mit $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Nach Lemma 5.1.15 gilt $X_n = \Psi_n^\infty(H(X), U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ fast sicher für alle $n \geq 1$. Damit erhält man nach vorangegangenem Lemma 5.1.16

$$\begin{aligned} d_{\text{Haus}}(n^{-1}X_n, H(X)) &= d_{\text{Haus}}(n^{-1}\Psi_n^\infty(H(X), U_{1:n}, \dots, U_{n:n}), H(X)) \\ &\leq 2 \sup_{x \in [0,1]} |n^{-1} \sum_{i=1}^n 1(U_{i:n} < x) - x|. \end{aligned}$$

fast sicher. Der letzte Term konvergiert nach dem Satz von Glivenko-Cantelli fast sicher gegen Null. \square

Die behauptete Stetigkeit im Hauptsatz wird dann über folgende Aussage erreicht:

Lemma 5.1.18. *Es sei $U = (U_i)_{i \geq 1}$ ein U -Prozess und $(H_n) \subseteq \mathcal{H}$ sei eine konvergente Folge von Intervallhierarchien mit Limes $H \in \mathcal{H}$. Dann gilt für alle $k \geq 1$, dass*

$$\Psi_k^\infty(H_n, U_{1:k}, \dots, U_{k:k}) \rightarrow \Psi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$$

fast sicher mit $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Die fast sichere Konvergenz im Satz bedeutet, dass die Folge auf der linken Seite mit Wahrscheinlichkeit 1 schließlich mit dem Objekt auf der rechten Seite übereinstimmt, da die beteiligten Zufallsgrößen Werte in der diskreten Menge \mathbb{H}_k annehmen (Lemma 5.1.13, Punkt 1.). Es sei $[l, r] \in \Psi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ mit $l < r$. Dann gibt es ein $z = (z_1, z_2) \in H$ mit $U_{l-1:k} < z_1 < U_{l:k} < U_{r:k} < z_2 < U_{r+1:k}$. Da $d_{\text{Haus}}(H_n, H) \rightarrow 0$ gibt es eine Folge von Punkten $z^n = (z_1^n, z_2^n) \in H_n$ mit $z^n \rightarrow z$. Dann gilt für schließlich alle n auch $U_{l-1:k} < z_1^n < U_{l:k} < U_{r:k} < z_2^n < U_{r+1:k}$, also $[l, r] \in \Psi_k^\infty(H_n, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ für schließlich alle n . Damit folgt aus $d_{\text{Haus}}(H_n, H) \rightarrow 0$, dass alle $[l, r] \in \Psi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ für schließlich alle n auch in $\Psi_k^\infty(H_n, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ liegen.

Umgekehrt sei $l < r$ nun derart, dass $[l, r] \in \Psi_k^\infty(H_n, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ für unendlich viele n erfüllt ist. Unter Berücksichtigung des bereits Gezeigten muss begründet werden, dass $[l, r]$ dann auch in $\Psi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ liegt. Es gibt unter dieser Annahme nun unendlich viele $z^n = (z_1^n, z_2^n) \in H_n$, sodass $U_{l-1:k} < z_1^n < U_{l:k} < U_{r:k} < z_2^n < U_{r+1:k}$. Die Folge (z^n) hat eine konvergente Teilfolge und da $d_{\text{Haus}}(H_n, H) \rightarrow 0$ liegt der Limes $z = (z_1, z_2)$ dieser Teilfolge in H . Für diesen gilt

$$U_{l-1:k} \leq z_1 \leq U_{l:k} < U_{r:k} \leq z_2 \leq U_{r+1:k}.$$

Es gilt dann also

$$H \cap [U_{l-1:k}, U_{l:k}] \times [U_{r:k}, U_{r+1:k}] \neq \emptyset.$$

Wieder mit Satz A.4.2 gilt dann aber fast sicher auch

$$H \cap (U_{l-1:k}, U_{l:k}) \times (U_{r:k}, U_{r+1:k}) \neq \emptyset,$$

also $[l, r] \in \Psi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$. Damit folgt die Behauptung. \square

Damit hat man nun alles zusammen um den Hauptsatz 5.1.9 vollständig beweisen zu können.

Beweis von Satz 5.1.9. Es sei $H \in \mathcal{H}$ und (U_i) ein U -Prozess wie im Satz. Es ist $0 < U_{1:k} < \dots < U_{k:k} < 1$ fast sicher für alle $k \geq 1$. Damit ist $X_k := \Psi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ nach Lemma 5.1.13, 1.+2., ein Zufallselement mit Werten in \mathbb{IH}_k . Nach Punkt 5 des dort zitierten Lemmas gilt mit $S_n = \pi(U_1, \dots, U_n)$, dass

$$\Phi_k^n(\Phi_n^\infty(H, U_{1:n}, \dots, U_{n:n}), S_n) = \Phi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$$

fast sicher für alle $1 \leq k \leq n$, also $\Phi_k^n(X_n, S_n) = X_k$ fast sicher. Da X_n messbar ist bzgl. $\sigma(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$, ist damit insgesamt der Prozess $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ eine extremale markierte Version. Man erhält damit also die Abbildung

$$g: \mathcal{H} \longrightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH})), \quad H \longmapsto \mathcal{L}((\Phi_n^\infty(H, U_{1:n}, \dots, U_{n:n}), \pi(U_1, \dots, U_n))_{n \geq 1}).$$

Diese Zuordnung ist injektiv: Wegen Lemma 5.1.16 konvergiert $n^{-1}\Psi_n^\infty(H, U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ mit $n \rightarrow \infty$ im Raum $(\mathcal{H}, d_{\text{Haus}})$ fast sicher gegen H . Für unterschiedliche H, H' zeigen die zugehörigen Prozesse $g(H), g(H')$ also ein zueinander singuläres terminales Verhalten, insbesondere also $H \neq H' \Rightarrow g(H) \neq g(H')$. Die Zuordnung ist surjektiv: Für jede extremale markierte Version $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ sei $U_i = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}S_n^{-1}(i)$ und $H = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}X_n$. Nach Lemma 5.1.12 und 5.1.17 ist $H \in \mathcal{H}$ fast sicher konstant und man erhält mit Lemma 5.1.14 die Darstellung $X_k = \Phi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ fast sicher. Insbesondere ist die Verteilung von $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ also genau von der Form $g(H)$. Die Zuordnung g ist also bijektiv. Nun sind sowohl $(\mathcal{H}, d_{\text{Haus}})$ also auch $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\Phi, \mathbb{IH}))$ als topologische Räume kompakt metrisierbar. Damit ist die Bijektion g bereits dann ein Homöomorphismus, wenn die Abbildung stetig ist. Man muss also begründen, dass aus $d_{\text{Haus}}(H_n, H) \rightarrow 0$ die schwache Konvergenz von $g(H_n)$ gegen $g(H)$ folgt. Es sei (U_i) ein fixierter U -Prozess. Lemma 5.1.18 zeigt, dass man für die *gekoppelten Prozesse* sogar die fast sichere Konvergenz erhält:

$$(\Psi_k^\infty(H_n, U_{1:k}, \dots, U_{k:k}), \pi(U_1, \dots, U_k))_{k \geq 1} \longrightarrow (\Psi_k^\infty(H, U_{1:k}, \dots, U_{k:k}), \pi(U_1, \dots, U_k))_{k \geq 1}$$

fast sicher mit $n \rightarrow \infty$ im Pfadraum $\text{Path}(\Phi)$. Dies impliziert natürlich auch die Verteilungskonvergenz der Prozesse, also $g(H_n) \rightarrow g(H)$ schwach. Damit ist g stetig und ein Homöomorphismus.

Die nächsten beiden Aussagen folgen sofort aus den Lemmas 5.1.15 und 5.1.17. Dass der Limes $H(X)$ die terminale σ -Algebra zu $(X_n)_{n \geq 1}$ erzeugt, folgt bereits aus obigen Begründungen. „Per Hand“ sieht man das nun wie folgt: Ist $\mathcal{G}_\infty(X) = \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ die terminale σ -Algebra zu $X = (X_n)_{n \geq 1}$, so ist $\sigma(H(X)) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{G}_\infty(X)$, weil $H(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}X_n$. Umgekehrt ist die bedingte Verteilung von $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ gegeben $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}X_n = H \in \mathcal{H}$ für fast alle H extremal. Damit erhält man $\mathcal{G}_\infty(X) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(H(X))$. Dass jeder Prozess $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit Verteilung aus $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{IH})$ nun tatsächlich eine starke Verteilung hat, folgt schlussendlich aus der funktionalen Darstellung $X_k = \Phi_k^\infty(H(X), U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$: Es

gilt damit nämlich $\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(H(X)) \vee \sigma(U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ und damit $\sigma(X_k) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{G}_\infty(X) \vee \sigma(U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ für alle $k \geq 1$, nach Satz 3.4.15 ist dies eine der äquivalenten Bedingungen für die Eigenschaft, eine starke Verteilung zu sein. \square

5.2. Verbindungen zu bekannten Resultaten

5.2.1. Die Resultate aus [FHP17] und [EGW17]

Wie bereits erwähnt behandelte die Arbeit [FHP17] das System der gewurzelten Hierarchien $\mathbf{H}^r \subset \mathbf{H}$. Die Menge der Schröderbäume $\mathbb{I}\mathbb{H}_n^r = \mathbb{I}\mathbb{H}_n \cap \mathbb{H}_n^r$ ist eine Φ -stabile und überdeckende Teilmengefølge im System \mathbf{H}^r . Für eine Intervallhierarchie $H \in \mathcal{H}$ sei $\text{Law}(H) \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{H}))$ die Verteilung des gemäß Theorem 5.1.9 beschriebenen Prozesses. Da $\mathbb{I}\mathbb{H}_n^r \subseteq \mathbb{I}\mathbb{H}_n$ ist $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{H}^r))$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{H}))$ und man muss erklären, für welche $H \in \mathcal{H}$ nun $\text{Law}(H) \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{H}^r))$ gilt. Da die Schröderbäume mit n Blättern genau die Intervallhierarchien mit Wurzel sind ($[n]$ ist Element der Intervallhierarchie), verwundert es nicht, dass die zugehörigen extremalen Prozesse auch durch solche Intervallhierarchien auf $[0, 1]$ mit Vorhandensein des Punktes $(0, 1)$ beschrieben werden:

Satz 5.2.1. *Es sei $\mathcal{H}^r \subseteq \mathcal{H}$ die Menge derjenigen Intervallhierarchien H auf $[0, 1]$ mit $(0, 1) \in H$. Dann gilt für alle $H \in \mathcal{H}$, dass $\text{Law}(H) \in \mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{H}^r) \Leftrightarrow H \in \mathcal{H}^r$.*

Beweis. Gilt $(0, 1) \in H$, so folgt wegen $0 < U_{1:n} < U_{n:n} < 1$ fast sicher sofort $[n] \in \Psi_n^\infty(H, U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ fast sicher. Gilt umgekehrt $[n] \in \Psi_n^\infty(H, U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ für alle $n \geq 1$, so muss es für alle n einen Punkt $(z_1^n, z_2^n) \in H$ mit $z_1^n < U_{1:n}$ und $U_{n:n} < z_2^n$ geben. Da $U_{1:n} \rightarrow 0$ und $U_{n:n} \rightarrow 1$ fast sicher und H abgeschlossen ist, muss damit $(0, 1) \in H$ sein. \square

Damit ist auch $\mathcal{H}^r \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{H}^r)), H \mapsto \text{Law}(H)$ ein Homöomorphismus. Man erhält mit Satz 3.4.24 direkt folgende Aussage, die in der Formulierung näher an Theorem 4 aus [FHP17] ist:

Satz 5.2.2. *Zu jeder austauschbaren gewurzelten Hierarchie $Y = (Y_n)_{n \geq 1}$ auf \mathbb{N} existieren auf einem anderen Wahrscheinlichkeitsraum eine zufällige gewurzelte Intervallhierarchie $H \in \mathcal{H}^r$ auf $[0, 1]$ und ein von H unabhängiger U -Prozess $U = (U_i)_{i \geq 1}$, sodass*

$$Y \stackrel{\mathcal{D}}{=} (\{\{j \in [n] : z_1 < U_j < z_2\} : (z_1, z_2) \in H\})_{n \geq 1}.$$

Nun zur Arbeit [EGW17]: Dort wurde der *Doob-Martin-Rand* zu *Rémys Kette* untersucht. Dieser Prozess ist eine Markovkette $X = (X_n)_{n \geq 1}$ mit $X_n \sim \text{unif}(\mathbb{I}\mathbb{B}_n^r)$ für alle $n \geq 1$ und Rückwärtsdynamik $X_k \sim \Phi_k^n(X_n, S_n)$ mit $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ unabhängig von X_n für alle $1 \leq k \leq n$. Insbesondere wurde dort zu markierten Versionen übergegangen; es wurde im Wesentlichen der Simplex $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{B}^r)$ betrachtet, also alle stochastischen Prozesse $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit

1. X_n ist ein zufälliger binärer Baum mit n Blättern, also $X_n \in \mathbb{I}\mathbb{B}_n^r$ für alle n ,

2. X_n und $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n)$ sind für alle n unabhängig und es gilt $\text{pr}_k^n(S_n) = S_k$ fast sicher für alle $1 \leq k \leq n$,
3. $\Phi_k^n(X_n, S_n) = X_k$ fast sicher für alle $1 \leq k \leq n$.

Unter Zuhilfenahme der allgemeinen Resultate von O. Kallenberg über austauschbare Arrays (wie weiter oben angedeutet) wurde dann im wesentlichen Satz 3.4.12 für die konkrete Situation binärer Bäume bewiesen. Dann wurde dazu übergegangen, die Extrempunkte von $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{B}^r)$ zu analysieren. Dies geschah dadurch, dass man aus den Prozessen $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ zufällige *didendritische Systeme* geformt (zufällige Arrays mit gewissen Konsistenzeigenschaften) hat, und dann begründete, dass diese Arrays austauschbar sind. Unter diesen speziellen austauschbaren Arrays wurden dann die ergodischen näher betrachtet und Darstellungsergebnisse für diese entwickelt. Im ersten Schritt wurde dafür ein Real Tree konstruiert. Die Konstruktion des Real Tree hing von dem Prozess $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ nur über $(S_n \cdot X_n)_{n \geq 1}$ ab und hier entsteht die erste Schnittstelle zu der Arbeit aus [FHP17]: Das Objekt $(S_n \cdot X_n)_{n \geq 1}$ ist eine austauschbare binäre Hierarchie auf \mathbb{N} , ein Zufallsobjekt mit Verteilung in $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{B}_\infty)$. Insbesondere wurden solche Objekte in [FHP17] ebenfalls über Real Trees dargestellt. In beiden Arbeiten wird fast sichere Konvergenz im wesentlichen wie in Lemma 5.1.12 durch Zurückführung auf den klassischen Satz von de Finetti erhalten. Gerade in der Arbeit [EGW17] wurde aber, anders als hier, im ersten Schritt direkt mit den Folgen $d_n(i, j) = r_n(i, j) - l_n(i, j)$ gearbeitet. Aus den fast sicheren Limiten $n^{-1}d_n(i, j) \rightarrow d(i, j)$ wurde dann ein Real Tree konstruiert; die separate Betrachtung von $l_n(i, j)$ und $r_n(i, j)$ enthält aber zusätzliche die Verteilungen unterscheidende Information. Diese ging im ersten Beweisschritt in [EGW17] verloren und wurde im Anschluss unter Zuhilfenahme allgemeiner Resultate der Darstellungstheorie von Kallenberg wieder zurück erhalten. Insgesamt sind die so erhaltenen Beschreibungen der Extrempunkte in [EGW17] nicht eindeutig. Der Ordnungsaspekt unterscheidet die Arbeit [EGW17] von [FHP17]; in letzterer Arbeit sind die betrachteten Bäume ungeordnet. Mithilfe von Theorem 5.1.9 wird nun eine homöomorphe Beschreibung von $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{B}^r))$ angeboten.

Es ist $\mathbb{I}\mathbb{B}_n^r \subseteq \mathbb{I}\mathbb{H}_n^r$ für alle n und damit ist jede Verteilung aus $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{B}^r))$ eindeutig in der Form $\text{Law}(H)$ für ein $H \in \mathcal{H}^r$ darstellbar. Man muss also nur noch ermitteln, welche $H \in \mathcal{H}^r$ stets auf binäre Bäume führen.

Definition 5.2.3. Ein Schröderbaum $H \in \mathcal{H}^r$ heißt *binär*, wenn für unabhängige Zufallsvariablen $U_1, U_2, U_3 \sim \text{unif}([0, 1])$ gilt, dass $\Psi_3^\infty(H, U_{1:3}, U_{2:3}, U_{3:3})$ fast sicher binär ist. Es sei $\mathcal{B}^r \subseteq \mathcal{H}^r$ die Menge der binären gewurzelten Intervallhierarchien auf $[0, 1]$.

Ein Schröderbaum $H \in \mathbb{I}\mathbb{H}_n^r$ ist genau dann binär, wenn $\Psi_3^n(H, j_1, j_2, j_3)$ für alle $(j_1, j_2, j_3) \in [3 : n]$ binär ist. Damit erhält man mit der Definition von \mathcal{B}^r zusammen mit Lemma 5.1.13, Punkt 3. sofort die Beschreibung:

Satz 5.2.4. Die Zuordnung $\mathcal{B}^r \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{I}\mathbb{B}^r))$, $H \mapsto \text{Law}(H)$ ist ein Homöomorphismus.

Bemerkung 5.2.5. In [EGW17] findet sich auch ein Beweis zur Aussage, alle Verteilungen aus $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{H}^r)$ seien stark (Lemma 5.3). Der dort angegebene Beweis ist allerdings nicht korrekt; die Argumentation verwendet lediglich gewisse Abhängigkeitsstrukturen von σ -Algebren, welche bei *jedem* zentralen Prozess in einem *beliebigen* HMB vorliegen. Der Fehler im Beweis liegt an einer fehlerhaften Lesart der Aussagen in [Wei83]. Satz 5.1.9 zeigt, dass die Aussage aber dennoch richtig ist. ∇

Bemerkung 5.2.6. Das in [EGW17] vorgestellte Darstellungsergebnis verwendete neben dem klassischen Satz von de Finetti auch ein Aldous-Hoover-Kallenberg-Darstellungsergebnis für dreidimensionale austauschbare Arrays. Das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Resultat kommt ohne Letzteres aus. ∇

Bemerkung 5.2.7. In [EGW17] wurde für zwei konkrete Folgen wachsender binärer Bäume die ψ -Konvergenz nachgewiesen und die zugehörigen Limiten (Extrempunkte) hinsichtlich des dort angegebenen Darstellungsergebnisses benannt. In der ersten betrachteten Folge $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ binärer Bäume ist x_n der vollständige binäre Baum mit 2^n Blättern (Höhe n). Die zugehörige binäre Intervallhierarchie auf $[0, 1]$, welche den Limes dieser Folge darstellt, ist gegeben durch

$$\text{diag} \cup \bigcup_{n \geq 0} \left\{ \left(0, \frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right), \left(\frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), \dots, \left(\frac{2^n - 1}{2^n}, 1\right) \right\}.$$

In der zweiten betrachteten Folge binärer Bäume ist x_n ein „Spine“, ein Baum mit n Blättern und Höhe $n - 1$, welcher abwechselnd nach links oder rechts wächst. Der zugehörige Limes als binäre Intervallhierarchie auf $[0, 1]$ ist gegeben durch

$$\text{diag} \cup \{(t, 1 - t) : 0 \leq t \leq 0.5\}.$$

Bemerkung 5.2.8. Beispielsweise in [Le 99], Kapitel 3.3 ist beschrieben, wie man aus einer Exkursion $e \in E[0, 1]$ und Zeitpunkten $(u_1, \dots, u_k) \in [0, 1]_{<}^k$ einen binären Baum $T_k^\infty(e, u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{H}_k^r$ definiert. Es ist

$$T_k^\infty : E[0, 1] \times [0, 1]_{<}^k \rightarrow \mathbb{H}_k^r,$$

man vergleiche dies mit $\Psi_k^\infty : \mathcal{H} \times [0, 1]_{<}^k \rightarrow \mathbb{H}_k$. Ist B eine Brownsche Exkursion und $(U_i)_{i \geq 1}$ ein von B unabhängiger U -Prozess, so ist der Prozess $X = (X_n)_{n \geq 1}$ mit

$$X_n := T_n^\infty(B, U_{1:n}, \dots, U_{k:n})$$

genau Rémys Kette. Tatsächlich ist $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$ mit $S_n = \pi(U_1, \dots, U_n)$ ein Prozess mit Verteilung aus $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{H}^r)$, fällt also genau in das gerade analysierte Regime. In [Le 99] wird „per Hand“ nachgewiesen, dass $X_n \sim \text{unif}(\mathbb{H}_n^r)$ ein gleichverteilter binärer Baum mit n Blättern ist. Man kann Rémys Kette auch *vorwärts* in der Zeit durch eine zufällige algorithmische Prozedur erzeugen (auf diese Weise hat Rémy den Prozess eingeführt). In [Mar03] wird bewiesen: Ist L_{X_n} der zu X_n normierte *Lukasiewicz*-Pfad, so konvergiert dieser fast sicher gleichmäßig gegen eine Brownsche Exkursion B . Es ist bekannt, dass die verschiedenen normierten Explorationspfade zu vielen zufälligen Baummodellen (so auch zu gleichverteilten binären Bäumen) asymptotisch nahe

beieinander liegen (siehe zum Beispiel [MM03]). Damit kann man aus den Resultaten in [Mar03] schnell folgern, dass die normierten Harrispfade H_{X_n} zu Rémys Kette fast sicher gleichmäßig gegen dieselbe Brownsche Exkursion B konvergieren (zu den Begriffen Lukasiewicz- und Harrispfad siehe auch [AGH16]). Tatsächlich verwendet der Beweis von P. Marchal implizit eine markierte Version von Rémys Kette. Für diese erhält man $X_k = T_k^\infty(B, U_{1:k}, \dots, U_{k:k})$ fast sicher (ausgearbeitet in der Masterarbeit des Autors, siehe [Ger14]). Ferner läuft der Beweis der fast sicheren Konvergenz von L_{X_n} gegen B in [Mar03] zunächst ähnlich zur hier vorgestellten fast sicheren Konvergenzaussage für $n^{-1}X_n$ ab: B wird zunächst konstruiert und anschließend wird gezeigt, dass L_{X_n} fast sicher gleichmäßig gegen dieses B konvergiert. Dabei werden kompliziertere Argumente als bei der fast sicheren Konvergenz der Hierarchien verwendet, die auch tatsächlich nötig sind: Der Supremumsabstand $\sup_{x \in [0,1]} |H_T(x) - e(x)|$ eines normierten Harris-Pfades H_T zum Baum $T = T_k^\infty(e, u_1, \dots, u_k)$ und zur Funktion e selbst ist im Allgemeinen nicht durch $\sup_{x \in [0,1]} |k^{-1} \sum_{i=1}^k \mathbf{1}(u_i < x) - x|$ beschränkt, anders als in der hier vorliegenden Situation (Lemma 5.1.16). Das ist auch sofort offensichtlich: Für *jede* Konstante $c > 0$ gilt $T_k^\infty(e, u_1, \dots, u_k) = T_k^\infty(ce, u_1, \dots, u_k)$. Dass man die Brownsche Bewegung B tatsächlich fast sicher aus der Folge $T_n^\infty(B, U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ rekonstruieren kann, ist eine bemerkenswerte Eigenschaft der Brownschen Exkursion. Man kann diese beliebig „plattdrücken“, ohne Informationen zu verlieren (Information über die ursprüngliche Höhe können aus der quadratischen Totalvariation der skalierten Exkursion abgelesen werden, diese ist bei der unskalierten Brownschen Exkursion nämlich fast sicher konstant). Der Limes $n^{-1}X_n$ von Rémys Kette als Intervallhierarchie ist die „komplett plattgedrückte Brownsche Exkursion“. ∇

5.2.2. Gnedins Composition Structures, Kingmans Partition Structures

Nun zum System der Partitionen \mathbf{P} und den klassischen Resultaten zur Beschreibung von $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{P}_\infty)$ und Gnedins Composition Structures. Auch hier passt das Ganze in den Rahmen von Abschnitt 3.4.4 über Φ -stabile und überdeckende Teilmengen.

Definition 5.2.9. Eine Partition $P \in \mathbb{P}_n$ heißt *Komposition*, falls jedes $A \in P$ von der Form $A = [l, r]$, also ein Intervall ist. Es sei $\mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{P}_n$ die Menge der Kompositionen von $[n]$.

Die Arbeit [Gne97] analysierte im Wesentlichen den Simplex $\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{K})$. Eine Beschreibung dieses Simplex erhält man nun aus Satz 5.1.9. Dazu betrachte man die Einbettung $P \in \mathbb{P}(E) \mapsto H(P) := P \cup H_E^0 \in \mathbb{H}(E)$ und für jedes $n \in [n]$ sei $\mathbb{K}'_n := H(\mathbb{K}_n)$. Man muss sich nun lediglich fragen, für welche $H \in \mathcal{H}$ auch $\text{Law}(H) \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{K}'))$ ist. Die Eigenschaften von \mathbb{K}'_n übertragen sich wie oben wieder direkt:

Definition 5.2.10. Eine Intervallhierarchie $H \in \mathcal{H}$ auf $[0, 1]$ heißt *Komposition* auf $[0, 1]$, falls für alle $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in H \setminus \text{diag}$ gilt, dass $z_2 \leq w_1$ oder $w_2 \leq z_1$. Es sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ die Teilmenge der Kompositionen auf $[0, 1]$.

Ist $H \in \mathcal{K}$ eine Komposition, so ist $\cup_{(z_1, z_2) \in H \setminus \text{diag}} \{x \in (0, 1) : z_1 < x < z_2\}$ eine offene Teilmenge von $(0, 1)$. Diese Abbildung ist eine Bijektion von \mathcal{K} in die Menge der offenen Teilmengen von $(0, 1)$. Man sieht leicht ein, dass $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ eine abgeschlossene Teilmenge ist. Damit erhält man eine mögliche Formulierung des Hauptresultates aus [Gne97]:

Satz 5.2.11. *Für alle $H \in \mathcal{H}$ ist $\text{Law}(H) \in \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{K}'))$ genau dann wenn $H \in \mathcal{K}$. Insbesondere ist damit die Zuordnung $\mathcal{K} \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{K}'))$, $H \mapsto \text{Law}(H)$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Es sei $(U_i)_{i \geq 1}$ ein U -Prozess. Es sei $H \in \mathcal{K}$ und sowohl $[l_1, r_1]$ als auch $[l_2, r_2]$ seien zwei verschiedene Intervalle aus $\Psi_n^\infty(H, U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ mit $l_1 < r_1$ und $l_2 < r_2$. Wäre $l_1 \leq l_2$ und $r_2 \leq r_1$, dann gäbe es auch verschiedene Punkte (a_1, b_1) und (a_2, b_2) in H mit $a_1 \leq a_2$ und $b_2 \leq b_1$. Dies aber widerspricht der Gestalt $H \in \mathcal{K}$.

Ist umgekehrt $H \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{K}$, dann gibt es verschiedene Punkte $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H$ mit $a_1 \leq a_2$ und $b_2 \leq b_1$. Insbesondere ist dann $a_1 < a_2$ oder $b_1 < b_2$. Es gelte der erste Fall. Mit Wahrscheinlichkeit 1 gibt es dann schließlich ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $i \in [n]$ mit $a_1 < U_i < a_2$. Dann ist aber auch $\Psi_n^\infty(H, U_{1:n}, \dots, U_{n:n}) \notin \mathbb{K}'_n$. \square

Wieder als Korollar erhält man im ersten Schritt eine uneindeutige Beschreibung aller austauschbaren Partitionen:

Korollar 5.2.12. *Die Zuordnung*

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{K}, \Phi) \rightarrow \mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{P}_\infty), \mathcal{L}((X_n, S_n)_{n \geq 1}) \mapsto \mathcal{L}((S_n \cdot X_n)_{n \geq 1})$$

ist surjektiv, affin und stetig.

Hier ist es nun leicht möglich, für jedes $P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{P}_\infty))$ ein

$$Q_P \in f^{-1}(\{P\}) \cap \text{ex}(\mathcal{M}_1(\mathbb{K}, \Phi))$$

kanonisch auszuwählen und so zu einer natürlichen homöomorphen Beschreibung von $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{P}_\infty))$ zu gelangen: Jede Folge $(x_i)_{i \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$ mit $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$ und $\sum_{i=1}^\infty x_i \leq 1$ liefert die offene Menge $U = \cup_{i \geq 1} (\sum_{j=1}^{i-1} x_j, \sum_{j=1}^i x_j)$. Die dadurch erhaltenen extremalen Verteilungen $\mathcal{M}^* \subseteq \text{ex}(\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{K}))$ bilden eine abgeschlossene Teilmenge. Schränkt man die Zuordnung aus Korollar 5.2.12 auf $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}^*)$ ein, erhält man einen Isomorphismus nach $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{P}_\infty)$. Dies ist genau das klassische Darstellungsergebnis von Kingman; die zugehörige Originalarbeit [Kin78] spricht statt über $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{P}_\infty)$ von $\mathcal{M}_1(\tau)$.

Bemerkung 5.2.13. Im Zusammenhang mit den hier diskutierten Darstellungsergebnissen sind auch die Arbeiten von P.Ressel und U.Hirth zu nennen:

1. [HR99] erklärt Darstellungsergebnisse für $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{P}_\infty)$, welche man über abstrakte Methoden in Zusammenhang mit Semigruppen erhalten kann. Allgemeine Aussagen wurden von P.Ressel beispielsweise in [Res88] und [Res85] diskutiert.
2. [HR00] erklärt dasselbe Resultat zu Gnedins Arbeit [Gne97]. Verwendet wurden erneut Semigruppenmethoden.

3. [Hir03] erklärt Resultate, welche die Aussagen in [HR00] verallgemeinern. Die dort erhaltenen Aussagen liefern Darstellungsergebnisse über austauschbare Folgen *feiner werdender Kompositionsstrukturen*. Der Zusammenhang mit der Fragestellung zur Charakterisierung austauschbarer Hierarchien ist in [FHP17] erläutert. ∇

5.2.3. Gleichverteilte 231-vermeidende Permutationen

Was bedeutet Theorem 5.1.9 speziell für Rémys Kette? Bekannt ist (siehe Bemerkung 5.2.8), dass die normierten Harris-Pfade $f_{X_n} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zu Rémys Kette fast sicher gleichmäßig gegen eine Brownsche Exkursion B konvergieren und dass B die terminale σ -Algebra von Rémys Kette erzeugt. Die Brownsche Exkursion B wird hier als ein Zufallselement mit Werten in der Menge der Exkursionen $E[0, 1]$, das ist die Menge aller stetiger Funktionen $e : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ mit $e(0) = e(1) = 0$, erhalten, wobei $E[0, 1]$ über den Supremumsabstand $d(e, g) := \sup_{x \in [0, 1]} |e(x) - g(x)|$ mit einer Topologie und zugehörigen Borelmengen ausgestattet wird.

Nun besagt Theorem 5.1.9 aber auch, dass $n^{-1}X_n$ mit $n \rightarrow \infty$ fast sicher im Raum $(\mathcal{B}^r, d_{\text{Haus}})$ gegen eine binäre Intervallhierarchie $B(X)$ auf $[0, 1]$ konvergiert und dass auch $B(X)$ die terminale σ -Algebra erzeugt. Damit gilt also $\sigma(B) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(B(X))$. Es existieren also messbare Funktionen $f_1 : \mathcal{B} \rightarrow E[0, 1]$ und $f_2 : E[0, 1] \rightarrow \mathcal{B}$ mit $f_1(B(X)) = B$ und $f_2(B) = B(X)$ fast sicher.

Wie sehen diese Übergänge aus? Tatsächlich kann man *jeder* Exkursion $e \in E[0, 1]$ wie folgt eine Hierarchie $H_e \in \mathcal{H}$ zuordnen: Zunächst definiert man $A_e \subseteq \Delta = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq y\}$ durch

$$(x, y) \in A_e \iff e(x) = e(y) \text{ und } e(s) > e(x) \text{ für alle } s \in (x, y).$$

Damit erhält man $H_e \in \mathcal{H}^r$ durch $H_e := \overline{A_e}$. Tatsächlich erhält man darüber stets Hierarchien im oben eingeführten Sinn:

Satz 5.2.14. *Für jedes $e \in E[0, 1]$ ist $H_e \in \mathcal{H}$.*

Beweis. H_e ist eine Hierarchie: Für jeden Punkt $(x, x) \in \text{diag}$ ist $(x, x) \in A_e$, also $\text{diag} \subseteq H_e$. Es seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) Punkte aus H_e mit $x_1 < x_2 < y_1$. Zu zeigen ist, dass dann auch $y_2 \leq y_1$ gilt. Per Definition gibt es Folgen $(x_1^n, y_1^n), (x_2^n, y_2^n) \in A_e$, welche gegen (x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2) konvergieren. Damit gilt für schließlich alle n auch $x_1^n < x_2^n < y_1^n$. Per Definition von A_e gilt damit $e(x_1^n) = e(y_1^n) < e(x_2^n)$. Wäre $y_2^n \geq y_1^n$, müsste dann aber $e(y_1^n) \geq e(x_2^n)$ sein. Also muss $y_2^n < y_1^n$ und mit $n \rightarrow \infty$ damit dann $y_2 \leq y_1$ gelten. Also ist $H_e \in \mathcal{H}$. \square

Bemerkung 5.2.15. Der Übergang $e \mapsto H_e$ ist nicht in allen Punkten stetig, aus der gleichmäßigen Konvergenz von $e_n \rightarrow e$ folgt im Allgemeinen *nicht* die Konvergenz von H_{e_n} gegen H_e im Hausdorff-Abstand. Die Funktion $e \mapsto H_e$ ist sicherlich messbar und man wird begründen können, dass $H_B = B(X)$ fast sicher gilt. Insbesondere ist damit dann $\sigma(B) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(H_B)$ für eine Brownsche Exkursion B . ∇

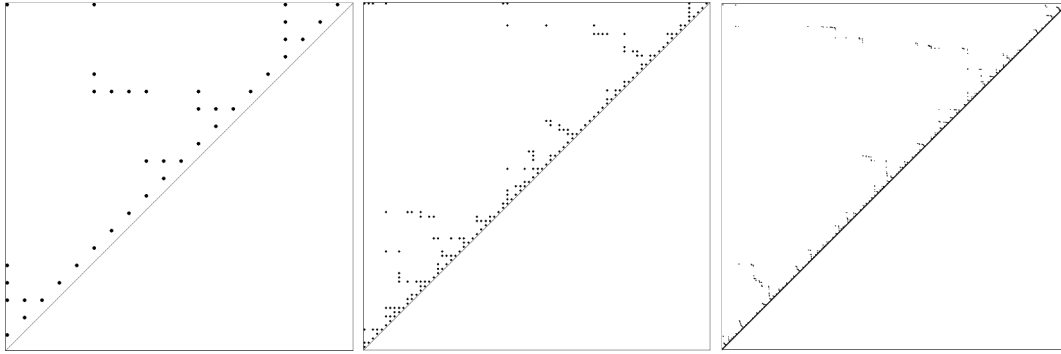


Abb. 5.10.: Unabhängige Realisierungen von $n^{-1}X_n$ mit $X_n \sim \text{unif}(\mathbb{IH}_n^r)$ für $n = 20, 80, 4000$. Die Dicke der gezeichneten Punkte wurde an n angepasst.

Bemerkung 5.2.16. (Fortsetzung von Bemerkung 5.2.8) Der Übergang von $E[0, 1]$ zu \mathcal{H} ist vergleichbar mit dem Übergang von $E[0, 1]$ zu *Real Trees* (eine umfassende Einführung zu Real Trees findet man in [Eva06]). Ist T_e der zu $e \in E[0, 1]$ assoziierte Real Tree, so entsteht dieser informell wie folgt: Man streicht den Graphen zu e von unten mit Klebstoff ein und drückt ihn dann seitlich zusammen. Das zusammengefaltete und geklebte Konstrukt ist der Real Tree T_e . Bei Bildung von H_e geht man wie folgt vor: Zwischen je zwei Punkten auf dem Graphen zu e , zwischen denen unterhalb des Graphen eine waagerechte Sichtverbindung besteht, spannt man eine Leine. Dann drückt man den Graphen von oben zusammen platt. Die informellen Konstruktionen zeigen sofort, welche Transformationen von e die abgeleiteten Real Trees bzw. Hierarchien unverändert lassen: Ist $r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine streng monoton wachsende Bijektion, so ist $T_e = T_{e \circ r}$. Ist $s : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $s(0) = 0$ streng monoton wachsend, so ist $H_e = H_{s \circ e}$. Ist B eine Brownsche Exkursion, so enthält der aus B konstruierte *Continuum Random Tree*, T_B , weniger Information als B , es gilt $\sigma(T_B) \stackrel{\mathbb{P}}{\neq} \sigma(B)$. Hingegen geht beim Übergang zur Brownschen Intervallhierarchie H_B auf $[0, 1]$ keine Information verloren, es gilt $\sigma(H_B) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(B)$. Die gesamte Zufälligkeit einer Brownschen Exkursion steckt in den „Triple Points“. ∇

(Die Verteilung von) $B(X)$ wird *Brownsche Intervallhierarchie auf $[0, 1]$* genannt. Für $n = 20, 80, 4000$ sieht man in Abbildung 5.10 jeweils (unabhängig erzeugte) Realisierungen einer zufälligen Teilmenge $n^{-1}X_n \subseteq \Delta \subseteq [0, 1]^2$ mit gleichverteiltem $X_n \sim \text{unif}(\mathbb{IB}_n^r)$. Sehr ähnliche Abbildungen finden sich in der Arbeit [HRS17], man betrachte dort die Abbildung auf Seite 4. Die Arbeit analysiert unter anderem die Verteilungsasymptotik großer gleichverteilter 231-vermeidender Permutationen. Eine Permutation $\pi \in \mathbb{S}_n$ heißt 231-vermeidend, falls die Permutation $\sigma = (2, 3, 1) \in \mathbb{S}_3$ nicht in π eingebettet werden kann, also $\widetilde{\text{occ}}((2, 3, 1), \pi) = 0$ gilt, wobei $\widetilde{\text{occ}}$ wie in Abschnitt 4.1 definiert ist. Es sei $\mathbb{S}_n(231) \subseteq \mathbb{S}_n$ die Menge der 231-vermeidenden Permutationen von $[n]$. Bekannt ist, dass man sowohl für $\#\mathbb{S}_n(231)$ als auch für $\#\mathbb{IB}_{n+1}^r$ die n -te Catalansche Zahl erhält. Die Verteilungsasymptotik gleichverteilter binärer Bäume wird schon seit Langem über Korrespondenzen von Bäumen und ihren Explorationspfaden (Harrispfade, Dyckpfade, etc.) mit der Brownschen Exkursion ausgedrückt. Ein Dyckpfad der Länge $n \geq 1$ ist eine Funktion $h : \{0, \dots, 2n\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $h(0) = h(2n) = 0$ und $|h(i) - h(i+1)| = 1$ für alle $i = 0, \dots, 2n-1$.

Es sei \mathbb{D}_n die Menge aller Dyckpfade mit Länge n . Es gilt auch $\#\mathbb{D}_n = \mathbb{IB}_{n+1}^r$ für alle $n \geq 1$. In [HRS17] wird eine kanonische Bijektion $A : \mathbb{D}_n \rightarrow \mathbb{S}_n(231)$ betrachtet und die Verteilungasymptotik gewisser Funktionale von Permutationen wird so über die Brownsche Exkursion ausgedrückt. Die Simulationen und die bekannten Zusammenhänge zur Brownsche Exkursion legen nun folgende Vermutungen nahe:

Vermutung 5.2.17. *Für $n \geq 1$ sei $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n(231))$. Es sei*

$$\text{graph}(S_n) := \{(i/n, S_n(i)/n) : i = 1, \dots, n\} \subset [0, 1]^2$$

der standardisierte Graph von S_n . Man kann $\text{graph}(S_n)$ als Zufallsgröße mit Werten im Raum $([0, 1]^2, d_{\text{Haus}})$ auffassen. Ebenso lässt sich die Brownsche Intervallhierarchie $B(X)$ als Zufallsgröße mit Werten in $([0, 1]^2, d_{\text{Haus}})$ auffassen. Damit gilt

$$\text{graph}(S_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} B(X).$$

Diese Aussage könnte man beweisen, indem man für eine spezielle Folge S_1, S_2, \dots mit $S_n \sim \text{unif}(\mathbb{S}_n(231))$ für alle n sogar die fast sichere Konvergenz gegen eine Brownsche Intervallhierarchie zeigt. Betrachtet wird Rémys Kette $(X_n)_{n \geq 1}$. Ferner sei $L : \mathbb{IB}_{n+1}^r \rightarrow \mathbb{D}_n$ die *Lukasiewicz-Korrespondenz* von binären Bäumen und Dyckpfaden. Die Abbildung $A \circ L : \mathbb{IB}_{n+1}^r \rightarrow \mathbb{S}_n(231)$ ist damit ebenfalls eine Bijektion. Abbildung 5.11 zeigt entlang *einer* Realisierung von Rémys Kette $(X_n)_{n \geq 1}$ jeweils in einem Bild $n^{-1}X_n$ (grün) und $\text{graph}(A \circ L(X_n))$ (rot). Die Bilder nähern sich anscheinend an, der Hausdorff-Abstand wird kleiner. Vermutung 5.2.17 würde nun speziell aus folgender Vermutung folgen:

Vermutung 5.2.18. *Ist $(X_n)_{n \geq 1}$ Rémys Kette, so konvergiert*

$$d_{\text{Haus}}(n^{-1}X_n, \text{graph}(A \circ L(X_n)))$$

mit $n \rightarrow \infty$ fast sicher gegen 0.

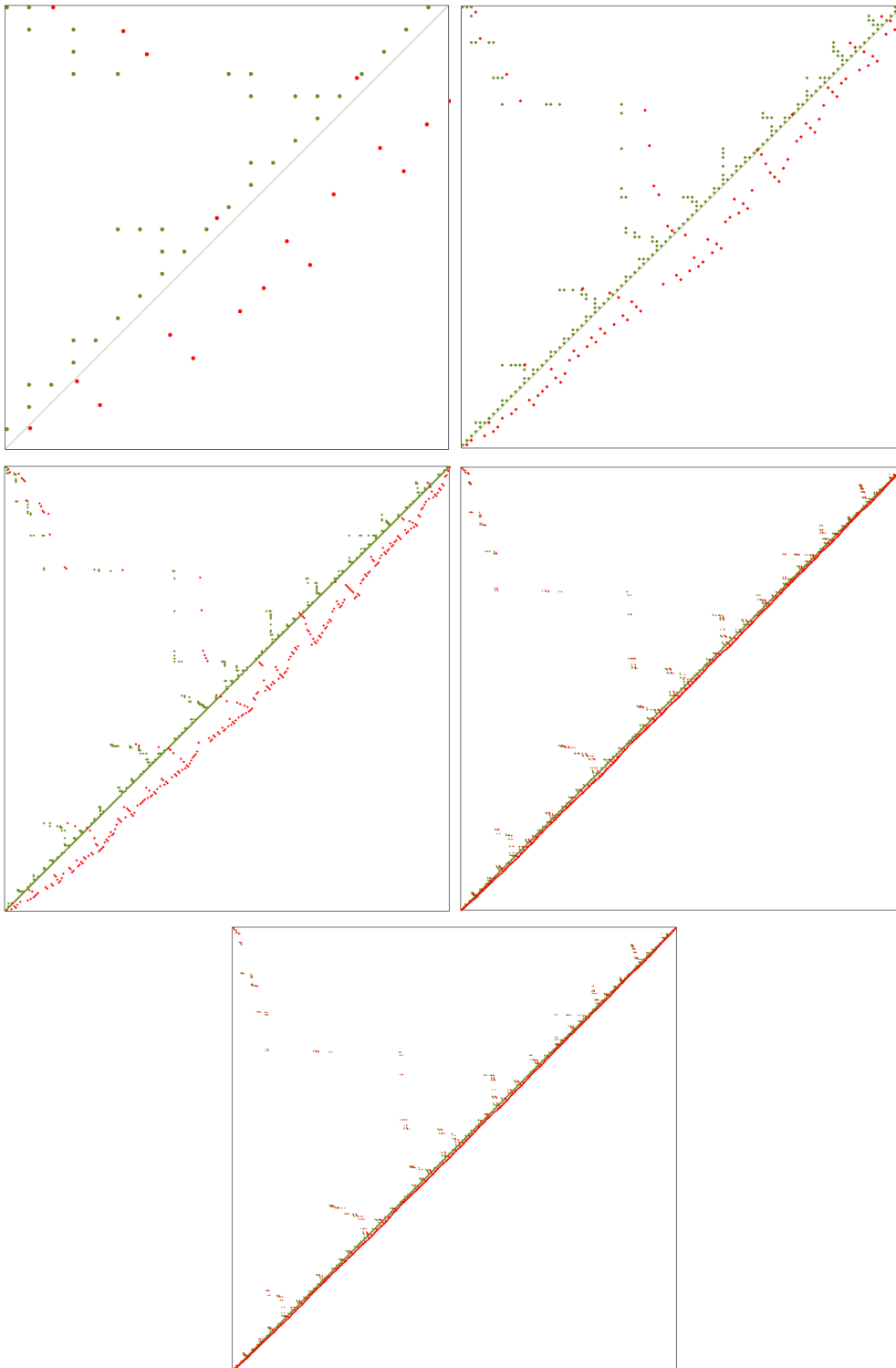


Abb. 5.11.: In einem Bild gezeichnet jeweils die Punktwolken $n^{-1}X_n$ (grün) und $\text{graph}(A \circ L(X_n))$ (rot) für $n = 20, 100, 300, 15000, 25000$, wobei die Bilder nun nicht unabhängig erzeugt wurden, sondern eine Realisierung von Rémys Kette (X_1, \dots, X_N) bis $N = 25000$ verwendet wurde. Die Bilder rücken mit wachsendem n anscheinend näher zusammen, der Hausdorff-Abstand der Mengen wird kleiner.

6. Graphen und abschließende Bemerkungen

6.1. Das konsistente System der Graphen

Definition 6.1.1. Das System der Graphen $\mathbf{Graph} = (\mathbb{G}, \text{pr}, \mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{G})$ ist definiert als:

1. Für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ ist $\mathbb{G}(E)$ die Menge der ungerichteten Graphen ohne Zykel auf Knotenmenge E . Formal kann man einen Graphen über seine Adjazenzmatrix beschreiben: Ein $G \in \mathbb{G}(E)$ ist eine Abbildung $G : E \times E \rightarrow \{0, 1\}$ mit $G(i, i) = 0$ und $G(i, j) = G(j, i)$ für alle $i, j \in E$.
2. Für $E \subseteq F \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ und $G \in \mathbb{G}(F)$ sei $\text{pr}_E^F(G) := G|_{E \times E}$.
3. Für $E, E' \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, $\pi \in \mathbb{S}(E, E')$ und $G \in \mathbb{G}(E)$ sei $\pi.G(i, j) := G(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j))$.

Als projektiver Limes \mathbb{G}_∞ eignet sich hier die Menge aller Graphen auf \mathbb{N} : Ein $G \in \mathbb{G}_\infty$ ist eine Funktion $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $G(i, j) = G(j, i)$ und $G(i, i) = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Projektion und Ummarkierung sind analog zur endlichen Situation erklärt. In diesem Abschnitt sollen keine bekannten Dinge über den Simplex der austauschbaren Graphen auf \mathbb{N} erneut bewiesen, sondern bereits bekannte Aussagen und Zusammenhänge vor dem Hintergrund der in dieser Arbeit allgemein entwickelten Begriffe präsentiert werden. Es sei $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty)$ die Menge der Verteilungen von austauschbaren Graphen auf \mathbb{N} . Zunächst zur bekannten Darstellung von $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$ über *Graphone*: Ein Graphon ist eine messbare symmetrische Funktion $W : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Symmetrie bedeutet hier, dass $W(x, y) = W(y, x)$ für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt. Es sei \mathcal{W} die Menge aller Graphone. Das Darstellungsergebnis von $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$ mit Hilfe von Graphonen ist ein Spezialfall der Aldous-Hoover-Kallenberg Darstellungsergebnisse (siehe Abschnitt 3.4.5) und liest sich wie folgt:

Satz 6.1.2. *Es sei $W \in \mathcal{W}$ und $U = (U_i)_{i \geq 1}$ ein U -Prozess und $(U_e)_{e \in \mathfrak{P}_2(\mathbb{N})}$ sei eine von U unabhängige Kollektion weiterer iid $\text{unif}[0, 1]$ -verteilter Zufallsvariablen. Für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ sei $X_\infty(i, j) := 1(W(U_i, U_j) \leq U_{\{i, j\}})$. Es sei $X_\infty(i, i) := 0$. Dann ist X_∞ ein zufälliger Graph auf \mathbb{N} mit extremaler austauschbarer Verteilung. Die Zuordnung $\mathcal{W} \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$, $W \mapsto \mathcal{L}(X_\infty)$ ist surjektiv.*

Speziell in [Aus12] findet man einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweis für diese Aussage. Dort ist auch die Verbindung zur Theorie der Graph-Limits (siehe [Lov12]) ausgeführt. Die Arbeit [DJ08] widmet sich ebenfalls der Verbindung von der Theorie der Graph-Limits im Sinne von Lovasz und der Betrachtung austauschbarer Graphen auf \mathbb{N} . Der Zusammenhang wurde in der vorliegenden Arbeit allgemein herausgearbeitet: Nach Satz 3.2.23 entspricht $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$ dem Martinrand in (\mathbb{G}, γ) , korrespondiert also zu

den Limiten γ -konvergenter Folgen: Es sei $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Graphen, wobei $x_n \in \mathbb{G}_{m_n}$ ein Graph auf Knotenmenge $[m_n]$ ist und $m_n \rightarrow \infty$ gelten soll. Die Folge heißt nun γ -konvergent, falls

$$\gamma_k^{m_n}(x, x_n) = (m_n!)^{-1} \#\{\pi \in \mathbb{S}_{m_n} : \text{pr}_k^{m_n}(\pi \cdot x_n) = x\}$$

für alle $k \geq 1$ und alle Graphen $x \in \mathbb{G}_k$ konvergiert. Tatsächlich ist $\gamma_k^{m_n}(x, x_n)$ nichts anderes als die normierte Einbettungszahl von x in x_n . In der Arbeit [DJ08] wird die Bezeichnung t_{ind} verwendet. Es gilt

$$\gamma_k^{m_n}(x, x_n) = t_{\text{ind}}(x, x_n) \text{ für } k < m_n.$$

Die in der vorliegenden Arbeit allgemein vorgestellte Theorie besagt nun direkt, dass der Martinrand (Menge aller Limiten γ -konvergenter Folgen) mit der Menge der Extrempunkte übereinstimmt. Satz 3.2.23 liefert die Äquivalenz von Satz 6.1.2 und folgendem bekannten Satz:

Satz 6.1.3. *Zu jeder γ -konvergente Folge $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ von Graphen existiert ein Graphon $W \in \mathcal{W}$ sodass für alle $k \geq 1$ Folgendes gilt: Sind $U_1, \dots, U_k, U_e, e \subseteq [k], |e| = 2$ unabhängig und identisch je $\text{unif}[0, 1]$ -verteilt und ist $X_k \in \mathbb{G}_k$ derjenige zufällige Graph mit $X_k(i, j) := 1(W(U_i, U_j) \leq U_{\{i, j\}})$, so gilt für alle $x \in \mathbb{G}_k$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k^{m_n}(x, x_n) = \mathbb{P}(X_k = x).$$

Ist $E(x) \subseteq \mathfrak{P}_2([k])$ die Kantenmenge von x , so ist

$$\mathbb{P}(X_k = x) = \int_{[0, 1]^k} \prod_{\{i, j\} \in E(x)} W(u_i, u_j) \prod_{\{i, j\} \in E(x)^c} (1 - W(u_i, u_j)) du_1 du_2 \dots du_k.$$

Den Beweis von Satz 6.1.3 findet man in [Lov12], er verwendet im wesentlichen Versionen des *Regularity Lemmas* für Graphen: man kann die Knoten großer Graphen in einem gewissen Sinne asymptotisch „gutartig“ nummerieren. In engem Zusammenhang dazu steht die Beobachtung, dass die Darstellung der extremalen austauschbaren Graphverteilungen (oder äquivalent die Menge der Limiten von γ -konvergenter Graphfolgen) durch Graphone im Allgemeinen hochgradig uneindeutig ist, selbst wenn man Graphone, welche $\text{unif}[0, 1]^2$ -fast sicher gleich sind, miteinander identifiziert. In [DJ08] findet man einige äquivalente Bedingungen dafür, wann Graphone dieselbe Graphverteilung beschreiben. Wie in Kapitel 3.4.5 bereits vorgestellt: Ist $W \in \mathcal{W}$ ein Graphon und U ein U -Prozess und $(U_e)_{\mathfrak{P}_2(\mathbb{N})}$ ein von U unabhängige Kollektion von iid $\text{unif}[0, 1]$ -verteilten Zufallsvariablen, so definieren diese nicht nur den zufälligen Graphen $X_\infty(i, j) := 1(W(U_i, U_j) \leq U_{\{i, j\}})$, sondern auch die gleichverteilte lineare Ordnung $iLj \Leftrightarrow U_i < U_j$ und das Objekt (X_∞, L) hat eine *gemeinsam austauschbare extremale Verteilung*. Es sei $\text{Law}(W) := \mathcal{L}((X_\infty, L)) \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty \times \mathbb{L}_\infty))$ die auf diese Weise durch W beschriebene Verteilung.

Satz 6.1.4. *Für alle $W, W' \in \mathcal{W}$ gilt: $W = W'$ $\text{unif}[0, 1]^2$ -fast sicher genau dann wenn $\text{Law}(W) = \text{Law}(W')$. Für $W, W' \in \mathcal{W}$ sei $W \sim W'$, falls $W = W'$ $\text{unif}[0, 1]^2$ -fast sicher und $\mathcal{W}^* := \mathcal{W} / \sim$ sei die zugehörige Menge von Äquivalenzklassen. Damit gilt insbesondere: Die Zuordnung $\mathcal{W}^* \rightarrow \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty \times \mathbb{L}_\infty))$ mit $W \mapsto \text{Law}(W)$ ist injektiv.*

Beweis. Gilt $W \sim W'$ so ist $W(U_i, U_j) = W'(U_i, U_j)$ fast sicher und damit per Konstruktion $\text{Law}(W) = \text{Law}(W')$. Umgekehrt sei (X_∞, L) wie oben beschrieben aus W und $(U_i), (U_e)$ konstruiert. Für i, j verschieden betrachte man

$$(X_\infty(1, 2), U_1, U_2) = (1(W(U_1, U_2) \leq U_{1,2}), U_1, U_2).$$

Es sind U_1, U_2 fast sicher Funktionen von L . Aus der Annahme $\text{Law}(W) = \text{Law}(W')$ erhält man damit

$$(1(W(U_1, U_2) \leq U_{\{1,2\}}), U_1, U_2) \stackrel{D}{=} (1(W'(U_1, U_2) \leq U_{\{1,2\}}), U_1, U_2).$$

Die bedingte Verteilung des Indikators $1(W(U_1, U_2) \leq U_{\{1,2\}})$ unter U_1, U_2 ist wegen der Unabhängigkeit von U_1, U_2 und $U_{\{1,2\}}$ gleich der $\text{Ber}(W(U_1, U_2))$ -Verteilung. Aus der fast sicheren Eindeutigkeit von bedingten Verteilungen folgt nun, dass $\text{Ber}(W(u_1, u_2))$ und $\text{Ber}(W'(u_1, u_2))$ für $\mathcal{L}(U_1, U_2) = \text{unif}[0, 1]^2$ -fast alle $u_1, u_2 \in [0, 1]$ übereinstimmen müssen. Also $W \sim W'$. \square

Es sei $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathcal{W}^*)) \subseteq \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty \times \mathbb{L}_\infty))$ die Menge aller $\text{Law}(W), W \in \mathcal{W}$ und $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}}(\mathbb{G}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)) \subseteq \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty \times \mathbb{L}_\infty))$ die Menge aller starken extremalen Verteilungen. Nach Satz 3.4.15, Punkt 3., hat ein (X_∞, L) mit Darstellung $L = L(U)$ genau dann eine starke Verteilung, wenn der Teilgraph $\text{pr}_k(X_\infty) \in \mathbb{G}_k$ fast sicher messbar bzgl. U_1, \dots, U_k . Man erhält folgenden nicht überraschenden Zusammenhang:

Satz 6.1.5. *Es gilt $\text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{str}}(\mathbb{G}_\infty \times \mathbb{L}_\infty)) \not\subseteq \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathcal{W}^*)) \not\subseteq \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty \times \mathbb{L}_\infty))$. Ein Graphon $W \in \mathcal{W}$ beschreibt genau dann eine starke Verteilung, wenn das Graphon zufallsfrei ist, also $W(x, y) \in \{0, 1\}$ für $\text{unif}[0, 1]^2$ -fast alle $u_1, u_2 \in [0, 1]$ gilt.*

Beweis. Dass die zweite Inklusion echt ist, ist klar. Es sei nun (X_∞, L) eine starke extreme Verteilung, es gelte also $\text{pr}_k(X_\infty) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(U_1, \dots, U_k)$ für alle $k \geq 1$. Die Aussage gilt speziell für $k = 2$ und man erhält die Existenz einer messbaren Funktion $W : [0, 1]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ mit $X_\infty(1, 2) = W(U_1, U_2)$ fast sicher. Da $X_\infty(1, 2) = X_\infty(2, 1)$ kann man auch W symmetrisch wählen. Durch Anwendungen von Permutationen $\pi \in \mathbb{S}_\infty$ auf das Tupel (X_∞, L) erhält man $X_\infty(i, j) = W(U_i, U_j)$ fast sicher für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$. Da $\text{pr}_k(X_\infty)$ eine Funktion von $X_\infty(i, j), i, j \in [k]$ ist, erhält man damit also, dass $\text{pr}_k(X_\infty)$ eine Funktion von (U_1, \dots, U_k) ist; und auf der anderen Seite, dass die gemeinsame Verteilung von (X_∞, L) von der Form $\text{Law}(W)$ für das zufallsfreie Graphon W ist. \square

Wie in Abschnitt 3.4.2 beschrieben und in Abschnitt 3.4.5 bereits angedeutet, werden die Extrempunkte im Produktsystem **Graph** \times **Lin** ebenfalls durch Graphfolgen $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ approximiert, und zwar durch ψ -konvergente Graphfolgen. Zur Erinnerung: Eine Folge von Graphen $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 1}$ heißt ψ -konvergent, wenn

$$\psi_k^{m_n}(x, x_n) = \binom{m_n}{k}^{-1} \#\{j \in [k : m_n] : \Psi_k^{m_n}(x_n, j) = x\}$$

für alle $k \geq 1$ mit $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Für $1 \leq k \leq n$ und $y \in \mathbb{G}_n$ und $j = (j_1, \dots, j_k) \in [k : n]$ ist $\Psi_k^n(y, j) \in \mathbb{G}_k$ wie folgt: Zunächst entfernt man aus dem Graphen y alle Knoten bis

auf diejenigen mit Werten j_1, \dots, j_k . Anschließend benennt man die Knoten monoton um: $j_i \mapsto i$. Das Resultat ist der Graph $\Psi_k^n(y, j)$ auf Knotenmenge $[k]$. Insbesondere existieren zu allen Verteilungen der Form $\text{Law}(W)$ ψ -konvergente Graphfolgen, welche diese Verteilungen approximieren. Ist W ein Graphon und ist U und ein U -Prozess und $(U_e : e \in \mathfrak{P}_2(\mathbb{N}))$ eine von U unabhängige Kollektion von iid $\text{unif}[0, 1]$ -verteilten Größen, so verfährt man wie folgt:

1. Es sei $X_n \in \mathbb{G}_n$ der Graph mit Kanten $X_n(i, j) := 1(W(U_i, U_j) \leq U_{\{i, j\}})$ für $i, j \in [n]$.
2. Es sei $S_n \in \mathbb{S}_n$ die Permutation mit $U_{S_n(1)} < U_{S_n(2)} < \dots < U_{S_n(n)}$.
3. Es sei $Z_n := S_n^{-1}.X_n \in \mathbb{G}_n$, also $Z_n(i, j) := X_n(S_n(i), S_n(j))$ für $i, j \in [n]$.

Aus der allgemeinen Vorarbeit ist nun bekannt: $(X_n)_{n \geq 1}$ ist fast sicher γ -konvergent und Z_n ist sowohl γ als auch ψ -konvergent. Beide Folgen approximieren bzgl. γ fast sicher dieselbe extremale Verteilung $P \in \text{ex}(\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{G}_\infty))$ im Sinne von Satz 6.1.2 und Z_n approximiert insbesondere die Verteilung $\text{Law}(W)$ fast sicher bzgl. ψ . Ist $(x_n, \pi_n)_{n \geq 1}$ eine solche typische Realisierung von $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$, so erhält man also eine γ -konvergente Folge x_n und durch Umbenennung der Knoten durch $z_n = \pi_n^{-1}.x_n$ eine Folge, die in einer stärkeren Topologie konvergiert und deren Limes die Information über die ursprüngliche Konstruktion gemäß $W \in \mathcal{W}^*$ beinhaltet.

6.2. Abschließende Bemerkungen und Fragen

Verallgemeinerte technische Annahmen. Viele der vorgestellten strukturellen Resultate bleiben gültig, wenn man *endliche Menge* durch *kompakt metrisierbaren topologischen Raum* ersetzt und die allgemeinen Abbildungen zwischen solchen Räumen durch *stetige* Abbildungen ersetzt. Viele der maßtheoretischen Aussagen sollten gültig bleiben, wenn man es mit Borelräumen und messbaren Abbildungen zu tun hat. In [Hag16] findet man eine Diskussion der Doob-Martin-Theorie in dem Fall, dass alle \mathbb{F}_n endlich oder auch abzählbar unendlich sind. Der Begriff des Martinrandes ist dann technisch schwieriger zu handhaben.

Operationen konsistenter Systeme. Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben kann man aus vorhandenen konsistenten Systemen neue Systeme definieren. Zu jedem System assoziiert ist ein kompakter metrisierbarer Raum, die extremalen ergodischen Verteilungen. Insbesondere werden Konstruktionen konsistenter Systeme darüber zu Konstruktionen auf Homöomorphieklassen kompakt metrisierbarer Räume „hochgeliftet“. Kann man allgemeine Aussagen über die Gestalt dieser implizit erhaltenen Zuordnung treffen?

Kategorientheorie. Viele der hier vorgestellten Definitionen und Sätze können sicherlich kürzer über Kategorien, Funktoren und natürlichen Transformationen formuliert werden. In den Bemerkungen 3.1.19 und 3.2.12 wurde ein Anfang gemacht. Die Definition einer *Projective Species of Structures* über Funktoren ist sicherlich denkbar. Homomorphismen zwischen Projective Species of Structures wären dann natürliche Transformationen.

Aldous-Hoover-Kallenberg-Darstellungsergebnisse. Kann man die in Abschnitt 3.4.5 vorgestellten Darstellungsergebnisse für allgemeine konsistente Systeme formulieren?

Standardness in konsistenten Systemen. In welchem Maße sind Aussagen zur Standardness in konsistenten Systeme wie in Abschnitt 4.2.2 möglich? Speziell für Graphen könnte eine Frage wie folgt lauten:

Frage 1. *Es sei $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ folgender stochastischer Prozess: X_n ist für alle $n \geq 1$ ein gleichverteilter Graph auf Knotenmenge $[n]$. Der Prozess η_1, η_2, \dots besteht aus unabhängigen Zufallsvariablen, wobei η_n die Gleichverteilung auf $[n]$ hat. Für alle n seien X_n und η_n unabhängig und X_{n-1} entstehe aus X_n und η_n , indem der Knoten η_n in X_n samt allen adjazenten Kanten entfernt wird und anschließend die Knoten mit Werten größer als η_n gemäß $k \mapsto k - 1$ umbenannt werden. Es sei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, \eta_{n+1}, X_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots)$. Ist die Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ standard? Falls nein, für welche Teilfolgen $1 \leq k_1 < k_2 < \dots$ ist $(\mathcal{F}_{k_n})_{n \geq 1}$ eine Standardfiltration?*

Weitere Verallgemeinerung des Resultates über Hierarchien. Viele der wesentlichen Schritte in den Beweisen zum Hauptsatz 5.1.9 im Kapitel über Hierarchien beruhen auf allgemeinen Aussagen über beliebige kompakte Teilmengen $K \subseteq \Delta$. Hinsichtlich der gewählten Methoden bietet sich folgendes allgemeineres System als **H** zu einer analogen Analyse an: Es sei Ω eine beliebige nicht-leere Menge. Eine Teilmenge $x \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω heißt *Arrangement*, falls eine lineare Ordnung $<$ auf Ω existiert, sodass jedes $A \in x$ ein Intervall bzgl. $<$ ist. Für $E \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ bezeichne man mit $\mathbb{A}(E)$ die Menge der Arrangements auf E . Ist $F \subseteq E$ und $x \in \mathbb{A}(E)$ via linearer Ordnung $<$, so ist auch $\text{pr}_F^E(x) := \{A \cap F : A \in x\}$ ein Arrangement via linearer Ordnung $<|_F$. Ist $\pi \in \mathbb{S}(E, E')$ eine Bijektion, so ist auch $\pi.x := \{\pi(A) : A \in x\}$ ein Arrangement auf E' . Dies führt auf das konsistente System der Arrangements **A**. Es wird sich herausstellen, dass $\mathbb{I}_n \subseteq \mathbb{A}_n := \mathbb{A}([n])$ bestehend aus all denjenigen x , die eine Kollektion von Intervallen bezüglich der üblichen linearen Ordnung sind, eine Φ -stabile und überdeckende Teilmengenfolge $\mathbb{I} = (\mathbb{I}_n)_{n \geq 1}$ liefert. Jedes Element in x ist also von der Form $[l, r]$. Bezeichnet $\text{ex}(\mathcal{M}_1(\mathbb{I}, \Phi))$ analog zu oben die dann interessierende Klasse extremer Prozesse, gelangt man zur Vermutung:

Vermutung 6.2.1. *$\text{ex}(\mathcal{M}_1(\mathbb{I}, \Phi))$ ist homöomorph zu $(\mathcal{K}(\Delta), d_{\text{Haus}})$ und es gilt das Analogon zu Satz 5.1.9.*

Einige Schritte im hier vorgestellten Beweis müssten allerdings durch neue Argumente ersetzt werden; Vorfahrenoperationen beispielsweise sind nicht mehr direkt verfügbar. Mit den hier vorgestellten Methoden würde man damit die Menge aller austauschbarer Arrangements auf \mathbb{N} , $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{A}_\infty)$, zumindest surjektiv und stetig beschreiben.

Starke Verteilungen. In einigen Beispielen liegen extremale starke Verteilungen vor, für die in den Äquivalenzen 3. in Satz 2.2.7 sogar die fast sicheren Konvergenzen gelten. Solche Verteilungen heißen nun *sehr stark*. Speziell im Fall der Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$ sind die extremalen starken Verteilungen durch Borelsche Teilmengen $B \subseteq [0, 1]$ modulo $\text{unif}[0, 1]$ beschrieben. Ist die Indikatorfunktion $1_B : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ an $\text{unif}[0, 1]$ -fast allen Stellen stetig, so beschreibt B offensichtlich eine sehr starke Lösung. Gilt auch die Umkehrung? Speziell für $k = 1$ haben sehr starke Verteilungen folgende Eigenschaft: Sind $U_1, U_2, \dots, V_1, V_2, \dots$ unabhängig und identisch je $\text{unif}[0, 1]$ -verteilt, ist $U_{1:n} < \dots < U_{n:n}$

die Ordnungsstatistik der ersten n U -Beobachtungen, ist $R_n = \pi(V_1, \dots, V_n) \in \mathbb{S}_n$ die Permutation mit $V_{R_n(1)} < \dots < V_{R_n(n)}$ und beschreibt $B \subseteq [0, 1]$ eine sehr starke Verteilung, so gilt $1_B(U_{R_n^{-1}(1):n}) \rightarrow 1_B(V_1)$ fast sicher. Liefert B eine sehr starke Verteilung, so impliziert dieses zunächst „nur“ die Stetigkeit der Indikatorfunktion 1_B entlang spezieller zufälliger Folgen. Möglicherweise ist die Stetigkeit von 1_B an $\text{unif}[0, 1]$ -fast allen Stellen keine notwendige Eigenschaft um sehr starke Verteilungen zu beschreiben.

Statistik, Resultate zweiter Ordnung. Die in dieser Arbeit erhaltenen Aussagen zu fast sicheren Konvergenzen entsprechen *Resultaten erster Ordnung* und die Klärung der Simplexstruktur beantwortet wie eine Parametrisierung aller denkbaren austauschbarer statistischer Modelle aussieht. Im Beispiel der Hierarchien: Ist $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge extremaler Intervallhierarchien, welche durch $H \in \mathcal{H}$ beschrieben werden, so besagt das Resultat erster Ordnung (starke Gesetz der großen Zahlen): $n^{-1}X_n \rightarrow H$ fast sicher. Um Statistik betreiben zu können, wären Resultate zweiter Ordnung von großem Interesse. Wie schnell und in welcher Art konvergiert $n^{-1}X_n$ gegen H ? In [Lau88] findet man Aussagen dieser Bauart im dort vorgestellten allgemeinen Kontext.

Der antreibende Prozess. Es sei $\mathcal{B} = (\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ ein HMB. Für alle $1 \leq k < n$ sei

$$\mathbb{B}_k^n := \{\Lambda_k^n(\cdot, a_{k+1}, \dots, a_n) : (a_{k+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{k+1} \times \dots \times \mathbb{A}_n, \mu_{k+1}(a_{k+1}) \cdots \mu_n(a_n) > 0\} \subseteq \mathbb{F}_k^{\mathbb{F}_n}.$$

Es seien η_1, η_2, \dots unabhängig mit $\eta_k \sim \text{unif}(\mathbb{A}_k)$. Ferner sei $\Gamma_k^n := \Lambda_k^n(\cdot, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$. Für alle $k \geq 1$ ist $\Gamma^k = (\Gamma_k^n)_{n > k}$ eine schwach irreduzible Markovkette mit Werten im Pfadraum $\mathbb{B}_k^{k+1} \times \mathbb{B}_k^{k+2} \times \dots$. Mit $\mathbb{B}^k = \bigsqcup_{n > k} \mathbb{B}_k^n$ liefert Γ^k Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(\Gamma_n^k = f | \Gamma_{n+1}^k = g)$ auf \mathbb{B}^k und damit wiederum einen Equipped Graded Graph. Wie in Satz 2.2.7 Punkt 2. gesehen, existieren überhaupt nur dann interessante (nicht degenerierte) extremale starke zentrale Verteilungen, wenn zumindest eine der Ketten Γ^k keine extremale Kette ist. Interessant ist die Frage, ob man die zugehörigen Simplexfragen zu den Ketten Γ^k über die zugehörigen Antworten auf die Simplexfragen für die Simplexe $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ beantworten lassen. Eine mit dem bisherigen Wissen konsistente Vermutung, wie eine solche „Antwort“ aussehen könnte, ist in nachfolgender Vermutung grob skizziert. Ob dies tatsächlich so funktioniert und wie technische Details aussehen, bleibt offen.

Vermutung 6.2.2. Die Extrempunkte $\text{ex}(\Gamma^k)$ des zu Γ^k assoziierten Simplex können durch Funktionen der Gestalt $\alpha : \mathbb{F}_k \rightarrow \mathfrak{P}(\text{ex}(\mathcal{M}_1(\Lambda)))$ beschrieben werden. Der Limes Γ_k^∞ ist eine zufällige solche Funktion. Ist $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ ein zentraler Prozess und Γ^k die aus η konstruierte Kette, so gilt fast sicher

$$\mathcal{L}(X_k | \Gamma_k^\infty) = \mathcal{L}(X_k | X_k \in \{x \in \mathbb{F}_k : \mathcal{L}((X, \eta) | \mathcal{G}_\infty) \in \Gamma_k^\infty(x)\}).$$

Insbesondere ist die Verteilung von $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ genau dann stark, wenn

$$\#\{x \in \mathbb{F}_k : \mathcal{L}((X, \eta) | \mathcal{G}_\infty) \in \Gamma_k^\infty(x)\} = 1$$

fast sicher für alle $k \geq 1$ gilt; insbesondere ist die Verteilung von $(X_n, \eta_n)_{n \geq 1}$ genau dann stark und extremal, wenn

$$\#\{x \in \mathbb{F}_k : \mathcal{L}((X, \eta)) \in \Gamma_k^\infty(x)\} = 1$$

fast sicher für alle $k \geq 1$ gilt.

A. Anhang

A.1. Beweise und Hilfsmittel

Beweis zu Satz 1.4.3. Die Zuordnung

$$f^* : \mathcal{M}_1(T_1) \rightarrow \mathcal{M}_1(T_2), P \mapsto P^f$$

ist stetig (da f stetig ist), affin (offensichtlich) und stetig invertierbar via $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$. Damit ist f^* ein Isomorphismus der Bauersimplizes $\mathcal{M}_1(T_1)$ und $\mathcal{M}_1(T_2)$. Nun sind $\mathcal{M}_1(T_1)$ und $\mathcal{M}_1(T_2)$ kompakte metrisierbare Räume und f^* ist insbesondere auch ein Homöomorphismus zwischen diesen. Damit ist auch die Abbildung

$$f^{**} : \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(T_1)) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(T_2)), \mu \mapsto \mu^{f^*}$$

ein Isomorphismus. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $(f^{**})^{-1} = (f^{-1})^{**}$. Für $i = 1, 2$ sei

$$r_i : \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(T_i)) \rightarrow \mathcal{M}_1(T_i), \mu \mapsto \int_{\mathcal{M}_1(T_i)} Q d\mu(Q)$$

die Desintegration. Elementare Überlegungen liefern $r_2 \circ f^{**} = f^* \circ r_1$ und damit $r_2 = f^* \circ r_1 \circ (f^{-1})^{**}$.

Nun ist $K_2 = f^*(K_1)$ das Bild einer kompakten konvexen Menge unter der stetigen affinen Abbildung f^* , also ist K_2 selbst kompakt und konvex. Da f^* bijektiv ist, werden auch die Extrempunkte ineinander überführt, es gilt also $\text{ex}(K_2) = f^*(\text{ex}(K_1))$. Man erhält darüber die Injektivität von r_2 aus der oben angegebenen Darstellung und der Tatsache, dass r_1 eingeschränkt auf diejenigen $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(T))$ mit $\mu(\text{ex}(K_1)) = 1$ injektiv ist. K_2 ist somit ein Simplex. Dass f^* ein Homöomorphismus ist, ist nun auch klar. \square

Lemma A.1.1. *Es sei $n \geq 1$ und $p \in (0, 1)$ sowie $B_n \sim \text{Bin}(n, p)$ binomialverteilt mit Parametern n und p . Dann gilt*

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{pn}{B_n + 1} - 1\right|\right) \rightarrow 0 \quad \text{mit } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Es sei $k^* := \max\{k \in \{0, \dots, n\} : pn/(k+1) \geq 1\}$ und $a(n, k) := \mathbb{P}(B_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{pn}{B_n + 1} - 1\right|\right) = \sum_{k=0}^{k^*} \left(\frac{np}{k+1} - 1\right) a(n, k) + \sum_{k=k^*+1}^n \left(1 - \frac{np}{k+1}\right) a(n, k).$$

Mit $\frac{np}{k+1} a(n, k) = \frac{n}{n+1} a(n+1, k+1)$ erhält man damit die Gleichheit zu

$$\mathbb{P}(B_n \geq k^* + 1) - \mathbb{P}(B_n \leq k^*) + \frac{n}{n+1} \mathbb{P}(1 \leq B_{n+1} \leq k^*) - \frac{n}{n+1} \mathbb{P}(B_{n+1} \geq k^* + 2).$$

Nun ist $k^* \sim pn$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz konvergiert jeder der vier Terme mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0.5. Durch die Vorzeichen ergibt sich im Limes der Wert 0 wie behauptet. \square

A.2. σ -Algebren

Lemma A.2.1. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ seien Unter- σ -Algebren von \mathcal{A} . Weiter seien \mathcal{F} und $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$ unabhängig. Dann gilt $\mathcal{G}_1 \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}_1 \vee \mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_2 \vee \mathcal{F}$.*

Beweis. „ \Rightarrow “ ist klar. Gelte umgekehrt $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_2 \vee \mathcal{F}$ und sei $A \in \mathcal{G}_1$. Dann folgt wegen der Unabhängigkeit von \mathcal{F} und $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$ mit einer bekannten Rechenregel für bedingte Erwartungswerte $\mathbb{E}[1_A | \mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[1_A | \mathcal{G}_2 \vee \mathcal{F}]$ \mathbb{P} -fast-sicher. Mit $\mathcal{G}_2 \vee \mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \mathcal{G}_1 \vee \mathcal{F}$ folgt $\mathbb{E}[1_A | \mathcal{G}_2 \vee \mathcal{F}] = \mathbb{E}[1_A | \mathcal{G}_1 \vee \mathcal{F}] = 1_A$ fast sicher und damit $\mathbb{E}[1_A | \mathcal{G}_2] = 1_A$ fast sicher. Also $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$. Analog erhält man $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$ und damit die Behauptung. \square

Lemma A.2.2. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{G}_2 \supseteq \mathcal{G}_3 \supseteq \dots$ sei eine absteigende Folge von Unter- σ -Algebren von \mathcal{A} und \mathcal{F} sei eine weitere Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} . Weiter seien \mathcal{F} und \mathcal{G}_1 unabhängig. Dann gilt $\bigcap_{n \geq 1} (\mathcal{G}_n \vee \mathcal{F}) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \left(\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{G}_n \right) \vee \mathcal{F}$.*

Beweis. Findet man zum Beispiel in [CY12], Abschnitt 2.5. \square

Lemma A.2.3. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für jedes $n \geq 1$ seien A_n und R_n nicht-leere endliche Mengen und $f_1 : R_1 \rightarrow A_1$ und $f_{n+1} : A_n \times R_{n+1} \rightarrow A_{n+1}, n \geq 1$ seien Funktionen. Es sei U_1, U_2, \dots eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, wobei U_n Werte in R_n annehme. Es sei $X_1 := f_1(U_1)$ und induktiv für $n \geq 1$ sei $X_{n+1} := f_{n+1}(X_n, U_{n+1})$. Dann gilt $\bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, U_{n+1}, X_{n+1}, U_{n+2}, \dots) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$.*

Beweis. Der Prozess $(X_n)_{n \geq 1}$ ist eine Markovkette, ebenso wie der Prozess $(X_n, U_{n+1})_{n \geq 1}$. Damit werden die terminalen σ -Algebren erzeugt von

$$\lim_n \mathbb{P}(X_k = x_k | X_n) \quad \text{bzw.} \quad \lim_n \mathbb{P}((X_k, U_{k+1}) = (x_k, u_{k+1}) | X_n, U_{n+1})$$

für $k, x_k \in A_k, u_{k+1} \in R_{k+1}$. Nun ist nach Konstruktion U_{n+1} von (X_n, X_k, U_{k+1}) unabhängig. Damit erhält man

$$\mathbb{P}((X_k, U_{k+1}) = (x_k, u_{k+1}) | X_n, U_{n+1}) = \mathbb{P}((X_k, U_{k+1}) = (x_k, u_{k+1}) | X_n)$$

fast sicher und es folgt $\bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, U_{n+1}, X_{n+1}, U_{n+2}, \dots) \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$. Die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich. \square

Lemma A.2.4. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{A}$ seien Unter- σ -Algebren. Genau dann gilt $\mathcal{F}_1 \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{F}_2$ wenn es für alle $A \in \mathcal{F}_1$ und $\delta > 0$ ein $B \in \mathcal{F}_2$ mit $\mathbb{P}(A \Delta B) < \delta$ gibt.*

Beweis. Es sei $A \in \mathcal{F}_1$ und zu jedem $\delta > 0$ gebe es ein $B \in \mathcal{F}_2$ mit $\mathbb{P}(A \Delta B) < \delta$. Zu $n \geq 1$ wähle man ein $B_n \in \mathcal{F}_2$ mit $\mathbb{P}(A \Delta B_n) < 1/n$. Dann konvergiert 1_{B_n} in $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gegen 1_A . Damit ist 1_{B_n} auch eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega, \mathcal{F}_2, \mathbb{P})$ und die Behauptung folgt. \square

Lemma A.2.5. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von \mathcal{A} . Ferner sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine Unter- σ -Algebra. Dann gilt*

$$\mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(\{\mathbb{P}(E|\mathcal{F}) : E \in \mathcal{E}\}).$$

In Worten: Die σ -Algebra \mathcal{F} wird modulo \mathbb{P} von den Zufallsvariablen $\mathbb{P}(E|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(1_E|\mathcal{F})$, $E \in \mathcal{E}$ erzeugt.

Beweis. Für jedes $E \in \mathcal{E}$ ist $\mathbb{P}(E|\mathcal{F})$ \mathcal{F} -messbar, also ist $\sigma(\{\mathbb{P}(E|\mathcal{F}) : E \in \mathcal{E}\}) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \mathcal{F}$. Es sei $\mathcal{A}_0(\mathcal{E})$ die von \mathcal{E} erzeugte Algebra. Für alle $A \in \mathcal{A}_0(\mathcal{E})$ gilt $\sigma(\mathbb{P}(A|\mathcal{F})) \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(\{\mathbb{P}(E|\mathcal{F}) : E \in \mathcal{E}\})$, denn jedes $A \in \mathcal{A}_0(\mathcal{E})$ ist eine endliche Kombination aus Schnitten, Vereinigungen und Komplementen von Mengen aus \mathcal{E} (siehe dazu auch [Bil95], Problem 2.5(b)). Da \mathcal{E} \cap -stabil ist, kann man $\mathbb{P}(A|\mathcal{F})$ fast sicher als Funktion von endlich vielen der $\mathbb{P}(E|\mathcal{F})$ mit $E \in \mathcal{E}$ schreiben. Ist nun $A \in \mathcal{A}$ beliebig und $\epsilon > 0$, so findet man $A' \in \mathcal{A}_0(\mathcal{E})$ mit $\mathbb{P}(A\Delta A') < \delta$ und damit auch $\mathbb{E}(|\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) - \mathbb{P}(A'|\mathcal{F})|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{P}(A\Delta A'|\mathcal{F})) < \delta$. Damit folgt mit Lemma A.2.4

$$\sigma(\{\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) : A \in \mathcal{A}\}) \stackrel{\mathbb{P}}{=} \sigma(\{\mathbb{P}(E|\mathcal{F}) : E \in \mathcal{E}\})$$

und mit $1_F = \mathbb{P}(F|\mathcal{F})$ für alle $F \in \mathcal{F}$ \mathbb{P} -fast sicher folgt $\mathcal{F} \stackrel{\mathbb{P}}{\subseteq} \sigma(\{\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) : A \in \mathcal{A}\})$. Insgesamt erhält man die Behauptung. \square

A.3. Das Ersetzen unabhängiger Experimente

Lemma A.3.1. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Gegeben seien messbare Räume (R_n, \mathcal{R}_n) , $n \geq 1$ und zwei Folgen von Zufallsvariablen (X_1, X_2, \dots) und (Y_1, Y_2, \dots) sodass alle Zufallsvariablen unabhängig sind, X_n und Y_n für alle $n \geq 1$ Werte in (R_n, \mathcal{R}_n) annehmen und dieselbe Verteilung haben. Es sei E eine endliche Menge und*

$$f : \left(\prod_{n \geq 1} R_n, \bigotimes_{n \geq 1} \mathcal{R}_n \right) \rightarrow (E, \mathfrak{P}(E))$$

sei eine messbare Funktion. Dann konvergiert

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, Y_{n+3}, \dots)$$

mit $n \rightarrow \infty$ stochastisch gegen

$$f(X_1, X_2, X_3, X_4, \dots).$$

Beweis. Zunächst sei $E = \{0, 1\}$, dann ist $f = 1_A$ für eine messbare Menge $A \in \bigotimes_{n \geq 1} \mathcal{R}_n$. Ist A eine Zylindermenge, so konvergiert $1_A(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots)$ sogar fast sicher gegen $1_A(X_1, X_2, X_3, \dots)$. Wegen $1_A \cdot 1_B = 1_{A \cap B}$ und $1_{A^c} = 1 - 1_A$ ist die Menge aller $A \in \bigotimes_{n \geq 1} \mathcal{R}_n$, für die $1_A(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_{n+1}, \dots)$ fast sicher gegen $1_A(X_1, X_2, \dots)$ konvergiert, eine Algebra, welche die Zylindermengen umfasst. Zu jedem $B \in \bigotimes_{n \geq 1} \mathcal{R}_n$ und jedem $\epsilon > 0$ findet man nun ein Ereignis A , für welches die fast sichere Konvergenz

gilt, und welches

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|1_A(X_1, X_2, X_3, \dots) - 1_B(X_1, X_2, X_3, \dots)|) \\ &= \mathbb{E}(|1_A(X_1, \dots, X_n, Y_{n+1}, \dots) - 1_B(X_1, \dots, X_n, Y_{n+1}, \dots)|) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

erfüllt. Damit und mit der Dreiecksungleichung erhält man

$$\limsup_n \mathbb{E}(|1_B(X_1, \dots, X_n, Y_{n+1}, \dots) - 1_B(X_1, X_2, X_3, \dots)|) \leq \epsilon.$$

Da ϵ beliebig war schließlich die Behauptung für alle messbaren Funktionen f der Gestalt $f = 1_B$. Für allgemeine Zustandsräume $E = \{x_1, \dots, x_m\}$ von f sei $B_i := f^{-1}(x_i)$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \{f(X_1, \dots, X_n, Y_{n+1}, \dots) \neq f(X_1, X_2, \dots)\} \\ &= \bigcup_{i=1}^m \{|1_{B_i}(X_1, \dots, X_n, Y_{n+1}, \dots) - 1_{B_i}(X_1, X_2, \dots)| = 1\} \end{aligned}$$

und mit der Subadditivität von \mathbb{P} folgt damit die Behauptung. \square

Als Korollar erhält man sofort das 0-1-Gesetz von Kolmogorov: Dazu betrachte man $f = 1_A$ für ein terminales Ereignis A . Für ein solches ist

$$1_A(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_{n+1}, \dots) = 1_A(Y_1, Y_2, \dots)$$

fast sicher für alle $n \geq 1$ und mit der stochastischen Konvergenz aus dem Lemma folgt

$$1_A(X_1, X_2, \dots) = 1_A(Y_1, Y_2, \dots)$$

fast sicher. Wenn unabhängige Zufallsvariablen fast sicher übereinstimmen, müssen diese fast sicher konstant sein. Damit folgt $\mathbb{P}((X_1, X_2, \dots) \in A) \in \{0, 1\}$.

A.4. Zufällige kompakte Mengen

Betrachtet wird der kompakte metrische Raum (Δ, d) mit $\Delta := \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq y\}$ und Metrik $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Es sei $\mathcal{B}(\Delta)$ die Borelsche σ -Algebra auf Δ . Ferner sei $\mathcal{K}(\Delta)$ die Menge der nicht-leeren kompakten (abgeschlossenen) Teilmengen von Δ . Für $K, H \in \mathcal{K}(\Delta)$ sei $d_{\text{Haus}}(K, H) := \max\{\sup_{x \in K} d(x, H), \sup_{y \in H} d(y, K)\}$ der Hausdorff-Abstand. Mit diesem wird $(\mathcal{K}(\Delta), d_{\text{Haus}})$ zu einem kompakten metrischen Raum. Es sei $\mathcal{B}(\mathcal{K}(\Delta))$ die Borelsche σ -Algebra darauf. Ferner sei

$$[0, 1]_{\leq}^4 := \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \in [0, 1]^4 : u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_4\}$$

mit der üblichen Topologie und Borelscher σ -Algebra $\mathcal{B}([0, 1]_{\leq}^4)$ ausgestattet. Nachfolgender Satz A.4.1 fasst im Wesentlichen alle in dieser Arbeit benötigten Messbarkeitsaussagen im Kontext zufälliger Mengen zusammen, insbesondere wird auch die Messbarkeit des Ereignisses, um das es im anschließenden Satz A.4.2 geht, begründet.

Satz A.4.1. *Es sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum.*

1. $\xi_1, \xi_2, \dots : \Omega \rightarrow \Delta$ sei eine Folge $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\Delta))$ -messbarer Abbildungen. Dann ist

$$\xi := \overline{\{\xi_i : i \geq 1\}} : \Omega \rightarrow \mathcal{K}(\Delta)$$

eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{K}(\Delta)))$ -messbare Abbildung.

2. Es sei

$$(\xi, U_1, U_2, U_3, U_4) : \Omega \rightarrow \mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{\leq}^4$$

$(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{K}(\Delta)) \otimes \mathcal{B}([0, 1]_{\leq}^4))$ -messbar und es seien

$$X := [U_1, U_2] \times [U_3, U_4] \quad \text{und} \quad \text{int}(X) := (U_1, U_2) \times (U_3, U_4).$$

Dann gilt

$$a) \{\xi \cap X \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \cap [U_1(\omega), U_2(\omega)] \times [U_3(\omega), U_4(\omega)] \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

$$b) \{\xi \cap \text{int}(X) \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \cap (U_1(\omega), U_2(\omega)) \times (U_3(\omega), U_4(\omega)) \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

Beweis. Zu 1.: Nach [Mol06], Theorem C.5,(iii), wird die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{K}(\Delta))$ von

$$\mathcal{E} = \{\{K \in \mathcal{K}(\Delta) : K \cap G \neq \emptyset\} : G \subseteq \Delta \text{ offen}\}$$

erzeugt. Für eine offene Teilmenge $G \subseteq \Delta$ erhält man

$$\{(m_i) \in \Delta^{\mathbb{N}} : \overline{\{m_1, m_2, \dots\}} \cap G \neq \emptyset\} = \{(m_i) \in \Delta^{\mathbb{N}} : \{m_1, m_2, \dots\} \cap G \neq \emptyset\} = \bigcup_{n \geq 1} (\Delta^n \times G \times \Delta^{\mathbb{N}}),$$

und diese Menge ist offen und damit messbar in $\Delta^{\mathbb{N}}$. Damit erhält man 1.

Zu 2.(a): Es sei

$$M := \{(K, u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{\leq}^4 : K \cap [u_1, u_2] \times [u_3, u_4] \neq \emptyset\}.$$

Diese Teilmenge ist eine abgeschlossene Teilmenge des topologischen Produktraumes $\mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{\leq}^4$: Es sei $(K_n, u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n)$ eine Folge in M , die gegen ein $(K, u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{\leq}^4$ konvergiert. Aufgrund der Zugehörigkeit zu M existiert für alle n ein $z^n = (z_1^n, z_2^n) \in K_n$ mit $u_1^n \leq z_1^n \leq u_2^n \leq u_3^n \leq z_2^n \leq u_4^n$. Die Folge (z^n) verläuft in der kompakten Menge Δ und hat demnach eine konvergente Teilfolge mit Limes $z = (z_1, z_2) \in \Delta$. Da $H_n \rightarrow H$ bzgl. des Hausdorff-Abstandes ist $z \in H$ und da $u_i^n \rightarrow u_i$ muss $u_1 \leq z_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq z_2 \leq u_4$ gelten. Also ist auch $(K, u_1, u_2, u_3, u_4) \in M$. Damit ist $\{\xi \cap X\} = \{(\xi, U_1, U_2, U_3, U_4) \in M\}$ ein Ereignis.

Zu 2.(b): Es ist $\{\xi \cap \text{int}(X)\} = \{\xi \cap \text{int}(X)\} \cap \{U_1 < U_2, U_3 < U_4\}$. Es sei

$$N := \{(K, u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{\leq}^4 : K \cap (u_1, u_2) \times (u_3, u_4) \neq \emptyset, u_1 < u_2, u_3 < u_4\}$$

und für $n \geq 1$ sei $N_n \subseteq \mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{\leq}^4$ definiert durch

$$(K, u_1, u_2, u_3, u_4) \in N_n$$

$$\Leftrightarrow (K, u_1 + n^{-1}, u_2 - n^{-1}, u_3 + n^{-1}, u_4 - n^{-1}) \in M \wedge (K, u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{\leq}^4.$$

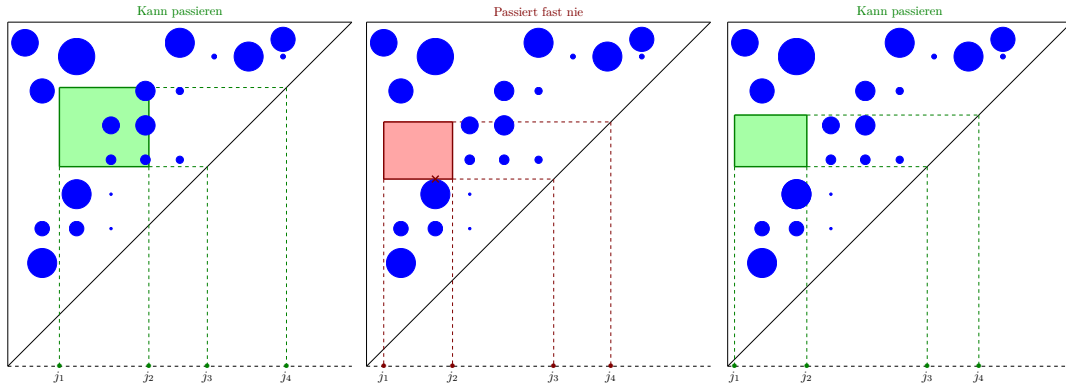


Abb. A.1.: Blau: Eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \Delta$. Entweder K schneidet das zufällige Rechteck $[U_{j_1:n}, U_{j_2:n}] \times [U_{j_3:n}, U_{j_4:n}]$ im Inneren (Links) oder ist disjunkt (Rechts). Dass die kompakte Menge K das zufällige Rechteck nur am Rand berührt (Mitte) geschieht mit Wahrscheinlichkeit Null.

Damit ist jedes N_n abgeschlossen. Es ist $N = \bigcup_{n \geq 1} N_n$ und damit ist N eine Borelsche Teilmenge von $\mathcal{K}(\Delta) \times [0, 1]_{\leq}^4$. Es folgt, dass

$$\{\xi \cap \text{int}(X) \neq \emptyset\} = \{\xi \cap \text{int}(X)\} \cap \{U_1 < U_2, U_3 < U_4\} = \{(\xi, U_1, U_2, U_3, U_4) \in N\}$$

ein Ereignis ist. □

Folgender Satz spielt eine zentrale Rolle im Beweis zu Theorem 5.1.9:

Satz A.4.2. *Es sei $n \geq 4$ und U_1, \dots, U_n seien unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}(U_1 \in [0, 1]) = 1$ und stetiger Verteilung. Es sei $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ die Ordnungsstatistik und es seien $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq n$. Es sei*

$$X := [U_{j_1}, U_{j_2}] \times [U_{j_3}, U_{j_4}] \quad \text{und} \quad \text{int}(X) := (U_{j_1:n}, U_{j_2:n}) \times (U_{j_3:n}, U_{j_4:n}).$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}(K \cap X \neq \emptyset, K \cap \text{int}(X) = \emptyset) = 0 \quad \text{für alle } K \in \mathcal{K}(\Delta). \quad (\text{A.1})$$

Man betrachte hierzu auch Abbildung A.1.

Bemerkung A.4.3. Die Verteilung der zufälligen kompakten Menge X aus dem Satz ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{K}(\Delta), \mathcal{B}(\mathcal{K}(\Delta)))$ und damit eindeutig durch das *Hitting Functional*

$$T_X : \mathcal{K}(\Delta) \rightarrow [0, 1], \quad T_X(K) := \mathbb{P}(X \cap K \neq \emptyset)$$

bestimmt (siehe [Mol06]). Die zufällige kompakte Menge X im Satz erfüllt einige der in [Mol88] formulierten technischen Annahmen und Aussage (A.1) ist nach der genannten Arbeit damit zu jeder der beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1. $T_X : \mathcal{K}(\Delta) \rightarrow [0, 1]$ ist stetig bzgl. der Topologie des Hausdorff-Abstandes auf $\mathcal{K}(\Delta)$.
2. Sind X^1, X^2, \dots unabhängige und identisch verteilte zufällige kompakte Mengen je mit derselben Verteilung wie X , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{K \in \mathcal{K}(\Delta)} \left| n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X^i \cap K \neq \emptyset) - T_X(K) \right| = 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.} \quad \nabla$$

Der Beweis von Satz A.4.2 verläuft über eine Fallunterscheidung: Werte $0 < a < b < c < d < 1$ mit $[a, b] \times [c, d] \cap K \neq \emptyset$ und $(a, b) \times (c, d) \cap K = \emptyset$ erzwingen die Existenz von Punkten in K , welche besondere Isolationseigenschaften besitzen. Dafür werden für eine zunächst beliebige Menge $K \subseteq \Delta$ folgende Definitionen getroffen:

Definition A.4.4. Die Punkte, die in K liegen und im Inneren einer Seite eines isolierenden Rechteckes liegen, dabei stehen die Benennungen für „Links“, „Rechts“, „Oben“ und „Unten“:

$$L := \{(z_1, z_2) \in K \mid \exists(b, c, d) : 0 < z_1 < b < c < z_2 < d < 1 \text{ und } (z_1, b) \times (c, d) \cap K = \emptyset\},$$

$$R := \{(z_1, z_2) \in K \mid \exists(a, c, d) : 0 < a < z_1 < c < z_2 < d < 1 \text{ und } (a, z_1) \times (c, d) \cap K = \emptyset\},$$

$$O := \{(z_1, z_2) \in K \mid \exists(a, b, c) : 0 < a < z_1 < b < c < z_2 < 1 \text{ und } (a, b) \times (c, z_2) \cap K = \emptyset\},$$

$$U := \{(z_1, z_2) \in K \mid \exists(a, b, d) : 0 < a < z_1 < b < z_2 < d < 1 \text{ und } (a, b) \times (z_2, d) \cap K = \emptyset\}.$$

Die Punkte, welche in K liegen und Eckpunkte eines isolierenden Rechteckes sind, dabei steht „SW“ für „South-West“ und „SE“ für „South-East“ etc.:

$$SW := \{(z_1, z_2) \in K \mid \exists(b, d) : 0 < z_1 < b < z_2 < d < 1 \text{ und } [z_1, b] \times [z_2, d] \cap K = \{(z_1, z_2)\}\},$$

$$SE := \{(z_1, z_2) \in K \mid \exists(a, d) : 0 < a < z_1 < z_2 < d < 1 \text{ und } (a, z_1] \times [z_2, d) \cap K = \{(z_1, z_2)\}\},$$

$$NW := \{(z_1, z_2) \in K \mid \exists(b, c) : 0 < z_1 < b < c < z_2 < 1 \text{ und } [z_1, b) \times (c, z_2] \cap K = \{(z_1, z_2)\}\},$$

$$NE := \{(z_1, z_2) \in K \mid \exists(a, c) : 0 < a < z_1 < c < z_2 < 1 \text{ und } (a, z_1] \times (c, z_2] \cap K = \{(z_1, z_2)\}\}.$$

Es seien

$$\pi_1 : \Delta \rightarrow [0, 1], (x, y) \mapsto x \quad \text{und} \quad \pi_2 : \Delta \rightarrow [0, 1], (x, y) \mapsto y$$

die Koordinatenprojektionen. Die Betrachtung der obigen Mengen hinsichtlich des Beweises für Satz A.4.2 ist nun wie folgt begründet:

Lemma A.4.5. Sind $0 < a < b < c < d < 1$ Werte mit $[a, b] \times [c, d] \cap K \neq \emptyset$ und $(a, b) \times (c, d) \cap K = \emptyset$, so gilt mindestens eine der folgenden acht Lagebeziehungen:

$$a \in \pi_1(L), b \in \pi_1(R), c \in \pi_2(U), d \in \pi_2(O)$$

oder

$$(a, c) \in SW, (b, c) \in SE, (a, d) \in NW \text{ oder } (b, d) \in NE.$$

Beweis. Unter der Annahme gibt es ein $(z_1, z_2) \in K$ mit $z = (z_1, z_2) \in \partial([a, b] \times [c, d])$. Insbesondere liegt dieses z also entweder im Inneren einer der vier Seiten des betrachteten Rechteckes oder ist eines der vier Eckpunkte des betrachteten Rechteckes. Liegt dieser Punkt z im Inneren eines der vier Seiten des Rechteckes, so trifft eine der ersten vier Alternativen ein. Ist z ein Eckpunkt des Rechteckes, gilt zum Beispiel $a = z_1$ und $c = z_2$, so ist z der südwestliche Eckpunkt. Gibt es in $[z_1, b) \times (c, z_2]$ einen von z verschiedenen Punkt $z' = (z'_1, z'_2)$, so muss dieser wegen $(z_1, b) \times (c, z_2] \cap K \neq \emptyset$ entweder $z_1 = z'_1 = a$ oder $z_2 = z'_2 = b$ erfüllen. Der Punkt z' ist dann aber einer derjenigen Punkte in K , welche im Inneren eines isolierenden Rechteckes liegen, und es gilt $a \in \pi_1(L)$ oder $c \in \pi_2(U)$. Erfüllen also (a, b, c, d) die genannten Voraussetzungen, so tritt mindestens eine der 8 genannten Alternativen ein. \square

Für kompakte K wird das Ereignis $\{X \cap K \neq \emptyset, \text{int}(X) \cap K = \emptyset\}$ im Folgenden nach oben abgeschätzt: Dabei ist zunächst nicht klar, ob beispielsweise die Menge SW auch tatsächlich eine Borelmenge von \mathbb{R}^2 ist, aber das ist nicht wichtig, denn später wird auch SW in eine dann offensichtlich messbare Menge eingebettet und gezeigt, dass diese größere Menge Wahrscheinlichkeit 0 hat. Die Mengen $\pi_1(L)$ etc. sind leichter zu handhaben:

Lemma A.4.6. *Die Mengen $\pi_1(L), \pi_1(R), \pi_2(O)$ und $\pi_2(U)$ sind abzählbar.*

Beweis. Die Aussage wird nur für L gezeigt, da die anderen Fälle ganz analog funktionieren. Es sei $\epsilon > 0$. Betrachtet wird die Menge L^ϵ derjenigen $(z_1, z_2) \in L$, für die ein Tripel (b, c, d) mit $(z_1, b) \times (c, d) \cap K = \emptyset$ und

$$0 < z_1 < b - \epsilon < b < c < c + \frac{1}{2}\epsilon < z_2 < d - \frac{1}{2}\epsilon < d < 1$$

existiert. Es gilt

$$L = \bigcup_{n \geq 1} L^{1/n} \quad \text{und} \quad \pi_1(L) = \bigcup_{n \geq 1} \pi_1(L^{1/n}).$$

Es wird nun begründet, dass $\pi_1(L^\epsilon)$ für jedes $\epsilon > 0$ endlich ist. Damit folgt dann die Aussage für $\pi_1(L)$.

Es sei $z = (z_1, z_2) \in L^\epsilon$ beliebig. Betrachtet man

$$(z_1 - \epsilon/2, z_1 + \epsilon/2) \times (z_2 - \epsilon/2, z_2 + \epsilon/2) \cap L^\epsilon,$$

so erfüllt jeder Punkt $y = (y_1, y_2)$ aus dieser Schnittmenge per Konstruktion die Eigenschaft $y_1 = z_1$. Es reichen nun endlich viele Punkte $z^i = (z_1^i, z_2^i) \in L^\epsilon$, $i = 1, \dots, N$ aus, sodass

$$L^\epsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^N (z_1^i - \epsilon/2, z_1^i + \epsilon/2) \times (z_2^i - \epsilon/2, z_2^i + \epsilon/2)$$

gilt. Damit gilt $\pi_1(L^\epsilon) = \{z_1, \dots, z_N\}$ (Die Menge auf der rechten Seite kann weniger als N Elemente haben). \square

Als direktes Korollar erhält man folgende Aussage:

Korollar A.4.7. *Mit $U_{j_1:n}, \dots, U_{j_4:n}$ wie in Satz A.4.2 gilt*

$$\mathbb{P}(U_{j_1:n} \in \pi_1(L)) = \mathbb{P}(U_{j_2:n} \in \pi_1(R)) = \mathbb{P}(U_{j_3:n} \in \pi_2(O)) = \mathbb{P}(U_{j_4:n} \in \pi_2(U)) = 0.$$

Nun zu den „Eckpunktmengen“ SW, SE, NW, NE . Die Aussage wird nur für SW bewiesen. Wieder wird zunächst die Menge SW^ϵ derjenigen Punkte in SW betrachtet, deren isolierende Rechtecke eine gewisse Mindestgröße haben.

Lemma A.4.8. *Für $\epsilon > 0$ sei SW^ϵ die Menge derjenigen $(z_1, z_2) \in SW$, welche Eckpunkt eines isolierenden Rechtecks $[z_1, b) \times [z_2, d) \cap K = \{(z_1, z_2)\}$ mit $\min\{b - z_1, d - z_2\} > \epsilon$ sind. Dann gibt es endlich viele strikt monoton fallende Funktionen $F_i : I_i \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, N$, wobei $I_i \subseteq [0, 1]$ offene Intervalle sind und sodass*

$$SW^\epsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^N \text{Graph}(F_i)$$

gilt.

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ und $z = (z_1, z_2) \in SW^\epsilon$. Betrachtet man die Umgebung $U(z) := (z_1 - \epsilon, z_1 + \epsilon) \times (z_2 - \epsilon, z_2 + \epsilon)$, so können nur in den Quadranten

$$(z_1 - \epsilon, z_1) \times (z_2, z_2 + \epsilon) \quad \text{und} \quad (z_1, z_1 + \epsilon) \times (z_2, z_2 - \epsilon)$$

weitere Punkte aus SW^ϵ liegen. Alle anderen Punkte aus $U(z_1, z_2) \cap SW^\epsilon$ haben analoge Eigenschaften. Die Punkte aus $U(z_1, z_2) \cap SW^\epsilon$ sind also zwingend streng monoton fallend angeordnet: Sind $r = (r_1, r_2), s = (s_1, s_2) \in U(z_1, z_2) \cap SW^\epsilon$ verschieden, so muss genau eine der Alternativen $r_1 < s_1 \wedge r_2 > s_2$ oder $r_1 > s_1 \wedge r_2 < s_2$ gelten. Es gibt also eine strikt monoton fallende Funktion $F : (z_1 - \epsilon, z_1 + \epsilon) \rightarrow (z_2 - \epsilon, z_2 + \epsilon)$ mit $U(z_1, z_2) \cap SW^\epsilon \subseteq \text{Graph}(F)$. Nun reichen wieder endlich viele Punkte $z^i = (z_1^i, z_2^i) \in SW^\epsilon$, $i = 1, \dots, N$ aus, sodass

$$SW^\epsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^N U(z^i)$$

gilt. Zu jedem dieser z^i gibt es also eine streng monoton fallende Funktion $F_i : I_i \rightarrow [0, 1]$, definiert auf dem offenen Intervall $I_i = (z_1^i - \epsilon, z_1^i + \epsilon)$ mit $SW^\epsilon \cap U(z^i) \subseteq \text{Graph}(F_i)$. Damit erhält man

$$SW^\epsilon = \bigcup_{i=1}^N SW^\epsilon \cap U(z^i) \subseteq \bigcup_{i=1}^N \text{Graph}(F_i)$$

wie behauptet. □

Bemerkung A.4.9. Die bisherigen Aussagen bezogen sich auf eine beliebige Menge $K \subseteq \Gamma$. Die aus einer solchen Menge konstruierten $\pi_1(L)$ etc. sind als abzählbare Mengen Borel-messbar, eine analoge Aussage für SW etc. gilt aber im Allgemeinen nicht. Allerdings wurde SW nun im Beweis durch abzählbare viele Graphen monoton fallender und damit messbarer Funktionen überdeckt. Der Graph einer messbaren Funktion zwischen gutartigen Räumen ist messbar bzgl. der Produkt- σ -Algebra. ▽

Bemerkung A.4.10. Analoge Aussagen gelten natürlich auch für SE, NE, NW , wobei bei SE und NW die Funktionen F_i monoton wachsend sind. ▽

Beweis von Satz A.4.2. Es sei nun also $K \subseteq \Delta$ beliebig und kompakt. Weiter sei

$$(A, B, C, D) := (U_{j_1:n}, U_{j_2:n}, U_{j_3:n}, U_{j_4:n}).$$

Dann gilt mit Lemma A.4.5

$$\begin{aligned} & \{X \cap K \neq \emptyset, \text{int}(X) \cap K = \emptyset\} \\ & \subseteq \{A \in \pi_1(L)\} \cup \{B \in \pi_1(R)\} \cup \{C \in \pi_2(O)\} \cup \{D \in \pi_2(U)\} \\ & \quad \cup \{(A, C) \in SW\} \cup \{(B, C) \in SE\} \cup \{(A, D) \in NW\} \cup \{(B, D) \in NE\}. \end{aligned}$$

Die vier Ereignisse in der zweiten Zeile haben wie oben gesehen allesamt Wahrscheinlichkeit 0. Nun gilt für SW wieder

$$SW = \bigcup_{k \geq 1} SW^{1/k}.$$

Mit Lemma A.4.8 erhält man nun zu jedem $SW^{1/k}$ endlich viele streng monotone fallende Funktion $F_i^k : I_i^k \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, N_k$ mit

$$SW^{1/k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_k} \text{Graph}(F_i^k).$$

Damit erhält man

$$SW \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{N_k} \text{Graph}(F_i^k).$$

Nun gilt für $k \geq 1$ und $1 \leq i \leq N_k$

$$\mathbb{P}((A, C) \in \text{Graph}(F_i^k)) = \mathbb{P}(A \in I_i^k, C = F_i^k(A)).$$

Mit einer bedingten Verteilung $\mathbb{P}_y(C \in \cdot)$ von C unter $A = y$ gilt nun aber

$$\mathbb{P}(A \in I_i^k, C = F_i^k(A)) = \int_{I_i^k} \mathbb{P}_y(C = F_i^k(y)) d\mathbb{P}^A(y) = 0,$$

da die bedingte Verteilung von C gegeben $A = y$ für fast alle y stetig ist. Analog betrachtet man die übrigen Ereignisse, welche sich auf SE, NW, NE beziehen, in Mengen mit Wahrscheinlichkeit 0 ein und erhält damit insgesamt die Behauptung. \square

Bemerkung A.4.11. Wählt man als Basis der Topologie auf \mathbb{R} nicht die offenen Intervalle, sondern Intervalle der Form $[a, b)$, so erhält man die Sorgenfrey-Topologie. Es sei S dieser topologische Raum. Die Sorgenfrey-Topologie ist echt feiner als die übliche euklidische Topologie auf \mathbb{R} . Der topologische Produktraum $S \times S$ wird Sorgenfrey-Ebene genannt, eine Basis dieser Produkttopologie bilden Mengen der Form $[a, b) \times [c, d)$. Der Raum $S \times S$ dient für viele topologische Sätze als Beleg für die allgemeine Notwendigkeit getroffener Annahmen, siehe dazu beispielsweise [SS78], Gegenbeispiel 84. Für eine fixierte Teilmenge $K \subseteq \Delta \subset S \times S$ wie oben sind SW genau die bzgl. der Sorgenfrey-Ebenen-Topologie isolierten Punkte in K . Analog sind die übrigen Mengen SE, NW, NE die isolierten Punkte bzgl. derjenigen Topologien auf \mathbb{R}^2 , welche von Rechtecken der Form $(a, b] \times [c, d)$, $[a, b) \times (c, d]$ bzw. $(a, b] \times (c, d]$ erzeugt werden. Anders als in der euklidischen Ebene kann eine Teilmenge der Sorgenfrey-Ebene sehr wohl überabzählbar viele isolierte Punkte haben. Die Beweise haben aber gezeigt: Die Menge der isolierten Punkte einer Teilmenge der Sorgenfrey-Ebene kann stets durch abzählbare viele Graphen stückweise definierter monoton fallender Funktionen überdeckt werden und sind damit insbesondere stets eine λ^2 -Nullmenge (in einer Borelschen Teilmenge von \mathbb{R}^2 mit λ^2 -Maß 0 enthalten).

∇

Symbolverzeichnis zu \mathcal{M}_1 -Räumen

Symbol	Bedeutung	Seite
$\mathcal{M}_1(T)$	Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem topologischen Raum T	8
$\mathcal{M}_1(\Gamma)$	Γ -invariante Verteilungen auf T bzgl. eines TDS (T, Γ)	14
$\mathcal{M}_1(\theta)$	Verteilungen von Markovketten mit Rückwärtsdynamik θ bzgl. eines EGG (\mathbb{F}, θ)	17
$\mathcal{M}_1(\mathbb{G}, \theta)$	Teilmenge von $\mathcal{M}_1(\theta)$, erhalten durch gewisse Teilmenngenfolge $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{F}$	20
$\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$	Die μ -zentralen Prozessverteilungen bzgl. eines HMB $(\mathbb{F}, \mathbb{A}, \Lambda)$ und eines Produktmaßes $\mu = \otimes_n \mu_n$	27
$\mathcal{M}_1(\gamma)$	Die Menge der unmarkierten Prozessverteilungen bzgl. eines HMB und Produktmaß μ , isomorph zu $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$	28
$\mathcal{M}_1(\Lambda)$	Menge der zentralen Prozessverteilungen in einem HMB, identisch zu $\mathcal{M}_1(\Lambda, \otimes_n \text{unif}(\mathbb{A}_n))$	29
$\mathcal{M}_1^{\text{str}}(\Lambda, \mu)$	Die starken μ -zentralen Prozessverteilungen, Teilmenge von $\mathcal{M}_1(\Lambda, \mu)$	31
$\mathcal{M}_1^{\text{str}}$	Abkürzung für $\mathcal{M}_1^{\text{str}}(\Lambda, \mu)$	32
$\mathcal{M}_1(\mathbb{F}_\infty)$	Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Raum \mathbb{F}_∞ bzgl. eines konsistenten Systems \mathbf{F}	60
$\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$	Simplex der austauschbaren Verteilungen auf \mathbb{F}_∞	62
$\mathcal{M}_1(\tau)$	Verteilungen von Orbitprozessen bzgl. eines konsistenten Systems, isomorph zu $\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty)$	72
$\mathcal{M}_1^{\text{sym}}(\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty)$	Austauschbare Verteilungen auf $\mathbb{F}_\infty \times \mathbb{G}_\infty$ bzgl. eines Produktsystems $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$, häufig $\mathbf{G} = \mathbf{Lin}$	81
$\mathcal{M}_1(\Phi)$	Verteilungen gewisser Prozesse $(X_n, S_n)_{n \geq 1}$, assoziiert zu Systemen $\mathbf{F} \times \mathbf{Lin}$	93
$\mathcal{M}_1(\psi)$	Verteilungen unmarkierter Prozesse $(X_n)_{n \geq 1}$, assoziiert zu $\mathcal{M}_1(\Phi)$	94
$\mathcal{M}_1(\Phi, \mathbb{G})$	Teilmenge von $\mathcal{M}_1(\Phi)$, erhalten durch gewisse Teilmenngenfolge $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{F}$	98

Literatur

- [Ald10] David Aldous. “More uses of exchangeability: Representations of complex random structures”. In: *Probability and Mathematical Genetics: Papers in Honour of Sir John Kingman (London Mathematical Society Lecture Note Series)*. Citeseer. 2010.
- [ARS97] Laurent Alonso, Jean-Luc Remy und René Schott. “Uniform generation of a Schröder tree”. In: *Information Processing Letters* 64.6 (1997), S. 305–308.
- [Aus08] Tim Austin. “On exchangeable random variables and the statistics of large graphs and hypergraphs”. In: *Probability Surveys* 5 (2008), S. 80–145.
- [Aus12] Tim Austin. *Exchangeable random arrays*. Techn. Ber. Technical report, 2012.
- [AGH16] Romain Azaïs, Alexandre Genadot und Benoit Henry. “Inference for conditioned Galton-Watson trees from their Harris path”. In: *arXiv preprint arXiv:1609.01057* (2016).
- [Bas+16] Frédérique Bassino, Mathilde Bouvel, Valentin Féray, Lucas Gerin und Adeline Pierrot. “The Brownian limit of separable permutations”. In: *arXiv preprint arXiv:1602.04960* (2016).
- [Bas+17] Frédérique Bassino, Mathilde Bouvel, Valentin Féray, Lucas Gerin, Mickaël Maazoun und Adeline Pierrot. “Universal limits of sunstitution-closed permutation classes”. In: *arXiv preprint arXiv:1706.08333* (2017).
- [BLL13] François Bergeron, Gilbert Labelle und Pierre Leroux. “Introduction to the Theory of Species of Structures”. In: *UQÀM Université du Québec à Montréal* (2013).
- [Bil95] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago und Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*. Bd. 33. American Mathematical Society Providence, RI, 2001.
- [Ceil12] Gaël Ceillier. “The filtration of the split-words process”. In: *Probability Theory and Related Fields* 153.1 (2012), S. 269–292.
- [CY12] Loïc Chaumont und Marc Yor. *Exercises in Probability: a guided tour from measure theory to random processes, via conditioning*. 35. Cambridge University Press, 2012.
- [CE17] Hye Soo Choi und Steven N Evans. “Doob–Martin compactification of a Markov chain for growing random words sequentially”. In: *Stochastic Processes and their Applications* 7.127 (2017), S. 2428–2445.

- [CR10] Maria Isabel Cortez und Juan Rivera-Letelier. “Choquet simplices as spaces of invariant probability measures on post-critical sets”. In: *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*. Bd. 27. 1. Elsevier. 2010, S. 95–115.
- [DJ08] Persi Diaconis und Svantje Janson. “Graph Limits and Exchangeable Random Graphs”. In: *Rendiconti di Matematica* VII 28 (2008), S. 33–61.
- [Eva06] Steven N Evans. *Probability and real trees*. Ecole d’Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXV-2005. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [EGW17] Steven N Evans, Rudolf Grübel und Anton Wakolbinger. “Doob–Martin boundary of Rémy’s tree growth chain”. In: *The Annals of Probability* 45.1 (2017), S. 225–277.
- [EW16] Steven N Evans und Anton Wakolbinger. “Radix sort trees in the large”. In: *arXiv preprint arXiv:1603.07385* (2016).
- [FHP17] Noah Forman, Chris Haulk und Jim Pitman. “A representation of exchangeable hierarchies by sampling from real trees”. In: *arXiv preprint arXiv:1101.5619v3* (2017).
- [Ger14] Julian Gerstenberg. “Zufällige binäre Bäume und die Brown’sche Exkursion (Masterarbeit)”. Leibniz Universität Hannover, 2014.
- [GGH16] Julian Gerstenberg, Rudolf Grübel und Klaas Hagemann. “A boundary theory approach to de Finetti’s theorem”. In: *arXiv preprint arXiv:1610.02561* (2016).
- [Gla03] Eli Glasner. *Ergodic theory via joinings*. American Mathematical Soc., 2003.
- [Gne97] Alexander Gnedin. “The representation of composition structures”. In: *The Annals of Probability* 25.3 (1997), S. 1437–1450.
- [GP06] Alexander Gnedin und Jim Pitman. “Exchangeable Gibbs partitions and Stirling triangles”. In: *Journal of Mathematical Sciences* 138.3 (2006), S. 5674–5685.
- [Grü13] Rudolf Grübel. “Kombinatorische Markov-Ketten”. In: *Mathematische Semesterberichte* 60.2 (2013), S. 185–215.
- [Grü15] Rudolf Grübel. “Persisting randomness in randomly growing discrete structures: graphs and search trees”. In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 18.1 (2015).
- [Hag16] Klaas Hagemann. “Doob-Martin-Theorie diskreter Markov-Ketten : Struktur und Anwendungen (Dissertation)”. Leibniz Universität Hannover, 2016.
- [HY10] Takao Hirayama und Kouji Yano. “Extremal solutions for stochastic equations indexed by negative integers and taking values in compact groups”. In: *Stochastic Processes and their Applications* 120.8 (2010), S. 1404–1423.
- [Hir03] Ulrich Hirth. “Exchangeable random ordered trees by positive definite functions”. In: *Journal of Theoretical Probability* 16.2 (2003), S. 339–344.

-
- [HR99] Ulrich Hirth und Paul Ressel. “Random partitions by semigroup methods”. In: *Semigroup Forum*. Bd. 59. 1. Springer. 1999, S. 126–140.
- [HR00] Ulrich Hirth und Paul Ressel. “Exchangeable random orders and almost uniform distributions”. In: *Journal of Theoretical Probability* 13.3 (2000), S. 609–634.
- [HRS17] Christopher Hoffman, Douglas Rizzolo und Erik Slivken. “Pattern-avoiding permutations and Brownian excursion part I: Shapes and fluctuations”. In: *Random Structures & Algorithms* 50.3 (2017), S. 394–419.
- [Hop+13] Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Carlos Gustavo Moreira, Balazs Rath und Rudini Menezes Sampaio. “Limits of permutation sequences”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 103.1 (2013), S. 93.
- [JLR15] Elise Janvresse, Stéphane Laurent und Thierry de la Rue. “Standardness of monotonic Markov filtrations”. In: *arXiv preprint arXiv:1501.02166* (2015).
- [Kal02] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer-Verlag New York, 2002.
- [Kal06] Olav Kallenberg. *Probabilistic symmetries and invariance principles*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [Kec12] Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory*. Bd. 156. Springer-Verlag New York, 2012.
- [Kin78] John FC Kingman. “The representation of partition structures”. In: *Journal of the London Mathematical Society* 2.2 (1978), S. 374–380.
- [Kru16] Alex Kruckman. “Infinitary Limits of Finite Structures”. Diss. University of California, Berkeley, 2016.
- [Lau11] Stéphane Laurent. “On standardness and I-cosiness”. In: *Séminaire de Probabilités XLIII*. Springer, 2011, S. 127–186.
- [Lau13] Stéphane Laurent. “Vershik’s intermediate level standardness criterion and the scale of an automorphism”. In: *Séminaire de Probabilités XLV*. Springer, 2013, S. 123–139.
- [Lau16] Stéphane Laurent. “Filtrations of the erased-word processes”. In: *Séminaire de Probabilités XLVIII*. Springer, 2016, S. 445–458.
- [Lau88] Steffen L Lauritzen. *Extremal families and systems of sufficient statistics*. Springer-Verlag New York, 1988.
- [LL71] Aldo Joram Lazar und Joram Lindenstrauss. “Banach spaces whose duals are L^1 -spaces and their representing matrices”. In: *Acta Mathematica* 126.1 (1971), S. 165–193.
- [Le 99] Jean-François Le Gall. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*. Birkhäuser Basel, 1999.
- [Lin01] Elon Lindenstrauss. “Pointwise theorems for amenable groups”. In: *Inventiones mathematicae* 146.2 (2001), S. 259–295.

- [LOS78] Joram Lindenstrauss, Gunnar Olsen und Yaki Sternfeld. “The Poulsen simplex”. In: *Annales de l’institut Fourier*. Bd. 28. 1. 1978, S. 91–114.
- [Lov12] László Lovász. *Large networks and graph limits*. Bd. 60. American Mathematical Society Providence, 2012.
- [Luk+10] Jaroslav Lukeš, Jan Mal, Ivan Netuka und Jiri Spurn. *Integral representation theory: applications to convexity, Banach spaces and potential theory*. Bd. 35. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2010.
- [Mac71] Saunders Mac Lane. *Category theory for the working mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [Mar03] Philippe Marchal. “Constructing a sequence of random walks strongly converging to Brownian motion.” In: *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science AC*. 2003, S. 181–190.
- [MM03] Jean-François Marckert und Abdelkader Mokkadem. “The depth first processes of Galton-Watson trees converge to the same Brownian excursion”. In: *The Annals of Probability* 31.3 (2003), S. 1655–1678.
- [Mol88] Ilya Molchanov. “Uniform laws of large numbers for empirical associated functionals of random closed sets”. In: *Theory of Probability & Its Applications* 32.3 (1988), S. 556–559.
- [Mol06] Ilya Molchanov. *Theory of random sets*. Springer-Verlag London, 2006.
- [Par67] Kalyanapuram Rangachari Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces*. American Mathematical Soc., 1967.
- [Phe01] Robert Phelps. *Lectures on Choquet’s Theorem*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2001. ISBN: 9783540418344.
- [Raz07] Alexander A Razborov. “Flag algebras”. In: *The Journal of Symbolic Logic* 72.4 (2007), S. 1239–1282.
- [Res85] Paul Ressel. “De Finetti-type theorems: an analytical approach”. In: *The Annals of Probability* 13.3 (1985), S. 898–922.
- [Res88] Paul Ressel. “Integral representations for distributions of symmetric stochastic processes”. In: *Probability theory and related fields* 79.3 (1988), S. 451–467.
- [RZ00] Luis Ribes und Pavel Zalesskii. *Profinite groups*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [SS78] Lynn Arthur Steen und J Arthur Seebach. *Counterexamples in topology*. Springer New York, 1978.
- [The17] Leonie Theis. “Konvergenzbegriffe für Wortfolgen (Bachelorarbeit)”. Leibniz Universität Hannover, 2017.
- [Ver15a] Anatoly Vershik. “Equipped graded graphs, projective limits of simplices, and their boundaries”. In: *arXiv preprint arXiv:1503.04447* (2015).

- [Ver15b] Anatoly Vershik. “Invariant measures: new aspects of dynamics, combinatorics and representation theory”. In: *The Fifteenth Takagi Lectures, Math. Soc. Japan, Tokyo* (2015), S. 39–79.
- [VM15] Anatoly Vershik und Andrei Malyutin. “Phase transition in the exit boundary problem for random walks on groups”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 49.2 (2015), S. 86–96.
- [Wei83] Heinrich von Weizsäcker. “Exchanging the order of taking suprema and countable intersections of σ -algebras”. In: *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*. Bd. 19. 1. 1983, S. 91–100.
- [Woe09] Wolfgang Woess. *Denumerable Markov Chains*. Zürich: European Mathematical Society, 2009.

Lebenslauf

Name	Julian Gero Gerstenberg	
Geburt	17.08.1989 in Hannover	
Nationalität	Deutsch	
Ausbildung	-2009	Gymnasium Ernestinum Celle (Abitur 2009)
	2009-2012	Bachelorstudium Mathematik Leibniz Universität Hannover (Bachelor of Science 2012)
	2012-2014	Masterstudium Mathematik Leibniz Universität Hannover (Master of Science 2014)
	2014-jetzt	Wissenschaftlicher Mitarbeiter Insitut für Mathematische Stochastik Leibniz Universität Hannover

Danksagung

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. R. Grübel für die hervorragende Betreuung während der Anfertigung der vorliegenden Arbeit. Von den regelmäßigen Diskussionen eigener Ideen und den generellen Gesprächen über Mathematik habe ich stets sehr profitiert. Ferner bedanke ich mich bei Prof. Dr. U. Rösler und Prof. Dr. A. Gnedin für die Übernahme des Korreferats. Auch möchte ich mich bei Prof. Dr. L. Baringhaus für einige sehr hilfreiche Gespräche und die fundierte Ausbildung bedanken. Abschließend bedanke ich mich bei Dr. K. Hagemann, denn gerade zu Beginn der Anfertigung der vorliegenden Arbeit habe ich durch unsere Gespräche sehr schnell Verständnis über gewisse Gebiete erlangen können.