

Eğitim ve Bilim
2009, Cilt 34, Sayı 152

Education and Science
2009, Vol. 34, No 152

Öğrencilerin Basit Doğrusal Denklemlerin Çözümünde Karşılaştıkları Güçlükler ve Kavram Yanılgıları

Student Difficulties and Misconceptions in Solving Simple Linear Equations

Ayhan Kürşat ERBAŞ* Bülent ÇETİNKAYA** Yaşar ERSOY***
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Öz

Öğrencilerin temel cebirsel kavram ve işlemleri anlaması ve kullanması üzerine olan literatür, farklı okul ve sınıf seviyelerinde öğrencilerin birçok güçlüklerinin ve yanılgılarının olduğunu göstermektedir. Bu çalışmada, dört farklı okuldan bir grup öğrencinin ($n = 217$) basit doğrusal denklemlerin çözümünde karşılaştıkları güçlükler, yaptıkları ortak hatalar ve olası kavram yanılgıları incelenmiş ve bunlar belirlenen yanlış kurallamalar ve yanılgılar çerçevesinde kategorilere ayrılmıştır. Çalışma sonuçlarına göre, düşük başarı seviyesindeki öğrencilerin yanlışlarının, daha çok yanlış kurallamalar odaklı, orta ve yüksek başarı seviyesindeki öğrencilerin yanlışlarının ise daha çok aritmetik veya işlemsel olduğu gözlemlenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Cebir öğretimi ve öğrenimi, doğrusal denklemler, öğrenme güçlükleri, yanlış kurallamalar, ortak hatalar, kavram yanılgıları.

Abstract

The purpose of this study was to investigate student difficulties, common errors and misconceptions in solving simple linear algebraic equations within a group of students ($n = 217$) from four different schools. The results suggest that the students in lower achievement groups have conceptual problems and mal-rules, some of which might be considered as misconceptions. In general, students in the middle and higher achievement levels did arithmetical and computational errors.

Key Words: Teaching and learning of algebra, linear equations, learning difficulties, mal-rules, common errors, misconceptions

* Yrd. Doç. Dr., Ayhan Kürşat ERBAŞ, ODTÜ Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, erbas@metu.edu.tr

** Dr., Bülent ÇETİNKAYA, ODTÜ Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, bcetinka@metu.edu.tr

*** Prof. Dr., Yaşar ERSOY ODTÜ Eğitim Fakültesi (emekli öğretim üyesi), y.ersoy@tiscali.nl

Summary

Purpose

The purpose of this study was to investigate student difficulties, common errors and misconceptions in solving simple linear algebraic equations within a group of Turkish students from four different schools. To achieve this purpose, a Linear Equations Test was administered to 217 ninth grade students studying in two different public high schools (PuAc-1 and PuAc-2), a vocational school (VoTe), and a private high school (PrSc) in one of the largest district of Ankara.

These schools were identified by using stratified sampling methodology (Borg ve Gall, 1989). Students' Test papers were examined exhaustively and 2293 error protocols were diagnosed. Protocols were classified into five groups: (a) *algebra mal-rule categories* (b) *arithmetical slips*, (c) *meaning of equation*, (d) *substitution*, (e) *un-diagnosable*. The *algebra mal-rule category* was formed by using the sub-categories identified by Sleeman (1984) and Payne & Squibb (1990) and new categories emerged in this study.

Results

In this study, we have identified 32 separate algebra mal-rules (MR). Of these mal-rules, MR2, MR13, MR18, MR24, and MR26 are the most common ones among the students of PuAc-1. For PuAc-2, there are more mal-rules that at least ten students have made. Furthermore, although there are more students in PuAc-1 than in PuAc-2, frequencies of mal-rules committed by the students in PuAc-2 are generally bigger than those committed by the students in PuAc-1. The types and frequencies of mal-rules decrease drastically in PrSc. Few of the PrSc students have used mal-rules in their operations. Results of this study also show that VoTe students mostly use the mal-rules MR18, MR21, and MR26 in their equation solving procedures. Furthermore, 93% of PuAc-1 students, 75% of PuAc-2 students, 86% of PrSc students, and 90% of VoTe students have made arithmetical slips. Moreover, 9% of all the students have been observed as having problems in the meaning of equation and 30% of all the students have made un-diagnosable errors.

The analysis of the results shows that students' errors in lower achievers appeared mostly as mal-rules. However, errors appeared in middle or higher achievers as arithmetical slips when compared to lower achievers. Diagnosis of mal-rules also revealed the following pattern when we include arithmetic slips in the category of mal-rules: Using all the mal-rules, we were able to diagnose 96% of the errors in PuAc-1, 91% of the errors in PuAc-2, 94% of the errors in PrSc, and 88% of the errors in VoTe.

Discussion

The analysis of results shows that three mal-rules occurred only once in total (MR29, MR31, and MR32). More interestingly, although Payne & Squibb (1990) observed the MR31 64 times in 38 students, we have observed it only once. On the other hand, we have observed certain mal-rules that had not been reported by Payne & Squibb (1990) and Sleeman (1984) (e.g., MR2, MR10, MR17). This supports the inconsistency of mal-rules with respect to the other studies and suggests that occurrence of mal-rules may be context and subject dependent. On the other hand, when we examine the mal-rules which were made by more than twenty percent of the total students (MR13, MR18, MR24, and MR26) we see that all of them are also found in the study of Payne & Squibb (1990) and two of them (MR13 and MR18) are found in the study of Sleeman (1984). Furthermore the analysis of nature of the most frequent mal-rules indicates that the

students may have following misconceptions: (a) "+" or "-" sign must produce closed answer, (b) working in mathematics is always left to right, (c) parentheses don't mean anything in algebra, (d) reverse operation is used on the other side of an equation, not the same operation, (e) subtraction is commutative, and (f) inverse operations are not necessary.

Conclusion

The practical upshot of findings of this study is that a large number of pre-specified mal-rules is clearly going to be necessary for catalogue-based diagnosis. Furthermore, there is no guarantee that a new sample of schoolchildren will not unearth a whole new set of mal-rules. After all, it is clear that mathematics teachers should be familiar to the algebra mal-rules found in this study, and new materials and methods need to be developed to help remedy student difficulties and misconceptions in solving simple linear equations. Future research is also needed to examine students' difficulties and reasons behind these difficulties.

Giriş

Cebir ve cebirsel düşünce, günümüz eğitim anlayışı, amaç ve beklentileri bakımından, matematik okuryazarlığının vazgeçilmez ve ayrılmaz bir parçası, temel bilgiler demeti ve birleştirici ögesidir (Erbaş & Ersoy, 2002). Sağladığı soyut düşünce yapısıyla cebir, birçok açıdan, matematiğin alt alanları ve diğer bilim dallarının öğeleri arasında kavramsal ve kuramsal açılardan ortak bir köprü ve dil görevi üstlenmektedir. Bu bağlamda cebir, eğitim ve iş yaşamında bireylerin edinecekleri temel bilgiler ve beceriler arasında önemli bir yapıtaş, bağlayıcı harç ve yapılandırıcı öge olarak düşünülmelidir. Yapılan çalışmalar, değişik okul ve sınıf düzeylerinde öğrencilerin denklem kurma ve çözme, eşitsizlik kavramı, değişken kavramı, cebirsel ifadelerin kullanımı ve cebirsel problem çözme gibi birçok cebirsel kavram ve yöntemle ilgili güçlükleri, ortak hataları ve temel yanlışlarının olduğunu göstermektedir (Baki, 1999; Baki & Kartal, 2004; Booth, 1984, 1988; Dede & Peker, 2007; English & Halford, 1995; Herscovics, 1989, Kieran, 1989, 1992; MacGregor & Stacey, 1993; Rosnick, 1981). Bu çalışmada, farklı okul türlerindeki lise birinci sınıf öğrencilerinin basit doğrusal denklemleri çözmede karşılaştıkları güçlükler, yapılan ortak hatalar ve olası kavram yanlışları incelenmektedir. Bu çalışma ile daha önce Sleeman (1984) ve Payne ve Squibb (1990) gibi araştırmacılar tarafından 13-14 yaş grubu öğrencilerde teşhis edilen cebirsel hata ve olası kavram yanlışlarının, bu tür kavram ve işlemsel becerilerin daha oturmuş olduğu düşünülebilecek 14-15 yaş grubu öğrencilerin olduğu bir örneklem bağlamında elde edilip edilemeyeceği saptanacaktır. Böylece, Sleeman'ın (1984) ve Payne ve Squibb'in (1990) cebirsel hataları sınıflandırmak için kullanılan yanlış-kurallamaların (*mal-rules*) öğrencilerin cebirde yaptıkları hataları belirlemede ne derece kullanışlı olabileceği hakkındaki bulguları ve önerileri, yeni bulgular ışığında tartışılabilir.

Literatürde kavram yanlışlığı, temelleri yapılandırmacı yaklaşıma (constructivism) dayanan *kavram* ve *kaorama* tanımından yola çıkılarak açıklanmaya çalışılmıştır (Chiu, Kessel, Moschkovich, & Muñoz-Nuñez, 2001). Bu açıklamaların ortak özelliklerinden yola çıkarak şöyle bir tanım ortaya konabilir. Matematiksel *kavram yanlışlığı*, bir öğrencinin uzun süreden beri doğru olarak kabul ettiği, birden fazla durumda ortaya çıkan, kolay değişmeyen ve matematiksel gerçeklerle çelişen kavramlarıdır. Hata (*error*) ise matematiksel ifadelerin ve fikirlerin yanlış kullanılması ve sonuçlandırılmasıdır. Payne ve Squibb'e (1990) göre hatalar, *sürçmeler* (*slips*) ve *yanlışlar* (*mistakes*) olarak sınıflandırılabilir. İki grup arasındaki fark, hatayı yapan kişinin niyeti altında yatmaktadır. Doğru bir davranışta bulunmaya niyetlendiği halde bunu başaramayan kişinin *sürçtüğü*, niyet ve amacını yanlış bir şekilde kurgulayan kişinin *yanıldığı* söylenebilir (Payne & Squibb, 1990). Benzer şekilde Oliver (1989) sürçmenin bir *işlemden* kaynaklanan ve sistematik olmayan yanlış cevaplar olduğunu, yanlışlığın ise

planlamadan kaynaklanan ve aynı durumlarda hep tekrarlandığından sistematik olan yanlış cevaplar olduğunu belirtmektedir. Oliver (1989) bu yanılıgıları, kavramsal yanılıgılara sebep olan kavramsal yapılardaki temel düşünce ve prensiplerin bir belirtisi olarak görmektedir. Hata ile kavram yanılıgısı arasındaki farkı şu örnekle açıklayabiliriz: “+’ veya ‘-’ işareti bir işlemde bir sonuç ortaya çıkarmak zorundadır: Açık ifadeleri birleştirme” bir kavram yanılıgısıdır (Booth, 1988; Stacey & MacGregor, 1997). Fakat bu kavram yanılıgısının bir sonucu olarak $3x+2=5x$ veya $3x+2=5$ demek bir hatadır. Bu hata sadece bir sürçme olabileceği gibi, eğer sistematik olarak yapılıyorsa, yukarıdaki örnekte olduğu gibi bir kavram yanılıgısına da işaret edebilir.

Cebir eğitim ve öğretimi üzerine yapılan birçok kavramsal çalışmanın odak noktası, öğrencilerin denklemler çözümlerinde izledikleri yollardır. Kieran (1990) bu yolları üç kategoride özetlemektedir: (a) sezgisel (*intuitive*), (b) deneme-yanılma yoluyla yerine koyma (*trial-and-error substitution*) ve (c) biçimsel (*formel*). Yapılan çalışmalar, cebir öğrencilerinin genel olarak denklem çözümleri için biçimsel yolları öğrendikçe (deneme-yanılma yoluyla) yerine koyma yöntemini daha az kullandıklarını ve yalnız biçimsel yöntemlerle denklem çözmeyi öğrenen öğrencilerin her iki çözümü öğrenen öğrencilerden daha az başarılı olduklarını göstermektedir (Barnard, 1989; Bell, 1995; Carry, Lewis, & Bernard, 1980; Kieran, 1989; Sharma, 1987; Sleeman, 1984). Carry vd. (1980) öğrencilerin denklem çözerken yaptıkları hataları inceledikleri çalışmalarında, gözlemedikleri öğrenci hatalarını üç başlık altında özetlemektedirler: işleç hataları (*operator error*), yürütme hataları (*execution error*), uygulanabilirlik hatalar (*applicability error*). Araştırmacılar bu üç hata tipi için farklı önleyici ve giderici ölçümlerin olduğunu da belirtmişlerdir. Öte yandan, Sharma (1987) ise doğrusal denklemlerin çözümünde sıklıkla karşılaşılan hataları şu şekilde sınıflandırmaktadır: (a) *Aritmetik durumlar*: Temel aritmetik bilgilerdeki hatalar, algoritmalarındaki hatalar, işlem sırasındaki yanlışlıklar; (b) *Sayıların özellikleri ilgili durumlar*: Birleşme, dağılma (özellikle işaret hatası), değişme, işlemsel ve kural tabanlı; (c) *Yöntemsel durumlar*: Eşitlik özelliklerinin yanlış kullanımı, “=” işaretinin “+” ve “x” özellikleri, “+” katsayı yanlış, yanlış tersi işlem; (d) *Kavramsal durumlar*: İşlem sırası, ters işaretler, benzer terimler, sabit bilinmeyenlerin veya sabit değerlerin değişken olarak algılanması. (e) *Mekanik/Algısal durumlar*: Dikkatsizlik/rasgele, tamamlanmamış işlem.

Yukarıda özetlendiği gibi, literatüre bakıldığında, denklem çözümünde öğrencilerin birtakım ortak hata ve bazı güçlüklerinin olduğu bilinen bir gerçektir. Bu bağlamda, araştırmacılar öğrencilerin matematikte sistematik olarak yaptıkları hataları araştırmışlar ve bu hataları açıklamak için *Hatalı Algoritmalar* (BUGGY: Buggy Algorithms) (Brown & Burton, 1978), *Onarım Teorisi* (Repair Theory: A Generative Theory of Bugs) (Brown & VanLehn, 1980), *Leeds Modelleme Sistemi* (Leeds Modelling System) (Sleeman, 1984) ve *Rakip Kurallar Modeli* (Competing Rules Model) (Payne & Squibb, 1990) gibi bazı bilişsel modeller önermişlerdir. Bu modellerin anafikrinde, Sleeman’ın (1984) çalışmasında olduğu gibi, yapılan birçok yanlışın öğrencilerin yanlış işlem dizisi, zihinsel temsil ve uygulamalarından kaynaklanan ve “yanlış kurallama” (*mal-rule*) olarak isimlendirilen öğeler olduğu düşünülmektedir. Sleeman bu araştırmada, öğrencilerin yanlışlarını dört grup altında incelenmektedir. Bunlar: (a) *beceri yanlışları*, (b) *ayrıştırma yanlışları*, (c) *yazma yanlışları* ve (d) *tesadüfi/rasgele yanlışlar*. Sleeman beceri yanlışlarının öğrencinin doğru kuralı bilmesine rağmen bilişsel olarak aşırı yüklenme veya dikkatsizlik nedeni ile ara alt basamakları göz ardı etme sonucunda, ayrıştırma yanlışlarının ise cebirsel notasyonun kesin bir şekilde yanlış anlaşılmasından kaynaklandığını söylemektedir. Sleeman'a göre her bir yanlış türünü gidermek için farklı yöntemler uygulanması gerekmektedir.

Payne ve Squibb (1990) üç farklı okul ortamında 13-14 yaş grubundaki alt ve üst başarı düzeyindeki öğrencilerin temel cebir, özellikle de bir bilinmeyenli doğrusal denklemlerin

çözümünde yaptıkları yanlışları incelemişlerdir. Sleeman (1984) gibi, Payne ve Squibb de (1990) ortak ve sistematik olarak yapılan yanlışlara, yanlış kurallamalar tanısını koymuştur. Bu çalışmaya göre, yanlış kurallamaların sıklıkları oldukça değişkenlik göstermekte, çoğu yanlış kurallama az sıklıkta gözlemlenmektedir. Bunların yanı sıra, okul bazında yanlış kurallamaların sıklık ve türü de değişiklik göstermekte, daha az yanlış yapan öğrencilerin yanlışları, yanlış kurallamalarla daha iyi açıklanabilmektedir. Kavram yanlışlarının belirlenebilmesi için, kavramın öğrenci tarafından anlaşılması için öğretimin üzerinden yeteri kadar zaman geçmiş olması, uygun ölçme araçları ile elde edilen verilerin nitel ve nicel açılarından analiz edilerek ve literatürdeki bulgularla karşılaştırılması gerekmektedir (Erbaş & Ersoy, 2002).

Öte yandan, Türkiye’de bu konuda yapılan bazı çalışmalar genel olarak öğrencilerin sıkça yaptıkları bazı yanlışları kavram yanlışlığı (Baki, 1999; Dede & Peker, 2007; Dede, Yalın & Argün, 2002) veya yanlış/yetersiz (kavramsal veya işlemsel) bilgi olarak belirtilmektedir (Baki & Kartal, 2004). Bu çalışmalardan birinde Dede ve Peker (2007), 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin cebire yönelik hata ve yanlış anlamalarını beş soru üzerinden analiz etmiş ve öğrencilerin harfli ifadelerle ilgili işlemlerde hata ve yanlış anlamalarının olduğunu bulmuştur. Benzer olarak, Baki ve Kartal (2004) lise son sınıf öğrencilerin cebir alanı *denklem kurma, örüntüler ve fonksiyonlar* konusunda birçok yanlış ve eksik bilgiye sahip olduğunu bulmuştur. Nicel analizlerin nitel analizlerle de desteklendiği bu çalışma, öğrencilerin cebir alanındaki genel güçlüklerini belirleme açısından önemli sonuçlar verirken, bahsedilen konularda daha derinlemesine inceleme yapılması gerekliliğini de ortaya koymuştur.

Bu çalışmada amacımız, öğrencilerin sistematik yaptıkları ortak yanlış ve yanlışlarını açıklamanın yanı sıra, yanlış kurallamaların öğrencilerin öğrenim derecelerini ve olası kavram yanlışlarını ne derece yansıtabileceği düşüncesine, daha önce yapılan benzer çalışmalardan farklı bir örnekleme açıklık getirmektir. Ayrıca, gerek araştırmada kullanılan ölçme aracının yapısı, gerekse yapılan analizlerin çeşitliği, elde edilen sonuçların çok yönlü karşılaştırılmasını ve yorumlanmasını kolaylaştırmaktadır. Böylece, cebir öğretiminde ortak yanlışlar ve kavram yanlışları daha geniş bir perspektiften değerlendirilebilecektir. Dolayısıyla, bu çalışmadaki araştırma problemi ve alt problemler aşağıdaki gibidir:

Doğrusal denklemlerin ve eşitliklerin çözümünde karşılaşılan yanlışlar ve kavram yanlışları nelerdir ve bunlar literatürde “yanlış kurallama” olarak belirtilen kurallarla açıklanabilir mi?

- Amaçları ve olanakları göreceli olarak birbirinden farklı dört lisenin her birinde yanlış kurallamalara dayalı ortak hatalar nelerdir?
- Doğrusal eşitliklerin çözümüyle ilgili literatürde belirlenen sınıflandırılmış yanlışlar, çalışmaya katılan okullarda ne ölçüde yaygındır?
- Lise öğrencilerinin yaptıkları ortak yanlışların hangileri ve ne kadarı, yanlış kurallamalar olarak açıklanabilir?
- Genelde öğrenme güçlüğü olarak yanlış kurallamaların, özelde kavram yanlışlarının dağılımında bir kararlılık var mıdır?

Yöntem

Bu bölümde araştırmanın örnekleme ve kullanılan ölçme aracı hakkında bilgiler verilmektedir. Ayrıca, bulguların anlamlandırılması ve yorumlanmasına yardımcı olması amacıyla öğrencilerin okullar düzeyindeki başarıları özet olarak sunulmaktadır.

Evren ve Örneklem

Araştırmanın hedef kitlesi, Ankara il merkezindeki tüm lise birinci sınıf öğrencileridir. Araştırmanın örneklemini, Ankara-Yenimahalle İlçesi'ndeki liselerden okul çeşitlerini temsil edecek biçimde rasgele seçilen dört okuldaki toplam 217 öğrenci oluşturmaktadır. Uygulama yapılacak okullar belirlenirken birinci aşamada tabakalı örnekleme yöntemi (Borg & Gall, 1989) kullanılmıştır. İlk olarak okullar genel lise, meslek lisesi ve özel lise olmak üzere üç kategoriye ayrılmıştır. Tabakalı örnekleme yöntemine uygun olarak bu okullardan en az yüzde 5'inin çalışmaya katılmasının sağlanması hedeflenmiştir. İlçe milli eğitim verilerine göre, 22 genel lise, 13 meslek lisesi, 11 özel lise olmak üzere toplam 46 lisenin olduğu ilçede her bir okul türünün eşit oranda okul ile örnekleme temsili de sağlanarak çalışmaya iki genel lise, bir meslek lisesi ve bir özel lisenin katılmasına karar verilmiştir. İkinci aşamada ise belirlenen sayıdaki okul basit rasgele örnekleme metodu (Creswell, 2005) ile belirlenmiştir. Bu örnekleme göre her bir okula numara verilmiş ve her bir okul türünden belirlenen sayıda lise, bir program yardımıyla rasgele seçilmiştir. Belirlenen bu okulların hazırlık veya lise birinci sınıflarından seçilen ikişer sınıftan toplam 217 öğrenci (80 kız, 137 erkek) çalışmaya katılmıştır. Sınıflar, okul yönetiminin izni doğrultusunda belirlenmiştir. Öğrencilerin okullara göre sıklık ve yüzde dağılımları Tablo 1'de görülmektedir.

Tablo 1.
Örneklemdaki Öğrencilerin Okul ve Cinsiyete Göre Dağılımları

Okullar	Kız		Erkek		Toplam
	n_k	f_k (%)	n_e	f_e (%)	
ÖzLi: Özel Lise	15	43	20	57	35 (16)
MeLi: Meslek Lisesi	6	12	44	88	50 (23)
GeLi-1: Genel Lise-1	36	49	37	51	73 (34)
GeLi-2: Genel Lise-2	23	39	36	61	59 (27)
Toplam	80	37	137	63	217 (100)

Öğrencilerin okullar düzeyindeki matematik başarıları özet olarak aşağıdaki gibidir. Tablo 2'de verilen bu dağılım, öğrencilerin bir önceki yıl (8. sınıf) matematik dersi notları temel alınarak yapılmıştır.

Tablo 2.
Örneklemdaki Öğrencilerin Okul ve Matematik Notlarına Göre Dağılımı

	1	2	3	4	5	Eksik	Toplam
Özel Lise	1(%3)	2(%6)	10(%29)	9(%26)	12(%34)	2(%6)	35
Meslek Lisesi	1(%2)	12(%24)	17(%34)	9(%18)	8(%16)	3(%6)	50
Genel Lise-1	3(%4)	21(%29)	24(%33)	15(%21)	10(%14)	0(%0)	73
Genel Lise-2	15(%25)	24(%41)	10(%17)	2(%3,4)	0(%0)	8(%14)	59
Toplam	20(%9)	59(%27)	61(%28)	35(%16)	30(%14)	13(%6)	217

Ölçme Aracı

Bu çalışmada veriler, daha önce Sleeman (1984) ve Payne & Squibb (1990) tarafından kullanılan testten yararlanarak, araştırmacılar tarafından Türkçeye "Doğrusal Denklemler Testi

(DDT)" olarak uyarlanan bir test ile toplanmıştır. DDT'deki soruların tümü, bir bilinmeyenli harfli ifadeler olup, yanlış anlaşılma olmaması bakımından, bilinmeyenler her zaman x ile gösterilmiştir. Tablo 3'te, DDT'de kullanılan 14 farklı işlem tipi gözükmemektedir. Bunlardan her biriyle, Sleeman (1984) tarafından öngörüldüğü üzere; birincisi "+" ve "x" işlemleri, diğeri ise tersi işlemlerden oluşan iki soru tipi oluşturulmuştur. Son durumuyla test, her biri 28 sorudan oluşan iki ayrı bölümden oluşmakta ve toplam 56 soru içermektedir. Her iki bölümdeki sorular yapısal özelliğiyle eş, katsayı ve sabitlerde kullanılan tam sayı değerleri bakımından farklıdır. Biri hariç tüm soruların doğru yanıtı, tam sayı olacak biçimde düzenlenmiştir. İki bölüm olarak geliştirilen DDT, kısaca, DDT- A ve DDT- B olarak adlandırılmıştır. Paralel formlar yöntemi kullanılarak testin güvenilirliğini sağlamak amacıyla iki test düzenlenmiştir. DDT'nin güvenilirlik değeri, "Guttman Splitt-Half" indeksi ile 0.95, "Cronbach'a Alpha" indeksi ile de 0.96 olarak hesaplanmıştır.

Tablo 3.

Doğrusal Denklemler Testi'ndeki Cebirsel Denklem Çeşitleri¹

01	$Mx = P$	08	$Mx = N (P*Q)$
02	$Mx = N + P$	09	$Mx = N (Px + Q)$
03	$Mx = N*P$	10	$Mx = N + P*Q$
04	$Mx + Nx = P$	11	$M + Nx + Px = Q$
05	$Mx + N = P$	12	$Mx = N + P (Qx + R)$
06	$M + Nx = P$	13	$Mx = N (x + P) = Q$
07	$Mx = Nx + P$	14	$Mx + N = Px + Q$

¹ Payne ve Squibb'den (1990, s. 448) uyarlanmıştır. M, N, P, Q ve R sabitleri tam sayıdır.

Verilerin Analizi

Çalışmaya katılan toplam 217 öğrencinin testleri değerlendirilmeye alınmış ve toplam 2293 hata belirlenmiştir. Bu hatalar, Sleeman (1984) ve Payne & Squibb (1990) tarafından saptanan *cebirsel yanlış kurallamalar* ve bu çalışmada belirlenen yeni kategoriler çerçevesinde sınıflandırılmıştır. Bu kategoriler şunlardır: (a) *aritmetik yanlışlar* ya da *sürçme*, (b) *eşitlik kavramı*, (c) *yerine koyma*, (d) *tanımlanamayan*. *Aritmetik yanlışlar* kategorisine, dört işlem yaparken oluşan aritmetik hatalar girmektedir (Örneğin, $6/2=2$ veya $-x + = +$, vb...). *Cebirsel yanlış kurallamalar* ve *aritmetik yanlışlar* teorik olarak "yanlış kurallama" başlığı altında toplanabilecek olsa da çalışmanın ana konusunun cebir olmasından dolayı bu noktada ayrıma gidilmiştir. Bununla birlikte, araştırma sonuçlarının verildiği "yanlış kurallamalar ve tanı" bölümünde bu iki grup birlikte ele alınmıştır. *Eşitlik kavramı* kategorisi ise doğrudan *yanlış kurallama* içinde sınıflanamayan ama literatürde sıklıkla karşılaşılan eşitliğin kullanımında yapılan hatalardan oluşmaktadır (Örneğin, $2x+2=4$ denkleminin çözümündeki $2x+2=4=4-2$ ifadesi). Öğrencilerin denklem çözümünde x yerine bir sayı koyarak çözüme ulaşma çabası, *yerine koyma* kategorisinde yer almaktadır. Bu kategoriler içerisinde değerlendirilemeyen veya açıkça belirlenmesi olanaksız olan hatalar da *tanımlanamayan* kategorisi altında toparlanmıştır. Hemen belirtmek gerekir ki görülen bir hata, bazen birden fazla *yanlış kurallama* ile de açıklanabilmiştir. Veriler analiz edilirken çoğu zaman öğrenciyi sonuca götüren ara basamaklar incelenmiş, ancak bazı durumlarda bu inceleme ortak hataları bulmak için yeterli olamamıştır. Bu nedenle, bu çalışmada ortak hataları belirlerken, uygulamada karşılaşılabilecek olası belirsizlikleri önlemek amacıyla Payne ve Squibb (1990)'in kullandığı aşağıda verilen ilkeler izlenmiştir:

- Yanlış kurallamaların kombinasyonu yerine tek bir *yanlış kurallama*ı saptamaya çalışmak;

- Yapılıp silinen işlemlerden tam açık olmayanları tercih etmemek;
- 1'den 6'ya kadar olan yanlış kurallamalar (Tablo 4) için $Mx = N$ ifadesi ile somut olarak eşleşen kurallamalar üzerinde durmak;
- 7'den 10'a kadar olan yanlış kurallamalar için ise $x/M = N$ ifadesi ile somut olarak eşleşen kurallamalar üzerinde durmak.

Bulgular

Yanlış Kurallamalar

Öğrenci test sonuçlarının değerlendirilmeleri neticesinde belirlenen toplam 2293 hata, *cebirsal yanlış kurallamalar* (32 alt kategori) ve yukarıda sözü edilen dört kategori (*aritmetik yanılğular (sürçme), eşitlik kavramı, yerine koyma ve tanımlanamayan*) altında toplanmıştır. Tablo 4'te yanlış kurallamaların ve diğer kategorilerdeki hataların okullara ve öğrencilere göre dağılımı verilmiştir.

Genel Lise-1 (GeLi-1) öğrencileri arasında en çok YK2, YK13, YK18, YK24 ve YK26 kodlu yanlış kurallamalar işlenmiştir. YK2 verileri, eşitliğin her iki tarafının da x 'in katsayısı ile bölünmesi konusunda GeLi-1 öğrencilerinin güçlüklerinin olduğunu ortaya koymakta, diğer bir deyişle de eşitlik kavramı konusunda birtakım olası kavram yanılğularını akla getirmektedir. Bunun yanında, eşitlik kavramı gruplandırmasına bakıldığında GeLi-1 öğrencilerinin en az %10'unda eşitlik kavramı ile ilgili problemler olduğu göze çarpmaktadır. YK18'e bakıldığında, bu öğrencilerin parantez kullanımı ve anlamı konusunda problemleri olduğu; parantez içeren veya kullanmayı gerektiren soru ve işlemlerde çoğunun yanlışlar yaptığı anlaşılmaktadır.

Tablo 4.

Yanlış Kurallama Çeşitlerinin Okullara ve Öğrenci Sayılarına Göre Sıklık Dağılımları

Kod	Kod ¹	Cebirsal Yanlış Kurallama ² (Mal-Rules)	GeLi-1 n ₁ = 73	GeLi-2 n ₂ = 59	ÖzLi n ₃ = 35	MeLi n _m = 50
YK01	PS20; S20	$Mx = N \rightarrow x = N$	13(9) ³	37(16)	-	1(1)
YK02		$Mx = N \rightarrow x = M$	17(10)	8(8)	-	7(6)
YK03		$Mx = N \rightarrow x = M \cdot N$	-	41(15)	-	-
YK04	PS22; S1	$Mx = N \rightarrow x = M/N$	2(2)	4(4)	-	-
YK05		$Mx = N \rightarrow x = M + N$	-	29(13)	-	-
YK06	PS21	$Mx = N \rightarrow x = M - N$ veya $x = N - M$	15(6)	139(30)	2(2)	1(1)
YK07		$x/M = N \rightarrow x = N/M$	3(3)	2(1)	2(2)	-
YK08		$x/M = N \rightarrow x = M/N$	-	3(3)	-	1(1)
YK09		$x/M = N \rightarrow x = M+N$	-	7(7)	-	-
YK10		$x/M = N \rightarrow x = M - N$	7(6)	11(11)	-	4(3)
YK11	S14	$Mx \pm N \rightarrow M \cdot N \cdot x$	3(3)	82(20)	-	1(1)
YK12	PS13	$Mx \pm N \rightarrow [M \pm N]$	7(3)	1(1)	-	-
YK13	PS12; S15	$Mx \pm N \rightarrow [M \pm N] \cdot x$	82(20)	336(43)	1(1)	18(9)
YK14	S12	$Mx \pm N \rightarrow x + M \pm N$	-	3(2)	-	-
YK15		$Mx \pm Nx \rightarrow x = M \pm N$	7(4)	15(8)	-	-
YK16		$Mx - Mx = x$	-	12(5)	-	3(3)

Tablo 4'ün devamı

Kod	Kod ¹	Cebirsel Yanlış Kurallama ² (Mal-Rules)	GeLi-1 n ₁ = 73	GeLi-2 n ₂ = 59	ÖzLi n _ö = 35	MeLi n _m = 50
YK17		$M + N \rightarrow N - M$	7(5)	8(7)	-	5(4)
YK18	PS2; S3	$M (Nx \pm P) \rightarrow M*Nx \pm P$	14(11)	23(17)	5(4)	20(15)
YK19		$M(Nx \pm P) \rightarrow (M + N)x \pm M*P$	2(1)	3(2)	-	2(2)
YK20	PS8	$M (Nx \pm P) \rightarrow Nx \pm M*P$	15(8)	1(1)	1(1)	7(1)
YK21	PS4	$M(N*P) \rightarrow M*N*M*P$	5(4)	15(11)	7(4)	18(13)
YK22		$M \pm (N*P) \rightarrow M*N \pm M*P$	4(2)	7(7)	-	2(2)
YK23		$M(N*P) \rightarrow M + (N*P)$	2(2)	7(7)	-	-
YK24	PS3	$M \pm N (pat) \rightarrow [M \pm N] (pat)$	44(28)	90(42)	8(5)	10(6)
YK25		$Mx + N pat \rightarrow (M+N)x$	-	4(3)	-	-
YK26	PS11	$Mx \pm N = Px \pm Q \rightarrow Mx + Px = N + Q$	52(25)	116(38)	7(6)	13(10)
YK27	PS1	$Mx \pm N = Px \pm Q \rightarrow$ $-Mx - Px = \pm N \pm Q$	14(8)	2(2)	-	-
YK28	PS1	$Mx = N/P \rightarrow Mx - P = N$	-	-	3(3)	1(1)
YK29		$-(N*P) = -N-P$	-	-	1(1)	-
YK30		$M + pat \rightarrow M (pat)$	1(1)	-	1(1)	-
YK31	PS9/S2	$Pat1 \pm M pat2 = pat3 \rightarrow$ $Pat1 pat2 = pat3 \pm M$	-	-	1(1)	-
YK32		$M(x + N) \rightarrow -M + Nx$	1(1)	-	-	-
	•	Yerine Koyma	0(0)	4(3)	0(0)	0(0)
	•	Eşitlik Kavramı	8(7)	20(11)	0(0)	2(2)
	•	Tanımlanamayan	26(16)	113(34)	9(3)	43(13)
	•	Aritmetik Yanılığlar/Sürçmeler	320(68)	132(41)	115(30)	216(45)

¹ Literatürde belirtilen cebirsel yanlış kurallamalar olup bunlardan Sx ve PSy, sırayla Sleeman (1984) ve Payne & Squibb (1990)'in belirlediği yanlış kurallamalardır.

² M, N, ve P tam sayılar olmak üzere; pat1, bağlam içerisinde kullanılan herhangi bir cebirsel simge örüntüsü (*pattern of algebraic symbols*) yerine; "±" ise "artı veya eksi" anlamında ve kural içerisinde aynı değeri alacak şekilde kullanılmıştır.

³ Tabloda f(n) şeklindeki gösterimde f gözlem sayısını, n ise kaç kişide gözlemlendiğini belirtmektedir. Örneğin, YK1 → Geli-1 → 13(9), YK1'in GeLi-1'de 9 öğrenci tarafından 13 kez yapıldığını göstermektedir.

YK13, YK24 ve YK26 verileri ise eşitliklerin çözümü ile ilgili 'bilinenleri ve bilinmeyenleri taraf tarafa toplama' gibi okul matematiğinde deyimleştirilen uygulamaların öğrenciler tarafından büyük ölçüde yanlış anlaşılmasından kaynaklanabileceğini akla getirmektedir. Öte yandan, GeLi-1'deki öğrencilerin %93'ünün aritmetik yanılığlar/sürçmeler yaptıkları tespit edilmiştir. Diğer bir deyişle, öğrencilerin yönlü sayılarla ve bunlarla yapılan dört işlemle ilgili güçlüklerinin olabileceğini düşündürmektedir. Bunlara ek olarak, bu okuldaki öğrencilerden %22'sinin hatalarından bazıları tanımlanamamıştır.

Yanlış kurallamaların GeLi-2 öğrencileri arasında GeLi-1 öğrencilerine oranla daha fazla sayıda ve daha çok sıklıkta olduğu gözlenmektedir (Tablo 4). Bu gözlemi açıklarken, GeLi-2 öğrencilerinin büyük çoğunluğunun bir önceki yıl matematik notları bağlamında başarı düzeyinin (Tablo 2) ortalamasının altında olması göz ardı edilmemelidir. Öte taraftan, GeLi-2 öğrencileri GeLi-1'deki öğrencilere göre daha az oranda aritmetik hata yapmışlardır. Bu durum, GeLi-2 öğrencilerinin hatalarının genellikle yanlış kurallamalar, dolayısıyla da kavramsal kökenli olduğunu işaret etmektedir. Bunların yanı sıra, GeLi-2 öğrencilerinin %5'i eşitlikleri çözmek için yerine koyma yöntemini kullanarak yanlış sonuçlar üretmiştir. Eşitlik kavramıyla ilgili sorunları olan öğrenci sayısı GeLi-1'e göre artmış, hemen hemen her 5 öğrenciden birisinin kavramsal yanılırları olduğu belirlenmiştir. Genel olarak, GeLi-2 öğrencilerinin yanlış kurallamaları, tek aşamalı çözüm gerektiren problemlerde gözlenmiştir. Bununla birlikte, parantez kullanımı, yanlış kurallamaları artırıcı bir etken olarak gözlemlenmiştir. En sık gözlemlenen yanlış kurallamalar olan YK13, YK24 ve YK26 öğrencilerin "bilinenleri ve bilinmeyenleri ayrı ayrı taraf tarafa toplama" ilkesi konusunda yanlış anlamaları olduğunu göstermektedir. Öte yandan, GeLi-2 öğrencilerinin %62'si, tanımlanamayan bir, takım yanlışlar yapmıştır.

Özel Lise (ÖzLi) öğrencilerinin yanlış kurallama durumu Tablo 4'ün sağ taraftan 2. sütununda gösterilmiştir. Açıkça gözlenebileceği gibi, özel okul öğrencileri arasında yanlış kurallamaların sayısı ve çeşitliliği azdır. Öte taraftan, aritmetik yanlışlar yüzdesi yüksek çıkmıştır (ÖzLi öğrencilerinin %86'sı bu tür yanlışlar yapmaktadır). Bu durum, GeLi-1 ve GeLi-2 verilerinde de gözlemlendiği gibi orta ve yüksek başarı düzeyinde olan öğrencilerin düşük başarı düzeyindeki öğrencilere göre yanlışlarının daha çok aritmetik veya işlemsel olduğu hipotezini desteklemektedir. Diğer göze çarpan noktalardan biri de bu gruptaki öğrencilerin hiçbirinde eşitlik kavramı ile ilgili bir yanlış kurallama veya denklem çözümünde yerine koyma yöntemi yanlış kullanma gözlenmemiştir. Ayrıca, tanımlanamayan yanlış yapma oranı (%9), diğer okullara göre oldukça düşük seviyede kalmıştır.

MeLi grubu verilerine baktığımızda ise en sık gözlemlenen yanlış kurallamalar, YK18, YK21 ve YK26 olmuştur (Tablo 4, son sütun). YK18 ve YK21 değerlerinin yüksek olması, öğrencilerin özellikle parantez kullanımıyla ilgili güçlüklerinin olduğuna işaret etmektedir. Ayrıca, GeLi-1 ve GeLi-2'de olduğu gibi öğrencilerin "bilinenleri ve bilinmeyenleri ayrı ayrı taraf tarafa toplama" ilkesi konusunda yanlış anlamaları olduğu saptanmıştır. Diğer taraftan, öğrencilerin %90'ı aritmetik yanılırlar yapmış, genel olarak da yanlışların yalnızca %26'sı tanımlanamamıştır. ÖzLi'deki öğrencilere benzer olarak MeLi öğrencilerinin hiçbirinde eşitlik çözümünde yerine koyma yöntemini yanlış kullanma gözlenmemiş ve öğrencilerin yalnızca %4'ünde eşitlik kavramı ile ilgili güçlüklerin olduğu saptanmıştır.

Yanlış Kurallamaların Kararlılığı ve Dağılımları

Bu kısımda yanlış kurallamaların tanınal gücü ve yardımcı eğitim/öğretim amaçlı kullanıma potansiyeli incelenmektedir.

Yanlış Kurallamalar ve Tanı

Elde edilen tüm yanlış kurallamalar (cebirsel yanlış kurallamalar ve aritmetik yanılırlar) göz önüne alınarak öğrencilerin yaptığı yanlışların ne kadarının belirlenen *yanlış kurallamalar* ile açıklanabildiği incelendi ve okullara göre şu sonuçlar çıktı:

- Tablo 5'te gösterildiği gibi GeLi-1 öğrencilerinin yaptığı yanlışların tümünün %96'sı; GeLi-2 öğrencilerinin yaptığı yanlışların tümünün %91'i; ÖzLi öğrencilerinin yaptıkları yanlışların tümünün %94'ü; ve MeLi öğrencilerinin yaptıkları yanlışların tümünün %88'i, DDT'deki tüm yanlış kurallamalar kullanılarak açıklanabilmektedir.

Tablo 5.

Yanlış Kurallamaların Liselerdeki Tüm Öğrencilere Göre Sıklık Dağılımları

	GeLi-1	GeLi-2	ÖzLi	MeLi
Cebirsel Yanlış Kurallamalar	317	1006	39	114
Aritmetik Yanılgılar	320	132	115	216
Tanımlanamayan	26	113	9	43
Açıklanabilen Toplam Yanlış Kurallama	637 (%96)	1138 (%91)	154 (%94)	330 (%88)

- İlk olarak, yanlış kurallamaların tanısız gücünün/değerinin okul bazında gösterdiği değişik sayısal değerler, genel bir yargı çıkarımını kısıtlamaktadır. İkinci olarak, Tablo 4'te görülebileceği gibi genel olarak en çok açıklayıcı güce sahip olan yanlış kurallamalar YK6, YK11, YK13, YK24 ve YK26 her bir okul içerisinde aynı gücü gösterememekte, diğer bazı yanlış kurallamaların gerisinde kalmakta ve benzer yapıları gösterememektedirler.
- Elde edilen bu sayısal değerler, yanlış kurallamaların hata tanısı için kullanımı konusunda cesaret verici gözükmemektedir. Başlangıçta saptanan çok sayıdaki yanlış kurallamaya rağmen, az sayıdaki yanlış kurallamanın bile tek bir grup öğrenci içerisindeki birçok yanlışını açıklanmasında yeterli olduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, birtakım sınırlamalar da tanısız veri içerisinde gözden kaçmaktadır.
- Pratik olarak bu bulgular, Payne ve Squibb (1990)'in de vurguladığı gibi, katalog temelli tanıların yapılabilmesi için çok sayıda yanlış kurallamaya gereksinim olduğunu göstermektedir. Üstelik bu ortamda yeni bir örneklemeden kataloglananların dışında yeni bir yanlış genelleme listesi çıkmayacağı da garanti edilemeyecektir.
- Bu çalışmada, Sleeman (1984) ve Payne ve Squibb (1990)'de rapor edilmeyen yeni yanlış genellemeler saptanmış, onlarda gözlemlenenlerin bir kısmı da Türk örnekleminde gözlemlenmemiştir.

Yanlış Kurallamaların Kararlılığı

Bu çalışmadaki verilerden elde edilen genel gözlem ve oluşan ortak kanılardan biri de az sayıda yanlış kurallamanın öğrenciler tarafından yineleniştir. Bununla birlikte, edinilen bu kanıyı, kesin ve sayısal bulgularla desteklemek, elde edilen verilerle bu kanıyı doğrulamak ise kolay gözükmemektedir. Çünkü farklı yanlış kurallamalar değişen olasılıklarla gözlemlenmekte; dahası birçok durumda ise sayıyı söyleyebilmek için her bir öğrenci adına hazırlanan protokolü incelemek, belli bir yanlış kurallama için bireysel sayıları ve toplamdaki yerini ortaya koymak gerekmektedir. Bu nedenle, her bir yanlış kurallamanın okullar içerisinde kullanılma yüzdeleri hesaplanmıştır.

Hesap sonuçlarına bakıldığında yanlış kullanma oranlarının büyük çoğunluğu, %50'nin altında kalmaktadır. Bu oranın dışında kalan yanlış kurallamalar ise yalnızca YK6, YK13, YK24 ve YK26'dır. Yanlış kurallama yapan öğrencilerin toplam yüzdesine bakıldığında da yine aynı yanlış kurallamalar karşımıza çıkmaktadır. Bu da öğrencilerin yanlış kurallama kullanımlarının, kanıtsal olarak, kararlı bir dağılıma sahip olmadığını göstermektedir.

Yanlış Kurallamaların Sorulara Göre Dağılımları

Tablo 6’da yanlış kurallamaların hangi soru tipleri içerisinde yapıldığı gösterilmiştir. Yanlış kurallamaların açıklanmasında ve yorumlanmasında, kolaylık olması için, kurallamalar üç gruba ayrılmıştır. Bunlar:

- *Son-Aşama-Bölme Yanlış Kurallamaları (YK1 – YK10):* Bunlardan YK1, ..., YK6 hemen hemen tüm soru tiplerinde gözlemlenmişken, diğerleri yalnızca birinci soru tipinde gözlemlenmiştir.
- *Parantez Kavramı Bağlantılı Yanlış Kurallamalar (YK18 – YK25):* Bu türden yanlış kurallamalar 8, 9, 12 ve 13. soru tiplerinde gözlemlenmiştir.
- *Diğer Yanlış Kurallamalar:* Bunlar, kurallamaların değişik alt kümeleri halinde gözlemlenmiştir.

Tablo 6.

Yanlış Kurallamaların Soru Türlerine Göre Dağılımları

Soru	Soru Türü	YK	YK	YK	YK	YK	YK	YK	YK	YK
		1-6	7-10	11-14	15	18-20	21-23	24	25	26-27
01	$Mx = P$	√	√							
02	$Mx = N + P$	√								
03	$Mx = N \cdot P$	√								
04	$Mx + Nx = P$	√			√					
05	$Mx + N = P$	√		√						
06	$M + Nx = P$	√		√						
07	$Mx = Nx + P$	√		√	√					√
08	$Mx = N (P \cdot Q)$	√		√			√			
09	$Mx = N (Px + Q)$	√				√	√			
10	$Mx = N + (P \cdot Q)$	√					√			
11	$M + Nx + Px = Q$	√		√						
12	$Mx = N + P (Qx + R)$	√				√	√	√	√	
13	$Mx + N (x + P) = Q$	√				√	√		√	
14	$Mx + N = Px + Q$	√		√						√

Öte yandan, her bir soru tipi için, çözüme götürücü basamakların sayısına göre bir zorluk indeksi belirlemek olasıdır. Örneğin, 1. soru tipi tek aşamalı bir bölme işlemi ile çözülebilirken, 14. soru tipi iki taraf tarafa yer değiştirme, yani iki toplama (veya çıkarma) ve bir bölme (veya çarpma) işlemi gerektirmektedir. Özetle, orta zorluktaki bir soru için ortalama olarak 2-5 basamaklı bir çözüm gerekmektedir.

Bu açıklamalara ek olarak, ortak yanlışların sıklık dağılımlarına bakarak düşük sıklıktaki yanlış kurallamaların yanılğı veya diğer tanımlanmış hata çeşitlerinden hangisine ait olduğunu kestirmek oldukça güçtür. Bu durumda saptanan cebirsel yanlışların basit birer yanılğı olup olmadığına bakmak daha anlamlı olacaktır. Bir kez gözlemlenen yanılğı olduğu konusunda şüphe bulunmayan ortak yanlışlardan yanlış kurallamalar olabileceği gibi, yalnızca bir kez gözlemlenmesine karşılık ne tür bir mekanizması tarafında ortaya çıktığı açık bir şekilde belli

olmayan kurallamaların olması da olasıdır. Örneğin, YK29: $-(N * P) \rightarrow -N - P$. Bu tür yanlış, kontrol temelli sürçmelerin tüm özelliklerini göstermektedir: Çok az sıklıkta olması, 217 öğrenci içerisinde yalnızca birinin bir yerde yapması. Öte yandan, YK32: $M(x + N) \rightarrow -M + Nx$ 'deki yanlışın ne tür bir sürçme mekanizması sonucu doğduğu aynı netlikte belli olmamaktadır.

Gözlemlenen yanlışlar ve güçlüklerin açıklanması yönünden bu çalışmada belirtilen ortak yanlış tiplerinin, yazımdaki hatalar veya dikkatsizce yapılan tahminlerden kaynaklanabileceği tezini de göz ardı etmemek gerekir. Belirtilen tüm bu karmaşık nedenler örgüsü içinde yalnız sık tekrarlanan yanlış kurallamalar üzerinde odaklanılmasının daha uygun olacağı ve bu düşünceye dayalı olarak yapılacak açıklamaların önemini yitirmeyeceği anlaşılmaktadır.

Tartışma

Payne ve Squibb'in de (1990) belirttiği üzere, kavramıyla ilgili yanlışlar kuramının tamamı iki temel ilkeye dayanmaktadır. Bunların ilki, tüm yanlışların "sürçme" veya "yanılgı" olarak sınıflandırılabilirliği. İkincisi ise, yanlış kurallamaların katıksız, biçimsel sembolik işlemler sırasında yapılan manipülasyonlar ve semantik algıdaki yetersizliklerden kaynaklandığı varsayımdır.

Sürçme ve Yanılgı

Yanlış kurallamaların örneklemin tamamı içerisindeki dağılımına bakıldığında, üçünün (YK29, YK31 ve YK32) yalnızca birer kez yapıldığı görülmektedir (Tablo 4). İlginçtir ki bunlardan YK31, Payne ve Squibb (1990) tarafından 34 öğrenci içerisinde 64 kere gözlemlenmiş olmasına rağmen, bu örnekleme yalnızca bir kez gözlemlenmiştir. Öte yandan, bu çalışmanın örnekleminde sıklıkla karşılaşılan, fakat Payne ve Squibb (1990) ve Sleeman (1984) tarafından daha az sıklıkta rapor edilen yanlış kurallamalar da vardır. Üstelik bir kısım yanlış kurallamalar, her iki çalışmada rapor edilenlerin dışında yeni yanlış kurallamalar olarak belirlenmiştir (örneğin, YK2, YK10, YK17). Dolayısıyla yanlış kurallamaların bir anlamda örneklem veya ortama göre değişiklik gösterebileceği anlaşılmaktadır. Bu durum Payne ve Squibb'in (1990) yanlış-kurallamaların çok kararsız olduğu, aynı öğrencinin daha önce yaptığı bir yanlış kurallamayı yeri geldiğinde yapmayabileceğini ve sürekli olarak yeni kurallar üretebileceği yönündeki bulgularını desteklemektedir. Payne ve Squibb bunun, kavramsal ve işlemsel bilginin gelişimi sırasında, öğrencinin kavramları ve işlemleri anlamlandırma sürecinin bir parçası olduğuna işaret etmektedir.

Toplam örneklem değerlerinden yalnız %10 ve üzerini temel alıp sonuçlara bakarsak, YK1, YK2, YK6, YK11, YK13, YK18, YK21, YK24 ve YK26 yanlış kurallamaları olası kavram yanılgıları olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunlardan YK6 ($Mx = N \rightarrow x = M - N$ veya $x = N - M$) özellikle GeLi-1 ve GeLi-2'de oldukça fazla olarak karşımıza çıkmıştır (Tablo 4). Bu tür bir yanlış kurallamanın kaynağında $M * X \rightarrow M + X$ dönüşümü olabilir (Sleeman, 1984, s. 405-407). Sleeman'a göre bu tür bir hatalı dönüşüm, cebirsel notasyonun tamamıyla yanlış anlaşılmasından ve cebirsel eşitliğin yanlış ayrıştırılmasından kaynaklanan bir ayrıştırma (*parsing*) yanlıştır. Öte yandan yukarıdaki listeye, her bir okul bazında inceleme yapılarak, kavram yanılgısı olma olasılığı yüksek diğer yanlış kurallamalar da eklenebilir. Bununla birlikte öğrencilerin %20'sinden fazlasının yaptığı yanlış kurallamaları incelediğimizde, YK13, YK18, YK24 ve YK26'nın olağan kavram yanılgıları ile karşılaşmaktayız. Bunların tamamı, Payne ve Squibb (1990) tarafından da olağan yanlış kurallamalar olarak bildirilirken, yalnız YK13 ve YK18, Sleeman (1984) tarafından olağan yanlış kurallamalar arasında sayılmıştır. Öte yandan, sık yinelenen yanlış kurallamalar kavramsal açıdan ele alınırsa, öğrencilerin şu olası kavram yanılgılarına sahip olabilecekleri öngörülebilir:

- '+' ve '-' işaretleri her zaman kapalı bir sonuç gerektirir.
- Matematikte işlemler, her zaman soldan sağa doğru yapılır/başlanır.
- Cebirsel olarak parantezin çok bir önemi yoktur.
- Eşitliğin bir tarafında yapılan bir işlemin tersi öbür tarafta yapılır (aynı işlem değil).
- Çıkarma işleminin değişme özelliği vardır.
- Ters işlemler gereksizdir.

Örneğin, YK4: $Mx = N \rightarrow x = M/N$ yanlış kurallaması, bir sürçme veya "Ters işlemler gereksizdir" kavram yanlışlığının doğal bir sonucu olabileceken; YK18 – YK23, "Cebirsel olarak parantezin çok bir önemi yoktur" yanlışlığının sonuçları olabilir. Benzer şekilde YK24 ise, "Matematikte işlemler her zaman soldan sağa doğru yapılır/başlanır" yanlışlığını akla getirmektedir.

Sonuç

Araştırmanın anateması olan bir bilinmeyenli eşitliklerin çözümü, genel olarak bir dizi kuralların uygulanması şeklinde olduğu için, öğrencilerin ortak yanlışları (hataları), yanlış kurallamalar olarak gözlemlenmeye çalışılmıştır. Araştırmanın önemli sonuçları, kısaca şöyle sıralanabilir:

- Yanlış kurallamaların sıklıkları oldukça değişiklik göstermektedir. Birçok yanlış genelleme az sıklıkta, çok az bir kısmı ise yüksek sıklıkta gözlemlenmiştir. Bu durum, Payne & Squibb'in de (1990) söylediği gibi yanlış kurallamaların kararlı olmadığını göstermektedir.
- Farklı okullarda farklı yanlış kurallama yanlışlarının ağırlıklı olarak dağıldığı gözlemlenmiştir. Listelenen yanlışlar ve kavram yanlışlarıyla ilgili olarak alan yazınında (Payne & Squibb,1990; Sleeman, 1984) bulunanların yanı sıra bulunmayan bazı kurallar da saptanmıştır.
- Düşük başarı seviyesindeki öğrencilerde ve okullarda yapılan yanlışlar, daha çok yanlış kurallamalar odaklı iken, orta ve yüksek başarı seviyesinde yanlışların daha çok aritmetik veya işlemsel olduğu ortaya çıkmaktadır.
- Bir bilinmeyenli eşitliklerin çözümünde yerine koyma yöntemi, bu örneklem için genel olarak tercih edilen bir yöntem olmamıştır.
- Elde edilen araştırma bulguları, lise düzeyinde bile öğrencilerin basit eşitliklerin çözümünde birtakım ciddi güçlüklerinin olduğunu ve bunları etkileyen olası bazı nedenler bulunduğunu göstermektedir.

Yukarıda açıklanan nedenlerle, cebir öğretiminde bazı iyileştirici ve güçlükleri giderici çalışmaların yapılmasını gerektirmektedir. Bu güçlüklerle yönelik, teknoloji ve somut materyallerin kullanıldığı yeni etkinliklerin tasarlanması ve geliştirilmesi, etkinliklerin öğretim programlarına entegre edilmesi; ayrıca, matematik öğretmenlerinin bu konularda hizmetiçi eğitim görmeleri önerilmektedir. Bu çerçevede, araştırma yönünden de daha geniş boyutlarda ve farklı örneklemelerden derlenecek verilere gereksinim vardır. Öğrencilerin güçlüklerinin belirlenmesi ve sınıflandırılması ve olabildiğince bunların olası nedenlerinin (örneğin, bilgi yetersizliği, bir işlemdeki belli basamakları yerine getirememesi gibi) araştırılması öncelikli araştırmalar olmalıdır. Bunun yanında başarılı ve başarısız öğrencilerin davranış ve düşünme yapıları incelenmeli, bu çerçevede de genel olarak öğrencilerin stratejileri ve tutumları karşılaştırılmalıdır. Bunların dışında, belki tüm bu sayılanlardan daha da önemlisi, öğrencilerin

eşitlik çözümlerinde daha başarılı olması için ne tür önkoşulların, becerilerin ve bilgilerin gerekli olduğu bu çalışmada bulunan yanlış kurallamalar bilgisi de kullanılarak saptanmalı ve öğrencilere bunların kazandırılması için çalışılmalıdır. Bu bağlamda, literatürdeki bilgiler ile birlikte deneyimli eğitimcilerin bilgilerine ve görüşlerine başvurulmalıdır.

Kaynakça

- Baki, A. (1999). Cebirle ilgili işlem yanlışlarının değerlendirilmesi. III. Ulusal Fen Eğitimi Sempozyumu Bildirileri Kitabı, 46-49. Ankara: MEB Yayınları.
- Baki, A., & Kartal, T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karakterizasyonu. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2(1), 27-46.
- Barnard, J. J. (1989). Poor concept formation in mathematics: A diagnostic perspective (Report No. RGN/HSRC-P-105). Pretoria, South Africa: Human Sciences Research Council. (ERIC Document Reproduction Service. No. ED 310 926)
- Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 41-73.
- Borg, W. R., & Gall, M. D. (1989). *Educational Research*. New York: Longman
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor, UK: NFER Nelson.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra*, K-12 (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192.
- Brown, J. S., & VanLehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4, 379-426.
- Carry, L. R., Lewis, C., & Bernard, J. (1980). Psychology of Equation Solving; an Information Processing Study. Austin: University of Texas at Austin, Department of Curriculum and Instruction.
- Chiu, M. M., Kessel, C., Moschkovich, J., & Muñoz-Nuñez, A. (2001). Learning to graph linear functions: A case study of conceptual change. *Cognition and Instruction*, 19(2), 215-252.
- Creswell, J. W. (2005). *Educational Research: Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. Upper Saddle River, NJ: Merrill-Pearson Education.
- Dede, Y., & Peker, M. (2007). Öğrencilerin cebire yönelik hata ve yanlış anlamaları: Matematik öğretmen adaylarının bunları tahmin becerileri ve çözüm önerileri. *İlköğretim Online*, 6(1), 35-49.
- Dede, Y., Yalın, H. İ., & Argün, Z. (2002). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanlışları. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Bildiriler Kitabı (s. 221). Ankara: ODTÜ.
- English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Erbaş, A. K., & Ersoy, Y. (2002). Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin eşitliklerin çözümündeki başarıları ve olası kavram yanlışları. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi Bildiri Özetleri Kitabı (s: 988). Ankara: ODTÜ.
- Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 60-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective*. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). New York: Cambridge University Press.
- Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
- MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 217-232.
- Payne S. J., & Squibb H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive account of error. *Cognitive Science*, 14, 445-481.
- Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher*, 74, 418-420, 450.
- Sharma, M. C. (1987). *Math notebook (From theory to practice)*. Information for teachers and parents of children with learning problems in mathematics. Vol. 5&6 (Parts 2&3) (ERIC Document Reproduction Service. No. ED 342 600).
- Sleeman, D. (1984). An attempt to understand students' understanding of basic algebra. *Cognitive Science*, 8, 367-412.
- Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *Mathematics Teacher*, 90, 110-114.