

# **Modellreduktion thermischer Felder unter Berücksichtigung der Wärmestrahlung**

Zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

**Technische Universität Dresden**  
**Fakultät Maschinenwesen**

## **Gutachter**

Prof. Dr.-Ing. Michael Beitelschmidt  
Jun.-Prof. Dr.-Ing. Jörg Fehr

## **Vorsitzende der Promotionskommission**

Prof. Dr. rer. nat. habil. Cornelia Breilkopf

**Dipl.-Ing. Stephan Rother, geb. Beisitzer**

geboren am 26. September 1987 in Lutherstadt Wittenberg

**Tag der Einreichung: 11.04.2019**

**Tag der Verteidigung: 05.06.2019**



## Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Bei der Auswahl und Auswertung des Materials sowie bei der Herstellung des Manuskripts habe ich keine Unterstützungsleistungen von anderen Personen erhalten.

Weitere Personen waren an der geistigen Herstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich nicht die Hilfe eines kommerziellen Promotionsberaters in Anspruch genommen. Dritte haben von mir keine geldwerten Leistungen für Arbeiten erhalten, die in Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und ist auch noch nicht veröffentlicht worden.

Die Promotionsordnung der Fakultät Maschinenwesen vom 1. Juli 2001 wird anerkannt.

Ort, Datum

Unterschrift



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur für Dynamik und Mechanismentechnik der Technischen Universität Dresden. Der Hauptschwerpunkt meiner Arbeit konzentrierte sich auf den rechnerischen Festigkeitsnachweis des nachfolgend als Anwendungsbeispiel genutzten Rotationsbehälters aus dem am Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf angesiedelten Projekt DRESDYN. Darüber hinaus erhielt ich jedoch die Möglichkeit, meinen wissenschaftlichen Fokus auf das spannende und sich dynamisch weiterentwickelnde Feld der Modellordnungsreduktion zu legen.

Für diese mir eingeräumte Freiheit und die Betreuung dieser Arbeit gilt mein besonderer Dank Prof. Dr. Michael Beitelschmidt. Des Weiteren möchte ich Jun.-Prof. Dr. Jörg Fehr für die Übernahme des Zweitgutachtens und die Organisation des IUTAM-Symposiums „Model Order Reduction of Coupled Systems“ danken, welches wichtige Impulse für die Ausführungen zum Stand der Technik lieferte.

Prof. Dr. Michael Scheffler hat mich zunächst als Koordinator des Projektes DRESDYN an der Professur für Dynamik und Mechanismentechnik unterstützt und sowohl inhaltlich als auch organisatorisch wesentlich zum erzielten Projektfortschritt beigetragen. Dafür und für seine wertvollen Anmerkungen zur Entwurfsversion dieser Arbeit möchte ich ihm ausdrücklich danken. Außerdem sehr wichtig waren die Kolleginnen und Kollegen an der Professur, allen voran Claudius Lein, der mir während meines Großen Beleges einen Einblick in die Modellreduktion gab und auf diese Weise die Themenfindung für meine Dissertation maßgeblich prägte. Auch die zahlreichen Diskussionen mit ihm und Johannes Woller habe ich sehr geschätzt. Einen wichtigen Beitrag lieferte im Rahmen seiner Diplomarbeit Robin Berger. Allen Projektpartnern, die mich im Rahmen von DRESDYN begleitet haben, bin ich für die gute Zusammenarbeit dankbar.

Darüber hinaus möchte ich meiner Familie für ihre stetige Unterstützung danken. Abschließend gilt mein ganz besonderer Dank meiner Frau Sandra, die mich während der gesamten Promotionsphase uneingeschränkt unterstützt hat. Ohne sie wäre diese Dissertation in der vorliegenden Form nicht möglich gewesen.

Dresden, im März 2019

Stephan Rother



# Inhaltsverzeichnis

Erklärung .....	III
Vorwort .....	V
Inhaltsverzeichnis .....	VII
Kurzfassung .....	XI
Abstract .....	XII
1 Einleitung .....	1
1.1 Motivation .....	1
1.2 DRESDYN .....	1
1.2.1 Zielstellung .....	1
1.2.2 Aufbau der Anlage .....	3
1.2.3 Untersuchter Lastfall .....	5
1.2.4 Bedeutung der Wärmestrahlung .....	6
1.3 Zielstellung und Herangehensweise .....	8
1.4 Aufbau der Arbeit .....	10
2 Thermomechanisches Feldproblem .....	11
2.1 Grundgleichungen .....	11
2.1.1 Massebilanz .....	12
2.1.2 Impulsbilanz .....	12
2.1.3 Drehimpulsbilanz .....	13
2.1.4 Energiebilanz .....	14
2.1.5 Entropiebilanz .....	14
2.1.6 Kinematik .....	15
2.1.7 Konstitutive Gleichungen .....	16
2.1.8 Rand- und Anfangsbedingungen .....	16
2.1.9 Anfangs-Randwertaufgabe .....	17
2.2 Finite-Elemente-Methode .....	17
2.2.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen und Temperaturen .....	18
2.2.2 Voigt'sche Notation .....	18
2.2.3 Diskretisierung .....	19
2.2.4 Thermomechanisches Gleichungssystem .....	20
2.2.5 Konvektion .....	21

---

2.3	Wärmestrahlung.....	22
2.3.1	Grundlagen .....	23
2.3.2	Sichtfaktoren .....	24
2.3.3	Wärmestrahlungsbilanz .....	26
2.3.4	Diskretisierung .....	27
2.3.5	Lastvektormethode .....	28
2.3.6	Matrixmethode .....	29
2.3.7	Wärmestrahlung zur Umgebung .....	30
2.4	Anwendungsbeispiele .....	31
2.4.1	Vereinfachter Rotationsbehälter .....	32
2.4.2	Rotationsbehälter.....	34
3	Reduktion der Temperaturgleichung.....	37
3.1	Grundlagen .....	38
3.2	Überblick der Reduktionsverfahren.....	40
3.3	Guyan-Reduktion.....	44
3.3.1	Verfahrensgrundlagen .....	44
3.3.2	Berechnung thermisch induzierter Beanspruchungen .....	45
3.3.3	Anwendungsbeispiel Spannungsberechnung .....	47
3.4	Modale Reduktion .....	48
3.4.1	Verfahrensgrundlagen .....	48
3.4.2	Anwendbarkeit der modalen Reduktion für thermische Felder .....	49
3.4.3	Modaltransformation .....	50
3.5	Krylov-Unterraummethoden .....	51
3.5.1	Verfahrensgrundlagen .....	51
3.5.2	Algorithmus.....	52
3.5.3	Anwendungsbeispiel .....	56
3.6	Proper Orthogonal Decomposition.....	59
3.6.1	Verfahrensgrundlagen .....	59
3.6.2	Numerische Berechnung der Singulärwerte.....	63
3.6.3	Anwendungsbeispiel lineare Modellordnungsreduktion.....	64
3.6.4	Anwendungsbeispiel mit Wärmestrahlung .....	67
3.7	Modellkorrelation .....	70



---

4	Reduktion der Systemeingänge und -ausgänge.....	73
4.1	Stand der Technik.....	74
4.2	Synchrone Lasten.....	75
4.3	Singular-Value-Decomposition-Model-Order-Reduction.....	79
4.3.1	Verfahrensgrundlagen.....	79
4.3.2	Anwendungsbeispiel Quader.....	80
4.3.3	Anwendungsbeispiel Vorwärmprozess.....	82
4.4	Singulärwertzerlegung basierend auf Lastvektorsnapshots.....	84
4.4.1	Grundprinzip.....	85
4.4.2	Parameterstudie Vorwärmprozess.....	86
4.4.3	Variation des Emissionsgrades.....	89
4.5	Reduktion des Rechenaufwandes in der Offline-Phase.....	93
4.5.1	Grundidee.....	93
4.5.2	Anwendungsbeispiel.....	94
5	Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung.....	99
5.1	Grundgedanke.....	100
5.2	Discrete Empirical Interpolation Method.....	102
5.3	Anwendung der DEIM auf die Wärmestrahlung.....	104
5.3.1	Standardfall.....	104
5.3.2	Emissionsgrad als Parameter.....	106
5.4	Variation des Emissionsgrades.....	108
5.4.1	Reduktion der Wärmestrahlung.....	109
5.4.2	Betrachtung Gesamtprozess.....	112
5.5	Berechnungszeiten.....	115
5.6	Parameterstudie Vorwärmprozess.....	120
6	Zusammenfassung und Ausblick.....	123
6.1	Zusammenfassung.....	123
6.2	Ausblick.....	125
	Literaturverzeichnis.....	129
	Verzeichnis wissenschaftlicher Publikationen.....	139
	Abbildungsverzeichnis.....	141
	Tabellenverzeichnis.....	145

---

Symbolverzeichnis .....	147
Abkürzungsverzeichnis .....	153
Anhang .....	155
Anhang A    Berechnungsprogramm Temperaturfeldberechnung .....	155
A.1    Extraktion der Matrizen und Vektoren aus ANSYS .....	155
A.2    Elementtypen und Kontaktformulierung .....	157
A.3    Temperaturrandbedingungen .....	158
A.4    Integratoren .....	158
A.5    Validierung im Vergleich zu ANSYS.....	160
Anhang B    Einfluss der Iterationsanzahl für IRKA .....	163
Anhang C    Zufallsdatensatz für die Parametervariation .....	165
Anhang D    Snapshotanpassung für POD mit Wärmestrahlung .....	169
Anhang E    Eingangsreduktion für synchrone Lasten .....	173
Anhang F    Anpassung Lastvektorsnapshots.....	175
Anhang G    Temperaturfelder bei Emissionsgradvariation.....	177

## Kurzfassung

Transiente Simulationen im Rahmen von Parameterstudien oder Optimierungsprozessen erfordern die Anwendung der Modellordnungsreduktion zur Minimierung der Berechnungszeiten. Die aus der Wärmestrahlung resultierende Nichtlinearität bei der Analyse thermischer Felder wird hier als äußere Last betrachtet, wodurch die entkoppelte Ermittlung der strahlungsbedingten Wärmeströme gelingt. Darüber hinaus ermöglichen die infolgedessen konstanten Systemmatrizen die Reduktion des Temperaturvektors mit etablierten Verfahren für lineare Systeme, wie beispielsweise den Krylov-Unterraummethoden. Die aus der in der Regel großflächigen Verteilung der thermischen Lasten folgende hohe Anzahl von Systemeingängen limitiert allerdings die erzielbare reduzierte Dimension. Deshalb werden zustandsunabhängige, sich synchron verändernde Lasten zu einem Eingang zusammengefasst. Die aus der Strahlung resultierenden Wärmeströme sind im Gegensatz dazu durch die aktuelle Temperaturverteilung bestimmt und lassen sich nicht derart gruppieren.

Vor diesem Hintergrund wird ein Ansatz basierend auf der Singulärwertzerlegung von aus Trainingssimulationen gewonnenen Beispiellastvektoren vorgeschlagen. Auf diese Weise gelingt eine erhebliche Verringerung der Eingangsanzahl, sodass im reduzierten System ein sehr geringer Freiheitsgrad erreicht wird. Im Vergleich zur Proper Orthogonal Decomposition (POD) genügen dabei deutlich weniger Trainingsdaten, was den Rechenaufwand während der Offline-Phase erheblich vermindert. Darüber hinaus dehnt das entwickelte Verfahren die Gültigkeit des reduzierten Modells auf einen weiten Parameterbereich aus. Die Berechnung der strahlungsbedingten Wärmeströme in der Ausgangsdimension bestimmt dann den numerischen Aufwand. Mit der Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) wird die Auswertung der Nichtlinearität auf ausgewählte Modellknoten beschränkt. Schließlich erlaubt die Anwendung der POD auf die Wärmestrahlungsbilanz die schnelle Anpassung des Emissionsgrades. Somit hängt das reduzierte System nicht mehr vom ursprünglichen Freiheitsgrad ab und die Gesamtsimulationszeit verkürzt sich um mehrere Größenordnungen.

## Abstract

Transient simulations as part of parameter studies or optimization processes require the application of model order reduction to minimize computation times. Nonlinearity resulting from heat radiation in thermal analyses is considered here as an external load. Thereby, the determination of the radiation-induced heat flows is decoupled from the temperature equation. Hence, the system matrices become invariant and established algorithms for linear systems, such as Krylov Subspace Methods, can be used for the reduction of the temperature vector. However, in general the achievable reduced dimension is limited as the thermal loads distributed over large parts of the surface lead to a high number of system inputs. Therefore, state-independent, synchronously changing loads are combined into one input. In contrast, the heat flows resulting from radiation are determined by the current temperature distribution and cannot be grouped in this way.

Against this background, an approach based on the singular value decomposition of snapshots obtained from training simulations is proposed allowing a considerable decreased input number and a very low degree of freedom in the reduced system. Compared to Proper Orthogonal Decomposition (POD), significantly less training data is required reducing the computational costs during the offline phase. In addition, the developed method extends the validity of the reduced model to a wide parameter range. The computation of the radiation-induced heat flows, which is performed in the original dimension, then determines the numerical effort. The Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) restricts the evaluation of the nonlinearity to selected model nodes. Finally, the application of the POD to the heat radiation equation enables a rapid adjustment of the emissivity. Thus, the reduced system is no longer dependent on the original degree of freedom and the total simulation time is shortened by several orders of magnitude.

---

# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Heutzutage nehmen Simulationen im Maschinen-, Fahrzeug- und Anlagenbau eine entscheidende Rolle im Entwicklungsprozess ein. Einerseits lassen sich somit zeit- und kostenintensive Versuche reduzieren und andererseits die generellen Produktentwicklungszyklen verkürzen, da bereits zu einem sehr frühen Konzeptstand Aussagen zum Bauteilverhalten getroffen werden können, was wiederum umfangreiche Optimierungen erst ermöglicht [Klein 2015; Nasdala 2015]. In Forschungsgroßanlagen kommt der simulationsgestützten Bauteilanalyse eine besondere Bedeutung zu, weil es sich vielfach um Sonderanfertigungen und Einzelstücke handelt. Deshalb erweist sich die Anfertigung von Prototypen, welche für experimentelle Tests herangezogen werden könnten, aus finanziellen Gründen vielfach als nicht realisierbar. Dem gegenüber stehen allerdings Sicherheitsaspekte, sodass ein Versagen, der häufig bis an die Grenzen des technisch Möglichen beanspruchten Bauteile, aufgrund der potentiellen Gefährdungslage im Vorfeld ausgeschlossen werden muss. Des Weiteren ginge ein Ausfall der entsprechenden Anlagen vielfach mit einem Abbruch der beabsichtigten Experimente sowie erheblichen Kosten einher.

Die Verwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM) im Rahmen der simulationsbasierten Bauteilauslegung zur Ermittlung der wirkenden Beanspruchungen führt dabei jedoch in vielen Fällen zu Modellen sehr großer Dimension mit mehreren Millionen Freiheitsgraden. Aufgrund der resultierenden Rechenzeiten sind diese einer effizienten Durchführung von Variantenstudien oder Optimierungsrechnungen im Allgemeinen nicht zugänglich, wobei für transiente Simulationen oder die Berücksichtigung nichtlinearer Modelleigenschaften der Berechnungsaufwand weiter ansteigt. Infolgedessen kommen im Rahmen dieser Arbeit Verfahren der Modellordnungsreduktion zum Einsatz, deren Ziel es ist, das vorhandene Modell großer Dimension mittels mathematischer Methoden in ein System geringen Freiheitsgrades zu überführen und dabei die relevanten dynamischen Eigenschaften bestmöglich zu approximieren. Auf diese Weise lassen sich die Rechenzeiten zum Teil um mehrere Größenordnungen reduzieren, was einen zielorientierten Einsatz im konstruktiven Entwicklungsprozess ermöglicht.

## 1.2 DRESDYN

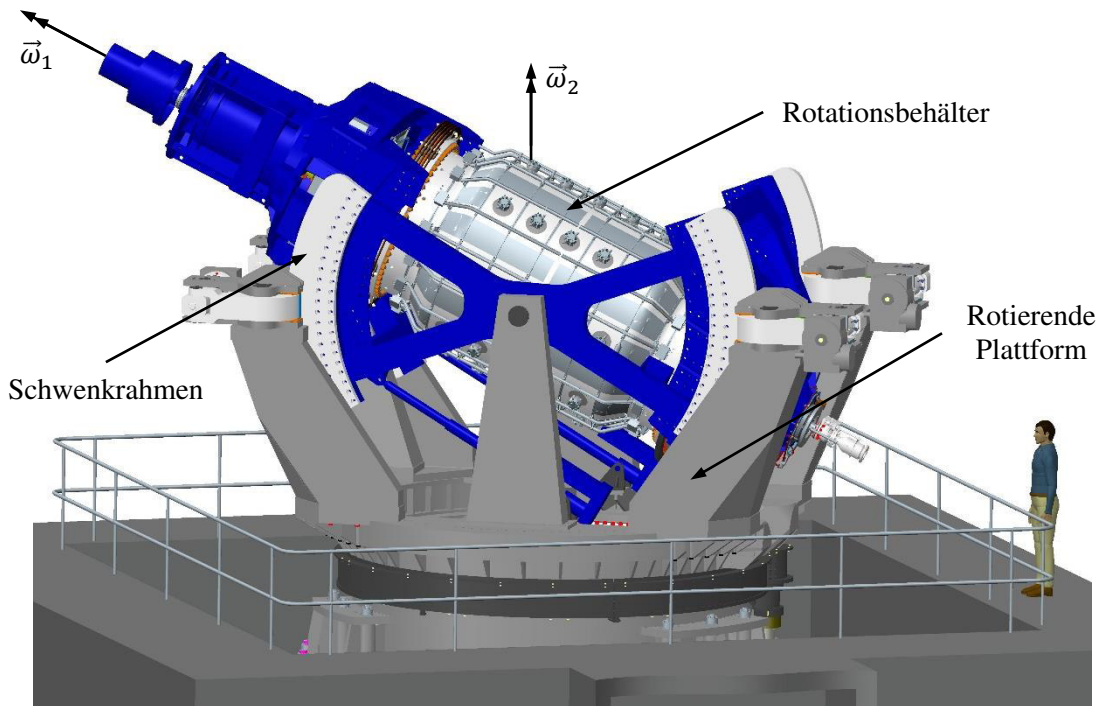
### 1.2.1 Zielstellung

Innerhalb des Projektes DRESDYN (DREsden Sodium facility for DYNamo and thermo-hydraulic studies) werden am Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf (Deutschland) verschiedene Flüssigmetalleexperimente gebündelt [Stefani *et al.* 2012, 2015, 2018]. In dieser Arbeit liegt der Fokus auf dem angestrebten Präzessionsexperiment, welches Erkenntnisse über die Entstehung planetarer und anderer kosmischer Magnetfelder liefern soll [Stefani *et al.*

2018]. Darüber hinaus sollen mit dem Versuchsaufbau auch Fragen zur Umpolung des Erdmagnetfeldes beantwortet werden.

Bekannt ist bereits, dass die Strömungen elektrisch leitfähiger Fluide, wie beispielsweise des flüssigen Eisens im äußeren Erdkern, durch den homogenen Dynamoeffekt sich selbst verstärkende Magnetfelder erzeugen können [Gailitis *et al.* 2003]. Dies wurde in Dynamoexperimenten in Riga, Karlsruhe und Cadarache nachgewiesen, welche jedoch alle auf einem äußeren Antrieb der Strömung basieren, der die Ausbildung der beabsichtigten Strömungsfelder nach sich zieht [Gailitis *et al.* 2003; Stefani *et al.* 2008]. Aus diesem Grund soll mit Hilfe des geplanten Präzessionsexperimentes untersucht werden, wie die Rotation um zwei nichtparallele Achsen zur Entstehung der Geschwindigkeitsfelder und damit ebenfalls zur Magnetfeldausprägung führt.

Hierbei bildet die Erde mit ihrer Überlagerung aus Rotation und Präzession den Ausgangspunkt für die Konzipierung des Versuchsaufbaus, welcher in Abbildung 1.1 dargestellt ist. Innerhalb eines Tages dreht sich die Erde einmal um ihre Achse, was der Rotationsbewegung entspricht. Die Erdachse, welche um etwa  $23^\circ$  gegenüber der Ekliptikebene geneigt ist, rotiert zusätzlich innerhalb von circa 25.800 Jahren einmal um die Ebenennormale. Diese Präzessionsbewegung bewirkt hohe gyroskopische Lasten auf das flüssige Metall im äußeren Erdkern, was wiederum als maßgebliche Ursache für die ausgeprägten Strömungsfelder gilt [Giesecke *et al.* 2014].



**Abbildung 1.1** Aufbau der geplanten Versuchsanlage.

Die dadurch hervorgerufenen schraubenförmigen Strömungen des Fluides induzieren in Verbindung mit einem anfänglichen schwachen Magnetfeld einen elektrischen Strom, welcher wiederum aufgrund der spezifischen Ausprägung des Geschwindigkeitsfeldes das vorhandene Magnetfeld verstärkt. Wenn der Verstärkungsfaktor gegen unendlich strebt, kann von einer Selbsterregung des Magnetfeldes gesprochen werden [Stefani *et al.* 2018].

Den Ausgangspunkt für die Beschreibung bilden die Maxwell'schen Gleichungen [Stefani *et al.* 2008; Henke 2015]. Mit der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$ , der Permeabilitätskonstante des Vakuums  $\mu_0$ , der elektrischen Leitfähigkeit  $\kappa$  und dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  lassen sich diese zu

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \kappa} \Delta \vec{B}, \quad (1.1)$$

zusammenfassen, wobei der erste Summand auf der rechten Seite einen Advektionsterm und der zweite einen Diffusionsterm darstellt [Stefani *et al.* 2008]. Ein Anwachsen des Magnetfeldes erfordert somit, dass der aus der Strömungsgeschwindigkeit bedingte Anstieg der magnetischen Flussdichte die Abnahme durch diffusive Prozesse übersteigt, woraus sich die magnetische Reynoldszahl  $R_m$

$$R_m = \mu_0 \kappa l v \quad (1.2)$$

ableiten lässt. Hierin charakterisiert  $l$  eine typische Abmessung und  $v$  stellt die charakteristische Strömungsgeschwindigkeit dar. Für den angestrebten exponentiellen Anstieg des erzeugten Magnetfeldes muss ein Wert  $R_m = 10 \dots 1000$  erreicht werden [Gailitis *et al.* 2002], woraus sich drei wesentliche Forderungen an das Experiment ableiten:

1. Das verwendete Flüssigmetall sollte eine größtmögliche elektrische Leitfähigkeit  $\kappa$  aufweisen.
2. Die Abmessungen der Versuchsanlage sind im Rahmen des technisch realisierbaren so groß wie möglich zu wählen, wobei die Ausführung der zwei Rotationsbewegungen gewährleistet werden muss. Im Vergleich zur Erde beispielsweise ergibt sich jedoch eine im Experiment umsetzbare charakteristische Abmessung, die mehrere Größenordnungen geringer ausfällt.
3. Die Rotationsgeschwindigkeiten müssen gerade vor dem Hintergrund der in Punkt 2 diskutierten Limitierungen sehr hoch gewählt werden, um eine ausreichende Strömungsgeschwindigkeit zu erhalten. Daraus resultieren wiederum starke Beanspruchungen der Versuchsanlage, welche durch eine geeignete Topologiegestaltung zu minimieren sind, um ein Versagen mit den damit verbundenen Risiken zu verhindern.

Vor diesem Hintergrund eignet sich Natrium besonders für die Versuche. Es weist neben einer hohen elektrischen Leitfähigkeit eine geringe Dichte und einen niedrigen Schmelzpunkt auf, sodass einerseits die auf die Struktur wirkenden Trägheitslasten möglichst gering ausfallen und andererseits die Versuche in einem Temperaturbereich zwischen 110 °C und 170 °C durchgeführt werden können.

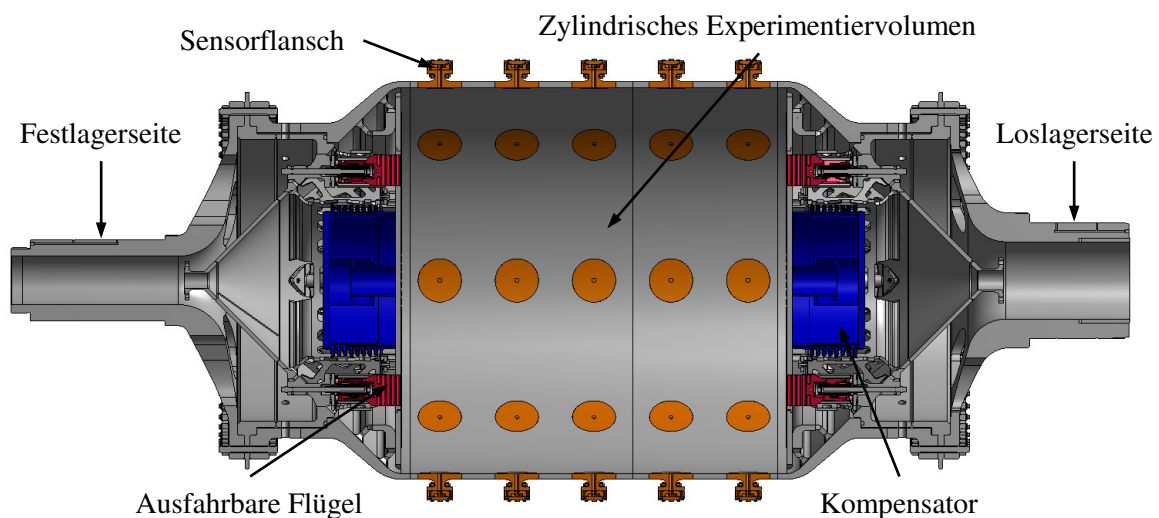
### 1.2.2 Aufbau der Anlage

Das zentrale Element der Versuchsanlage, welche in Abbildung 1.1 dargestellt ist, bildet der Rotationsbehälter, dessen Aufbau Abbildung 1.2 zeigt. Er soll mit etwa 8 t flüssigem Natrium gefüllt werden und besteht aus einem zylinderförmigen Experimentiervolumen in der Mitte, das einen Durchmesser und eine Länge von 2 m aufweist, sowie zwei konischen Endstücken.

Der Rotationsbehälter mit einer Eigenmasse von ungefähr 22 t soll sich mit einer maximalen Winkelgeschwindigkeit  $|\vec{\omega}_1| = 62,83 \text{ s}^{-1}$  um seine Längsachse drehen, was einer Rotationsfrequenz von 10 Hz entspricht. Dies bildet die Erdrotation um die Erdachse nach. Darüber hinaus befindet sich der Rotationsbehälter auf einer Plattform, welche in Analogie zur Erdpräzession ebenfalls rotiert, wobei die höchstmögliche Winkelgeschwindigkeit hier  $|\vec{\omega}_2| = 6,283 \text{ s}^{-1}$  betragen soll, was äquivalent zu einer Umdrehung pro Sekunde ist. Infolgedessen ergibt sich ein maximales gyroskopisches Moment von  $8 \cdot 10^6 \text{ Nm}$ , weshalb das Fundament über sieben Säulen in einer Tiefe von 22 m im Granitgestein verankert werden musste. Mit Hilfe eines Schwenkrahmens lässt sich der Winkel zwischen den beiden Winkelgeschwindigkeitsvektoren im Intervall  $[45^\circ; 90^\circ]$  in  $5^\circ$ -Schritten variieren. Durch Richtungsumkehr der Plattformrotation lässt sich der Bereich auf das Intervall  $[45^\circ; 135^\circ]$  erweitern. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten soll nachfolgend als Präzessionsrate  $\eta$

$$\eta = \frac{|\vec{\omega}_2|}{|\vec{\omega}_1|} \quad (1.3)$$

bezeichnet werden. Bei abgeschalteter Präzession beträgt die Präzessionsrate folglich  $\eta = 0,0$  und bei maximaler Präzessionsfrequenz ergibt sich ein Wert von  $\eta = 0,1$ .



**Abbildung 1.2** Schnittdarstellung des Rotationsbehälters.

Die gewünschten Strömungen sollen sich innerhalb des zylindrischen Experimentiervolumens entwickeln [Giesecke *et al.* 2015, 2018]. Dabei hängt die Ausbildung des Geschwindigkeitsfeldes maßgeblich von der gewählten Präzessionsrate ab. Während für  $\eta = 0,0$  das Fluid näherungsweise eine Starrkörperrotation ausführt, bildet sich bei niedriger Präzessionsrate eine laminare Strömung aus, welche bei weiterer Steigerung abrupt in eine turbulente wechselt [Stefani *et al.* 2015]. Insgesamt 40 Sensorflansche (vgl. Abbildung 1.2) ermöglichen einen Zugang für die benötigte Messtechnik im Bereich des Zylindermantels, wobei hier neben dem Magnetfeld auch die Temperatur sowie die Druckverteilung ermittelt werden sollen. Zwei argongefüllte Kompensatoren in den konischen Endstücken verhindern einen Anstieg des Innendrucks aufgrund der thermischen Expansion des Fluides. Acht ausfahrbare Flügel erlauben einen zusätzlichen Antrieb der Strömung, allerdings werden diese nur für ausgewählte



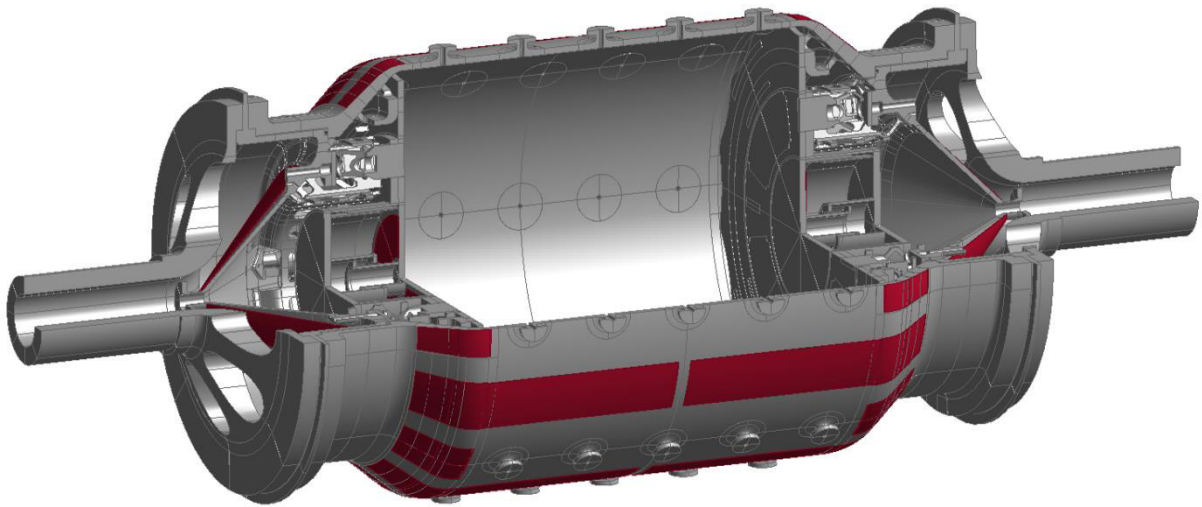
Experimente eingesetzt, da im Wesentlichen auf eine äußere Beeinflussung des Natriums verzichtet werden soll.

Da sich flüssiges Natrium im Havariefall beim Kontakt mit dem in der Luft befindlichen Wasserdampf entzündet, sind sehr hohe Sicherheitsanforderungen an die Versuchsanlage zu stellen. Deshalb befindet sich das Experiment in einem separaten Containment, welches komplett mit Edelstahl ausgekleidet ist, weil aufgrund der auftretenden chemischen Reaktion ein Kontakt mit Beton vermieden werden muss. Des Weiteren verfügt das Containment über eine Argonlöschanlage, welche den gesamten Raum innerhalb von zwei Minuten mit 15 t flüssigem Argon fluten kann, dessen Verdampfung einerseits die Temperatur stark absenkt und das andererseits die Luft verdrängt und den Brand erstickt. Dennoch erweist sich eine betriebsfeste Auslegung der Anlage als unabdingbar, um sowohl die Gefährdung von Menschenleben als auch die finanziellen Risiken, welche aus einer Havarie resultieren, auf ein Minimum zu reduzieren. Außerdem werden zur Präzisierung der Lastannahmen zunächst Versuche mit Wasser anstatt des Natriums durchgeführt. Einen Überblick über den Ablauf des Festigkeitsnachweises geben Rother und Beitelschmidt [Rother & Beitelschmidt 2017].

### 1.2.3 Untersucher Lastfall

Ungeachtet der hohen Beanspruchungen im Betrieb stellt bereits die Vorbereitung der Experimente eine Herausforderung dar. Das Natrium wird in externen Tanks aufgeschmolzen und ein Erstarren während des Einfüllens in den Rotationsbehälter muss unbedingt vermieden werden, da sich sonst unter Umständen Hohlräume bilden, welche eine nicht zu beherrschende Unwucht während der Rotation nach sich ziehen können. Demzufolge muss der Behälter vorgewärmt werden, wobei alle Oberflächen, die mit dem Fluid in Kontakt stehen, angesichts der Schmelztemperatur des Natriums von 97,8 °C eine Mindesttemperatur von 110 °C aufweisen sollen [VDI 2013]. Mit dem Ziel jegliche chemische Reaktion zwischen dem in der Luft befindlichen Wasserdampf und Natrium zu vermeiden, ist der Rotationsbehälter während der Standzeiten mit Argon gefüllt.

Das Vorwärmen erfolgt über auf dem Behältermantel, im Konusbereich und in den Kompensatoren applizierte Heizfolien, deren Verteilung Abbildung 1.3 zeigt. Limitiert wird die Heizflächenbelegung einerseits durch die zur Verfügung stehenden einfachen Heizfoliengeometrien und andererseits dadurch, dass ein Kontakt mit dem Natrium unzulässig ist. Dies erschwert insbesondere in Verbindung mit der geringen Wärmeleitfähigkeit des verwendeten austenitischen Edelstahls  $1.4571$  von  $15 \text{ W(mK)}^{-1}$  eine gleichmäßige Erwärmung und kann zu einem übermäßigen Anstieg der Temperatur im Bereich der Heizfolien führen, während sich vor allem die inneren Stirnwände zur Abtrennung des zylindrischen Mittelteils von den Konen nur äußerst langsam erwärmen. Zur Vermeidung von Ausfällen der installierten Messtechnik darf nirgendwo eine Temperatur von 250 °C überschritten werden. Darüber hinaus muss ein Strukturversagen infolge der aus den entstehenden Temperaturgradienten resultierenden thermischen Spannungen sicher ausgeschlossen werden. Dies macht eine simulationsbasierte Untersuchung des Vorwärmprozesses unumgänglich.



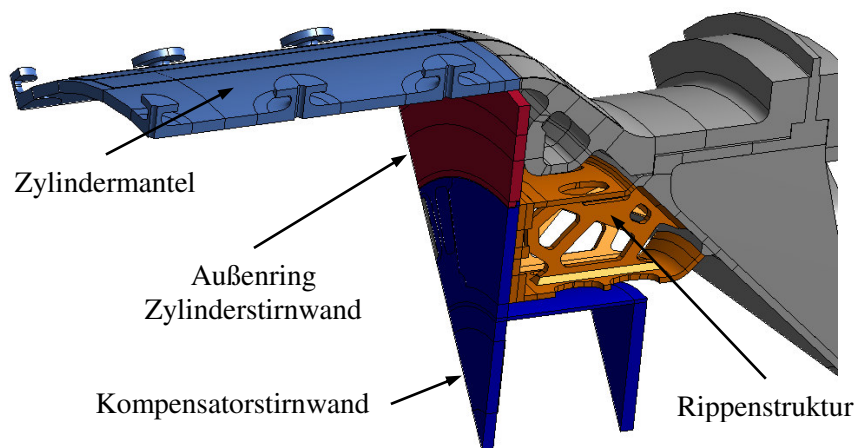
**Abbildung 1.3** Schnittdarstellung des Rotationsbehälters mit Heizflächenbelegung (rot).

Hierbei muss ein Kompromiss zwischen verschiedenen Zielstellungen gefunden werden. Zum einen sollen die Vorwärmzeiten möglichst kurz ausfallen, um die Wärmeabfuhr an die Umgebung und somit den erforderlichen Energieeintrag gering zu halten, zum anderen wird zur Reduzierung der thermischen Beanspruchungen eine möglichst gleichmäßige Temperaturverteilung angestrebt, was eine Optimierung der eingebrachten Heizleistung erfordert. Des Weiteren erweisen sich zahlreiche Modellparameter, wie beispielsweise der Wärmeübergangskoeffizient zur Beschreibung der Konvektion an der Behälteraußenseite oder der die Wärmestrahlung charakterisierende Emissionsgrad, als unsicher. Deshalb soll deren Einfluss in umfangreichen Parameterstudien erfasst werden. Dies führt schließlich zu einer hohen Anzahl durchzuführender Einzelsimulationen, sodass der individuelle Berechnungsaufwand gering gehalten werden muss, was ein möglichst schnell zu lösendes Modell erfordert.

#### **1.2.4 Bedeutung der Wärmestrahlung**

In vielen Anwendungsfällen leistet die Wärmestrahlung nur bei sehr hohen Temperaturen, wie zum Beispiel im Falle von Verbrennungsprozessen, einen signifikanten Beitrag zum Gesamtwärmestrom [Polifke & Kopitz 2005]. Sind die anderen Wärmetransportmechanismen jedoch stark eingeschränkt, ist die Wärmestrahlung schon bei niedrigeren Temperaturen von Bedeutung. Im vorliegenden Anwendungsfall weist der verwendete Edelstahl eine geringe Wärmeleitfähigkeit auf und die Inneneinbauten des Rotationsbehälters sind nur über verhältnismäßig dünne, lange Bleche mit dem Außenmantel verbunden, was den konduktiven Wärmetransport stark limitiert. Außerdem rotiert der Behälter während des Vorwärmprozesses nicht, sodass der Wärmeübergang an die Umgebungsluft an der Außenseite und das Argon an der Innenseite durch freie Konvektion bestimmt werden. Aus diesen Gründen ist die Vernachlässigung der Wärmestrahlung hier nicht zulässig.

Dies soll nachfolgend anhand einer Beispielsimulation, welche für den untersuchten Vorwärmprozess als repräsentativ gelten kann, illustriert werden. Die genauen Randbedingungen und das verwendete Modell sind in Kapitel 2.4 dargestellt. Für die vier in Abbildung 1.4 gezeigten Baugruppen des Rotationsbehälters werden die eingehenden und abgegebenen Wärmeströme dokumentiert. Hierbei wird zwischen der Wärmezufuhr durch die Heizfolien, der Wärmeleitung und dem Wärmetransport durch Konvektion, Wärmestrahlung an die Umgebung sowie Wärmestrahlung zwischen Bauteilflächen unterschieden. Die daraus resultierende Nettowärmeleistung führt aufgrund der Wärmekapazität der Baugruppen zu einer definierten Temperaturänderung. Abbildung 1.5 fasst die Ergebnisse zusammen.

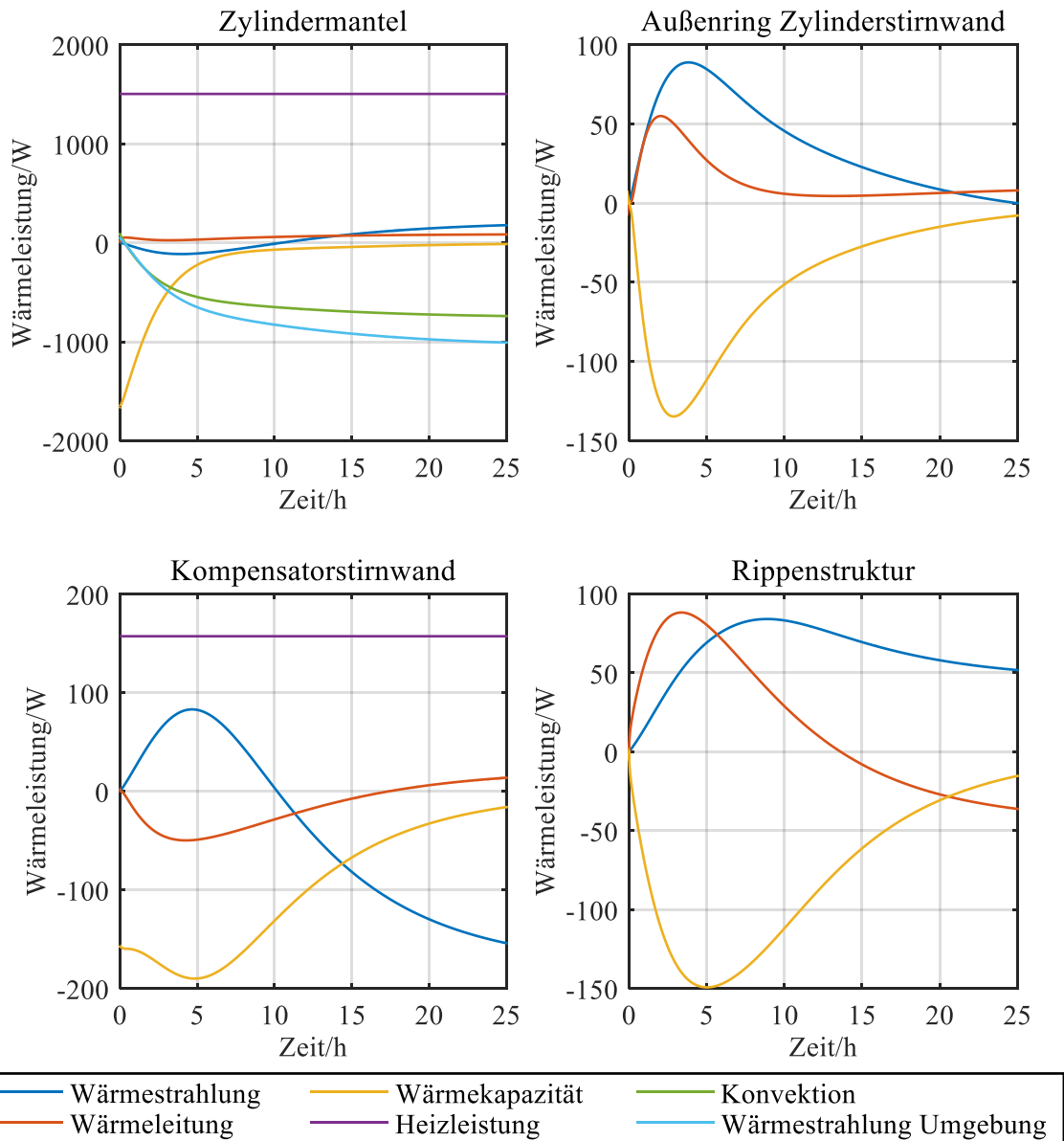


**Abbildung 1.4** Bauteile zur Auswertung der Wärmestromanteile.

Im Bereich des Zylindermantels (hellblau) wird die Wärmezufuhr durch die Heizleistung der applizierten Heizfolien bestimmt, was vor allem am Anfang zu einem starken Temperaturanstieg führt, wie der Anteil der Wärmekapazität verdeutlicht. Der Nettowärmetransport durch Wärmeleitung liegt nahe null, da auch der angrenzende Übergangsbereich zwischen Zylinder und Konus durch die Heizfolien erwärmt wird, sodass die auftretenden Temperaturgradienten minimal ausfallen. Die Wärmeabgabe wird durch die Wärmestrahlung zur Umgebung und die Konvektion geprägt. Unter Beachtung der unterschiedlichen Diagrammskalierung für die vier Baugruppen erweist sich die Wärmeabgabe durch Wärmestrahlung auf andere Bauteile als durchaus relevant.

Die Wärmezufuhr am Außenring der Zylinderstirnwand (rot) wird maßgeblich durch die Wärmestrahlung bestimmt, wohingegen der Anteil der Wärmeleitung deutlich geringer ausfällt. Insbesondere aus dem Zylinderbereich und dem Übergangsbereich zwischen Zylinder und Konus wird Wärme durch Strahlung zugeführt.

Der Kompensator und der an diesem befestigte Teil der Zylinderstirnwand (dunkelblau) erwärmen sich einerseits aufgrund der direkt durch die applizierte Heizung zugeführten Wärmeleistung und andererseits gerade am Anfang in nicht vernachlässigbarem Maße durch Wärmestrahlung vorrangig im mittleren Zylindervolumen. Je mehr die Temperaturverteilung sich dem stationären Endwert annähert und somit der Anteil der Wärmekapazität gegen null strebt, desto größer wird die Wärmeleistung, die mittels Wärmestrahlung abgeführt wird.



**Abbildung 1.5** Aufteilung der Wärmeströme für ausgewählte Baugruppen des Rotationsbehälters.

Auch die abschließende Betrachtung der Rippenstruktur (orange) zur Befestigung der mittleren Zylinderstirnplatte veranschaulicht die Bedeutung der Wärmestrahlung, sodass sich deren Berücksichtigung für den betrachteten Vorwärmprozess als essentiell erweist und eine Vernachlässigung mit erheblichen Fehlern einherginge.

### 1.3 Zielstellung und Herangehensweise

Die simulationsbasierte Untersuchung des beschriebenen Vorwärmvorgangs für den Rotationsbehälter stellt das Ziel dieser Arbeit dar. Hierzu werden das thermische und das mechanische Feldproblem, welche in dieser Arbeit aufgrund der vernachlässigbaren Rückwirkung des Verschiebungsfeldes auf das Temperaturfeld nur einseitig gekoppelt sind, mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode diskretisiert. Die Ermittlung der thermischen Beanspruchungen bedingt

dabei einen hohen Detaillierungsgrad des Modells und somit einen sehr großen Systemfreiheitsgrad. In Verbindung mit der Berücksichtigung der aus der Wärmestrahlung resultierenden Nichtlinearität führt dies zu langen Rechenzeiten. Bereits eine einzige transiente Analyse des Temperaturfeldes dauert deutlich mehr als 1 h. Infolgedessen lassen sich die angestrebten Parametervariationen nicht innerhalb eines praktikablen Zeitrahmens realisieren.

Zur Verminderung des Freiheitsgrades und damit zur Verkürzung der benötigten Berechnungsdauer wird die Modellordnungsreduktion verwendet, welche das ursprüngliche System in einen niedrigdimensionalen Unterraum projiziert. Hierzu wird zunächst die Nichtlinearität in den Lastvektor integriert, sodass die Standardverfahren der linearen Modellordnungsreduktion, wie beispielsweise die in dieser Arbeit genutzten Krylov-Unterraummethoden (engl. Krylov Subspace Methods), auf die jetzt linearen Systemmatrizen angewendet werden können.

Jedoch ergibt sich insbesondere für thermische Modelle, in denen die Lasteinleitungsstellen durch Konvektion und Wärmestrahlung über die gesamte Oberfläche oder zumindest große Bereiche selbiger verteilt sind, die Herausforderung, dass ein Großteil der Knoten des Finite-Elemente-Modells einen Systemeingang darstellt. Da die erreichbare minimale reduzierte Systemdimension für eine Vielzahl der Reduktionsmethoden proportional zur Anzahl der Systemeingänge bzw. -ausgänge ist, erfolgt im ersten Schritt zunächst eine Eingangsreduktion.

Unabhängig von der Reduktion der Systemmatrizen muss der aus der Wärmestrahlung resultierende Lastterm im ursprünglichen Vektorraum berechnet werden. Somit umfasst jeder Berechnungsschritt eine Expansion des reduzierten Zustandsvektors, die Auswertung der Nichtlinearität in der Ausgangsdimension und eine Reduktion des sich daraus ergebenden Lastvektors, was die erzielbare Zeitersparnis begrenzt. Methoden der Hyperreduktion, wie die Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM), schaffen hier Abhilfe, indem die Berechnung der Wärmeströme infolge Wärmestrahlung auf wenige, möglichst optimal gewählte Freiheitsgrade beschränkt wird.

Allerdings basieren diese Verfahren ebenso wie einige Methoden der Eingangsreduktion auf der Kenntnis des Systemverhaltens anhand von Beispielsimulationen unter Verwendung ausgewählter Parametersätze. Dies zieht einen nicht unerheblichen Rechenaufwand im Vorfeld der eigentlichen Reduktion nach sich, im Gegenzug vermindern sich aber die Simulationszeiten des reduzierten Modells noch einmal drastisch. Deshalb werden in dieser Arbeit Verfahren vorgestellt, welche je nach Aufgabenstellung eine gezielte Abwägung innerhalb dieses Zielkonfliktes bei gleichzeitiger Beibehaltung einer geringen Abweichung zwischen reduziertem und nicht reduziertem Modell zulassen. Demzufolge können entweder die Rechenzeiten in der Offline-Phase, also die Anzahl der durchzuführenden Beispielsimulationen, oder die in der Online-Phase minimiert werden, was mit den Simulationszeiten des reduzierten Modells korrespondiert. Der beschriebene Ablauf ist in Abbildung 1.6 dargestellt.

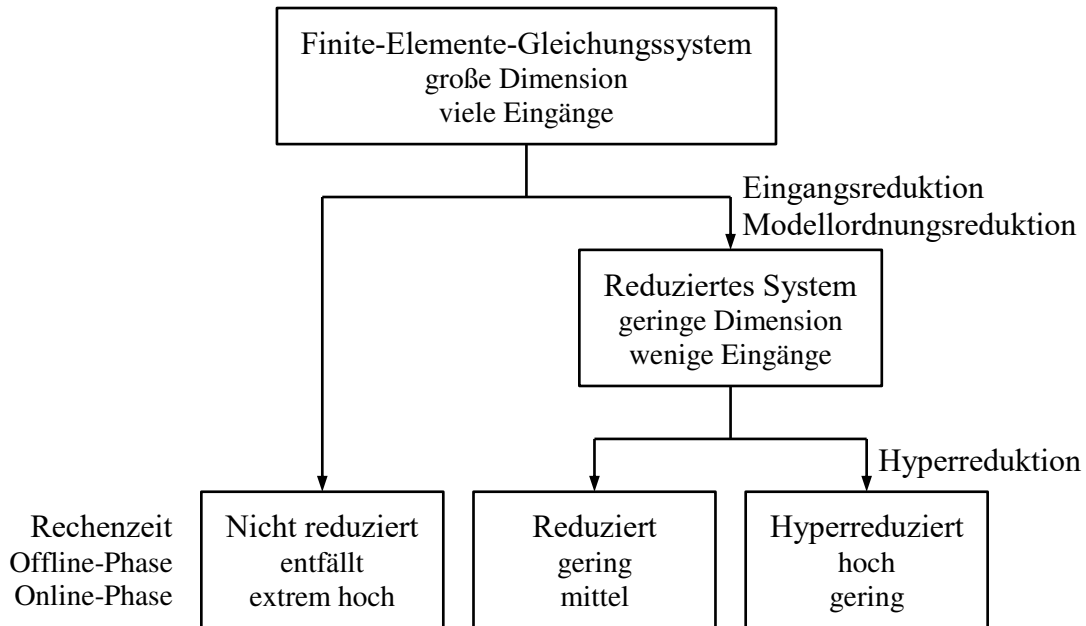


Abbildung 1.6 Ablauf der Modellordnungsreduktion.

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Die Gliederung dieser Arbeit orientiert sich an dem in Abbildung 1.6 gezeigten Schema. Dazu werden zunächst in Kapitel 2 ausgehend von den Bilanzgleichungen, den Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen sowie den konstitutiven Gleichungen die partiellen Differentialgleichungen zur Beschreibung des thermomechanischen Feldproblems abgeleitet. Im Anschluss daran erfolgt die Diskretisierung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Danach werden die verwendeten Erprobungsmodelle vorgestellt.

Kapitel 3 widmet sich der Modellordnungsreduktion der Zustandsgleichungen und beginnt mit den zugehörigen Grundlagen. Aufbauend darauf werden in den nächsten Abschnitten verschiedene Reduktionsmethoden erläutert, beginnend mit der Guyan-Reduktion, welche vorrangig für das quasistationäre mechanische Feld zum Einsatz kommt, gefolgt von der modalen Reduktion, den Krylov-Unterraummethoden und der Proper Orthogonal Decomposition (POD).

Die Reduktion der Anzahl der Systemein- und -ausgänge ist Gegenstand von Kapitel 4. Neben Verfahren für synchrone Lasten werden auch solche, die sich im Falle nichtlinearer Abhängigkeiten der Lasten von den Zustandsvariablen anwenden lassen, vorgestellt. Hierzu wird eine auf der Singulärwertzerlegung basierende Methode, welche mit einer minimalen Anzahl an Trainingsdaten auskommt, vorgeschlagen.

Mit dem Ziel den numerischen Aufwand für die Auswertung der Nichtlinearität zu verringern, stellt Kapitel 5 Verfahren der Hyperreduktion vor, wobei hier der Fokus auf der Discrete Empirical Interpolation Method liegt. Diese wird im Anschluss auf das Wärmestrahlungsproblem angewendet, um die Simulationszeiten auf ein Minimum zu reduzieren. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Kapitel 6.

## 2 Thermomechanisches Feldproblem

Die Ermittlung der Temperaturverteilung und der mechanischen Beanspruchungen erfordert die Lösung des entsprechenden thermomechanischen Feldproblems. Hierzu wird in diesem Kapitel ausgehend von den mechanischen und thermodynamischen Bilanzen unter Berücksichtigung der Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen sowie der konstitutiven Gleichungen eine allgemeine Beschreibung des Feldproblems abgeleitet. Durch Einarbeitung der Anfangs- und Randbedingungen folgt somit die zu lösende Anfangs-Randwertaufgabe. Abgesehen von einigen Spezialfällen lässt sich jedoch keine geschlossene globale Lösung für dieses System partieller Differentialgleichungen finden. Deshalb erfolgt mit der Finite-Elemente-Methode eine Ortsdiskretisierung und damit die Überführung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Ein besonderer Fokus liegt hierbei auf der Berücksichtigung der Wärmestrahlung. In vielen Fällen erweist sich eine rückwirkungsfreie einseitige Kopplung zwischen dem thermischen und mechanischen Feldproblem als ausreichend genau, da sowohl die aus der Verzerrungsgeschwindigkeit resultierende Erwärmung als auch die globalen geometrischen Änderungen vernachlässigbar sind. Das zur Berechnung der sich daraus ergebenden Temperaturverteilung entwickelte auf MATLAB basierende Werkzeug wird in Anhang A vorgestellt und die genutzten Anwendungsbeispiele sind Gegenstand von Kapitel 2.4.

### 2.1 Grundgleichungen

Die nachfolgenden mechanischen und thermischen Bilanzgleichungen lassen sich alle auf eine gemeinsame allgemeine Gleichungsform zurückführen [Altenbach 2015]. Betrachtet wird hierbei die Bilanzgröße  ${}^{\gamma}\mathbf{\Gamma}\langle t \rangle$ , wobei hier im Folgenden funktionale Abhängigkeiten stets durch spitze Klammern gekennzeichnet sind. Der hochgestellte Index  $\gamma \geq 0$  gibt die Stufe des Tensors an. Die vom Ortsvektor  $\vec{x}$  in der Momentankonfiguration und der Zeit  $t$  abhängige massebezogene Dichteverteilung von  ${}^{\gamma}\mathbf{\Gamma}\langle t \rangle$  innerhalb des Volumens  $V$  sei mit  ${}^{\gamma}\Psi\langle \vec{x}, t \rangle$  bezeichnet. Wird nun die zeitliche Änderung der Bilanzgröße betrachtet, so kann diese zwei Ursachen haben, und zwar einerseits einen Fluss  ${}^{\gamma+1}\mathbf{\Pi}\langle \vec{x}, t \rangle$  über die Oberfläche  $A$  mit dem Normalenvektor  $\vec{n}\langle \vec{x}, t \rangle$  sowie andererseits einen Zuwachs im Inneren des Volumens  ${}^{\gamma}\mathbf{E}\langle \vec{x}, t \rangle$ , welcher entweder aus Quellen und Senken oder aus Fernwirkungen resultiert. Damit ergibt sich unter Nutzung der Dichte  $\rho$  [Altenbach 2015]

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} {}^{\gamma}\mathbf{\Gamma}\langle t \rangle &= \frac{D}{Dt} \int_V {}^{\gamma}\Psi\langle \vec{x}, t \rangle \rho\langle \vec{x}, t \rangle dV \\ &= \int_A \vec{n}\langle \vec{x}, t \rangle \cdot {}^{\gamma+1}\mathbf{\Pi}\langle \vec{x}, t \rangle dA + \int_V {}^{\gamma}\mathbf{E}\langle \vec{x}, t \rangle dV. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Diese allgemeine Form der Bilanzgleichung lässt sich nun auf die verschiedenen mechanischen und thermischen Bilanzgrößen anwenden, wobei sich die nachfolgenden Ausführungen an Altenbach orientieren [Altenbach 2015]. Dabei soll im Folgenden auf die Einstein'sche

Summationskonvention zurückgegriffen werden, wonach über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist.

### 2.1.1 Massebilanz

Bei Betrachtung eines materiellen Volumens erfolgt weder ein Masseaustausch über die Oberfläche noch tritt eine Masseproduktion oder -zufuhr im Inneren auf. Aufgrund dessen bleibt die Masse  $m$  konstant und die einzelnen Größen in (2.1) ergeben sich entsprechend Tabelle 2.1.

**Tabelle 2.1** Bilanzgrößen der Massebilanz.

$\gamma$	$\Gamma\langle t \rangle$	$\Psi\langle \vec{x}, t \rangle$	$\vec{\Pi}\langle \vec{x}, t \rangle$	$\mathcal{E}\langle \vec{x}, t \rangle$
0	$m$	1	$\vec{0}$	0

Somit resultiert die Massebilanz in der Form

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (2.2)$$

welche sich unter Auswertung der materiellen Zeitableitung und Anwendung der Produktregel der Differentiation sowie der Identität  $(dV)' = v_{i,i}dV$  mit  $i = 1, 2, 3$  in die lokale Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \quad (2.3)$$

überführen lässt. Hierbei stellt  $\vec{v}$  den Geschwindigkeitsvektor dar.

### 2.1.2 Impulsbilanz

Die Änderung des Impulses  $\vec{p}\langle \vec{x}, t \rangle$  kann aus Volumenlasten im Inneren des Körpers  $\vec{f}^V\langle \vec{x}, t \rangle$  oder aus Flächenlasten auf dessen Oberfläche resultieren. Dabei bilden letztere den Spannungsvektor  $\vec{t}\langle \vec{x}, t \rangle$ , welcher sich gemäß

$$t_i = n_j \sigma_{ji} \quad (2.4)$$

durch den Cauchy'schen Spannungstensor  $\sigma\langle \vec{x}, t \rangle$  ausdrücken lässt. Einzelkräfte gehen hieraus im Grenzübergang  $dA \rightarrow 0$  hervor. Analoges gilt für Linienlasten mit nur einer infinitesimalen Abmessung. Für (2.1) folgen damit die in Tabelle 2.2 dargelegten Zusammenhänge.

**Tabelle 2.2** Bilanzgrößen der Impulsbilanz.

$\gamma$	$\vec{\Gamma}\langle t \rangle$	$\vec{\Psi}\langle \vec{x}, t \rangle$	$\mathbf{\Pi}\langle \vec{x}, t \rangle$	$\vec{\mathcal{E}}\langle \vec{x}, t \rangle$
1	$\vec{p}\langle \vec{x}, t \rangle$	$\vec{v}\langle \vec{x}, t \rangle$	$\sigma\langle \vec{x}, t \rangle$	$\vec{f}^V\langle \vec{x}, t \rangle$

Die Impulsbilanz

$$\frac{D}{Dt} p_i = \frac{D}{Dt} \int_V v_i \rho dV = \int_A n_j \sigma_{ji} dA + \int_V f_i^V dV \quad (2.5)$$



mit  $i, j = 1, 2, 3$  kann unter Nutzung des Gauß'schen Integralsatzes, welcher das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umwandelt, in die Form

$$\frac{D}{Dt} \int_V v_i \rho dV = \int_V \sigma_{ji,j} dV + \int_V f_i^V dV \quad (2.6)$$

überführt werden. Daraus resultiert die lokale Beschreibung

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ji,j} + f_i^V. \quad (2.7)$$

Die Berücksichtigung geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung ist hierbei als Volumenlast

$$f_i^V = -\delta v_i \quad (2.8)$$

möglich, wobei  $\delta$  die Dämpfungskonstante darstellt.

### 2.1.3 Drehimpulsbilanz

In der hier gezeigten Bilanzierung des Drehimpulses  $\vec{L}(\vec{x}, t)$  sollen weder flächen- noch volumenbezogene Momentendichten zugelassen werden [Balke 2010]. Durch Einsetzen der Bilanzgrößen nach Tabelle 2.3 in (2.1) folgt somit

$$\frac{D}{Dt} L_i = \frac{D}{Dt} \int_V x_j v_k \varepsilon_{jki} \rho dV = \int_A x_j n_l \sigma_{lk} \varepsilon_{jki} dA + \int_V x_j f_k^V \varepsilon_{jki} dV. \quad (2.9)$$

Darin stellt  $\varepsilon_{jki}$  das Permutationssymbol als speziellen antisymmetrischen Tensor 3. Stufe dar, welcher zur Überführung des Kreuzproduktes in die Indexschreibweise dient und definiert ist als [Iben 1999]

$$\varepsilon_{jki} = \begin{cases} 1 & j, k, i \text{ zyklisch } 1, 2, 3 \\ -1 & j, k, i \text{ antizyklisch } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.10)$$

**Tabelle 2.3** Bilanzgrößen der Drehimpulsbilanz.

$\gamma$	$\vec{I}^{\gamma}(\vec{x}, t)$	$\vec{\Psi}^{\gamma}(\vec{x}, t)$	$\vec{\Pi}^{\gamma}(\vec{x}, t)$	$\vec{E}^{\gamma}(\vec{x}, t)$
1	$\vec{L}(\vec{x}, t)$	$\vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}, t)$	$-(\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \times \vec{x})$	$\vec{x} \times \vec{f}^V(\vec{x}, t)$

Für die linke Seite von (2.9) gilt

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V x_j v_k \varepsilon_{jki} \rho dV &= \int_V (\dot{x}_j v_k + x_j \dot{v}_k) \varepsilon_{jki} \rho dV + \int_V x_j v_k \varepsilon_{jki} (\rho dV)' \\ &= \int_V x_j \dot{v}_k \varepsilon_{jki} \rho dV, \end{aligned} \quad (2.11)$$

da mit  $\dot{x}_j = v_j$  und somit  $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$  sowie der Masseerhaltung  $(\rho dV)' = 0$  der erste und dritte Summand verschwinden. Durch Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes lässt sich das Oberflächenintegral als

$$\int_A x_j n_l \sigma_{lk} \varepsilon_{jki} dA = \int_V (x_j \sigma_{lk} \varepsilon_{jki})_{,l} dV = \int_V x_{j,l} \sigma_{lk} \varepsilon_{jki} + x_j \sigma_{lk,l} \varepsilon_{jki} dV \quad (2.12)$$

schreiben. Nach Einsetzen von (2.11) und (2.12) in (2.9) folgt

$$\int_V x_{j,l} \sigma_{lk} \varepsilon_{jki} + x_j \varepsilon_{jki} (\rho \dot{v}_k - \sigma_{lk,l} - f_k^V) dV = 0. \quad (2.13)$$

Da der eingeklammerte Term der Impulsbilanz (2.7) entspricht, verkürzt sich die lokale Form von (2.13) unter Nutzung von  $x_{j,l} = \delta_{jl}$  mit dem Kronecker-Symbol  $\delta_{jl} = 1$  für  $j = l$  sowie  $\delta_{jl} = 0$  für  $j \neq l$  [Iben 1999] zu

$$\sigma_{jk} \varepsilon_{jki} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{jk} = \sigma_{kj}, \quad (2.14)$$

woraus die Symmetrie des Spannungstensors folgt.

### 2.1.4 Energiebilanz

An dieser Stelle soll lediglich die Änderung der mechanischen und der thermischen Energie, also der kinetischen Energie und der spezifischen inneren Energie  $u(\vec{x}, t)$ , infolge der Leistung äußerer Lasten sowie der zugeführten Wärme betrachtet werden. Die Gesamtenergie des Systems sei  $E$ . Der Wärmestromvektor an der Oberfläche wird mit  $\vec{h}(\vec{x}, t)$  bezeichnet, während die Wärmequellen im Inneren über  $r^V(\vec{x}, t)$  beschrieben werden. Kopplungen mit anderen Feldern, welche im Sinne der Energieerhaltung ursächlich für die auftretenden Quellterme sind, werden nicht berücksichtigt. Damit lassen sich die Bilanzgrößen gemäß Tabelle 2.4 definieren.

**Tabelle 2.4** Bilanzgrößen der Energiebilanz mit  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$ .

$\gamma$	$\Gamma\langle t \rangle$	$\Psi\langle \vec{x}, t \rangle$	$\vec{\Pi}\langle \vec{x}, t \rangle$	$\Xi\langle \vec{x}, t \rangle$
0	$E$	$\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + u(\vec{x}, t)$	$\boldsymbol{\sigma}(\vec{x}, t) \cdot \vec{v} - \vec{h}(\vec{x}, t)$	$\vec{f}^V\langle \vec{x}, t \rangle \cdot \vec{v} + r^V\langle \vec{x}, t \rangle$

Durch Einsetzen in (2.1) erhält man

$$\frac{D}{Dt} E = \frac{D}{Dt} \int_V \left( \frac{1}{2} v_i v_i + u \right) \rho dV = \int_A n_j (\sigma_{ji} v_i + h_j) dA + \int_V f_i^V v_i + r^V dV. \quad (2.15)$$

In der lokalen Formulierung folgt daraus nach Differentiation der Gesamtenergie und Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes auf das Oberflächenintegral

$$v_i \rho \dot{v}_i + \rho \dot{u} = v_i \sigma_{ji,j} + v_{i,j} \sigma_{ji} - h_{j,j} + v_i f_i^V + r^V. \quad (2.16)$$

Unter Beachtung der Impulsbilanz (2.7) verbleibt

$$\rho \dot{u} = \sigma_{ji} v_{i,j} - h_{j,j} + r^V. \quad (2.17)$$

### 2.1.5 Entropiebilanz

Abschließend dient die Bilanz der Entropie  $S$  der Berücksichtigung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik, wonach die Entropie innerhalb eines Systems nicht abnimmt. Mit der spezifischen Entropie  $s$  und der absoluten Temperatur  $\theta$  ( $\theta > 0$ ) ergeben sich zu (2.1) die Analogien in Tabelle 2.5, wenn die Entropieströme und -quellen wie im vorliegenden Fall ausschließlich aus der Wärmezufuhr resultieren [Ulbricht 1997].

**Tabelle 2.5** Bilanzgrößen der Entropiebilanz.

$\gamma$	$\Gamma\langle t \rangle$	$\Psi\langle \vec{x}, t \rangle$	$\vec{\Pi}\langle \vec{x}, t \rangle$	$\Xi\langle \vec{x}, t \rangle$
0	$S$	$s$	$-\frac{1}{\theta} \vec{h}\langle \vec{x}, t \rangle$	$\frac{1}{\theta} r^V\langle \vec{x}, t \rangle$

Die Entropieungleichung

$$\frac{D}{Dt} S = \frac{D}{Dt} \int_V s \rho dV \geq - \int_A n_j \frac{h_j}{\theta} dA + \int_V \frac{r^V}{\theta} dV \quad (2.18)$$

geht unter Nutzung des Gauß'schen Integralsatzes und nach Multiplikation mit  $\theta$  in die lokale Form

$$\rho \theta \dot{s} \geq -h_{j,j} + \frac{1}{\theta} h_j \theta_{,j} + r^V \quad (2.19)$$

über. Nach Einführung der freien Helmholtz'schen Energie  $f = u - \theta s$  resultiert aus (2.17) mit  $\dot{u} = \dot{f} + \dot{\theta} s + \dot{s} \theta$  und dem Streckgeschwindigkeitstensor  $D_{ij} = 0,5 \cdot (v_{i,j} + v_{j,i})$

$$\sigma_{ji} D_{ij} - \rho(\dot{f} + \dot{\theta} s) = \rho \theta \dot{s} + h_{j,j} - r^V. \quad (2.20)$$

Die linke Seite von (2.20) lässt sich als Dissipationsfunktion interpretieren, sodass sich für dissipationsfreie Vorgänge die Energiebilanz in der Form

$$\rho \theta \dot{s} = -h_{j,j} + r^V \quad (2.21)$$

ergibt [Altenbach 2015]. Damit verkürzt sich der 2. Hauptsatz der Thermodynamik zu

$$\frac{1}{\theta} h_j \theta_{,j} \leq 0, \quad (2.22)$$

woraus wegen  $\theta > 0$  folgt, dass der Wärmestrom stets von Orten höherer Temperatur zu Orten niedrigerer Temperatur fließt.

### 2.1.6 Kinematik

Die kinematischen Beziehungen stellen einen Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Verzerrungen her. Dabei definieren sich der Verschiebungsvektor  $\vec{u}$  mit dem Ortsvektor in der Momentankonfiguration  $\vec{x}$  und in der Referenzkonfiguration  $\vec{X}$  sowie dessen Ableitungen gemäß

$$u_i = x_i - X_i \quad \dot{u}_i = \dot{x}_i = v_i \quad \ddot{u}_i = \ddot{x}_i = \dot{v}_i. \quad (2.23)$$

Im allgemeinen Fall großer Deformationen ergibt sich der Almansi-Euler-Hamel'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{A}_{\text{AEH}}$  [Altenbach 2015] zu

$$A_{\text{AEH}ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}), \quad (2.24)$$

dessen linearisierte Formulierung im Falle kleiner Deformationen mit  $\varepsilon$  bezeichnet werden soll

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.25)$$

### 2.1.7 Konstitutive Gleichungen

Vervollständigt wird der Gleichungssatz zur Beschreibung des thermomechanischen Feldproblems durch die Materialgleichungen. Hier soll ausschließlich einfaches, linear elastisches Materialverhalten bei kleinen Verformungen und Deformationen betrachtet werden, sodass sich der Spannungstensor zu

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}\Delta\theta) \quad (2.26)$$

ergibt [Kienzler & Schröder 2009]. Darin stellt  $E_{ijkl}$  den Elastizitätstensor 4. Stufe dar und die Matrix  $\alpha$  enthält die Wärmeausdehnungskoeffizienten auf der Hauptdiagonale. Die Temperaturdifferenz  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  bezieht sich auf die Referenztemperatur  $\theta_0$ , für welche der Körper als spannungsfrei angenommen wird. Die spezifische Entropie kann mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $c_V$  entsprechend

$$s = E_{ijkl}\alpha_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{\rho c_V}{\theta_0}\Delta\theta \quad (2.27)$$

angegeben werden [Kienzler & Schröder 2009]. Darüber hinaus stellt das Fourier'sche Wärmeleitungsgesetz

$$h_i = -\lambda_{ij}\theta_{,j} \quad (2.28)$$

einen Zusammenhang zwischen dem Wärmestrom und dem Temperaturgradienten her [Polifke & Kopitz 2005]. Die Diagonalmatrix  $\lambda$  enthält die im allgemeinen Fall richtungsabhängigen Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_{ij} > 0$  für  $i = j$ , sodass (2.28) keinen Widerspruch zu (2.22) darstellt. Ein Wärmetransport durch Stofftransport tritt für die hier betrachteten Festkörper nicht auf. Elastisches Material ist darüber hinaus definitionsgemäß dissipationsfrei.

### 2.1.8 Rand- und Anfangsbedingungen

Auf dem Rand des Körpers müssen für die Feldgrößen, worunter im Falle der Thermomechanik die Verschiebungen  $\vec{u}$  und die Temperaturen  $\theta$  zu verstehen sind, oder deren Ableitungen Festlegungen getroffen werden. Dabei lassen sich drei Arten von Randbedingungen unterscheiden [Bathe 2002; Steinke 2015].

- Dirichlet-Randbedingungen (Randbedingungen 1. Art, wesentliche Randbedingungen): Es erfolgt die direkte Vorgabe der Feldgröße, also der Temperatur  $\theta = \theta_{\text{Rand}}$  bzw. der Verschiebung  $u_i = u_{\text{Rand}}$ .
- Neumann-Randbedingungen (Randbedingungen 2. Art, natürliche Randbedingungen): Dies entspricht einer Vorgabe des Wärmestroms  $\vec{h}$  senkrecht zur Oberfläche bzw. des Spannungsvektors  $\vec{t}$  an der Oberfläche. Allgemein werden in diesem Fall Ortsableitungen der Feldgröße vorgeschrieben. Für den Wärmestrom ergibt sich  $-\lambda_{ij}\theta_{,j} = h_i$ , wobei  $i = j$  die Oberflächennormalenrichtung beschreibt. Der Spannungsvektor an der Oberfläche hängt gemäß  $n_j\sigma_{ji} = t_i$  zunächst mit den Spannungen zusammen, welche jedoch über die konstitutiven Gleichungen mit den Verzerrungen und ferner über die Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen mit den Ortsableitungen der Verschiebungen verknüpft sind.

- Robin-Randbedingungen (Randbedingungen 3. Art): Konvektionsrandbedingungen und elastische Lagerungen sind in diese Kategorie einzuordnen. Hier gehen sowohl die Zustandsgrößen selber als auch deren Ableitungen in die Beschreibung ein. Dies lässt sich am Beispiel der Konvektion veranschaulichen. Der Wärmestrom hängt direkt von der Oberflächentemperatur und der Umgebungstemperatur  $\theta_\infty$  ab. Die Gleichung nimmt damit die Form  $h(\theta - \theta_\infty) = \lambda_{ij}\theta_{,j}$  an, in der erneut  $i = j$  die Oberflächennormalenrichtung beschreibt und  $h$  den Wärmeübergangskoeffizienten darstellt [Polifke & Kopitz 2005]. Dies lässt sich auf die elastische Lagerung mit der Steifigkeit je Flächeneinheit  $c_A$  und der Verschiebung  $u_\infty$  an der Festseite der Feder in der Form  $c_A(u_i - u_\infty) = t_i$  übertragen, wobei, wie für die Neumann-Randbedingungen dargestellt, der Spannungsvektor mit den Ortsableitungen der Verschiebung in Zusammenhang gebracht werden kann.

Transiente Analysen erfordern darüber hinaus noch die Vorgabe der Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t = t_0$ , also der Anfangstemperaturen  $\theta_{\text{start}}$  mit  $\theta(t = t_0) = \theta_{\text{start}}$  für das thermische Feldproblem und der Anfangsverschiebungen  $\vec{u}_0$  mit  $\vec{u}(t = t_0) = \vec{u}_0$  sowie der Anfangsgeschwindigkeiten  $\vec{v}_0$  mit  $\vec{v}(t = t_0) = \vec{v}_0$  für das mechanische Feld.

### 2.1.9 Anfangs-Randwertaufgabe

Die Massebilanz ist für die betrachteten kleinen Deformationen in Verbindung mit der materiellen Beschreibung immer erfüllt und aus der Drehimpulsbilanz folgt die Symmetrie des Spannungstensors. Des Weiteren konnte die Konsistenz zwischen dem Fourier'schen Wärmeleitungsgesetz und dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik gezeigt werden, sodass die Impulsbilanz (2.7) und die Energiebilanz in der Form (2.21) verbleiben. Setzt man darin unter Berücksichtigung der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (2.25) die Materialgleichungen (2.26) bis (2.28) ein, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i - E_{ijkl} \left( \frac{1}{2} (u_{k,lj} + u_{l,kj}) - \alpha_{kl} \Delta \theta_{,j} \right) &= f_i^V \\ \rho \theta \left( \frac{1}{2} E_{ijkl} \alpha_{ij} (u_{k,l} + u_{l,k}) + \frac{c_V}{\theta_0} \Delta \theta \right) + (-\lambda_{ij} \theta_{,j})_{,i} &= r^V. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Zusammen mit den Anfangs- und Randbedingungen definiert dieses die Anfangs-Randwertaufgabe. Für kleine Temperaturänderungen  $\Delta \theta \ll \theta$  kann (2.29) linearisiert werden mit  $\theta \approx \theta_0$ ,  $\Delta \theta = \bar{\theta}$  und  $\theta_{,j} = \bar{\theta}_{,j}$ , sodass gilt:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i - E_{ijkl} \left( \frac{1}{2} (u_{k,lj} + u_{l,kj}) - \alpha_{kl} \bar{\theta}_{,j} \right) &= f_i^V \\ \rho \left( \frac{1}{2} E_{ijkl} \alpha_{ij} \theta_0 (u_{k,l} + u_{l,k}) + c_V \bar{\theta} \right) + (-\lambda_{ij} \bar{\theta}_{,j})_{,i} &= r^V. \end{aligned} \quad (2.30)$$

## 2.2 Finite-Elemente-Methode

Nur in wenigen Sonderfällen lässt sich die Anfangs-Randwertaufgabe analytisch lösen, insbesondere komplexe Geometrien oder Randbedingungen machen eine globale Lösung unmöglich. Deshalb kommen hierbei vielfach Näherungsverfahren wie die Finite-Elemente-

Methode (FEM) zum Einsatz. Das sich dabei ergebende Gleichungssystem soll in diesem Kapitel abgeleitet werden. Dazu ist es allerdings zunächst erforderlich, die Feldgleichungen in eine Form zu bringen, die einer computerbasierten Lösung zugänglich ist.

### 2.2.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen und Temperaturen

Es werden die virtuellen Verschiebungen  $\delta u_i$  und die virtuellen Temperaturen  $\delta \bar{\theta}$  eingeführt, welche sowohl infinitesimal klein als auch mit den wesentlichen Randbedingungen verträglich sein sollen [Bathe 2002]. Die Impulsbilanz (2.7) und die Energiebilanz (2.21) nehmen damit unter Beachtung der in Kapitel 2.1.9 durchgeführten Linearisierung die Form

$$\begin{aligned}\delta u_i \rho \ddot{u}_i &= \delta u_i \sigma_{ji,j} + \delta u_i f_i^V \\ \delta \bar{\theta} \rho \theta_0 \dot{s} &= -\delta \bar{\theta} h_{j,j} + \delta \bar{\theta} r^V\end{aligned}\quad (2.31)$$

an. Mit der Produktregel der Differentiation lässt sich der jeweils erste Term auf der rechten Seite als

$$\begin{aligned}\delta u_i \sigma_{ji,j} &= (\delta u_i \sigma_{ji})_{,j} - \delta u_{i,j} \sigma_{ji} \\ \delta \bar{\theta} h_{j,j} &= (\delta \bar{\theta} h_j)_{,j} - \delta \bar{\theta}_{,j} h_j\end{aligned}\quad (2.32)$$

schreiben. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes kann in der globalen Formulierung das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral überführt werden

$$\begin{aligned}\int_V (\delta u_i \sigma_{ji})_{,j} dV &= \int_A \delta u_i \sigma_{ji} n_j dA = \int_A \delta u_i f_i^A dA \\ \int_V (\delta \bar{\theta} h_j)_{,j} dV &= \int_A \delta \bar{\theta} h_j n_j dA = \int_A \delta \bar{\theta} r^A dA,\end{aligned}\quad (2.33)$$

in welchem  $f_i^A$  die Oberflächenlast auf dem Rand und  $r^A$  den Wärmestrom senkrecht zur Oberfläche darstellt. Für das Gesamtgleichungssystem ergibt sich nach dem Einsetzen der konstitutiven Beziehungen (2.26) bis (2.28) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\int_V (\delta u_i \rho \ddot{u}_i + \delta \varepsilon_{ij} E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \bar{\theta})) dV &= \int_A \delta u_i f_i^A dA + \int_V \delta u_i f_i^V dV \\ \int_V (\delta \bar{\theta} \rho (\theta_0 E_{ijkl} \alpha_{kl} \dot{\varepsilon}_{ij} + c_V \dot{\bar{\theta}}) + \delta \bar{\theta}_{,j} \lambda_{ji} \bar{\theta}_{,i}) dV &= \int_A \delta \bar{\theta} r^A dA + \int_V \delta \bar{\theta} r^V dV,\end{aligned}\quad (2.34)$$

wobei aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors  $\delta u_{i,j} \sigma_{ji} = \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ji}$  gilt. Die erste Gleichung von (2.34) entspricht dem Prinzip der virtuellen Arbeit.

### 2.2.2 Voigt'sche Notation

Die bislang verwendete Tensornotation weist den Nachteil auf, dass die Symmetrie des Spannungs-, Verzerrungs- und Elastizitätstensors darin keinen Eingang finden, was den numerischen Aufwand unnötig erhöht. Deshalb erfolgt jetzt der Übergang zur Vektor-Matrix-Schreibweise, wobei sich die sechs unabhängigen Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors auf unterschiedliche Weise in den entsprechenden Vektoren anordnen lassen. Eine

Variante stellt die Voigt'sche Notation dar [Voigt 1966]. Der Vektor der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_V$ , der Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\varepsilon}_V$  und der Vektor der Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\boldsymbol{\alpha}_V$  haben somit die Form

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_V &= [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \quad \sigma_{xy}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_V &= [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{yz} \quad 2\varepsilon_{zx} \quad 2\varepsilon_{xy}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}_V &= [\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,\end{aligned}\tag{2.35}$$

wobei der Index V für die Voigt'sche Notation steht. Die Elastizitätsmatrix  $\mathbf{E}_V \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  besitzt im allgemeinsten Fall 21 unabhängige Konstanten [Balke 2010]. Die Matrix der Wärmeleitfähigkeiten  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  behält ihre Diagonalstruktur und die Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen sowie der Temperaturgradient lassen sich über die Differentialoperatormatrizen  $\mathbf{G}_m$  für das Verschiebungsfeld und  $\mathbf{G}_t$  für das Temperaturfeld darstellen:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_m &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{G}_t &= [\partial/\partial x \quad \partial/\partial y \quad \partial/\partial z]^T.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Aus (2.34) folgt somit

$$\begin{aligned}\int_V \left( \delta \vec{u}^T \rho \ddot{\vec{u}} + \delta \vec{u}^T \mathbf{G}_m^T \mathbf{E}_V (\mathbf{G}_m \vec{u} - \boldsymbol{\alpha}_V \bar{\theta}) \right) dV &= \int_A \delta \vec{u}^T \vec{f}^V dA + \int_V \delta \vec{u}^T f_i^V dV \\ \int_V \left( \delta \bar{\theta} \rho c_V \dot{\bar{\theta}} + \delta \bar{\theta} \mathbf{G}_t^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{G}_t \bar{\theta} + \delta \bar{\theta} \rho \theta_0 \boldsymbol{\alpha}_V^T \mathbf{E}_V \mathbf{G}_m \vec{u} \right) dV & \\ = \int_A \delta \bar{\theta} r^A dA + \int_V \delta \bar{\theta} r^V dV.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Neben der Voigt'schen Notation existieren noch weitere Varianten zur Anordnung der Schubspannungen im Spannungsvektor, beispielsweise die nach Nye [Nye 1985], grundlegende Unterschiede ergeben sich für diese jedoch nicht.

### 2.2.3 Diskretisierung

Mit Hilfe eines Ritz-Ansatzes lassen sich die Verschiebungen und Temperaturen durch die Matrizen der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_m \langle \vec{x} \rangle$  bzw.  $\mathbf{N}_t \langle \vec{x} \rangle$  und die Koeffizientenvektoren  $\mathbf{u} \langle t \rangle$  bzw.  $\bar{\theta} \langle t \rangle$  ausdrücken [Steinke 2015]. Es gilt:

$$\vec{u} \langle \vec{x}, t \rangle \approx \mathbf{N}_m \langle \vec{x} \rangle \mathbf{u} \langle t \rangle, \quad \bar{\theta} \langle \vec{x}, t \rangle \approx \mathbf{N}_t \langle \vec{x} \rangle \bar{\theta} \langle t \rangle.\tag{2.38}$$

Der Ansatz kann analog auf die virtuellen Größen übertragen werden. Die Herausforderung liegt hierbei in der Wahl der Ansatzfunktionen, welche im allgemeinen Fall alle Randbedingungen, also sowohl die wesentlichen als auch die natürlichen, erfüllen müssen. Mit steigender Anzahl an Koeffizienten strebt die Näherungslösung gegen die exakte Lösung.

In den meisten praktischen Anwendungsfällen ist die Bestimmung kompatibler Ansatzfunktionen aufgrund der Komplexität nicht möglich, weshalb hier ein Finite-Elemente-Ansatz zum Einsatz kommt. Dazu wird das Gesamtgebiet in viele hinreichend kleine Teilvolumina, die Finiten Elemente, untergliedert, für welche sich Ansatzfunktionen finden lassen, welche mit den wesentlichen Randbedingungen kompatibel sind. In der Regel handelt es sich hierbei um Polynome erster oder zweiter Ordnung. Die natürlichen Randbedingungen werden aber nur im integralen Mittel erfüllt, jedoch verringert sich dieser Diskretisierungsfehler bei Reduzierung der Elementabmessungen. Die Koeffizientenvektoren entsprechen dann den Knotenverschiebungen bzw. den Knotentemperaturen. Für ein einzelnes Element, was hier durch den tiefgestellten Index  $e$  gekennzeichnet werden soll, ergibt sich (2.37) nach Herauskürzen der virtuellen Verschiebungen  $\delta \vec{u}$  und virtuellen Temperaturen  $\delta \bar{\theta}$  zu

$$\int_V \rho_e \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{N}_{me} dV \dot{\mathbf{u}}_e + \int_V \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{G}_m^T \mathbf{E}_{Ve} \mathbf{G}_m \mathbf{N}_{me} dV \mathbf{u}_e - \int_V \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{G}_m^T \mathbf{E}_{Ve} \boldsymbol{\alpha}_{Ve} \mathbf{N}_{te} dV \bar{\theta}_e = \int_A \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{f}_e^A dA + \int_V \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{f}_e^V dV \quad (2.39)$$

$$\int_V \rho_e c_{Ve} \mathbf{N}_{te}^T \mathbf{N}_{te} dV \dot{\bar{\theta}}_e + \int_V \mathbf{N}_{te}^T \mathbf{G}_t^T \lambda_e \mathbf{G}_t \mathbf{N}_{te} dV \bar{\theta}_e + \int_V \theta_0 \mathbf{N}_{te}^T \boldsymbol{\alpha}_{Ve}^T \mathbf{E}_{Ve} \mathbf{G}_m \mathbf{N}_{me} dV \dot{\mathbf{u}}_e = \int_A \mathbf{N}_{te}^T \mathbf{r}_e^A dA + \int_V \mathbf{N}_{te}^T \mathbf{r}_e^V dV. \quad (2.40)$$

Mit (2.8) kann die Dämpfung in (2.39) berücksichtigt werden.

## 2.2.4 Thermomechanisches Gleichungssystem

Aufbauend auf (2.39) und (2.40) lassen sich die Elementmatrizen gemäß Tabelle 2.6 zusammenfassen. Daraus resultiert das Gesamtgleichungssystem für das Element

$$\mathbf{M}_{mme} \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{D}_{mme} \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_{mme} \mathbf{u}_e + \mathbf{K}_{mte} \bar{\theta}_e = \mathbf{f}_{me} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{D}_{tte} \dot{\bar{\theta}}_e + \mathbf{K}_{Ltte} \bar{\theta}_e + \mathbf{D}_{tme} \dot{\mathbf{u}}_e = \mathbf{r}_{te}. \quad (2.42)$$

Die spätere Berücksichtigung der Wärmestrahlung bedingt die Verwendung absoluter Temperaturen. In (2.30) erfolgte allerdings die Linearisierung des Temperaturvektors im spannungsfreien Zustand der Wärmeausdehnung  $\boldsymbol{\theta}_0$ . Beim Ersetzen von  $\bar{\theta}_e$  durch den Vektor der Absoluttemperaturen auf Elementebene  $\boldsymbol{\theta}_e$  ergibt sich demzufolge der Term  $\mathbf{K}_{mte} \boldsymbol{\theta}_0$  in (2.41), welcher nachfolgend in den Lastvektor integriert wird und demzufolge nicht mehr explizit in den Gleichungen auftritt. Im Gegensatz dazu erfordert (2.42) keine Anpassung, da sowohl die Zeitableitungen als auch die für die Wärmeleitung maßgeblichen Temperaturdifferenzen unverändert bleiben.

Benachbarte Elemente sind an ihren Knoten zur Gewährleistung der Stetigkeit der Feldgrößen miteinander gekoppelt. Dazu werden die Verschiebungen bzw. Temperaturen der entsprechenden Knoten gleichgesetzt [Bathe 2002]. Infolgedessen lässt sich aus den einzelnen Elementmatrizen das Gesamtgleichungssystem assemblieren, welches mit der Nullmatrix  $\mathbf{0}$  die Form



$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{0}_{mt} \\ \mathbf{0}_{tm} & \mathbf{0}_{tt} \end{bmatrix} [\ddot{\mathbf{u}}] + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{mm} & \mathbf{0}_{mt} \\ \mathbf{D}_{tm} & \mathbf{D}_{tt} \end{bmatrix} [\dot{\mathbf{u}}] + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{mt} \\ \mathbf{0}_{tm} & \mathbf{K}_{Ltt} \end{bmatrix} [\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{r}_t \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

annimmt und nicht symmetrisch ist.

**Tabelle 2.6** Überblick über die Elementmatrizen [Bathe 2002; ANSYS, Inc. 2016].

Zustandsvektor	Elementmatrizen nach (2.39)	Elementmatrizen nach (2.40)
	Elementmassenmatrix	
$\ddot{\mathbf{u}}_e$	$\mathbf{M}_{mme} = \int_V \rho_e \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{N}_{me} dV$	---
	Elementdämpfungsmatrix	
$\dot{\mathbf{u}}_e$	$\mathbf{D}_{mme} = \int_V \delta_e \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{N}_{me} dV$	Matrix der thermoelastischen Dämpfung $\mathbf{D}_{tme} = \int_V \theta_0 \mathbf{N}_{te}^T \boldsymbol{\alpha}_{Ve}^T \mathbf{E}_{Ve} \mathbf{G}_m \mathbf{N}_{me} dV$
	Elementsteifigkeitsmatrix	
$\mathbf{u}_e$	$\mathbf{K}_{mme} = \int_V \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{G}_m^T \mathbf{E}_{Ve} \mathbf{G}_m \mathbf{N}_{me} dV$	---
	Elementwärmekapazitätsmatrix	
$\dot{\boldsymbol{\theta}}_e$	---	$\mathbf{D}_{tte} = \int_V \rho_e c_{Ve} \mathbf{N}_{te}^T \mathbf{N}_{te} dV$
	Thermoelastische Steifigkeitsmatrix	
$\boldsymbol{\theta}_e$	$\mathbf{K}_{mte} = - \int_V \rho_e \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{G}_m^T \mathbf{E}_{Ve} \boldsymbol{\alpha}_{Ve} \mathbf{N}_{te} dV$	Elementwärmeleitfähigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{Ltte} = \int_V \mathbf{N}_{te}^T \mathbf{G}_t^T \boldsymbol{\lambda}_e \mathbf{G}_t \mathbf{N}_{te} dV$
	Knotenlastvektor	
---	$\mathbf{f}_{me} = \int_A \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{f}_e^A dA + \int_V \mathbf{N}_{me}^T \mathbf{f}_e^V dV$	Knotenwärmestromvektor $\mathbf{r}_{te} = \int_A \mathbf{N}_{te}^T \mathbf{r}_e^A dA + \int_V \mathbf{N}_{te}^T \mathbf{r}_e^V dV$

Da sich das thermische Feld in vielen Anwendungsfällen nur langsam ändert, besteht für den Fall, dass keine transienten mechanischen Lasten auf das System einwirken, häufig die Möglichkeit, das mechanische Feld als quasistationär zu betrachten. Mit  $\ddot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_m$  entkoppelt sich das Gleichungssystem und im ersten Schritt folgt aus

$$\mathbf{D}_{tt} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_{Ltt} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_t \quad (2.44)$$

das Temperaturfeld.

Mit den bekannten Knotentemperaturen kann die freie thermische Expansion als bekannt angesehen werden, sodass die thermoelastische Steifigkeit auf die rechte Seite verschoben werden kann

$$\mathbf{K}_{mm}\mathbf{u} = \mathbf{f}_m - \mathbf{K}_{mt}\boldsymbol{\theta}. \quad (2.45)$$

Die beiden Gleichungssysteme (2.44) und (2.45) sind jeweils symmetrisch, was den numerischen Aufwand bei der Lösung erheblich verringert, und bilden den Ausgangspunkt für die weiteren Analysen.

### 2.2.5 Konvektion

Durch Konvektion erfolgt an der Bauteiloberfläche der Wärmeübergang zum umgebenden Medium. Es handelt sich folglich um eine zur Differenz zwischen Oberflächentemperatur und Umgebungstemperatur  $\theta_\infty$  proportionale Last, wobei der Wärmeübergangskoeffizient  $h$  den Proportionalitätsfaktor darstellt. Der Wärmestrom an der Oberfläche in (2.37) kann folglich als

$$r^A = -h(\bar{\theta} - \theta_\infty) \quad (2.46)$$

geschrieben werden [Polifke & Kopitz 2005]. Nach der Diskretisierung entsprechend (2.38) ergibt sich somit [Bathe 2002]

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{N}_{te}^T r_e^A dA &= \int_A h \mathbf{N}_{te}^T \theta_\infty dA - \int_A h \mathbf{N}_{te}^T \mathbf{N}_{te} dA \boldsymbol{\theta}_e \\ &= \int_A h \mathbf{N}_{te}^T \theta_\infty dA - \mathbf{K}_{Ktte} \boldsymbol{\theta}_e. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Die Konvektion lässt sich demzufolge in zwei Anteile aufspalten. Der erste Summand in (2.47) beschreibt den Wärmeübergang von der Umgebung auf den Körper und ist bei gegebener Umgebungstemperatur bekannt, sodass eine Integration in den Wärmestromvektor problemlos gelingt. Im Gegensatz dazu hängt der zweite Summand von den Knotentemperaturen ab und wird deshalb als Elementkonvektionsmatrix  $\mathbf{K}_{Ktte}$  der Elementwärmeleitmatrix  $\mathbf{K}_{Ltte}$  nach Tabelle 2.6 überlagert, woraus die Elementwärmetransportmatrix  $\mathbf{K}_{tte} = \mathbf{K}_{Ltte} + \mathbf{K}_{Ktte}$  resultiert, die im Zuge der Assemblierung des Gesamtsystems in die Wärmetransportmatrix  $\mathbf{K}_{tt}$  übergeht.

## 2.3 Wärmestrahlung

Die Wärmestrahlung stellt einen weiteren Mechanismus der Wärmeübertragung dar, welcher für die in dieser Arbeit betrachteten Anwendungsfälle von großer Bedeutung ist, wie in Kapitel 1.2.4 gezeigt wurde. Der Wärmeaustausch erfolgt auf Basis elektromagnetischer Strahlung, sodass er auch im Vakuum möglich ist. Für die hier untersuchte Wärme- oder Temperaturstrahlung erweist sich der Wellenlängenbereich von 0,1  $\mu\text{m}$  bis 1 mm als relevant, welcher den nahen ultravioletten, den sichtbaren und den infraroten Bereich umfasst [Siegel *et al.* 1988; Polifke & Kopitz 2005]. Ausgehend von den Grundgleichungen der Wärmestrahlung sollen

nun die diskretisierten Wärmestrahlungsgleichungen zur Einbindung in die FEM abgeleitet werden.

### 2.3.1 Grundlagen

Die auf eine Oberfläche einfallende Wärmestrahlung mit der Leistung  $\dot{Q}$  kann absorbiert, reflektiert oder transmittiert werden. Daraus definieren sich der Absorptionsgrad  $\alpha_S$ , der Reflexionsgrad  $\rho_S$  und der Transmissionsgrad  $\tau_S$

$$\alpha_S = \frac{\dot{Q}_A}{\dot{Q}} \quad \rho_S = \frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}} \quad \tau_S = \frac{\dot{Q}_T}{\dot{Q}}, \quad (2.48)$$

wobei  $\dot{Q}_A$  die absorbierte,  $\dot{Q}_R$  die reflektierte und  $\dot{Q}_T$  die hindurchgelassene Wärmeleistung darstellen [Polifke & Kopitz 2005]. Es gilt:

$$\alpha_S + \rho_S + \tau_S = 1. \quad (2.49)$$

Hierbei lassen sich einige Spezialfälle ableiten. Für Oberflächenstrahler, worunter auch die hier betrachteten Festkörper fallen, beträgt der Transmissionsgrad  $\tau_S = 0$ . Eine Sonderstellung innerhalb dieser Gruppe nimmt der Schwarze Körper mit  $\alpha_S = 1$  ein. Im Gegensatz dazu lassen viele Gase, mit Ausnahme der Treibhausgase, die Wärmestrahlung ungehindert hindurch, sodass sich  $\tau_S = 1$  ergibt [Polifke & Kopitz 2005]. Weist ein Körper selber eine Temperatur  $\theta > 0$  K auf, so emittiert er Strahlung, deren Intensität im allgemeinen Fall ebenso wie die in (2.48) definierten Größen von der Abstrahl- bzw. Einfallrichtung, der Wellenlänge, der Oberflächentemperatur und der Oberflächenbeschaffenheit abhängt [Siegel *et al.* 1988].

Zur Quantifizierung des strahlungsbasierten Wärmeübergangs wird zunächst das Emissionsvermögen  $e(\theta)$  als Wärmeleistung je Flächeneinheit definiert, welches für einen Schwarzen Körper, gekennzeichnet durch den vorgestellten Index S, nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz mit der Oberflächentemperatur in Zusammenhang gebracht werden kann [Polifke & Kopitz 2005]

$${}_S e(\theta) = \sigma \theta^4. \quad (2.50)$$

Dabei stellt  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann-Konstante dar.

In technischen Anwendungsfällen wird häufig die Vereinfachung des diffusen, grauen Strahlers verwendet, welcher die folgenden Eigenschaften aufweist [Siegel *et al.* 1991; Polifke & Kopitz 2005]:

- Die Emission, die Absorption und die Reflexion erfolgen richtungsunabhängig, also isotrop.
- Der Emissionsgrad, der Absorptionsgrad und der Reflexionsgrad sind unabhängig von der Wellenlänge.
- Der Emissionsgrad  $\varepsilon$  ist nach dem Kirchhoff'schen Gesetz gleich dem Absorptionsgrad  $\varepsilon(\theta) = \alpha_S(\theta) = 1 - \rho_S(\theta)$ .

Das Emissionsvermögen erweist sich somit als proportional zu dem eines Schwarzen Körpers, wobei der Proportionalitätsfaktor als Emissionsgrad  $\varepsilon$

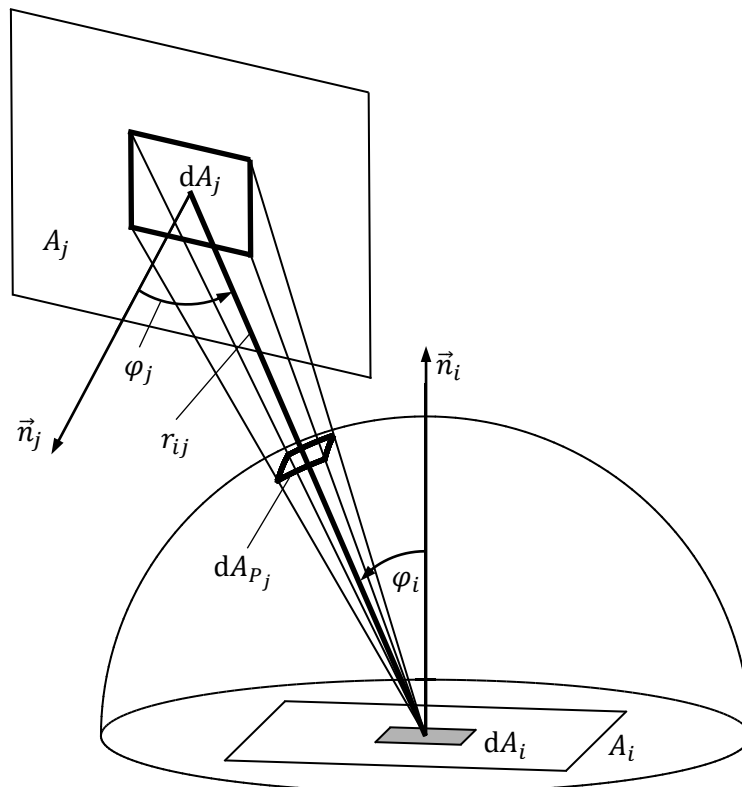
$$\varepsilon(\theta) = \frac{e(\theta)}{s e(\theta)} \quad (2.51)$$

bezeichnet wird. Demzufolge ergibt sich aus (2.50) die von einem diffusen, grauen Strahler mit dem Flächeninhalt  $A$  emittierte Wärmeleistung  $\dot{Q}_{\text{em}}$

$$\dot{Q}_{\text{em}} = \varepsilon \sigma A \theta^4. \quad (2.52)$$

### 2.3.2 Sichtfaktoren

Darauf aufbauend kann nun der Strahlungsaustausch zwischen zwei Flächen betrachtet werden. Dazu werden die in Abbildung 2.1 gezeigten Flächen  $A_i$  und  $A_j$  herangezogen, für welche eine konstante Temperatur und eine gleichmäßige Verteilung des Wärmestroms angenommen werden.



**Abbildung 2.1** Projektion der Fläche  $A_j$  auf eine Einheitshalbkugel um die Fläche  $A_i$  zur Bestimmung der Sichtfaktoren.

Vor der Bilanzierung der Wärmeströme gilt es zunächst zu untersuchen, welcher Anteil der von  $A_i$  emittierten Strahlung auf die Fläche  $A_j$  trifft. Hierbei handelt es sich dann um einen konstanten geometrischen Faktor, wenn die Flächen nicht relativ zueinander bewegt werden. Dazu wird die Fläche  $A_j$  auf eine Einheitshalbkugel um die Fläche  $A_i$  projiziert, was durch den Index P verdeutlicht wird, sodass mit dem Abstand der Flächen  $r_{ij}$  gilt:

$$dA_{P(j)} = \frac{\cos \varphi_{(j)} dA_{(j)}}{r_{(ij)}^2}. \quad (2.53)$$

Der eingeklammerte Index gibt hier und im Folgenden an, dass über diese Indizes nicht im Sinne der Einstein'schen Summationskonvention zu summieren ist. Die von der Fläche  $A_i$  auf  $A_j$  abgestrahlte Wärmeleistung  $\dot{Q}_{i \rightarrow j}$

$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = e \langle \theta \rangle \iint \cos \varphi_{(i)} dA_{(i)} dA_{P(j)} = e \langle \theta \rangle \iint \frac{\cos \varphi_{(i)} \cos \varphi_{(j)}}{r_{(ij)}^2} dA_{(i)} dA_{(j)} \quad (2.54)$$

muss zur gesamten von der Fläche  $A_i$  emittierten Wärmeleistung  $\dot{Q}_{em_i}$  nach Abbildung 2.2

$$\dot{Q}_{em_i} = e \langle \theta \rangle \int_{\psi_{(i)}=0}^{2\pi} \int_{\varphi_{(i)}=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi_{(i)} \sin \varphi_{(i)} d\varphi_{(i)} d\psi_{(i)} dA_{(i)} = e \langle \theta \rangle \pi A_i \quad (2.55)$$

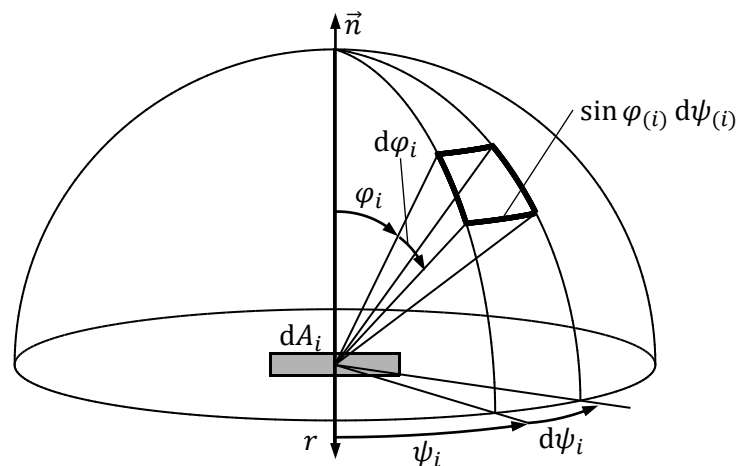
ins Verhältnis gesetzt werden und soll nachfolgend als Sichtfaktor  $F_{i \rightarrow j}$  bezeichnet werden [Siegel *et al.* 1988]. Der Term  $\cos \varphi_i$  resultiert dabei aus der Projektion der Fläche  $A_i$  in die jeweilige Abstrahlungsrichtung. Somit ergibt sich

$$F_{i \rightarrow j} = \frac{\dot{Q}_{i \rightarrow j}}{\dot{Q}_{em(i)}} = \frac{1}{A_{(i)}} \iint \frac{\cos \varphi_{(i)} \cos \varphi_{(j)}}{\pi r_{(ij)}^2} dA_{(i)} dA_{(j)}, \quad (2.56)$$

sodass (2.54) mit (2.52) verkürzt als

$$\dot{Q}_{i \rightarrow j} = F_{i \rightarrow j} \dot{Q}_{em(i)} = \varepsilon_{(i)} \sigma A_{(i)} F_{i \rightarrow j} \theta_{(i)}^4 \quad (2.57)$$

geschrieben werden kann.



**Abbildung 2.2** Bestimmung der gesamten von der Fläche  $dA_i$  abgestrahlten Leistung anhand einer Einheitshalbkugel.

Für die Sichtfaktoren gilt die Reziprozität

$$A_{(i)} F_{i \rightarrow j} = A_{(j)} F_{j \rightarrow i} \quad (2.58)$$

was gleichzeitig bedeutet, dass sich mit Ausnahme von Sonderfällen  $F_{i \rightarrow j} \neq F_{j \rightarrow i}$  ergibt [Polifke & Kopitz 2005].

Bei Erweiterung auf  $M$  Flächenelemente lassen sich die einzelnen Sichtfaktoren in einer demzufolge nicht symmetrischen Matrix  $\mathbf{F}$  zusammenfassen

$$F_{ij} = F_{i \rightarrow j} \quad i, j = 1 \dots M. \quad (2.59)$$

Deren Berechnung erfolgt im Allgemeinen mit Hilfe numerischer Verfahren, da die einzelnen Flächen beliebig geformt sein können. Eine Möglichkeit stellt die Einheitskugel-Methode dar, die auf Nusselt zurückgeht [Nusselt 1928; Siegel *et al.* 1991]. Dabei wird analog zu den vorhergehenden Beschreibungen die Fläche  $A_j$  auf eine um die Fläche  $A_i$  aufgespannte Einheitshalbkugel projiziert. Im zweiten Schritt erfolgt die erneute Projektion auf die Grundfläche der Halbkugel und der von der Projektion bedeckte Flächenanteil entspricht dem Sichtfaktor. Dazu kann bei numerischer Lösung die Grundfläche entsprechend fein diskretisiert werden.

Ein weiteres Verfahren stellt die Hemicube-Methode dar [Cohen & Greenberg 1985]. Anstatt einer Einheitskugel kommt ein Einheitswürfel zum Einsatz, auf dessen Oberfläche die Projektion erfolgt. Dies bietet einerseits den Vorteil, dass eine einzige Projektion genügt, da der Flächenanteil direkt auf der Würfeloberfläche auswertbar ist, und andererseits erleichtern die rechtwinkligen Flächen die Diskretisierung.

Im Falle nichtkonvexer Oberflächen oder bei Hindernissen im Strahlungsvolumen muss darüber hinaus beachtet werden, dass manche Flächen aufgrund dessen gar nicht zueinander strahlen, obwohl die entsprechenden Flächenprojektionen ein finites Ergebnis liefern. Deshalb ist vor der Sichtfaktorermittlung eine Überprüfung der gegenseitigen Sichtbarkeit erforderlich.

### 2.3.3 Wärmestrahlungsbilanz

Die Ableitung erfolgt in Anlehnung an Siegel *et al.* [Siegel *et al.* 1991]. Die Nettowärmeleistung des  $i$ -ten Flächenelementes  $\dot{Q}_i$  stellt die Differenz aus der abgegebenen Strahlungsleistung  $\dot{Q}_{ab_i}$  und der einfallenden Strahlungsleistung  $\dot{Q}_{ein_i}$

$$\dot{Q}_i = \dot{Q}_{ab_i} - \dot{Q}_{ein_i} \quad (2.60)$$

dar. Darüber hinaus setzt sich die abgegebene Wärmestrahlung aus der reflektierten und der emittierten Leistung  $\dot{Q}_{em_i}$  nach (2.57) zusammen

$$\dot{Q}_{ab_i} = \varepsilon_{(i)} \sigma A_{(i)} \theta_i^4 + (1 - \varepsilon_{(i)}) \dot{Q}_{ein_i}, \quad (2.61)$$

woraus durch Auflösen nach  $\dot{Q}_{ein_i}$

$$\dot{Q}_{ein_i} = \frac{1}{1 - \varepsilon_{(i)}} (\dot{Q}_{ab_i} - \sigma \varepsilon_{(i)} A_{(i)} \theta_i^4) \quad (2.62)$$

folgt. Des Weiteren entspricht die einfallende Strahlung der Summe der von allen anderen Flächenelementen an die Fläche  $i$  abgegebenen Leistung

$$\dot{Q}_{ein_i} = A_{(j)} \dot{q}_{ab_j} F_{ji} = A_{(i)} F_{ij} \dot{q}_{ab_j}, \quad (2.63)$$

wobei hier (2.58) Anwendung findet und  $\dot{q}_{ab_j} = \dot{Q}_{ab_j} / A_{(j)}$  die flächenbezogene Wärmeleistung darstellt. Nach Einsetzen von (2.63) in (2.60) ergibt sich

$$\dot{Q}_i = A_{(i)} \dot{q}_{ab_i} - A_{(i)} F_{ij} \dot{q}_{ab_j}. \quad (2.64)$$

Außerdem erhält man durch Einsetzen von (2.62) in (2.60) und Auflösen nach  $\dot{q}_{ab_i}$

$$\dot{q}_{ab_i} = \sigma\theta_i^4 - \frac{1 - \varepsilon_{(i)}}{\varepsilon_{(i)}A_{(i)}}\dot{Q}_i. \quad (2.65)$$

Abschließend folgt aus der Kombination von (2.64) und (2.65)

$$\frac{1}{\varepsilon_{(i)}A_{(i)}}\dot{Q}_i - \frac{1 - \varepsilon_{(j)}}{\varepsilon_{(j)}A_{(i)}}F_{ij}\dot{Q}_j = \sigma(\theta_i^4 - F_{ij}\theta_j^4), \quad (2.66)$$

was sich wiederum in die Form

$$\left( \frac{\delta_{ij}}{\varepsilon_{(j)}} - \frac{1 - \varepsilon_{(j)}}{\varepsilon_{(j)}}F_{ij} \right) \frac{\dot{Q}_j}{A_{(j)}} = (\delta_{ij} - F_{ij})\sigma\theta_j^4 \quad (2.67)$$

überführen lässt.

### 2.3.4 Diskretisierung

Wenn der Transmissionsgrad des Mediums, durch welches die Wärmestrahlung erfolgt,  $\tau_s = 1$  beträgt, genügt die Diskretisierung der zueinander strahlenden Oberflächen. Diese ist mit der Aufteilung des Bauteilvolumens in Finite Elemente durch die entsprechenden Elementflächen bereits gegeben. Des Weiteren erfolgte die Ableitung der Wärmestrahlungsbilanz in Kapitel 2.3.3 für  $M$  zueinander strahlende Flächen, sodass (2.67) direkt auf die in Oberflächenelemente eingeteilte Struktur übertragbar ist. Die Bestimmung der Wärmeströme erfordert im Sinne der isolierten Lösbarkeit von (2.67) die Vorgabe der Elementtemperaturen. Selbige sind jedoch im Allgemeinen nicht a priori gegeben, sondern werden ebenfalls im Zuge einer Finite-Elemente-Berechnung ermittelt. Demzufolge muss das Gleichungssystem (2.67) geeignet mit (2.44) kombiniert werden, wenn ein ausschließlich thermisches Feldproblem vorliegt. Dies gelingt mit den Wärmestrahlungsmatrizen  $\mathbf{S}_1$  und  $\mathbf{S}_2$  gemäß

$$\mathbf{S}_{1ij} = \left( \frac{\delta_{ij}}{\varepsilon_{(j)}} - \frac{1 - \varepsilon_{(j)}}{\varepsilon_{(j)}}F_{ij} \right) \quad \mathbf{S}_{2ij} = (\delta_{ij} - F_{ij})\sigma \quad (2.68)$$

nach Überführung von (2.67) in Matrixform

$$\mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_2 \boldsymbol{\theta}_{\text{elem}}^{\hat{4}} \quad (2.69)$$

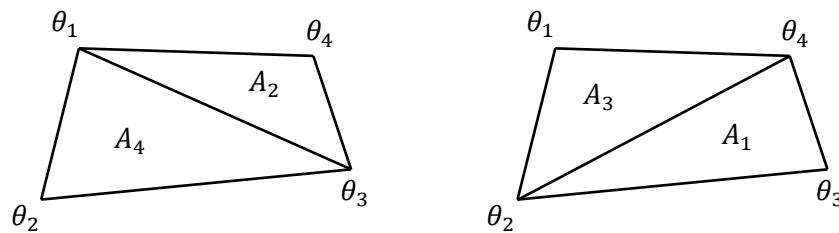
durch Verknüpfung der Temperaturen und Wärmeströme. Dabei zeigt die Schreibweise  $\boldsymbol{\theta}^{\hat{4}}$  mit  $(\boldsymbol{\theta}^{\hat{4}})_i = \theta_i^4$  im Folgenden das komponentenweise Bilden der Potenz an. Mit  $\dot{q}_i = r_{e_i}^A$  kann der Wärmestrom aufgrund der Strahlung in Tabelle 2.6 direkt als innerhalb des Elementes konstante Oberflächenlast in die Berechnung des Temperaturfeldes eingehen. Der Vektor der Elementtemperaturen  $\boldsymbol{\theta}_{\text{elem}}$  wird durch entsprechende Mittelung aus den Knotentemperaturen  $\boldsymbol{\theta}_{\text{elem}} = f(\boldsymbol{\theta})$  gewonnen. Die in der kommerziellen Finite-Elemente-Software ANSYS implementierte, jedoch nicht dokumentierte, Berechnungsvorschrift soll hier kurz erläutert werden. Für Dreieckselemente stellt die Elementtemperatur das arithmetische Mittel der drei Eckknotentemperaturen dar. Die Seitenmittelknoten werden hierbei generell nicht berücksichtigt. Infolgedessen ergibt sich die Elementtemperatur für ein beliebiges Viereckelement nach Zerlegung entlang der zwei Diagonalen (Abbildung 2.3).

Für die vier daraus resultierenden Dreiecke wird jeweils der arithmetische Temperaturmittelwert gebildet und diese werden wiederum anhand der Flächeninhalte der Dreiecke  $A_i$  mit  $i = 1, 2, 3, 4$  gewichtet. Damit folgt für die Elementtemperatur mit dem Elementflächeninhalt  $A_{\text{elem}} = A_2 + A_4$

$$\theta_{\text{elem}} = \frac{1}{6A_{\text{elem}}} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_i \theta_j - A_i \theta_i. \quad (2.70)$$

Die Übertragung auf alle Elemente ergibt mit der Zuordnungsmatrix  $\mathbf{T}_1$  den allgemeinen Zusammenhang

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{elem}} = \mathbf{T}_1 \boldsymbol{\theta}. \quad (2.71)$$



**Abbildung 2.3** Zerlegung eines Viereckelementes zur Berechnung der Elementtemperatur.

Nach numerischer Integration für die Oberflächenelemente kann unter Berücksichtigung der Matrix der Elementflächeninhalte  $\mathbf{A}_{\text{elem}}$  mit

$$A_{\text{elem}_{ij}} = \begin{cases} A_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.72)$$

eine analoge Beziehung zwischen den Knotenwärmeströmen infolge Strahlung  $\mathbf{r}_{\text{tS}}$  und dem Elementwärmestrom

$$\mathbf{r}_{\text{tS}} = \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{\text{elem}} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.73)$$

hergestellt werden. Das gekoppelte Gleichungssystem

$$\mathbf{D}_{\text{tt}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_{\text{tt}} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_{\text{t}} + \mathbf{r}_{\text{tS}} \quad \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_2 \boldsymbol{\theta}_{\text{elem}}^{\hat{4}} \quad (2.74)$$

erhält damit die Form

$$\mathbf{D}_{\text{tt}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_{\text{tt}} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_{\text{t}} + \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{\text{elem}} \dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{S}_1 \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_2 (\mathbf{T}_1 \boldsymbol{\theta})^{\hat{4}} \quad (2.75)$$

und ist einer Lösung zugänglich. In der Software ANSYS existieren zwei Umsetzungsvarianten für die Berechnung des Temperaturfeldes unter Berücksichtigung der Wärmestrahlung, welche im Folgenden näher erläutert werden [ANSYS, Inc. 2016].

### 2.3.5 Lastvektormethode

Dieses Verfahren entspricht mit wenigen Änderungen dem in Kapitel 2.3.3 und 2.3.4 beschriebenen Vorgehen. Anstatt die Gleichungen (2.64) und (2.65) direkt nach  $\dot{Q}_i$  aufzulösen, wird zunächst die abgegebene Wärmeleistung  $\dot{Q}_{\text{ab}_i}$  ermittelt



$$(\delta_{ij} - (1 - \varepsilon_{(i)})F_{ij}) \frac{\dot{Q}_{abj}}{A_{(j)}} = \sigma \varepsilon_{(i)} \theta_i^4 \quad (2.76)$$

und im Nachgang ergibt sich aus (2.64) der Nettowärmestrom

$$\dot{Q}_i = (\delta_{ij} - F_{ij}) \dot{Q}_{abj}. \quad (2.77)$$

Die Wärmestrahlungsmatrizen der Lastvektormethode  $\mathbf{S}_3$  und  $\mathbf{S}_4$  nehmen damit die Form

$$S_{3ij} = (\delta_{ij} - (1 - \varepsilon_{(i)})F_{ij}) \quad S_{4ij} = (\delta_{ij} - F_{ij}) \quad (2.78)$$

an [ANSYS, Inc. 2016] und das nach  $\dot{\mathbf{q}}$  aufgelöste Gleichungssystem lautet

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_4 \mathbf{S}_3^{-1} \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} \boldsymbol{\theta}_{\text{elem}}^{\hat{4}} \quad (2.79)$$

mit der Matrix der Elementemissionsgrade

$$\varepsilon_{\text{elem}ij} = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.80)$$

Die Formulierung (2.79) bietet gegenüber (2.69) aus numerischer Sicht den Vorteil, dass die Matrix  $\mathbf{S}_3$  für die getesteten Beispiele eine erheblich niedrigere Konditionszahl als  $\mathbf{S}_1$  aufweist. Darüber hinaus lassen sich die im Falle nicht vollständig geschlossener Strahlungsvolumina auftretenden Wärmeströme an die Umgebung in (2.76) besonders einfach integrieren, da direkt die abgegebene Leistung bilanziert wird. Das gekoppelte Gleichungssystem von Temperaturfeld und Wärmestrahlung ergibt sich in dieser Darstellung zu

$$\mathbf{D}_{\text{tt}} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_{\text{tt}} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_{\text{t}} + \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{\text{elem}} \dot{\mathbf{q}} \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_4 \mathbf{S}_3^{-1} \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} (\mathbf{T}_1 \boldsymbol{\theta})^{\hat{4}}. \quad (2.81)$$

Angesichts der Kopplung erfordert die Lösung von (2.81) eine iterative Vorgehensweise, weil eine direkte Verknüpfung aufgrund der Nichtlinearität nicht möglich ist. An dieser Stelle sei in Anbetracht der Bedeutung für die späteren Analysen darauf hingewiesen, dass die Systemmatrizen  $\mathbf{D}_{\text{tt}}$  und  $\mathbf{K}_{\text{tt}}$  im Falle temperaturunabhängiger Materialparameter konstant sind. Eine Schwierigkeit bei der Anwendung dieser Methode ergibt sich für stationäre Analysen, bei denen weder Konvektions- noch Temperaturrandbedingungen auftreten, da in diesem Fall die Wärmetransportmatrix  $\mathbf{K}_{\text{tt}}$  singular wird.

### 2.3.6 Matrixmethode

Die Matrixmethode basiert direkt auf (2.75) [ANSYS, Inc. 2016]. Die einzelnen Flächenelemente, zwischen denen die Wärmestrahlung ausgewertet wird, entsprechen jedoch nicht den Oberflächen der darunter liegenden Volumenelemente. Stattdessen werden die Flächen um die Oberflächeneckknoten gebildet und analog zu (2.72) in der Matrix  $\mathbf{A}_{\text{knoten}}$  zusammengefasst, was den Vorteil bietet, dass die Temperatur des Oberflächenelementes direkt der Knotentemperatur entspricht und somit die Umrechnungen (2.71) und (2.73) entfallen.

Das Gleichungssystem (2.75) nimmt die Form

$$\mathbf{D}_{\text{tt}}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K}_{\text{tt}}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_{\text{t}} + \mathbf{A}_{\text{knoten}}\dot{\mathbf{q}} \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_2\boldsymbol{\theta}^{\hat{4}} \quad (2.82)$$

an. Für hinreichend kleine Systeme kann das Matrixprodukt  $\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_2$  im Vorfeld der Analyse ausgewertet werden, sodass während der Simulation nur Matrixmultiplikationen zur Bestimmung des Wärmestroms infolge Strahlung notwendig sind. Da jetzt beide Gleichungssysteme in (2.82) den Knotentemperaturvektor  $\boldsymbol{\theta}$  enthalten, lassen sie sich mit der Wärmestrahlungsmatrix für die Knotenbeschreibung  $\mathbf{K}_{\text{Stt}}$

$$K_{\text{Stt}ij}(\theta_j) = (\mathbf{S}_1^{-1})_{ik}S_{2kj}\theta_j^3 \quad (2.83)$$

zu einem Gesamtsystem

$$\mathbf{D}_{\text{tt}}\dot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{K}_{\text{tt}} + \mathbf{K}_{\text{Stt}}(\boldsymbol{\theta}^{\hat{3}}))\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r}_{\text{t}} \quad (2.84)$$

zusammenfassen. Darauf lassen sich nun die Standardverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme anwenden, wobei in jeder Iterationsschleife die Wärmestrahlungsmatrix angepasst werden muss. Der Vorteil dieser Methode liegt in der kompakten Beschreibung. Darüber hinaus sind nicht zwangsläufig Konvektions- oder Temperaturrandbedingungen erforderlich, um eine singuläre Wärmetransportmatrix bei stationären Analysen zu vermeiden. Dem stehen allerdings einige Nachteile gegenüber. Zum einen ist die Wärmestromverteilung auf die Oberflächen der Volumenelemente ungleichmäßig, da lediglich die Eckknoten in die Wärmestrahlungsbeschreibung eingehen und demzufolge auch die Wärmeströme nur auf diese wirken. Für die anvisierte Modellordnungsreduktion ergibt sich zum anderen das Problem, dass die Systemmatrizen nun nichtlinear sind, was, wie in Kapitel 3.1 näher erläutert wird, die Anwendung bestimmter Reduktionsverfahren ausschließt oder zumindest erheblich erschwert. Das Gleichungssystem (2.82) weist diesen Nachteil nicht auf. Im Falle sehr vieler an der Wärmestrahlung beteiligter Elemente ist die numerische Auswertung des Terms  $\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_2$  äußerst aufwendig, sodass eine Vorabberechnung unmöglich wird. Dann entfällt der wesentlichste Vorteil gegenüber der Lastvektormethode.

### 2.3.7 Wärmestrahlung zur Umgebung

Auch wenn bisher stets die Strahlung zwischen finiten Flächenelementen betrachtet wurde, lässt sich das beschriebene Vorgehen ebenfalls auf nicht abgeschlossene Strahlungsvolumina übertragen, bei denen ein Teil der Wärme an die räumlich nicht diskretisierte Umgebung abgestrahlt wird, für welche eine einheitliche Temperatur vorgegeben ist. Dabei wird davon ausgegangen, dass keine durch den Körper nach außen ausgesandte Strahlung auf diesen zurückreflektiert wird. Deshalb muss sich die Umgebung in hinreichender Entfernung befinden, sodass deren Oberfläche sehr viel größer als die Bauteiloberfläche ist. Dies lässt sich in der Wärmestrahlungsbilanz durch  $\varepsilon_u = 1$  ausdrücken, wobei der Index  $j = u$  hier für die Umgebung steht.

Einen Sonderfall bildet eine komplett konvexe Außenfläche des betrachteten Bauteils, in welchem die einzelnen Oberflächenelemente nicht zueinander, sondern lediglich zur Umge-

bung, strahlen. Hierfür vereinfachen sich die Strahlungsbilanzen erheblich. Für die Sichtfaktoren der Außenflächen untereinander gilt  $F_{ij} = 0$ , weshalb alle Strahlung nach außen abgegeben wird, woraus  $F_{iu} = 1$  folgt. Die Wärmestrahlungsbilanz für das  $i$ -te Element (2.69) verkürzt sich unter Beachtung von (2.68) zu

$$\frac{\dot{Q}_i}{\varepsilon_{(i)}A_{(i)}} - \frac{1 - \varepsilon_u}{\varepsilon_u} F_{iu} \dot{Q}_u = \sigma \theta_i^4 - \sigma F_{iu} \theta_\infty^4, \quad (2.85)$$

woraus sich unter Beachtung von  $F_{iu} = 1$  und  $\varepsilon_u = 1$

$$\dot{Q}_i = \sigma \varepsilon_i A_i (\theta_i^4 - \theta_\infty^4) \quad (2.86)$$

ergibt. Hierin ist die Aufteilung in den von der Oberflächentemperatur abhängigen Wärmestrom, der vom Körper nach außen abgegeben wird, und den bei konstanter Umgebungstemperatur  $\theta_\infty$  unveränderlichen Wärmestrom in der entgegengesetzten Richtung erkennbar. Da im Gegensatz zu (2.79) bzw. (2.82) kein Gleichungssystem zu lösen ist, kann die Wärmestrahlung analog zur Matrixmethode direkt für die entsprechenden Oberflächenknoten ausgewertet werden, woraus der Lastvektor

$$\mathbf{r}_{\text{tS}} = \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{knoten}} \mathbf{A}_{\text{knoten}} (\boldsymbol{\theta}^4 - \theta_\infty^4) \quad (2.87)$$

resultiert. Die Matrix der Knotenemissionsgrade  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{knoten}}$  bildet sich vergleichbar mit (2.80).

## 2.4 Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt sollen die für die nachfolgenden Validierungsrechnungen eingesetzten Beispielm Modelle vorgestellt werden, wobei der Fokus auf der Bestimmung des Temperaturfeldes liegt. Mit dem Ziel unterschiedliche Aspekte analysieren zu können, weisen die Modelle verschiedene Freiheitsgrade auf. Ein vereinfachtes Rotationsbehältermodell mit geringem Freiheitsgrad erlaubt es, zahlreiche Variantenrechnungen bei begrenzten Rechenzeiten durchzuführen und darüber hinaus eine Bewertung der numerischen Effizienz vorzunehmen. Abschließend dient das vollständige Modell des Rotationsbehälters, welches einen hohen Freiheitsgrad aufweist, dem Nachweis der Anwendbarkeit auf ingenieurtechnische Aufgabenstellungen. Aufgrund des limitierten untersuchten Temperaturintervalls von 20 °C bis 250 °C werden die Materialparameter stets als temperaturunabhängig angenommen.

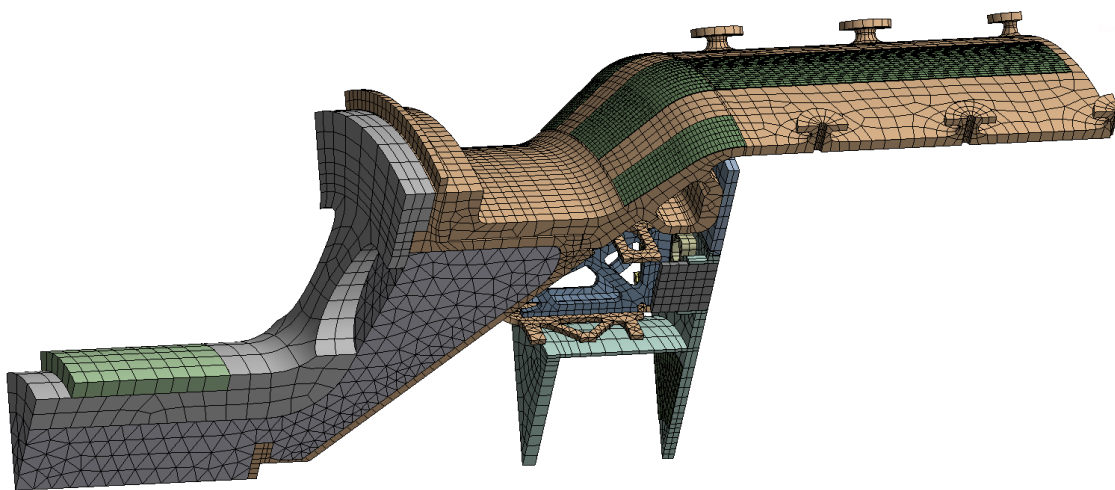
Alle hier dokumentierten Berechnungen wurden mit dem im Rahmen dieser Arbeit in MATLAB implementierten und in Anhang A dokumentierten Simulationsprogramm ausgeführt. Die einzige Ausnahme bilden die der Evaluierung des Programms dienenden Vergleichsrechnungen mit der kommerziellen Finite-Elemente-Software ANSYS in Anhang A.5. Ansonsten diente ANSYS ausschließlich der Modellerstellung sowie in einigen Fällen der Ergebnisvisualisierung. Eine Workstation mit INTEL® Xeon® X5550 Prozessor (8 Kerne, Taktfrequenz 2,67 GHz) sowie einem Arbeitsspeicher von 24 GB wurde für die Simulationen verwendet. Lediglich für besonders hauptspeicherintensive Berechnungen, wie die Erstellung

der Wärmestrahlungsmatrizen des Modells aus Kapitel 2.4.2 und die Lösung des Gleichungssystems (4.4) innerhalb des Beispiels in Kapitel 4.4.3, kam ein Computer mit baugleichem Prozessor aber 72 GB Arbeitsspeicher zum Einsatz.

### 2.4.1 Vereinfachter Rotationsbehälter

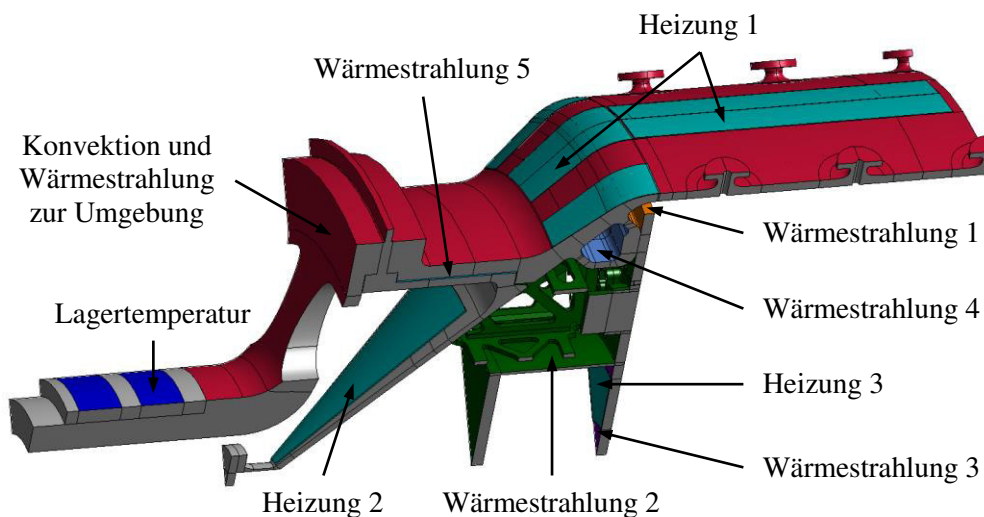
Entsprechend den Ausführungen im vorherigen Abschnitt ermöglicht dieses Modell umfangreiche Variantenstudien, wobei aus Symmetriegründen nur ein Sechzehntel betrachtet wird, was in Umfangsrichtung einem  $45^\circ$ -Segment entspricht. Die Abweichungen vom symmetrischen Aufbau in unmittelbarer Lagernähe auf der Fest- und Loslagerseite werden hierbei nicht berücksichtigt, weil sie nur einen äußerst geringfügigen Einfluss auf das Temperaturfeld haben, insbesondere in Bezug auf den Behältermantel und die Inneneinbauten. Außerdem dient das Modell vorrangig der Validierung der nachfolgend vorgestellten Verfahren, welche unabhängig vom konkreten Anwendungsfall sind.

Mit dem Ziel die Knotenanzahl und damit die Modellgröße zu begrenzen, wird der Wärmetransport durch das Argon im Inneren des Behälters vernachlässigt. Dies führt dazu, dass die gasgefüllten Volumina nicht im Finite-Elemente-Modell entsprechend Abbildung 2.4 aufgelöst werden. Des Weiteren erfolgt nur eine grobe Diskretisierung des Rotationsbehälters, sodass die erzielten Ergebnisse trotz der Verwendung von quadratischen Ansatzfunktionen in allen Elementdimensionen nicht als ausreichend konvergente Lösung im Sinne der Netzverfeinerung aufgefasst werden können. Demzufolge weisen die berechneten Temperaturen keine hinreichende Genauigkeit für die Ermittlung der tatsächlich auftretenden thermisch induzierten Verformungen und Beanspruchungen auf. Für die Bewertung der Reduktionsgüte im Zuge der Modellordnungsreduktion ist das Modell allerdings uneingeschränkt geeignet, da der Vergleich zwischen dem reduzierten und dem nicht reduzierten System von dessen Qualität unabhängig ist. Das Finite-Elemente-Modell umfasst 22.632 Elemente, woraus bei Verwendung von Hexaeder- und Tetraederelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen ein Freiheitsgrad  $N = 83.711$  resultiert.



**Abbildung 2.4** Finite-Elemente-Modell des vereinfachten Rotationsbehälters.

Das Aufwärmen des Rotationsbehälters erfolgt über die applizierten Heizfolien, deren Heizleistung  $\dot{q}_i$  sich separat für drei Bereiche anpassen lässt (türkisfarbene Flächen in Abbildung 2.5). Die erste Gruppe bilden die Heizfolien im Zylinderbereich und am Übergang vom Zylinder zum Konus (Heizung 1:  $\dot{q}_1$ ). Darüber hinaus lassen sich der Konus (Heizung 2:  $\dot{q}_2$ ) und der Kompensator (Heizung 3:  $\dot{q}_3$ ) davon unabhängig erwärmen. Die Lager verfügen über einen eigenständigen Kühlkreislauf, sodass deren Temperatur  $\theta_{\text{Lager}}$  gezielt eingestellt werden kann, was im Modell in Form einer Temperaturrandbedingung (dunkelblau) Berücksichtigung findet. An der Behälteraußenseite (rot) erfolgt durch Konvektion mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $h$  und Strahlung ein Wärmeaustausch mit der Umgebung. Dies gilt ebenfalls für die Außenseite der Heizfolien (Heizung 1). Die Umgebungstemperatur beträgt dabei  $\theta_\infty$  und der Emissionsgrad  $\varepsilon_\infty$ . Aufgrund der weitgehend konvexen Gestalt wird die Strahlung zwischen einzelnen Flächen des Behälters auf der Außenseite hier nicht berücksichtigt.



**Abbildung 2.5** Lasten am Sechzehntelmodell des Rotationsbehälters.

Das Behälterinnere kann in fünf nahezu vollständig abgetrennte Strahlungsvolumina unterteilt werden. Diese sind der Zylinderbereich (Wärmestrahlung 1 – orange), der Konusbereich (Wärmestrahlung 2 – dunkelgrün), das Kompensatorinnere (Wärmestrahlung 3 – violett; inklusive der Oberflächen von Heizung 3), das Volumen innerhalb des Ringes zur Befestigung der äußeren Stirnwand (Wärmestrahlung 4 – blau) und der Spalt zwischen dem Behältermantel und dem Konusbauteil hinter der Dichtung (Wärmestrahlung 5 – hellblau). Der jeweilige Emissionsgrad sei mit  $\varepsilon_i$  und die Anzahl der Strahlungsflächen mit  $M_i$  bezeichnet, wobei  $i = 1 \dots 5$  gilt.

Sofern nicht anderweitig explizit spezifiziert, finden für sämtliche Berechnungen die Lastparameter in Tabelle 2.7 Anwendung. Mit dem Ziel Variantenstudien bei begrenztem Rechenaufwand durchführen zu können, wird die Simulationszeit in der Regel auf 10.000 s begrenzt. Für den gesamten Vorwärmprozess des Behälters bis zum Erreichen der geforderten Zieltemperatur an allen mit Natrium in Kontakt stehenden Flächen ist hingegen eine Erwärmungszeit von mindestens 12 h erforderlich.

**Tabelle 2.7** Zusammenfassung der Lastparameter.

Last	Parameter 1	Parameter 2
Heizung 1	$\dot{q}_1 = 3 \text{ W/cm}^3$	
Heizung 2	$\dot{q}_2 = 0,5 \text{ W/cm}^3$	
Heizung 3	$\dot{q}_3 = 2,5 \text{ W/cm}^3$	
Lagertemperatur	$\theta_{\text{Lager}} = 293,15 \text{ K}$	
Konvektion	$h = 5,5 \text{ W/(mK)}$	$\theta_{\infty} = 313,15 \text{ K}$
Wärmestrahlung Umgebung	$\varepsilon_{\infty} = 0,5$	$\theta_{\infty} = 313,15 \text{ K}$
Wärmestrahlung 1	$\varepsilon_1 = 0,5$	$M_1 = 1.266$
Wärmestrahlung 2	$\varepsilon_2 = 0,5$	$M_2 = 5.125$
Wärmestrahlung 3	$\varepsilon_3 = 0,5$	$M_3 = 232$
Wärmestrahlung 4	$\varepsilon_4 = 0,5$	$M_4 = 528$
Wärmestrahlung 5	$\varepsilon_5 = 0,5$	$M_5 = 600$

### 2.4.2 Rotationsbehälter

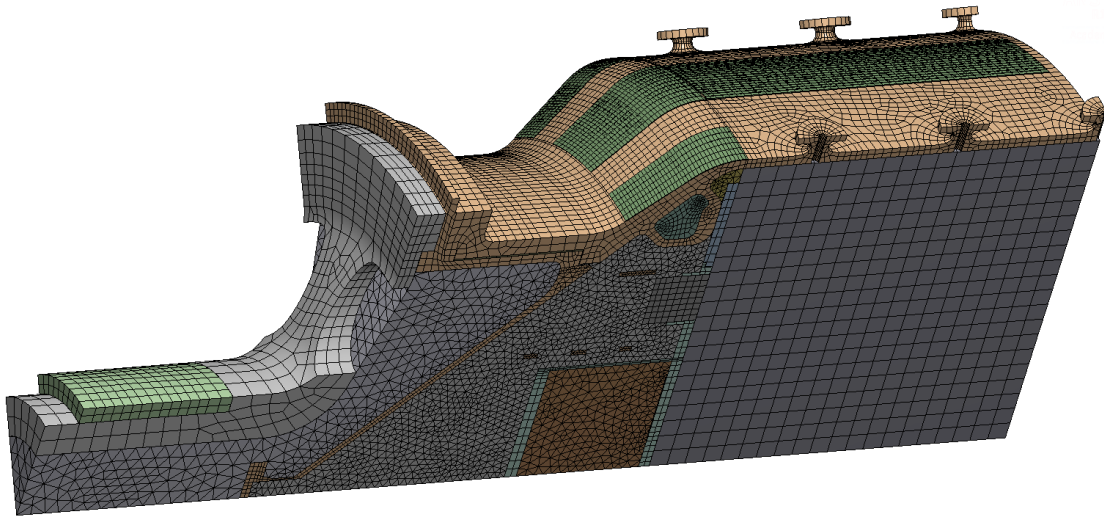
Aufgrund der groben Diskretisierung sowie der Vernachlässigung des Wärmetransportes durch das Argon erlaubte das vereinfachte Modell des Rotationsbehälters nur in äußerst begrenztem Rahmen quantitative Aussagen. Deshalb werden nun, wie Abbildung 2.6 zu entnehmen ist, neben der Verringerung der Elementkantenlängen auch die Argonvolumina im Modell aufgelöst, sodass sich der Freiheitsgrad auf  $N = 368.793$  erhöht. Ein Wärmetransport durch Stofftransport, also durch Konvektionsströmungen im Argon, bleibt weiterhin unberücksichtigt, da dies umfangreiche Strömungssimulationen des Behälterinnenraums unter Einbeziehung der komplexen Geometrie der Inneneinbauten jeweils in Abhängigkeit von der Temperaturverteilung oder gar die direkte Kopplung von Temperaturfeldberechnung und Fluidodynamik erfordern würde. Die erzielten Ergebnisse können somit als konservative Abschätzung angesehen werden, da im realen Vorwärmprozess aufgrund dieser vernachlässigten Wärmetransportmechanismen eine gleichmäßigere Temperaturverteilung erwartet werden kann. Die Lastparameter entsprechend Abbildung 2.5 und Tabelle 2.7 werden übernommen, lediglich die Anzahl der Strahlungsflächen ändert sich und ist in Tabelle 2.8 angegeben.

**Tabelle 2.8** Anzahl der Wärmestrahlungsflächen  $M_i$  für die einzelnen Strahlungsvolumina nach Abbildung 2.5.

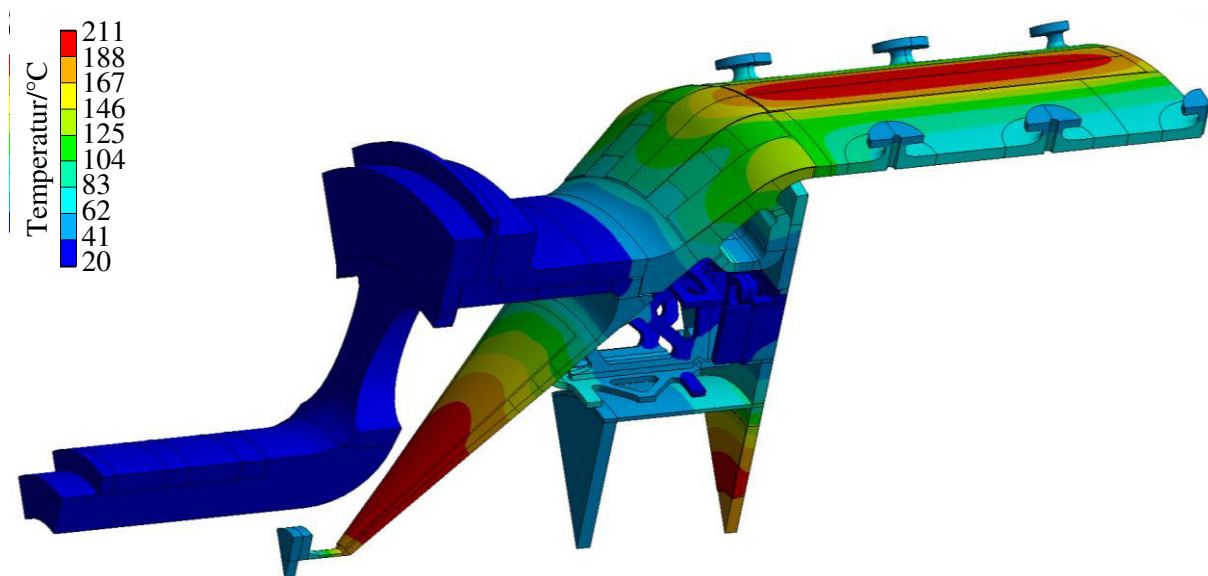
$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$
3.047	14.151	334	1.216	1.152

Abbildung 2.7 veranschaulicht die Temperaturverteilung am Ende der gewählten Simulationszeit unter Nutzung der Lastparameter nach Tabelle 2.7. Es ist eine starke lokale Erwärmung im Bereich der applizierten Heizfolien zu erkennen, wohingegen andere Bereiche der Struktur in ihrer Temperatur noch deutlich von der zu erfüllenden Zielvorgabe abweichen. Dennoch treten

bereits in diesem frühen Stadium des Vorwärmprozesses alle relevanten Wärmetransportmechanismen auf (vgl. hierzu auch Abbildung 1.5), sodass die gewählte Simulationsdauer von 10.000 s ausreicht.



**Abbildung 2.6** Finite-Elemente-Modell des Rotationsbehälters.



**Abbildung 2.7** Temperaturverteilung nach einer Simulationszeit von 10.000 s dargestellt für die Stahlbauteile des Rotationsbehälters.





### 3 Reduktion der Temperaturgleichung

Für das Rotationsbehältermodell entsprechend Kapitel 2.4.2 mit einem Freiheitsgrad  $N = 368.793$  beträgt die Rechenzeit für eine einzige transiente Erwärmungssimulation bei Betrachtung einer Simulationszeit von 10.000 s bereits etwa 1 h. Für die realistischen Vorwärmzeiten von 12 h bis 24 h erhöht sich der numerische Aufwand entsprechend. Dies macht umfangreiche Parameterstudien unter variierender Heizleistung oder Sensitivitätsanalysen zur Abschätzung des Einflusses einzelner unsicherer Modellparameter, wie beispielsweise der Emissionsgrade, in Anbetracht der hohen Rechenzeiten unmöglich oder erschwert diese zumindest erheblich.

Die Modellordnungsreduktion bietet mittels Approximation des Ausgangssystems durch ein System mit wesentlich geringerem Freiheitsgrad die Möglichkeit, die auftretenden Berechnungszeiten bei nur geringem Fehler erheblich zu reduzieren [Antoulas 2005]. Unabhängig von der verwendeten Methode zur Beschreibung der Wärmestrahlung teilen sich sowohl das Gleichungssystem (2.81) als auch (2.82) in eine Gleichung zur Ermittlung der Knotentemperaturen des Finite-Elemente-Modells und eine zur Berechnung der Wärmeströme infolge Strahlung auf, wobei sich der numerische Aufwand signifikant unterscheidet. Der Zeitanteil für die zweite Gleichung liegt für das vereinfachte Behältermodell zwischen 2 % (Matrixmethode) und 15 % (Lastvektormethode). Für das größere Modell aus Kapitel 2.4.2 sinkt dieser Anteil bei Nutzung der Lastvektormethode auf 3 %. Somit kann das Gleichungssystem zur Bestimmung des Temperaturfeldes als die Berechnungszeit prägend angesehen werden, weshalb eine Reduktion zunächst an dieser Stelle ansetzen sollte. Infolgedessen werden in diesem Kapitel Verfahren vorgestellt, welche sich ausschließlich der Modellordnungsreduktion der Temperaturgleichung widmen.

Als ursächlich für den beobachteten Rechenzeitunterschied kann zum einen die unterschiedliche Dimension der Gleichungssysteme und zum anderen die Konstanz der Wärmestrahlungsmatrizen angesehen werden, die eine Faktorisierung im Vorfeld der Simulation ermöglicht. Im Gegensatz dazu erfordert jede Anpassung der Zeitschrittweite für die Temperaturgleichung eine erneute Zerlegung der entsprechenden Systemmatrix während der Laufzeit.

Ausgehend von den verfahrensunabhängigen Grundlagen der Modellordnungsreduktion werden in diesem Kapitel ausgewählte Methoden vorgestellt, welche sich besonders zur Ermittlung der transienten Temperaturfelder und der daraus resultierenden quasistationären thermischen Beanspruchungen eignen. Diesbezüglich erfolgt zunächst in Kapitel 3.2 eine Einordnung der in der Forschung häufig verwendeten Reduktionsverfahren. Im Folgenden werden die für diese Arbeit genutzten Methoden vorgestellt. Darüber hinaus geht Kapitel 3.3 auf die Berechnung der thermisch induzierten Beanspruchungen für ausgewählte kritische Stellen ein. Da die Beurteilung der Reduktionsgüte von entscheidender Bedeutung bei der Bewertung des reduzierten Systems ist, schließt sich in Kapitel 3.7 eine Diskussion von Modellkorrelationsverfahren an.

### 3.1 Grundlagen

Ausgangspunkt für die Modellordnungsreduktion ist die Zustandsraumformulierung, welche für (2.81) und (2.82) unabhängig von der Methode zur Beschreibung der Wärmestrahlung die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{B}\mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

annimmt [Antoulas *et al.* 2010]. Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$  entspricht somit dem Temperaturvektor, sodass  $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\theta}(t)$  gilt. Des Weiteren stellen  $\mathbf{E} = \mathbf{D}_{tt}$  und  $\mathbf{A} = \mathbf{K}_{tt}$  mit  $\mathbf{E}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  die Systemmatrizen dar. Der bisherige Lastvektor wird nun als Produkt der Steuer- bzw. Eingangsmatrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times e}$  mit dem Eingangsvektor  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^e$  ausgedrückt. Hierbei gibt  $e$  die Anzahl der Systemeingänge an. Im allgemeinsten Fall, wenn jeder Knoten einen unabhängig anzusteuern den Eingang darstellt, entspricht  $\mathbf{B}$  somit der Einheitsmatrix, vorausgesetzt  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{z}$  weisen eine identische Sortierung der Freiheitsgrade auf. Das Gleiche gilt für die Mess- bzw. Ausgangsmatrix  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{a \times N}$ , wenn die Auswertung aller Knotentemperaturen erfolgt und somit der Ausgangsvektor  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^a$  dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  entspricht. Die Anzahl der Systemausgänge wird mit  $a$  bezeichnet. Aufgrund der thermischen Trägheit, welche sich in Form der Wärmekapazität ausdrückt, existiert für die hier betrachteten Systeme keine Durchgriffsmatrix.

In vielen Anwendungsfällen genügt die Beschränkung auf wenige Systemeingänge und -ausgänge, beispielsweise wenn in der elastischen Mehrkörperdynamik das Übertragungsverhalten zwischen punktförmig idealisierten Lasteinleitungsstellen und diskreten Koppelunkten wie Lagern beschrieben wird. Ein analoges Beispiel aus der Thermodynamik ist die Erwärmung an definierten Auswertepunkten aufgrund lokal begrenzt eingeleiteter Wärmeströme. Somit ergibt sich  $e, a \ll N$ , was eine wesentliche Voraussetzung für die erfolgreiche Anwendung der Modellordnungsreduktion darstellt. Im Gegensatz zum Ausgangssystem, welches die Systemantwort aller Knoten auf beliebige Eingangssignale beschreibt, kann sich das reduzierte Modell auf die gewählten Ein- und Ausgänge beschränken, sodass die Übertragungsfunktionsmatrix  $\mathbf{H}(s) \in \mathbb{R}^{e \times a}$  im Laplace-Bereich

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Z}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{Z}(s) \quad (3.2)$$

von erheblich verminderter Dimension ist. Das unreduzierte System beinhaltet infolgedessen zahlreiche Informationen, die zur Beschreibung des geforderten Ein-/Ausgangsverhaltens nicht benötigt werden, woraus sich der Ansatzpunkt der Modellordnungsreduktion ergibt. Diese verfolgt das Ziel, das relevante Systemverhalten mit einem Modell erheblich verringerter Dimension bei minimalem Approximationsfehler zu beschreiben.

Die Ausgangsvektoren des ursprünglichen Systems  $\mathbf{y}(t)$  und des reduzierten Systems  $\mathbf{y}_R(t)$  sollen sich möglichst wenig unterscheiden, sodass  $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_R\| \approx 0$  sowie  $\mathbf{y}_R \approx \mathbf{y}$  gilt [Antoulas *et al.* 2010]. Gemäß der Messgleichung in (3.1) muss folglich der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$  durch den reduzierten Zustandsvektor  $\mathbf{x}_R(t) \in \mathbb{R}^n$  und die Projektionsmatrix  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times n}$  in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{x}_R(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_R \quad (3.3)$$

ausgedrückt werden. Dabei beschreibt  $\boldsymbol{\varepsilon}_R$  den Approximationsfehler und  $n$  ist die Dimension des reduzierten Systems, für die  $n \ll N$  gelten soll. Durch Einsetzen von (3.3) in (3.1) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}_R(t) + \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{x}_R(t) &= \mathbf{B}\mathbf{z}(t) - \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_R(t) - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_R(t) \\ \mathbf{y}_R(t) &= \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{x}_R(t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aus dem Gleichungssystem (3.4), welches zunächst  $N$  Gleichungen für die  $n$  Unbekannten enthält, kann das Residuum  $\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_R(t) + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_R(t)$  eliminiert werden, indem eine zweite Projektionsmatrix  $\mathbf{W}^T \in \mathbb{R}^{n \times N}$ , die mit den entsprechenden Orthogonalitätsbedingungen so gewählt wird, dass

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{B}\mathbf{z}(t) - \mathbf{E}\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}_R(t) + \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{x}_R(t)) = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

gilt, von links mit (3.4) multipliziert wird. Das reduzierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T\mathbf{E}\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}_R(t) + \mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{x}_R(t) &= \mathbf{W}^T\mathbf{B}\mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}_R(t) &= \mathbf{C}\mathbf{V}\mathbf{x}_R(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

besitzt demzufolge nur noch die Dimension  $n$ , was den Rechenaufwand im Lösungsprozess erheblich verringert [Antoulas *et al.* 2010]. Dies wird als Petrov-Galerkin-Projektion bezeichnet.

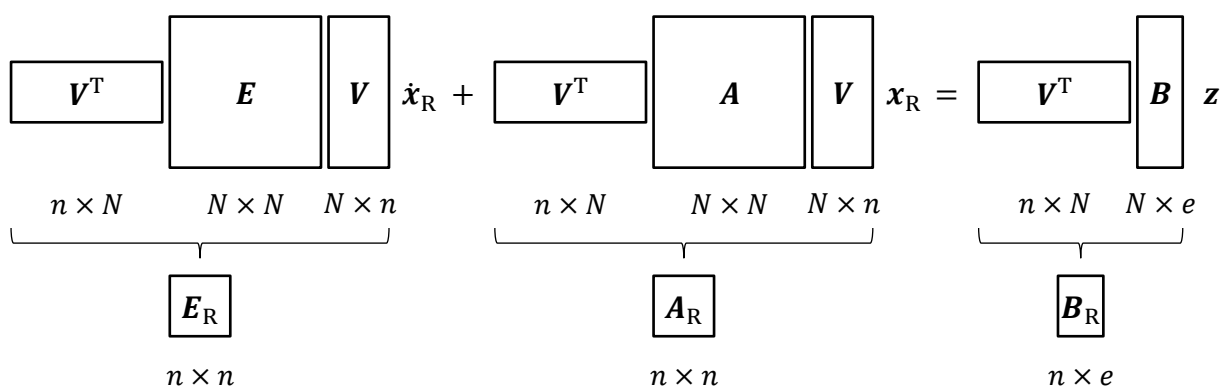
Der Sonderfall der orthogonalen oder einseitigen Projektion ergibt sich bei identischer Wahl der Reduktionsmatrizen  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ . Dies setzt die Übereinstimmung der Ein- und Ausgangsmatrix voraus und bietet einerseits den Vorteil, dass die Symmetrie im reduzierten Gleichungssystem bewahrt bleibt, und gewährleistet andererseits den Erhalt der Stabilität und Passivität des Modells [Lehner 2007]. Nachfolgend kommt deshalb stets dieser Sonderfall zum Einsatz, für welchen sich die reduzierten Systemmatrizen  $\mathbf{E}_R$  und  $\mathbf{A}_R$  sowie die reduzierte Ein- und Ausgangsmatrix  $\mathbf{B}_R$  bzw.  $\mathbf{C}_R$  zu

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{V}^T\mathbf{E}\mathbf{V}, \quad \mathbf{A}_R = \mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V}, \quad \mathbf{B}_R = \mathbf{V}^T\mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_R = \mathbf{C}\mathbf{V} \quad (3.7)$$

ergeben. Abschließend folgt somit das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R\dot{\mathbf{x}}_R(t) + \mathbf{A}_R\mathbf{x}_R(t) &= \mathbf{B}_R\mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}_R(t) &= \mathbf{C}_R\mathbf{x}_R(t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

was in Abbildung 3.1 illustriert wird.



**Abbildung 3.1** Reduktion der Systemdimension durch orthogonale Projektion.

Die Herausforderung liegt nun in der geeigneten Wahl der Projektionsmatrix, wofür verschiedene Verfahren zur Verfügung stehen, welche im nächsten Kapitel näher betrachtet werden. Zunächst soll jedoch auf die Wärmestrahlung eingegangen werden. Der Wärmestromvektor entspricht in (3.1) dem Term

$$\mathbf{r}_t(t) = \mathbf{Bz}(t), \quad (3.9)$$

woraus mit (3.7) der reduzierte Wärmestromvektor  $\mathbf{r}_{tR}$  zu

$$\mathbf{r}_{tR}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{Bz}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{r}_t(t) \quad (3.10)$$

folgt. Für die Wärmestrahlung auf die Umgebung aus (2.87) ergibt sich somit

$$\mathbf{r}_{tSR}(t) = \mathbf{V}^T \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{knoten}} \mathbf{A}_{\text{knoten}} (\mathbf{V} \mathbf{x}_R(t))^4 - \mathbf{V}^T \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{knoten}} \mathbf{A}_{\text{knoten}} \theta_\infty^4. \quad (3.11)$$

Der zweite Term lässt sich im Vorfeld der Simulation des reduzierten Systems auswerten und hat somit die Dimension  $n$ . Angesichts der Nichtlinearität muss der erste Summand aus (3.11) allerdings in jedem Zeitschritt der Integration erneut berechnet werden, wozu zunächst eine Expansion des reduzierten Zustandsvektors auf den ursprünglichen Systemfreiheitsgrad  $N$  erforderlich ist. Die Auswertung erfolgt also in der Ausgangsdimension und anschließend wird der sich daraus ergebende Lastvektor wieder reduziert. Der numerische Aufwand lässt sich etwas verringern, indem nur die Zeilen der Projektionsmatrix genutzt werden, welche zu an der Wärmestrahlung auf die Umgebung beteiligten Knoten gehören. Dennoch verkleinert sich die Auswertedimension nicht um mehrere Größenordnungen, weil im Allgemeinen davon auszugehen ist, dass sehr vielen Oberflächenknoten existieren.

Der Wärmestromvektor infolge Strahlung zwischen den Bauteiloberflächen ergibt sich durch Zusammenführung der beiden Gleichungen in (2.81) zu

$$\mathbf{r}_{tS}(t) = \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{\text{elem}} \mathbf{S}_4 \mathbf{S}_3^{-1} \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} (\mathbf{T}_1 \mathbf{x}(t))^4. \quad (3.12)$$

Nach Anwendung der Modellordnungsreduktion resultiert daraus

$$\mathbf{r}_{tSR}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{\text{elem}} \mathbf{S}_4 \mathbf{S}_3^{-1} \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} (\mathbf{T}_1 \mathbf{V} \mathbf{x}_R(t))^4. \quad (3.13)$$

Wie bereits für die Wärmestrahlung auf die Umgebung ist in jedem Zeitschritt bei der Integration des reduzierten Systems eine Expansion auf die ursprüngliche Dimension der Wärmestrahlungsgleichung  $M$  notwendig und auch das in (3.13) enthaltene Gleichungssystem wird für diese Dimension gelöst. Obwohl eine einmalige Faktorisierung der konstanten Matrix  $\mathbf{S}_3$  zum Beispiel durch LU-Zerlegung im Vorfeld möglich ist, kann im Falle  $M \approx N$  die Rechenzeit bei der Auswertung von (3.13) den Zeitvorteil durch die Reduktion stark limitieren. Für das hier betrachtete Anwendungsbeispiel des Rotationsbehälters aus Kapitel 2.4.2 beträgt der Zeitanteil für die Berechnung des Wärmestroms infolge Strahlung jedoch lediglich 3 %, sodass dennoch eine starke Verringerung der Simulationszeiten erwartet werden kann.

## 3.2 Überblick der Reduktionsverfahren

In der Literatur existiert eine Vielzahl von Reduktionsverfahren für die Behandlung linearer und nichtlinearer Systeme [Antoulas 2005; Benner 2006; Schilders 2008; Baur *et al.* 2014].

Dabei lassen sich für die verschiedenen Verfahrensklassen drei unterschiedliche Ursprünge ausmachen [Besselink *et al.* 2013].

Erste Anwendungen in der Mechanik finden sich in den 1960er-Jahren mit der Guyan-Reduktion [Guyan 1965], der modalen Reduktion [Davison 1966] und der Component Mode Synthesis [Craig & Bampton 1968]. All diesen Verfahren gemeinsam ist die physikalische Interpretierbarkeit des reduzierten Systems, so entsprechen die reduzierten Koordinaten bei der Guyan-Reduktion einem Teil der ursprünglichen Freiheitsgrade und bei der modalen Reduktion werden die Eigenschwingformen des Systems herangezogen. Die Component Mode Synthesis stellt eine Mischform dieser zwei Ansätze dar. Aufgrund ihrer langjährigen Anwendung sind diese Methoden in kommerziellen Finite-Elemente-Programmen implementiert und stellen deshalb bis heute die Standardreduktionsverfahren in der Mechanik dar [Benner 2006]. Aufgrund ihrer Limitierungen, welche in Kapitel 3.3 und 3.4 diskutiert werden, eignen sie sich nur bedingt für die Anwendung auf thermische Systeme.

Aus der Regelungstechnik stammen die auf dem balancierten Abschneiden (engl. Balanced Truncation) basierenden Verfahren, welche auf Moore [Moore 1981] und Glover [Glover 1984] zurückgehen und das Übertragungsverhalten zwischen den Ein- und Ausgängen des Systems basierend auf der Zustandsraumformulierung (3.1) zugrunde legen. Ziel dieser Verfahren ist es, die Beobachtbarkeits- und die Steuerbarkeitsmatrix durch Singulärwertzerlegung zu diagonalisieren und gleichzusetzen [Benner 2006]. Im reduzierten System bleiben dann nur die zu den größten Hankel-Singulärwerten korrespondierenden Zustandsgrößen erhalten, welche sowohl gut beobachtbar als auch gut steuerbar sind [Besselink *et al.* 2013]. Zu den wesentlichen Vorteilen des balancierten Abschneidens gehört, dass einerseits die Stabilitätseigenschaften des Ausgangssystems erhalten bleiben und andererseits Schranken für den maximalen Approximationsfehler angegeben werden können [Benner 2006]. Da sich die Beobachtbarkeits- und die Steuerbarkeitsmatrix allerdings aus den Lyapunovgleichungen ergeben, gestaltet sich deren Berechnung für Systeme mit hohem Freiheitsgrad sehr aufwendig oder ist teilweise nicht möglich [Antoulas *et al.* 2010; Besselink *et al.* 2013]. Dies können auch neuere iterative Verfahren zu Lösung der Lyapunovgleichungen [Benner, Li *et al.* 2008; Druskin *et al.* 2011; Benner *et al.* 2016] nur teilweise kompensieren.

Die dritte Verfahrensklasse stellen die Krylov-Unterraummethoden (engl. Krylov Subspace Methods) dar, welche auf dem Gebiet der numerischen Mathematik entstanden sind [Feldmann & Freund 1995; Besselink *et al.* 2013]. Genauso wie beim balancierten Abschneiden bildet die Ein-/Ausgangsbeschreibung im Zustandsraum den Ansatzpunkt. Durch eine Reihenentwicklung der Übertragungsfunktion, die Berechnung der sogenannten Momente, wird das System approximiert [Freund 2003]. Numerisch wird dies effizient durch die Projektion in einen Krylovunterraum umgesetzt [Benner 2006]. Da dessen Berechnung sich auf die Lösung linearer Gleichungssysteme beschränkt, lässt sich diese Methode auch bei sehr großen Systemdimensionen anwenden, was einen klaren Vorteil gegenüber dem balancierten Abschneiden darstellt [Antoulas *et al.* 2010; Besselink *et al.* 2013]. Deshalb erfolgt die Reduktion der Temperaturgleichung in dieser Arbeit in der Regel mit Krylov-Unterraummethoden, worauf in Kapitel 3.5

näher eingegangen wird. Allerdings lassen sich für diese keine strikten Fehlerschranken angeben [Panzer 2014].

Mittlerweile haben sich Modellordnungsreduktionsverfahren zusätzlich zu den vorstehend bereits genannten in sehr vielen Anwendungsfeldern etabliert, beispielsweise in der Fluidodynamik [Lassila *et al.* 2014], der Medizin [Ballarin *et al.* 2016], der Mikroelektronik [Bechtold *et al.* 2005] und für elektromagnetische Anlagen [Rewieński *et al.* 2016]. Dabei können die Methoden zur Reduktion linearer Systeme, abgesehen von Sonderfällen, als etabliert gelten. Deshalb liegt ein derzeitiger Forschungsschwerpunkt auf der Reduktion nichtlinearer Systeme. Dies umfasst in der Mechanik beispielsweise nichtlineares Materialverhalten [Radermacher & Reese 2013; Ghavamian *et al.* 2017] oder Reibung [Bamer & Bucher 2012].

Generell lassen sich bei den Reduktionsverfahren für nichtlineare Systeme zwei Gruppen unterscheiden. In der ersten wird versucht, die Nichtlinearität beispielsweise durch Polynome zu approximieren und auf diese Weise eine Beschreibung zu erzielen, auf die das balancierte Abschneiden oder Krylov-Unterraummethoden jeweils mit entsprechenden Modifikationen anwendbar sind. Bai und Skoogh überführen das Modell dazu in eine bilineare Form und nähern die Nichtlinearität durch ein Polynom zweiten Grades an, woraus resultierend sich allerdings die Systemdimension verdoppelt [Bai & Skoogh 2006]. Auch die Verfahren nach Feng *et al.* und Phillips basieren auf der Approximation der Nichtlinearität durch Polynome, wobei für jede Polynomordnung eine separate Reduktion erfolgt [Phillips 2003; Feng *et al.* 2004]. Dies bedingt allerdings, dass die Dimension des Unterraums mit steigender Polynomordnung stark anwächst, was zu einer sehr großen reduzierten Dimension führt [Baur *et al.* 2014]. Die Trajectory-Piecewise Linearization linearisiert das Modell in ausgewählten Zustandspunkten [Rewieński & White 2003]. Die Schwierigkeit ergibt sich hierbei aus der Wahl geeigneter Linearisierungspunkte, die sich in der Regel aus Zeitbereichssimulationen des Vollmodells ergeben [Baur *et al.* 2014]. Deshalb sinkt die Güte des reduzierten Modells, je stärker die tatsächlichen Zustandsvektoren von den Linearisierungspunkten abweichen.

Die zweite Verfahrensgruppe für nichtlineare Systeme stellen abtastbasierte Reduktionsverfahren dar. Die relevanten Systemeigenschaften werden hierbei im Gegensatz zur Trajectory-Piecewise Linearization direkt aus diskreten, repräsentativen Zustandsvektoren (engl. snapshots) transienter Analysen des unreduzierten Modells extrahiert. Die auf Sirovich [Sirovich 1987] zurückgehende Proper Orthogonal Decomposition (POD), zu Deutsch Hauptkomponentenanalyse, basiert auf der Singulärwertzerlegung dieser in einer Matrix zusammengefassten Zustandsvektoren [Pinnau 2008]. Das Grundprinzip dieses Verfahrens wird in Kapitel 3.6 näher erläutert. Darüber hinaus eignen sich insbesondere bei zusätzlicher Parameterabhängigkeit Reduced Bases (RB) Methoden, welche über einen Greedy-Algorithmus die optimale Wahl der Reduktionsbasis gewährleisten [Grepl *et al.* 2007; Chen *et al.* 2017]. Dazu werden mit Hilfe eines geeigneten Fehlerschätzers die Zustände ergänzt, die eine maximale Verringerung des Modellfehlers bewirken. Gemeinsam ist den POD- und RB-Verfahren, dass die Aufteilung des Reduktionsprozesses in eine Offline-Phase, während der

Simulationen des Vollmodells zur Generierung der repräsentativen Zustandsvektoren ausgeführt werden, und eine Online-Phase zur Anwendung des reduzierten Modells erfolgt. Aufgrund der häufig äußerst rechenzeitintensiven Simulationen des nicht reduzierten Systems eignen sich diese Verfahren vor allem, wenn mit dem reduzierten Modell eine Vielzahl von Variantenrechnungen auszuführen ist, wie dies beispielsweise in Optimierungsprozessen [Dolci & Arina 2016] oder bei Sensitivitätsanalysen [Chen *et al.* 2017] der Fall ist. Ein weiteres Anwendungsszenario stellen Echtzeitsimulationen dar, wo sich die Berechnungszeiten während der Online-Phase als entscheidend erweisen [My-Ha *et al.* 2007].

Darüber hinaus werden in der Forschung Modelle betrachtet, deren Systemmatrizen von wenigen Parametern abhängen, wobei es sich zum Beispiel um Materialparameter oder geometrische Modelleigenschaften handeln kann. Dies wird als parametrische Modellordnungsreduktion bezeichnet. Häufig basieren diese Verfahren auf der Interpolation zwischen reduzierten Modellen, welche für ausgewählte Parametersätze erzeugt werden [Panzer *et al.* 2010]. Dabei können Methoden für lineare Systeme genutzt werden, worunter im Wesentlichen das balancierte Abschneiden und Krylov-Unterraumverfahren fallen. Andere Ansätze verwenden für nichtlineare Systeme geeignete Reduktionsverfahren, wie Reduced Bases Methoden, wobei die explizite Parameterabhängigkeit des reduzierten Modells aber verloren geht [Ohlberger & Rave 2016]. Einen allgemeinen Überblick geben diesbezüglich Benner *et al.* [Benner *et al.* 2015].

Einen weiteren Forschungsschwerpunkt bildet die Untersuchung gekoppelter Systeme [Benner & Feng 2015]. Dies kann sich sowohl auf die Kopplung verschiedener physikalischer Domänen, wie bei der Fluid-Struktur-Interaktion [Ballarin *et al.* 2017] oder der Betrachtung thermomechanischer Feldprobleme [Benner *et al.* 2019], aber auch auf die Kopplung mehrerer reduzierter Systeme untereinander beziehen. Der letztgenannte Fall wird als Substrukturierung bezeichnet. Neben der Anwendung auf nichtlineare [Mahdiabadi *et al.* 2017] und parametrische Systeme [Walker *et al.* 2018] ist hierbei insbesondere die effektive und allgemeingültige Reduktion der Koppelfreiheitsgrade von Interesse [Smetana & Patera 2016].

Mittlerweile existieren auch einige Programme, welche den Anwender bei der Modellordnungsreduktion unterstützen. Morembs [Fehr *et al.* 2018] und MORPACK [Lein & Beiteltschmidt 2012] legen dabei den Fokus auf die elastische Mehrkörpersimulation und bieten deshalb zahlreiche Möglichkeiten zum Import von Modellen aus kommerziellen Finite-Elemente-Programmen und zum Export des reduzierten Systems in Mehrkörpersimulationsprogramme. Die für Forschungszwecke frei verfügbaren Softwarepakete pyMOR [Milk *et al.* 2016], MORLAB [Benner & Werner 2018] und sssMOR [Castagnotto *et al.* 2017] konzentrieren sich hingegen nur auf den eigentlichen Reduktionsprozess und die Systemanalyse.

Abschließend soll in diesem Kapitel die Nutzung der Modellordnungsreduktion für thermische Systeme diskutiert werden. Obwohl ein paar Veröffentlichungen existieren, welche die Guyan-Reduktion und die Component Mode Synthesis [Botto *et al.* 2007] oder modale Verfahren [Zhu *et al.* 2008] verwenden, kommen für lineare Systeme meistens Krylov-Unterraummethoden zum Einsatz [Galant *et al.* 2015; Feng *et al.* 2016; Yuan *et al.* 2018]. Feng *et al.* und Yuan *et al.* berücksichtigen dabei zusätzlich eine Parameterabhängigkeit der Modelle [Feng *et al.* 2016;

Yuan *et al.* 2018]. Bruns und Benner zeigen die Anwendung der bilinearen Reduktion bei variierendem Wärmeübergangskoeffizienten [Bruns & Benner 2015]. Für den Fall einer ortsveränderlichen Wärmequelle erfolgt bei Brands *et al.* die Reduktion mit einem POD-Verfahren [Brands *et al.* 2016] und Salleras *et al.* vergleichen die Anwendung von POD und Krylov-Verfahren für thermische Modelle [Salleras *et al.* 2005].

Für die Reduktion eines Systems unter Berücksichtigung der Wärmestrahlung liegen nur sehr wenige Beispiele vor. Eines stellt die Untersuchung der Strahlungsintensität im Frequenzbereich ausgehend von einer gegebenen Temperatur- und Druckverteilung in Plasmabögen dar, was sich somit deutlich vom Fokus dieser Arbeit unterscheidet [Fagiano & Gati 2016]. Pinnau nutzt die POD-Methode für ein eher akademisches Beispiel einer Ellipse im zweidimensionalen Raum mit dem Freiheitsgrad 1769 [Pinnau 2008]. Qian *et al.* wenden das POD-Verfahren und die Trajectory-Piecewise Linearization am Beispiel zweier Satellitenmodelle der NASA an [Qian *et al.* 2015].

### 3.3 Guyan-Reduktion

Die Guyan-Reduktion [Guyan 1965], welche auch als statische Kondensation bezeichnet wird, stellt eines der ersten entwickelten Verfahren dar und ist in vielen kommerziellen Finite-Elemente-Programmen enthalten. Anwendung findet sie vorwiegend bei der Berechnung statischer Lastfälle sehr großer Strukturen, wie beispielsweise ganzer Schiffe, wo einzelne Abschnitte separat reduziert und die reduzierten Strukturen, die sogenannten Superelemente, anschließend zum Gesamtmodell zusammengesetzt werden [Nasdala 2015]. Auf diese Weise lassen sich Baugruppen mit insgesamt mehreren hundert Millionen Freiheitsgraden berechnen.

#### 3.3.1 Verfahrensgrundlagen

Die Freiheitsgrade des Modells werden in externe und interne unterteilt. Die externen Freiheitsgrade oder Masterfreiheitsgrade, nachfolgend durch den Index 1 gekennzeichnet, dienen im Rahmen der beschriebenen Substrukturtechnik der Kopplung zu anderen Bauteilen und können mit Lasten oder Randbedingungen beaufschlagt werden. Sie bleiben im Zuge der Reduktion erhalten. Im Gegensatz dazu werden die internen Freiheitsgrade oder Slavefreiheitsgrade, welche im Folgenden den Index 2 tragen, aus dem Gleichsystem eliminiert. An diesen können auch keine zeitlich veränderlichen Lasten aufgebracht werden.

Die Trägheit des Systems findet im Zuge der Guyan-Reduktion keine Berücksichtigung. Stattdessen wird lediglich das stationäre Feldproblem betrachtet, wobei der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  in den Vektor der Masterfreiheitsgrade  $\mathbf{x}_1$  und den Vektor der Slavefreiheitsgrade  $\mathbf{x}_2$  untergliedert wird

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$



In gleicher Weise werden die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  partitioniert, sodass aus (3.1) das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (3.15)$$

folgt. Nach Auflösen der zweiten Zeile von (3.15) nach  $\mathbf{x}_2$  ergibt sich

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{z} - \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1. \quad (3.16)$$

Durch Einsetzen in die erste Zeile von (3.15) lassen sich nun die Slavefreiheitsgrade aus dem System eliminieren

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) \mathbf{x}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{z} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{z} \quad (3.17)$$

und der Vektor der Masterfreiheitsgrade entspricht dem reduzierten Zustandsvektor  $\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_1$ . Gleichung (3.17) beschreibt das reduzierte System und für (3.3) folgt somit mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und dem Nullvektor  $\mathbf{0}_1 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{x}_R + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{z} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Für den Fall, dass keine Lasten an den Slavefreiheitsgraden angreifen ( $\mathbf{B}_2 \mathbf{z} = \mathbf{0}$ ), resultiert daraus die Projektionsmatrix

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Die Guyan-Reduktion liefert aufgrund der vorgestellten Ableitung exakte Ergebnisse für stationäre Berechnungen, allerdings führt die Vernachlässigung der Trägheit bei der Ermittlung der Projektionsmatrix dazu, dass sie für die meisten instationären Aufgabenstellungen ungeeignet ist und erheblich zu große Fehler bedingt [Qu 2004; Koutsovasilis 2009]. Aus diesem Grund erscheint die Anwendung auf das hier untersuchte Wärmefeldproblem nicht zielführend, insbesondere vor dem Hintergrund, dass alle Modellknoten, an denen Wärmeströme appliziert werden sollen, als Masterknoten auszuwählen wären. Dies würde in Verbindung mit den angestrebten verteilten Modelllasten dazu führen, dass ein sehr großer Anteil der Knoten des Modells als Masterfreiheitsgrade im reduzierten System erhalten bliebe, was angesichts der Tatsache, dass im reduzierten System die Bandstruktur der Matrizen verloren geht, den Rechenaufwand vielmehr erhöht als ihn zu vermindern [Benner, Feng *et al.* 2008].

### 3.3.2 Berechnung thermisch induzierter Beanspruchungen

Die Berechnung der thermisch induzierten Verformungen entsprechend (2.45), mit dem Ziel die daraus resultierenden Beanspruchungen zu ermitteln, erfolgt stationär. Infolgedessen bietet sich an dieser Stelle der Einsatz der Guyan-Reduktion an. Mit  $\mathbf{x} = \mathbf{u}$  sowie  $\mathbf{A} = \mathbf{K}_{mm}$  und  $\mathbf{Bz} = \mathbf{f}_m - \mathbf{K}_{mt} \boldsymbol{\theta}$  lässt sich (2.45) in die entsprechende Zustandsraumformulierung überführen. Eine besondere Herausforderung ergibt sich daraus, dass aufgrund der thermischen Dehnungen alle Freiheitsgrade des mechanischen Modells mit von Lastschritt zu Lastschritt veränderlichen Lasten beaufschlagt sind. Die zur Ableitung von (3.19) gestellte Forderung  $\mathbf{B}_2 \mathbf{z} = \mathbf{0}$  kann somit nicht erfüllt werden. Damit müsste der Term  $\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{z}$  in jedem Lastschritt

neu ausgewertet werden oder alle Freiheitsgrade wären Masterfreiheitsgrade, sodass keine Reduzierung der Rechenzeit auftritt.

Vielfach lassen sich jedoch die aus mechanischer Hinsicht kritischen Stellen im Vorfeld, beispielsweise in ersten Testrechnungen, identifizieren. Sollen nun Parameterstudien am thermischen Modell ausgeführt und die daraus resultierenden Auswirkungen auf die Beanspruchungen untersucht werden, kann davon ausgegangen werden, dass sich diese kritischen Stellen nicht signifikant ändern. Demzufolge müssen auch die Verformungen, welche die Grundlage für die Spannungsberechnung bilden, nur an ausgewählten Freiheitsgraden berechnet werden.

Betrachtet man nun den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (3.17) kann dieser aufgrund der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix mit

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_{22}^{-1} = (\mathbf{A}_{22}^T)^{-1} = (\mathbf{A}_{22}^{-1})^T \quad (3.20)$$

umgeformt werden zu

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} = \mathbf{A}_{21}^T(\mathbf{A}_{22}^{-1})^T = (\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^T. \quad (3.21)$$

Somit lässt sich die rechte Seite von (3.17) unter Nutzung der Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$  aus (3.19) ausdrücken

$$\mathbf{B}_1\mathbf{z} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{z} = \mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{z}. \quad (3.22)$$

Anstatt der Lösung eines Gleichungssystems in jedem Lastschritt wie in (3.17) verringert sich der numerische Aufwand auf die Matrix-Vektor-Multiplikation  $(\mathbf{V}^T\mathbf{B})\mathbf{z}$ . Auf diese Weise lassen sich effektiv die Verformungen an den Masterfreiheitsgraden berechnen. Allerdings ist eine Expansion der Lösung auf die Slavefreiheitsgrade nun nicht mehr möglich, da in (3.18) der Term  $\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{z}$  erhalten bleibt. Es sind also ausschließlich die Verschiebungen an den Masterfreiheitsgraden für die anschließende Ermittlung der auftretenden Beanspruchungen nutzbar.

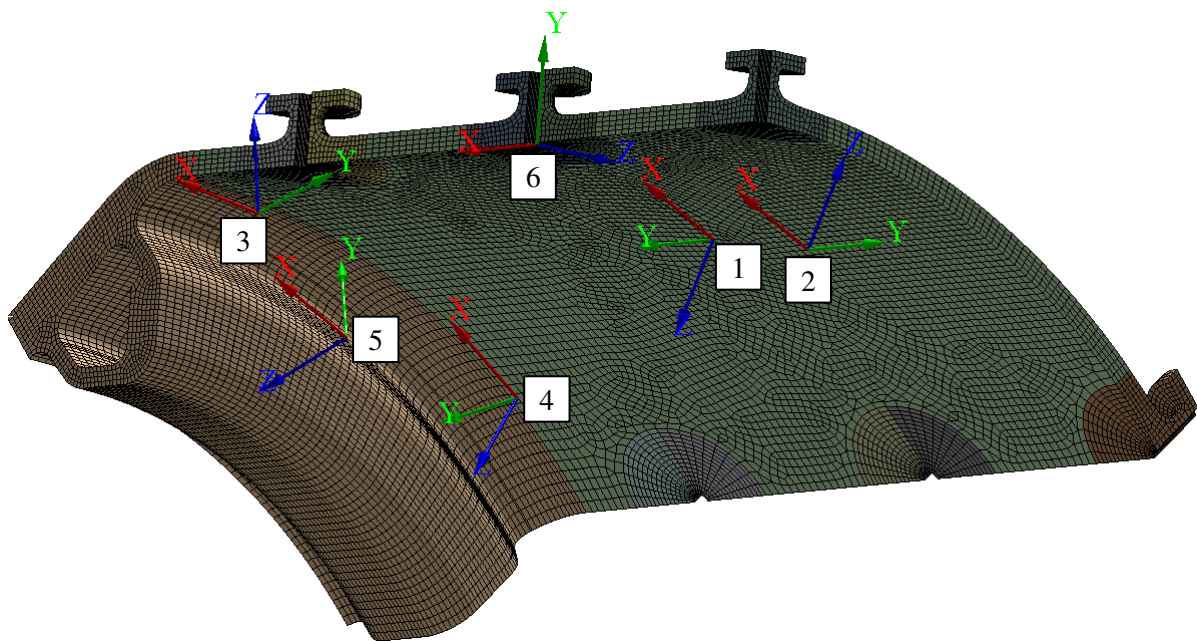
Die anrisskritischen Orte liegen in der Regel an der Bauteiloberfläche, an welcher, falls keine signifikanten äußeren Lasten normal zu dieser auftreten, ein ebener Spannungszustand angenommen werden kann. Für die Berechnung der Spannungen auf der Elementebene werden sämtliche Verschiebungskomponenten aller Elementknoten benötigt. Somit ergeben sich bei Verwendung von Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen in allen Raumrichtungen infolge der 20 Knoten insgesamt 60 Masterfreiheitsgrade für jede untersuchte Position. Dies würde bereits für wenige Analysepunkte zu einem starken Anwachsen der reduzierten Dimension führen.

Aus diesem Grund wird hier die Spannung an der Oberfläche direkt aus den Verschiebungen der angrenzenden Oberflächenknoten ermittelt. Dabei genügen für die Charakterisierung des ebenen Spannungszustandes drei Knoten, sodass sich aufgrund der jeweils drei Verschiebungskomponenten neun Masterfreiheitsgrade ergeben. Angesichts der Tatsache, dass die Spannungsverteilung im Element aufgrund der gewählten quadratischen Ansatzfunktionen linear ist und damit der Spannungszustand nur für die Eckknoten ausgewertet wird, werden

auch nur diese als kritische Stellen identifiziert. Dann dienen die Verschiebungen des jeweiligen Eckknotens und der beiden nächstgelegenen Seitenmittelknoten der untersuchten Elementoberfläche zur Bestimmung des Verzerrungszustandes, aus welchem für den hier zugrunde liegenden Fall isotropen und linear-elastischen Materialverhaltens direkt der Beanspruchungszustand folgt. Die Vernetzung sollte so gewählt werden, dass besonders große und kleine Eckwinkel der Elemente vermieden werden.

### 3.3.3 Anwendungsbeispiel Spannungsberechnung

Das beschriebene Vorgehen soll jetzt anhand eines Beispiels demonstriert werden. Die Beanspruchungen werden für die in Abbildung 2.7 dargestellte Temperaturverteilung ermittelt. Abbildung 3.2 zeigt einen Ausschnitt des verwendeten mechanischen Finite-Elemente-Modells mit den gewählten sechs Auswertepositionen. Diese sind so festgelegt, dass neben von geometrischen Kerben unbeeinflussten Bauteilbereichen (Position 1 und 2) auch Kerben mit leichter Spannungsüberhöhung (Position 3 und 4) und solche mit starker Spannungsüberhöhung (Position 5 und 6) untersucht werden.



**Abbildung 3.2** Positionen für die Spannungsauswertung. Die z-Achse zeigt stets senkrecht zur Oberfläche ins Bauteilinnere und der Koordinatenursprung verdeutlicht die Lage des untersuchten Knotens: 1 – Mantelaußenseite; 2 – Mantelinnenseite; 3 – Innenseite der Mantelkrempe; 4 – Außenseite der Mantelkrempe; 5 – Radius am Übergang vom innenliegenden Profil zum Behältermantel; 6 – Innenbohrung Sensorflansch.

Insgesamt weist das genutzte Modell 1.983.768 Freiheitsgrade auf, um eine hinreichende Auflösung der meisten Spannungsmaxima am Behältermantel zu gewährleisten. Daraus resultiert für das einmalige Lösen des unreduzierten Gleichungssystems eine Rechenzeit von 1200 s, sodass dieses Vorgehen im Falle umfangreicher thermischer Simulationen nicht praktikabel ist. Die Berechnungszeit der Guyan-Reduktion ist mit 1600 s nur etwas höher als für einen statischen Lösungsschritt. Da für den statischen Festigkeitsnachweis, beispielsweise nach der FKM-Richtlinie [Forschungskuratorium Maschinenbau 2012], in der Regel die Vergleichsspannung

nach von Mises  $\sigma_V$  herangezogen wird, ist diese in Tabelle 3.1 für die Berechnung mit dem Ausgangsmodell in der Finite-Elemente-Software ANSYS und mit dem nach Guyan reduzierten Modell in MATLAB gegenübergestellt.

**Tabelle 3.1** Gegenüberstellung der Vergleichsspannung nach von Mises  $\sigma_V$  für die unterschiedlichen Berechnungsvarianten.

Position	$\sigma_V$ in ANSYS	$\sigma_V$ in MATLAB	Abweichung
1	273,26 MPa	272,87 MPa	0,14 %
2	252,38 MPa	251,89 MPa	0,19 %
3	244,98 MPa	245,24 MPa	0,11 %
4	251,62 MPa	249,23 MPa	0,95 %
5	424,46 MPa	431,29 MPa	1,61 %
6	506,23 MPa	545,64 MPa	7,78 %

Es zeigt sich, dass mit steigender Spannungsüberhöhung in der Kerbe auch die Abweichung ansteigt, wobei Unterschiede unter 2 % in den Spannungsergebnissen als hinreichend genau angesehen werden können. Lediglich für Position 6 ergibt sich eine nicht akzeptable Differenz, wobei sich bei Konvergenzuntersuchungen der Sensorflanschbohrung mittels Submodelltechnik in ANSYS eine Vergleichsspannung von 546,68 MPa und somit eine Abweichung von nur noch 0,2 % ergab. Der ursprüngliche Unterschied geht vor allem auf eine unzureichende Auflösung des Spannungsgradienten ins Bauteilinnere im ANSYS-Gesamtmodell (Abbildung 3.2) und die daraus resultierende Ungenauigkeit bei der Extrapolation der Spannungen von den Gauß-Punkten des Elementes zu den Elementknoten zurück [Link 2014]. Mit der beschriebenen Methodik können demzufolge sehr genaue Ergebnisse gewonnen werden und die Rechenzeit für einen einzelnen Lastschritt verringert sich auf 0,03 s. Darüber hinaus wird aus der anfänglichen Abweichung für die Position 6 deutlich, dass eigentlich ein lokal noch feiner vernetztes Gesamtmodell notwendig wäre, was den Rechenaufwand für das Originalmodell weiter ansteigen lässt. Vor diesem Hintergrund erweist sich die Anwendung der Modellordnungsreduktion als essentiell für die effektive Berechnung der thermisch induzierten Beanspruchungen.

### 3.4 Modale Reduktion

Die modale Reduktion stellt in der Strukturmechanik und Akustik das meistgenutzte Reduktionsverfahren dar, weil sie in vielen kommerziellen Programmen enthalten ist [Benner 2006; Fehr 2011]. Sie geht auf Davison und Marshall zurück [Davison 1966; Marshall 1966].

#### 3.4.1 Verfahrensgrundlagen

Hierbei wird das Modell in den Raum der Eigenvektoren projiziert. Nach Überführung von (3.1) in das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}) \boldsymbol{\phi}_j = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad j = 1 \dots N \quad (3.23)$$

lassen sich die Eigenwerte  $\lambda_j$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $\phi_j$  berechnen. Letztere bilden spaltenweise die Modalmatrix  $\Phi$ .

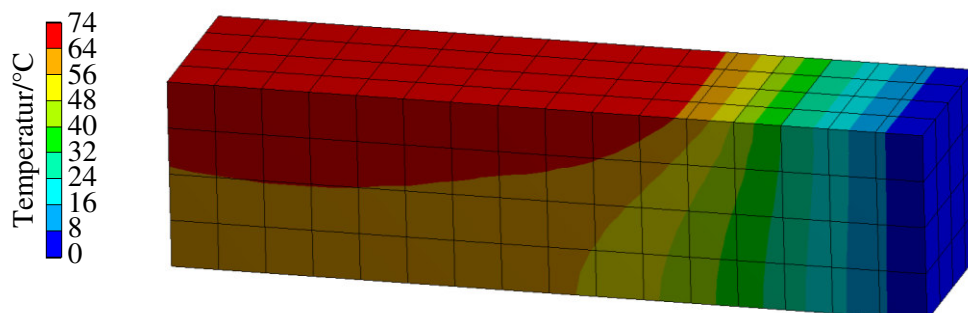
Eine Reduktion der Systemdimension gelingt nun, wenn das Systemverhalten durch wenige Eigenformen dominiert wird, sodass anstatt sämtlicher nur  $n$  Eigenwerte und -vektoren bestimmt werden müssen. Für mechanische Systeme ist dies häufig der Fall, wobei in vielen Anwendungen die zu den  $n$  niedrigsten Eigenfrequenzen korrespondierenden Eigenvektoren von Interesse sind. Insbesondere bei schwacher Dämpfung resultiert dies daraus, dass das Verhalten in Resonanznähe im Wesentlichen durch die eine zugehörige Eigenform geprägt wird [Besselink *et al.* 2013]. Die sich mit  $j = 1 \dots n$  aus (3.23) ergebende Modalmatrix entspricht dann der Projektionsmatrix in (3.7)

$$V \equiv \Phi. \quad (3.24)$$

Auch für thermische Systeme existieren Ansätze zur Beschreibung im modalen Raum [Köster *et al.* 2000; Woschke *et al.* 2009]. Die Auswahl der dominanten Eigenformen gestaltet sich jedoch deutlich schwieriger als für mechanische Systeme, da dies nicht nur die zu den niedrigsten Eigenwerten gehörenden sind und deshalb zum Teil sehr viele Moden berechnet werden müssen [Zhu *et al.* 2008; Hooijkamp & Keulen 2018]. Darüber hinaus werden die Übertragungsfunktionen zwischen den Systemein- und -ausgängen nicht durch ausgeprägte Maxima dominiert, weil Resonanzen wie in der Mechanik nicht auftreten.

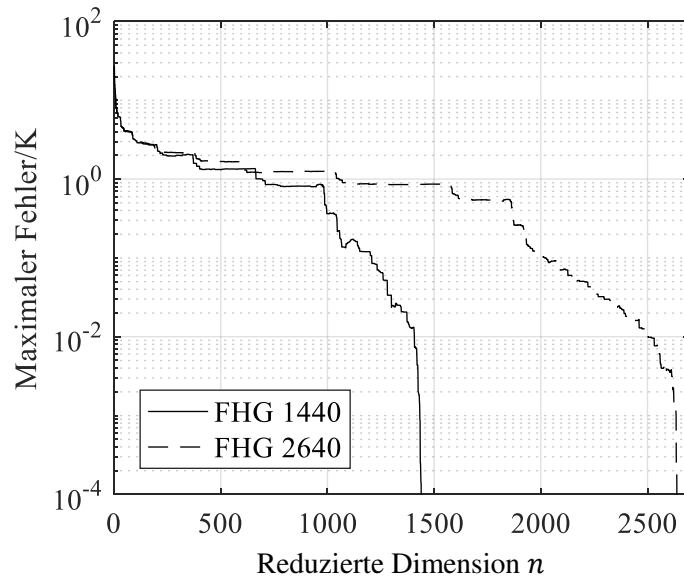
### 3.4.2 Anwendbarkeit der modalen Reduktion für thermische Felder

Die Eignung der modalen Reduktion für thermische Systeme soll nun anhand eines einfachen Beispiels untersucht werden, dessen Freiheitsgrad eine Berechnung aller Eigenvektoren ermöglicht. Aus diesem Grund erweist sich weder das Rotationsbehältermodell noch dessen vereinfachte Variante als geeignet, da die korrespondierenden Rechenzeiten erheblich zu hoch wären. Stattdessen dient der in Abbildung 3.3 gezeigte Quader mit den Kantenlängen 200 mm x 50 mm x 50 mm in zwei Netzfeinheiten, mit den Elementkantenlängen 12,5 mm (Freiheitsgrad 1440) und 10 mm (Freiheitsgrad 2640), als Erprobungsmodell. An der rechten Seite wird eine Temperaturreandbedingung ( $\theta = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ) vorgegeben, alle anderen Oberflächen weisen eine Konvektionsrandbedingung auf. Zusätzlich ist auf der Oberseite vom linken Rand aus bis zu drei Viertel der Quaderlänge eine Wärmestromlast aufgebracht, sodass sich die in Abbildung 3.3 dargestellte Temperaturverteilung nach einer Simulationszeit von 1 h ergibt.



**Abbildung 3.3** Temperaturverteilung und Finite-Elemente-Netz (Elementkantenlänge 12,5 mm) des Beispielmodells für die modale Reduktion.

Abbildung 3.4 veranschaulicht den Einfluss der reduzierten Dimension  $n$ , wobei stets alle Eigenformen  $j = 1 \dots n$  Berücksichtigung finden, auf die Güte des modal reduzierten Modells. Hierbei zeigt sich, dass die Anzahl der zu verwendenden Eigenvektoren, um beispielsweise einen maximalen Fehler von unter 1 K zu erhalten, insbesondere im Verhältnis zum Gesamtfreiheitsgrad sehr hoch ausfällt. So werden für das kleinere Modelle insgesamt 695 Moden und für das größere Modell sogar 1054 Moden benötigt. Somit wird ebenfalls deutlich, dass die Anzahl zu berechnender Eigenwerte mit zunehmender Netzfeinheit ansteigt.



**Abbildung 3.4** Maximaler Fehler des reduzierten Modells in Abhängigkeit von der Anzahl berücksichtigter Eigenformen und dem Freiheitsgrad (FHG) des Modells.

Auch wenn nicht alle diese Eigenformen signifikant zur Systemantwort beitragen und folglich viele im reduzierten Modell vernachlässigt werden könnten, so müssen sie dennoch zunächst berechnet werden. Im Hinblick auf die hier interessierenden Modelle mit einem Freiheitsgrad von mehr als  $10^5$  führt dies dennoch zu erheblichen numerischen Problemen und erscheint nicht praktikabel. Deshalb wird die modale Reduktion des thermischen Feldproblems hier nicht weiter betrachtet.

### 3.4.3 Modaltransformation

Dennoch bietet eine modale Beschreibung einen wesentlichen Vorteil, die reduzierten Systemmatrizen werden bei geeigneter Normierung der Eigenvektoren diagonalisiert und das Gleichungssystem entkoppelt [Skolaut 2014]. Darüber hinaus entspricht bei geeigneter Normierung der Eigenvektoren die reduzierte Wärmekapazitätsmatrix  $\mathbf{E}_R$  einer Einheitsmatrix  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{E} \mathbf{V} = \mathbf{E}_R = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{A}_R = \mathbf{\Lambda}, \quad (3.25)$$

wobei die Spektralmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  die Eigenwerte  $\lambda_j$  auf der Hauptdiagonalen enthält. Bei Verwendung aller Eigenvektoren des Ausgangssystems, womit anstatt einer modalen Reduktion eine Modaltransformation vorliegt, tritt naturgemäß kein Genauigkeitsverlust ein, da alle Systeminformationen Berücksichtigung finden.

Deshalb eignet sich die Modaltransformation zur Verringerung des numerischen Aufwands bei der transienten Simulation des reduzierten Systems. Dazu wird das in einem ersten Schritt mit einem anderen Reduktionsverfahren erzeugte Modell, wobei die zugehörige Projektionsmatrix  $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{N \times n}$  sei, im zweiten Schritt in den modalen Raum transformiert. Die entsprechende Transformationsmatrix wird mit  $\mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bezeichnet. Die resultierende Projektionsmatrix ergibt sich daraus dann zu

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2. \quad (3.26)$$

Auf diese Weise konnten bei der Simulation des reduzierten Systems Rechenzeitverkürzungen bis zu 40 % erreicht werden.

### 3.5 Krylov-Unterraummethoden

Die Krylov-Unterraumverfahren zählen aufgrund ihrer hohen Genauigkeit bei gleichzeitig verhältnismäßig geringem Berechnungsaufwand zu den meistgenutzten Reduktionsmethoden für lineare Systeme mit großer Systemdimension. Ziel dieser Verfahren ist es, die Momente der Übertragungsfunktionsmatrix des vollen und des reduzierten Systems in Übereinstimmung zu bringen. Einen Überblick dazu geben verschiedene Übersichtsartikel [Freund 2003; Antoulas 2005; Baur *et al.* 2014; Beattie & Gugercin 2017].

#### 3.5.1 Verfahrensgrundlagen

Die Übertragungsfunktionsmatrix  $\mathbf{H}(s)$  nach (3.2)

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.27)$$

stellt den Ausgangspunkt für die Herleitung dar. Da hier eine von den meisten Veröffentlichungen abweichende Form der Zustandsraumdarstellung mit  $\mathbf{Ax}$  auf der linken Seite des Gleichungssystems (3.1) verwendet wird, was durch die gängige Darstellung des thermischen Systems in der Finite-Elemente-Beschreibung motiviert ist, unterscheiden sich die nachfolgenden Ausführungen zum Teil in den Vorzeichen. Durch Ersetzen von  $\mathbf{A}$  durch  $\hat{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$  lässt sich die in der Literatur gängige Form herstellen. Durch Reihenentwicklung von (3.27) in eine Taylorreihe mit der Entwicklungsstelle  $s_k$  ergibt sich [Fehr 2011]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} -\mathbf{C}(-(s_k\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E})^i (s_k\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}(s - s_k)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{M}_i^{s_k} (s - s_k)^i. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dabei sind die  $\mathbf{M}_i^{s_k}$  die zugehörigen Momente der Übertragungsfunktion des nicht reduzierten Systems, welche im Zuge der Approximation mit den Momenten des reduzierten Systems  $\hat{\mathbf{M}}_i^{s_k}$  bis zur Ordnung  $o - 1$  mit  $i = 0 \dots o - 1$  in Übereinstimmung zu bringen sind. Dies wird als Momentenabgleich (engl. moment matching) bezeichnet.

Die explizite numerische Berechnung der Momente ist jedoch einerseits äußerst aufwendig und andererseits instabil, weshalb dieses Verfahren insbesondere für große Systeme nicht praktikabel ist [Freund 2003].

Durch Projektion des Systems in einen Krylov-Unterraum kann die explizite Bestimmung der Momente umgangen werden [Gugercin *et al.* 2008]. Unter Nutzung der Vereinfachungen

$$\Psi = (s_k \mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \Omega = (s_k \mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E} \quad (3.29)$$

kann zu jeder Entwicklungsstelle  $s_k$  mit  $k = 1 \dots K$  ein Krylov-Unterraum  $\mathcal{K}^{s_k}$

$$\mathcal{K}^{s_k} = \text{span}\langle \Psi, \Omega \Psi, \dots, \Omega^i \Psi, \dots, \Omega^{o_k-1} \Psi \rangle \quad (3.30)$$

aufgespannt werden, wobei  $o$  Momente in Übereinstimmung gebracht werden. Durch Vereinigung der zu allen Entwicklungsstellen gehörenden Unterräume ergibt sich der gesamte durch die Projektionsbasis aufgespannte Raum

$$\bigcup_{k=1}^K \mathcal{K}^{s_k} \subseteq \text{colsp}\langle \mathbf{V} \rangle. \quad (3.31)$$

Durch Überführung von (3.30) in die Form

$$\mathcal{K}^{s_k} = \text{span}\langle \Psi, \Omega \Psi, \Omega(\Omega \Psi), \dots, \Omega(\Omega^{i-1} \Psi), \dots, \Omega(\Omega^{o_k-2} \Psi) \rangle \quad (3.32)$$

wird die aufeinander aufbauende Ermittlung für die einzelnen Entwicklungsordnungen deutlich. Allerdings ist die direkte Umsetzung von (3.32) mit numerischen Schwierigkeiten verbunden. Aufgrund der begrenzten Rechengenauigkeit werden mit steigendem  $i$  zunehmend linear von den zuvor generierten Basisvektoren abhängige Vektoren erzeugt [Freund 2003]. Deshalb kommen für die Berechnung der Projektionsmatrix Lanczos- [Lanczos 1950] und Arnoldi-Verfahren [Arnoldi 1951] zum Einsatz [Grimme 1997]. Für die hier betrachtete orthogonale Projektion mit  $\mathbf{W} = \mathbf{V}$  sind Arnoldi-Verfahren besser geeignet [Freund 2003]. Darüber hinaus erweisen sie sich als robuster [Lehner 2007]. Mithilfe der modifizierten Gram-Schmidt-Orthogonalisierung mit Reorthogonalisierung wird gewährleistet, dass die in jedem Entwicklungsschritt neu erzeugten Basisvektoren orthogonal zu allen bisher generierten sind [Saad 2003]. Dennoch kann es insbesondere für große Entwicklungsordnungen vorkommen, dass die neuen Basisvektoren nicht linear unabhängig sind. In diesem Fall finden sie in der Projektionsmatrix keine Berücksichtigung, was als Deflation bezeichnet wird.

### 3.5.2 Algorithmus

Für die nachfolgende detaillierte Beschreibung des genutzten Algorithmus erweisen sich die Anzahl  $K$  und die Lage  $s_k$  der Entwicklungsstellen, die Anzahl der in Übereinstimmung gebrachten Momente  $o$  in (3.28) bzw. (3.32) sowie die Wahl der Eingangsmatrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times e}$  in (3.29) bzw. deren geeignete Modifizierung als entscheidend für die Güte des reduzierten Systems, dessen Dimension und die Berechnungszeit. Daraus resultieren unterschiedliche Verfahrensklassen. Die allgemeine Vorgehensweise ist in Algorithmus 1 dargestellt, woraus sich durch entsprechende Annahmen die nachfolgenden Sonderfälle ableiten. Die Funktion



GramSchmidt( $\mathbf{V}, \mathbf{R}$ ) beinhaltet dabei neben der modifizierten Gram-Schmidt-Orthogonalisierung mit Reorthogonalisierung auch die mögliche Deflation.

**Algorithmus 1** Iterativer rationaler Krylov-Algorithmus (Arnoldi-Verfahren) [Lehner 2007; Gugercin et al. 2008].

---

**Eingänge:** Systemmatrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{E}$ ; Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$ ; Vektor der Entwicklungsstellen  $\mathbf{s}$ ; tangentielle Richtungen  $\mathbf{t}$ ; Vektor der Entwicklungsordnungen  $\mathbf{o}$ ; maximale Iterationsanzahl *maxiter*; Abbruchtoleranz *tol*

**Ausgang:** Projektionsmatrix  $\mathbf{V}$

---

```

1  for  $l = 1: \text{maxiter}$ 
2       $\mathbf{V} = []$ 
3      for  $k = 1: K$ 
4           $\mathbf{R} = (\mathbf{A} + s_k \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{t}_k)$ 
5           $\mathbf{V}_{\text{neu}} = \text{GramSchmidt}(\mathbf{V}, \mathbf{R})$ 
6           $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{neu}}$ 
7          for  $i = 2: o_k$ 
8               $\mathbf{R} = (\mathbf{A} + s_k \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{E} \mathbf{V}_{\text{neu}})$ 
9               $\mathbf{V}_{\text{neu}} = \text{GramSchmidt}(\mathbf{V}, \mathbf{R})$ 
10              $\mathbf{V} = [\mathbf{V} \ \mathbf{V}_{\text{neu}}]$ 
11         end
12     end
13      $\mathbf{A}_R = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V}; \quad \mathbf{E}_R = \mathbf{V}^T \mathbf{E} \mathbf{V}$ 
14      $[\Phi, \Lambda] = \text{eig}(\mathbf{A}_R, \mathbf{E}_R)$ 
15     for  $k = 1: K$ 
16          $\mathbf{t}_k = \left( \Phi_k^T (\mathbf{V}^T \mathbf{B}) \right)^T$ 
17          $s_{\text{neu}_k} = \lambda_k$ 
18     end
19     if  $\|\mathbf{s}_{\text{neu}} - \mathbf{s}\|_2 / \|\mathbf{s}_{\text{neu}}\|_2 < \text{tol}$ 
20         break
21     else
22          $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{\text{neu}}$ 
23     end
24 end

```

---

Zunächst sei vom Sonderfall eines einzigen Eingangs  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  ausgegangen. Die einfachste Variante ergibt sich bei Beschränkung auf eine Entwicklungsstelle  $s_k = 0$ , womit sich (3.28) unter Berücksichtigung der Ordnung der Reihenentwicklung zu

$$\mathbf{H}\langle s \rangle \approx \sum_{i=0}^{o-1} -\mathbf{C}(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})^i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} s^i = \sum_{i=0}^{o-1} \mathbf{M}_i s^i. \quad (3.33)$$

vereinfacht. In diesem Fall verkürzt sich Algorithmus 1 auf die Zeilen 4 bis 11. Im Gegensatz dazu verwenden die sogenannten rationalen Krylov-Verfahren eine oder mehrere Entwicklungsstellen  $s_k \neq 0$ , deren Lage entweder vom Anwender direkt vorgegeben oder im Zuge eines Iterationsprozesses iterativ angepasst wird. Die letztgenannten sind als iterative rationale Krylov-Algorithmen (IRKA) in der Literatur zu finden [Gugercin 2008]. In diesem Fall werden als Entwicklungsstellen die Eigenwerte des reduzierten Systems (Zeile 13 bis 18) genutzt. Damit die reduzierte Dimension nicht in jedem Iterationsschritt ansteigt, wird die Entwicklungsordnung zu  $o_k = 1$  gesetzt. Die Iteration wird abgebrochen, wenn sich die Eigenwerte und somit die Entwicklungsstellen nur noch geringfügig ändern (Zeile 19/20).

Für ein System mit mehreren Eingängen  $e > 1$  wird in jedem Berechnungsschritt in (3.32), sofern keine Deflation auftritt, ein Block von genau  $e$  neuen Basisvektoren erzeugt, weshalb dies als Block-Krylov-Verfahren bezeichnet wird. Damit ergibt sich mit  $\mathbf{t}_k = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{e \times e}$  die Dimension des reduzierten Systems  $n$  zu

$$n = e \cdot o \cdot K, \quad (3.34)$$

woraus sich ableiten lässt, dass diese für Systeme mit vielen Eingängen sehr hoch ausfällt.

Abhilfe kann hierbei die tangentielle Interpolation schaffen [Beattie & Gugercin 2017]. Anstatt die Übereinstimmung der Übertragungsfunktionsmatrix des Ausgangssystems  $\mathbf{H}\langle s \rangle$  und des reduzierten Systems  $\mathbf{H}_R\langle s \rangle$  anzustreben, wird die bestmögliche Approximation an den Entwicklungsstellen  $s = s_k$  entlang der tangentialen Richtungen  $\mathbf{t}_k$  gefordert

$$\mathbf{H}\langle s_k \rangle \mathbf{t}_k \approx \mathbf{H}_R\langle s_k \rangle \mathbf{t}_k. \quad (3.35)$$

Wie die Entwicklungsstellen resultieren diese Richtungsvektoren in IRKA aus der Modalanalyse des reduzierten Systems. Während erstere identisch mit den Eigenwerten sind, ergeben sich letztere aus den zugehörigen Eigenvektoren

$$\mathbf{t}_k = \left( \boldsymbol{\phi}_k^T (\mathbf{V}^T \mathbf{B}) \right)^T. \quad (3.36)$$

Die Gleichung (3.36) entspricht also der Anwendung der Modaltransformation auf die mit der Projektionsmatrix des letzten Iterationsschrittes reduzierte Eingangsmatrix. Wegen  $o_k = 1$  und  $e = 1$  wird für jede Entwicklungsstelle nur ein Basisvektor erzeugt und für die reduzierte Dimension gilt

$$n = K. \quad (3.37)$$

Weder die tangentialen Richtungen noch die relevanten Eigenwerte des Systems sind im Vorfeld bekannt, sodass eine iterative Annäherung erforderlich ist, was entsprechende Startwerte voraussetzt. Eine naheliegende Option wäre die ersten  $K$  Eigenwerte und die zugehörige

Modalmatrix des Ausgangssystems als Entwicklungsstellen bzw. zur Berechnung der tangentialen Richtungen in (3.36) zu verwenden. Da jedoch in Kapitel 3.4 gezeigt wurde, dass die wichtigsten Eigenformen des thermischen Systems nur bedingt zu den kleinsten Eigenwerten gehören, erscheint dieses Vorgehen im Gegensatz zu mechanischen Systemen mit dem in der Regel interessierenden Frequenzbereich bis zu einer oberen Grenzfrequenz weniger geeignet. Deswegen kommt für die nachfolgenden Untersuchungen ein mit dem Block-Krylov-Verfahren und der Entwicklungsstelle  $s_k = 0$  reduziertes Modell zur Ermittlung der Startparameter der Iteration zum Einsatz. Insgesamt liefert IRKA ein im Sinne der  $\mathcal{H}_2$ -Norm optimal reduziertes Modell und der numerische Aufwand beschränkt sich auf die Lösung linearer Gleichungssysteme, sodass das Verfahren auch bei sehr großer Systemdimension anwendbar ist [Baur *et al.* 2014].

Ein Punkt, der bisher noch nicht diskutiert wurde, ist der Einfluss der gewählten Anfangsbedingungen auf das reduzierte Modell. Generell sind die gängigen Reduktionsverfahren basierend auf der Zustandsraumformulierung, also die Krylov-Unterraummethoden und das balancierte Abschneiden, für Nullanfangsbedingungen ausgelegt [Beattie *et al.* 2017]. Allerdings erfordert die Ermittlung der Wärmeströme infolge Strahlung die Kenntnis der Absoluttemperaturen. Für die in dieser Arbeit betrachteten Systeme mit einheitlicher Anfangstemperatur  $\theta_0$  genügt zur Herstellung der geforderten homogenen Anfangsbedingungen eine Verschiebung der Nulltemperatur entsprechend

$$\bar{\theta} = \theta - \theta_0. \quad (3.38)$$

Bei der Betrachtung der Wärmestrahlung müssen dann die Elementtemperaturen in (2.81) entsprechend modifiziert werden. Für beliebige Randbedingungen ist diese Vorgehensweise jedoch nicht anwendbar, weil sich anderenfalls Verschiebungen in den Differenztemperaturen und somit auch den konduktiven Wärmeströmen ergeben würden. Heinkenschloss *et al.* empfehlen für das balancierte Abschneiden den Vektor der Anfangstemperaturen an die Eingangsmatrix anzuhängen, sodass die modifizierte Eingangsmatrix  $\bar{\mathbf{B}}$

$$\bar{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} \quad \theta_0/\text{K}] \quad (3.39)$$

entsteht, welche für die Reduktion genutzt wird [Heinkenschloss *et al.* 2011]. Beattie *et al.* schlagen hingegen die gesonderte Reduktion der Anfangsbedingungen einerseits und des Eingangs-/Ausgangsverhaltens andererseits vor [Beattie *et al.* 2017].

Noch Gegenstand aktueller Forschung ist die Bestimmung strikter Fehlerschranken für die Krylov-Unterraummethoden, um validierte Aussagen zur Qualität des reduzierten Modells treffen zu können [Panzer 2014]. Einige Ansätze basieren auf dem Vergleich auf unterschiedliche Weise reduzierter Modelle, was zum Beispiel verschiedene Entwicklungsstellen oder voneinander abweichende Systemdimensionen sein können [Grimme 1997; Bechtold *et al.* 2005]. Wenn die Abweichung zwischen den beiden reduzierten Systemen gering ist, wird davon ausgegangen, dass auch der Fehler zum Ausgangsmodell klein ausfällt. Andere Verfahren bewerten den Fehler im Frequenzbereich [Konkel *et al.* 2008; Fehr *et al.* 2013]. Dieses Vorgehen ist jedoch für thermische Systeme aufgrund schwer festzulegender Frequenzschranken

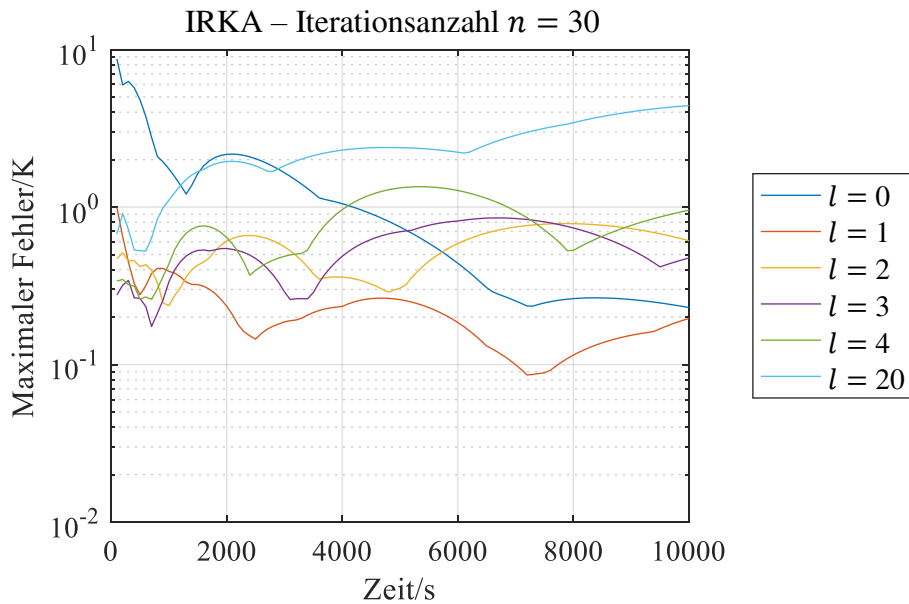
nicht anwendbar. Panzer *et al.* beschränken sich auf strikt dissipative Systeme und evaluieren den Fehler auf Basis der Lyapunov-Gleichungen, wobei der numerische Aufwand mit steigender Genauigkeit der Fehlerschranken stark ansteigt [Panzer *et al.* 2013].

### 3.5.3 Anwendungsbeispiel

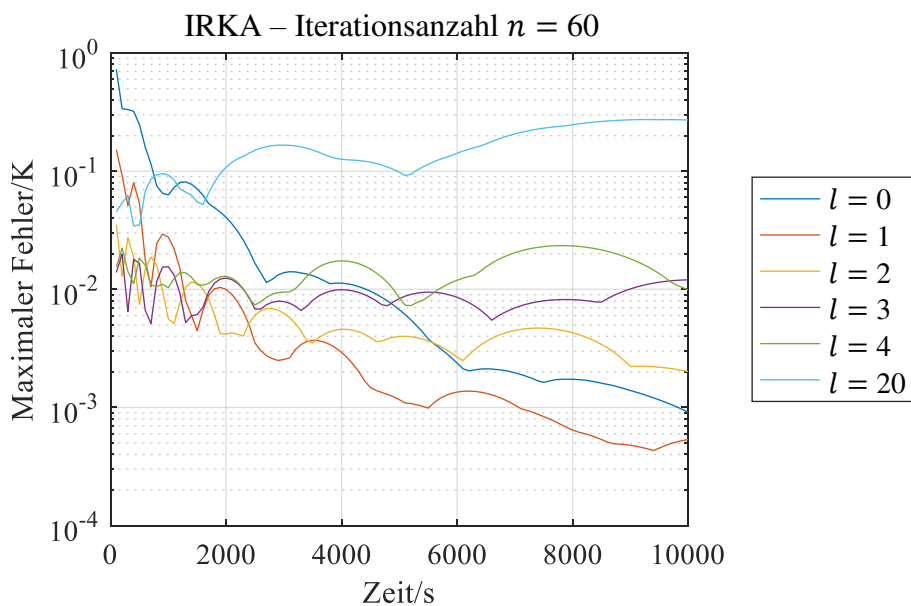
Abschließend sollen die Krylov-Unterraummethoden anhand des vereinfachten Rotationsbehältermodells aus Kapitel 2.4.1 hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit bei thermischen Systemen näher untersucht werden. Da bislang die Berücksichtigung der Wärmestrahlung in der Modellordnungsreduktion noch nicht diskutiert wurde, beschränken sich die Berechnungen auf das lineare Modell, welches nur Konvektions-, Wärmestrom- und Temperaturrandbedingungen enthält. Die Wärmestrahlung wird folglich zunächst vernachlässigt.

Das System verfügt über fünf Eingänge ( $e = 5$ ), welche die drei Wärmestromlasten, die Temperaturrandbedingung und die Konvektion repräsentieren. Das genaue Vorgehen hierzu wird in Kapitel 4.2 vorgestellt, weshalb hier nur erwähnt sei, dass dies mit keinen Genauigkeitsverlusten einhergeht, sodass die nachfolgend dargestellten Abweichungen ausschließlich auf den Reduktionsprozess zurückzuführen sind. Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, kommt ein Block-Krylov-Verfahren mit der Entwicklungsstelle  $s_k = 0$  zur Ermittlung der Startwerte der IRKA-Iterationen zum Einsatz. Dieser Berechnungsschritt wird im Folgenden als Iterationsschritt 0 ( $l = 0$ ) bezeichnet. Angesichts der Anzahl an Eingängen und wegen  $K = 1$  muss die hieraus resultierende reduzierte Dimension nach (3.34) ein Vielfaches von 5 sein. Die jeweils gewählte Entwicklungsordnung  $o$  ergibt sich also zu  $o = n/e$ .

Abbildung 3.5 und Abbildung 3.6 zeigen die Temperaturabweichungen für die reduzierten Dimensionen  $n = 30$  und  $n = 60$  in Abhängigkeit von der Anzahl an IRKA-Iterationen  $l$ . Die Ergebnisse für  $n = 90$  und  $n = 120$  sowie ein Vergleich für die verschiedenen Reduktionsdimensionen finden sich in Anhang B. Es ist erkennbar, dass das Block-Krylov-Verfahren ( $l = 0$ ) zu Beginn der Simulation die größten Abweichungen liefert. Die schnellen Erwärmungsprozesse direkt an den Heizfolien werden also nur ungenau abgebildet. Mit steigender Simulationszeit, wenn sich die Temperatur immer mehr der stationären Verteilung annähert, sinkt der Fehler deutlich. Das Modell bildet also den unteren Frequenzbereich der Übertragungsfunktionen sehr gut ab, während sich bei hohen Frequenzen größere Ungenauigkeiten ergeben. Mit Bezug auf die hier untersuchte Aufgabenstellung des Behältervorwärmens ist letzteres aber von untergeordneter Bedeutung, solange der Fehler wie in Abbildung 3.6 innerhalb eines kurzen Zeitintervall deutlich abnimmt, da einerseits direkt am Anfang noch keine kritischen Temperaturen auftreten, die im Sinne einer möglichen Überhitzung einen Eingriff bedingen, und andererseits die thermisch induzierten Beanspruchungen aufgrund der geringen Temperaturdifferenzen nicht versagenskritisch sind.



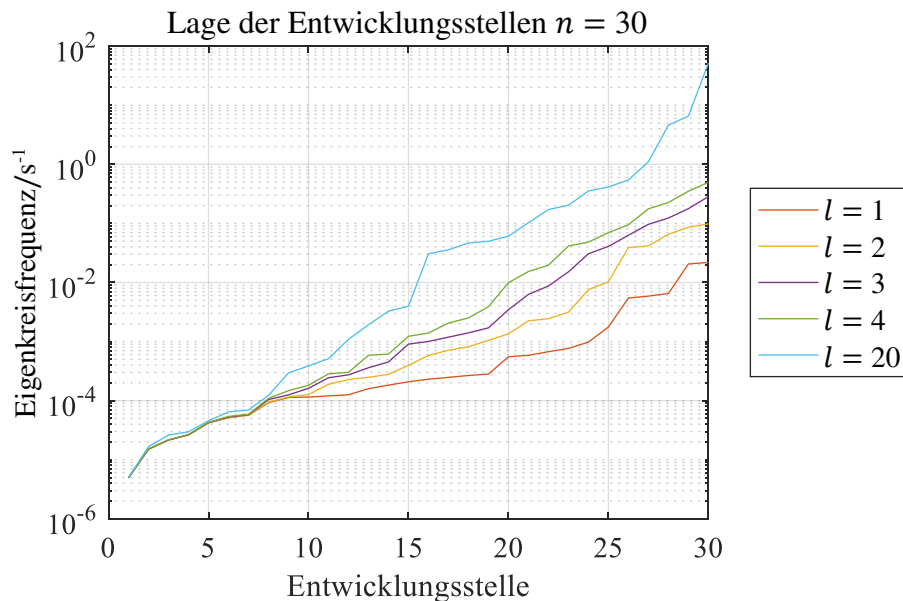
**Abbildung 3.5** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension  $n = 30$  bei Verwendung von  $e = 5$  Eingängen in Abhängigkeit von der Anzahl an IRKA-Iterationen  $l$ .



**Abbildung 3.6** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension  $n = 60$  bei Verwendung von  $e = 5$  Eingängen in Abhängigkeit von der Anzahl an IRKA-Iterationen  $l$ .

Für die erste Iteration ( $l = 1$ ) ist bei allen Modellen eine Verringerung des Reduktionsfehlers insbesondere zu Simulationsbeginn feststellbar, allerdings wird in keinem Fall eine Konvergenz des Algorithmus erreicht und die Fehler steigen gerade in Richtung der stationären Lösung wieder an. Dies zeigt sich daran, dass die oberen Eigenkreisfrequenzen der Entwicklungsstellen in Abbildung 3.7 immer weiter zunehmen, sodass die Konvergenzbedingung in Algorithmus 1 (Zeile 19) nicht erfüllt wird. Aber auch in den untersten Eigenkreisfrequenzen treten geringfügige Verschiebungen auf, welche für die zunehmenden Abweichungen bei großen Simulationszeiten verantwortlich sind.

Das gleiche Verhalten konnte auch für das Modell des Rotationsbehälters mit höherem Freiheitsgrad beobachtet werden, während an anderen Erprobungsmodellen nach wenigen Iterationen Konvergenz auftrat. Erwartungsgemäß erhöht sich die Modellqualität mit ansteigender Dimension des reduzierten Modells, da die Entwicklungsordnung und somit auch die Approximationsgüte der Übertragungsfunktionen zunehmen. Bei hinreichend großer Modelldimension ( $n \geq 90$ ) kann für ein zufriedenstellendes Reduktionsergebnis ganz auf den Iterationsprozess verzichtet werden.



**Abbildung 3.7** Lage der Entwicklungsstellen in den unterschiedlichen Iterationsschritten  $l$  für das reduzierte Modell der Dimension  $n = 30$ .

Von entscheidender Bedeutung bei der Bewertung reduzierter Modelle ist neben der Reduktionsgüte auch die Rechenzeit, welche Tabelle 3.2 dokumentiert. Es zeigt sich, dass bereits für eine einzelne Zeitbereichssimulation die Modellordnungsreduktion diesbezüglich Vorteile mit sich bringt. Die Reduktionszeit für das IRKA-Verfahren enthält dabei die Rechenzeit für die Bestimmung der Startwerte mittels Block-Krylov-Methode und die erste Iteration, welche demzufolge 46,8 s bzw. 96,7 s dauert. Der darin auftretende Unterschied mit dem Faktor von ungefähr 4,3 erklärt sich daraus, dass im ersten Fall beim einmaligen Lösen des Gleichungssystems fünf neue Basisvektoren erzeugt werden ( $e = 5$ ). Die reduzierte Dimension verhält sich erwartungsgemäß nahezu proportional zur Reduktionszeit. Für beide Reduktionsdimensionen erweist sich darüber hinaus die Verwendung des Block-Krylov-Verfahrens zur Ermittlung der tangentialen Richtungen und Entwicklungsstellen als numerisch effektiver als die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren des Ausgangsmodells, welche 27,8 s bzw. 44,1 s in Anspruch nimmt. Dies hängt damit zusammen, dass für die Eigenwertberechnung, wenn sie auch durch Projektion in einen Krylov-Unterraum erfolgt, eine höhere Reduktionsdimension notwendig ist, um den Fehler gering zu halten.

**Tabelle 3.2** Vergleich der Rechenzeiten für das Block-Krylov- und das IRKA-Verfahren.

	Reduktionszeit	Simulationszeit
Vollmodell	---	238,3 s
Block-Krylov ( $n = 30, l = 0$ )	10,7 s	0,12 s
IRKA ( $n = 30, l = 1$ )	57,5 s	0,12 s
Block-Krylov ( $n = 60, l = 0$ )	22,5 s	0,15 s
IRKA ( $n = 60, l = 1$ )	119,2 s	0,15 s

Vor dem Hintergrund der gezeigten Ergebnisse erweist es sich für die hier betrachteten Modelle als nicht sinnvoll mehr als einen Iterationsschritt mit dem IRKA-Verfahren auszuführen. Somit handelt es sich im eigentlichen Sinne um ein rationales Krylov-Verfahren unter Nutzung der tangentialen Interpolation. Während der Iterationen konnte trotz ansteigender Rechenzeit kein Genauigkeitsgewinn erzielt werden, was an der fehlenden Konvergenz des Algorithmus lag. Allerdings ist diese Aussage nicht auf andere Modelle verallgemeinerbar. Angesichts der deutlich geringeren Reduktionszeiten des Block-Krylov-Verfahrens bei nur minimal mit der Reduktionsdimension ansteigender Simulationszeit kann es sich als vorteilhaft erweisen, den Freiheitsgrad des reduzierten Systems höher zu wählen, anstatt einen Iterationsschritt zu rechnen. So liefert das Block-Krylov-Verfahren mit  $n = 60$  eine bessere Reduktionsgüte als das IRKA-Verfahren mit  $n = 30$  bei nur 40 % Rechenzeit.

Die Berücksichtigung der Wärmestrahlung in Verbindung mit der Nutzung von Krylov-Unterraummethoden für die Modellordnungsreduktion erweist sich als nicht trivial. Dies lässt sich vor allem darauf zurückführen, dass jeder Modellknoten, an dem Wärmeströme infolge Strahlung auftreten, einen separaten Systemeingang darstellt. Dies verhindert wegen  $\mathcal{O}(e) = \mathcal{O}(N)$  nach (3.34) eine effektive Ordnungsreduktion für die Block-Krylov-Verfahren. Deshalb beschäftigt sich Kapitel 4 mit der Reduktion der Anzahl der Systemeingänge. Des Weiteren wird die Anwendbarkeit der für IRKA notwendigen tangentialen Interpolation für diesen Fall diskutiert.

## 3.6 Proper Orthogonal Decomposition

Die Proper Orthogonal Decomposition (POD) kommt vorrangig für nichtlineare Systeme zur Anwendung, wo andere etablierte Verfahren, wie die Krylov-Unterraummethoden oder das balancierte Abschneiden an Grenzen stoßen. Ein genereller Überblick wird in diversen Übersichtsartikeln gegeben [Pinnau 2008; Sachs & Volkwein 2010; Volkwein 2012]. Auch Anwendungen der Methode auf thermische Felder finden sich in der Literatur [Yousefi *et al.* 2004; Bialecki *et al.* 2005; Falkiewicz & Cesnik 2011; Brands *et al.* 2016].

### 3.6.1 Verfahrensgrundlagen

Die Ansatzfunktionen der Reduktionsbasis werden direkt aus Lösungen des untersuchten dynamischen Systems zu bestimmten Zeitpunkten generiert [Pinnau 2008]. Diese Momentaufnahmen des Zustandsvektors werden als Snapshots bezeichnet. Sie müssen das gesamte

abzubildende Systemverhalten beinhalten, weshalb ihrer Auswahl eine entscheidende Rolle zukommt [Kostova-Vassilevska & Oxberry 2018]. In der Regel werden sie aus transienten Analysen des Ausgangsmodells mit speziellen Eingangsfunktionen erzeugt. Dieser erste Abschnitt, welcher vor der Reduktion auszuführen ist, wird als Offline-Phase bezeichnet, was sich am Beispiel einer Echtzeitsimulation veranschaulichen lässt. Die Bereitstellung der Snapshots erfolgt im Vorfeld gegebenenfalls auch unter Nutzung massiver Parallelisierung auf Hochleistungsrechnern. Das erzeugte reduzierte System sehr kleiner Dimension kann dann in der sogenannten Online-Phase für die auszuführenden Echtzeitsimulationen verwendet werden.

Die Snapshots sind im Allgemeinen aufgrund ihrer Erzeugung untereinander teilweise linear abhängig oder zumindest nahezu linear abhängig, sodass sie sich nicht direkt als Basisfunktionen eignen [Rieß 2014]. Stattdessen dient die Singulärwertzerlegung der Extrahierung der relevanten Systemeigenschaften aus den Trainingsdaten und die zugehörigen Singulärvektoren bilden die gesuchten Basisfunktionen [Sachs & Volkwein 2010].

Zunächst sollen die für die Konstruktion der Projektionsmatrix heranzuziehenden  $\zeta$  diskreten Lösungen im Zeitbereich  $\mathbf{x}\langle t_i \rangle$  mit  $i = 1 \dots \zeta$  als bekannt vorausgesetzt werden. Des Weiteren sind an dieser Stelle alle Zustände des Systems gleichzeitig als Ausgänge zu betrachten, sodass für den Ausgangsvektor  $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}\langle t_i \rangle$  gilt und die Ausgangsmatrix einer Einheitsmatrix entspricht  $\mathbf{C} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Anderenfalls würde die Projektionsmatrix eine inkonsistente Dimension erhalten. Die einzelnen Snapshots werden spaltenweise in der Snapshotmatrix  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times \zeta}$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \quad \dots \quad \mathbf{y}_i \quad \dots \quad \mathbf{y}_\zeta] \quad (3.40)$$

zusammengefasst. Auf diese wird dann die Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}_L \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}_R^T \quad (3.41)$$

angewendet, wobei  $\mathbf{U}_L \in \mathbb{R}^{N \times \zeta}$  und  $\mathbf{U}_R \in \mathbb{R}^{N \times \zeta}$  die Links- bzw. Rechtssingulärvektoren enthalten. In der Literatur werden stattdessen in der Regel die Buchstaben  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  genutzt. Die Matrix  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{\zeta \times \zeta}$  wird durch die Singulärwerte  $\sigma_i = \Sigma_{ii}$  in der Hauptdiagonale gebildet. Diese sind stets positiv und in  $\mathbf{\Sigma}$  der Größe nach geordnet [Dahmen & Reusken 2008]

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \dots \geq \sigma_\zeta. \quad (3.42)$$

Die Projektionsmatrix wird durch die zueinander orthogonalen Linkssingulärvektoren

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_L \quad (3.43)$$

gebildet, womit zunächst ein reduziertes System der Dimension  $\zeta$  statt  $N$  erzeugt wird, welches in der Lage ist, die Snapshots exakt wiederzugeben [Kostova-Vassilevska & Oxberry 2018]. Dies stellt für die hier betrachteten Systeme mit hohem Freiheitsgrad aber rechenzeitbedingt verhältnismäßig kleiner Snapshotsanzahl eine wesentliche Reduktion dar.

Im Allgemeinen fallen die Singulärwerte von  $\sigma_1$  ausgehend aber sehr stark ab. Dies trifft insbesondere für thermische Systeme, deren Snapshots aus transienten Simulationen mit relativ feiner Zeitabtastung gewonnen werden, zu, da sich die Temperaturverteilung aufgrund der hohen thermischen Trägheit nur langsam verändert, woraus resultierend zu benachbarten Zeitpunkten starke lineare Abhängigkeiten der Zustandsvektoren auftreten. Damit kann häufig ein



exponentieller Abfall der Singulärwerte beobachtet werden [Pinnau 2008]. Je kleiner diese sind, desto weniger tragen sie zur Repräsentation der Snapshotmatrix  $\mathbf{Y}$  in (3.41) bei. Deswegen können die zu den hinreichend kleinen Singulärwerten korrespondierenden Singulärvektoren bei der Bildung der Projektionsbasis mit nur minimalen Auswirkungen auf das reduzierte Modell vernachlässigt werden [Volkwein 2012]. Anstatt der im Falle der vollständigen Singulärwertzerlegung ermittelten  $\zeta$  Singulärwerte werden lediglich die  $n$  größten berücksichtigt. Damit erhält (3.41) die Form

$$\mathbf{Y} \approx \tilde{\mathbf{U}}_L \tilde{\mathbf{\Sigma}} \tilde{\mathbf{U}}_R^T \quad (3.44)$$

mit  $\tilde{\mathbf{U}}_L \in \mathbb{R}^{N \times n}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_R \in \mathbb{R}^{N \times n}$  sowie  $\tilde{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Von entscheidender Bedeutung ist also, für welches Verhältnis  $\sigma_i/\sigma_1$  die Approximation abgebrochen werden kann. Die Singulärwertzerlegung liefert dann eine für die jeweilige Systemdimension im Sinne des Fehlerquadratminimums optimale Approximation der Snapshotmatrix [Pinnau 2008]. Eine allgemeingültige Beantwortung dieser Frage ist nicht möglich, da dies stark vom jeweiligen System aber auch von der geforderten Modellgüte abhängt. So sind in der Fluidodynamik bei der Untersuchung einer Primärströmung überlagerter kleiner Fluktuationen beispielsweise auch zu sehr niedrigen Singulärwerten gehörende Moden entscheidend, da anderenfalls die interessierenden Strömungsphänomene aus dem reduzierten Modell entfernt werden [Pinnau 2008]. Für die hier betrachteten thermischen Systeme ist ein derartiges Verhalten nicht zu erwarten und auf jeden Fall können alle Singulärwerte für die

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_1} < eps \quad (3.45)$$

gilt, wobei *eps* die programmspezifische Rechengenauigkeit darstellt, ohne Genauigkeitsverlust abgeschnitten werden. Im Allgemeinen kann die Grenze aber deutlich höher gewählt werden, worauf in Kapitel 3.6.3 näher eingegangen wird, ohne dass der damit verbundene Approximationsfehler signifikant anwächst, was jedoch aufgrund der notwendigen Auswahl der Trainingsdaten nicht zwangsläufig mit einer guten Repräsentation des dynamischen Verhaltens des Ausgangssystems einhergeht. Ein wesentlicher Vorteil gegenüber den Krylov-Unterraumverfahren ist die Unabhängigkeit der reduzierten Dimension von der Anzahl der Systemeingänge und -ausgänge.

Rechenzeitbedingt muss bei der Snapshotzeugung eine Auswahl zu betrachtender Parametersätze und Simulationsszenarien getroffen werden. Gleichzeitig besteht die Notwendigkeit, die relevanten Systemeigenschaften in den Beispielsimulationen abzubilden. Die in den späteren Simulationen auftretenden Zustandsvektoren müssen sich also möglichst genau durch die Reduktionsbasis und demzufolge auch die Snapshots repräsentieren lassen. Infolgedessen eröffnet sich ein Zielkonflikt zwischen den Simulationszeiten in der Offline-Phase, welche möglichst gering gehalten werden sollen, und der Validität des reduzierten Modells innerhalb eines weiten Parameterspektrums während der Online-Phase, was eine hinreichend große Snapshotbasis für den Reduktionsprozess voraussetzt. Deshalb kommt der Snapshotsauswahl eine zentrale Bedeutung zu. Die Genauigkeit des reduzierten Systems hängt dabei neben den verwendeten Parametersätzen ebenfalls von den gewählten Zeitschrittweiten ab, da dies einer

Wichtung entspricht [Lass & Volkwein 2014]. Erfolgen die wesentlichen Änderungen der Zustandsvektoren nur innerhalb eines kleinen Zeitintervalls, so muss dieses deutlich feiner abgetastet werden, um das entsprechende Systemverhalten im Zuge der Modellordnungsreduktion zu erhalten.

Kunisch und Volkwein erweitern die Snapshotmatrix ausgehend von einer groben äquidistanten Abtastung des Zeitbereichs, indem basierend auf der Änderung der Lösung des Ausgangsmodells zwischen den bisher berechneten Zustandsvektoren die Zeitpunkte ausgewählt und hinzugefügt werden, welche einen maximalen Informationsgewinn versprechen [Kunisch & Volkwein 2010]. Eine Übertragung auf parameterabhängige Systeme ist möglich. Lass und Volkwein adaptieren diese Methode für Berechnungen im Frequenzbereich und erweitern sie dahingehend, dass die Extrapolation auf an das bislang untersuchte Frequenzintervall angrenzende Bereiche erfolgt, innerhalb derer eine optimale Snapshotposition ermittelt wird [Lass & Volkwein 2014]. Im Gegensatz dazu versehen Bui-Thanh *et al.* die einzelnen Zustandsvektoren mit individuellen Wichtungen, deren Optimierung eine Anpassung der Genauigkeit für bestimmte Systemausgänge ermöglicht [Bui-Thanh *et al.* 2007]. Eine Erweiterung des Trainingsdatensatzes wird hierbei folglich nicht angestrebt. Hoppe und Liu wählen die Zeitpunkte der Abtastung analog zur adaptiven Schrittweitensteuerung bei der Zeitintegration durch Vergleich der Lösung zweier Integrationsverfahren unterschiedlicher Ordnung [Hoppe & Liu 2014]. Die zusätzliche Berücksichtigung von Zeitableitungen des Zustandsvektors als Snapshots ermöglicht teilweise signifikante Genauigkeitsverbesserungen [Kostova-Vassilevska & Oxberry 2018].

Andere Verfahren basieren auf der Kombination der Proper Orthogonal Decomposition mit einem sogenannten Greedy-Algorithmus, welcher iterativ jeweils den Datensatz mit dem größten Fehler auswählt und die zugehörigen Zustandsvektoren der Snapshotmatrix hinzufügt [Haasdonk 2013; Paul-Dubois-Taine & Amsallem 2015]. Dieses Vorgehen erfolgt analog zu den Reduced Bases Methoden [Haasdonk & Ohlberger 2008]. Allerdings erfordern diese Verfahren die Bestimmung des Fehlers des reduzierten Modells im Vergleich zum Ausgangsmodell, dessen Auswertung sich jedoch aufgrund der hohen Systemdimension als zu rechenzeitintensiv erweist. Für bestimmte Probleme stehen entsprechende Fehlerschätzer zur Verfügung, wohingegen in den anderen Fällen in der Regel das Residuum nach Einsetzen der expandierten Lösung  $V\mathbf{x}_R$  in die Differentialgleichung (3.1) als Fehlerindikator dient [Paul-Dubois-Taine & Amsallem 2015]. Gerade für einen großen untersuchten Parameterraum ist dieses Vorgehen dennoch zeitaufwendig, weshalb zunächst der Bereich identifiziert wird, in welchem der Fehlerhöchstwert zu erwarten ist und in diesem dann eine feinere Abtastung erfolgt [Paul-Dubois-Taine & Amsallem 2015]. Nigro *et al.* passen die Reduktionsbasis direkt im Verlauf der Simulation an [Nigro *et al.* 2016]. Ausgehend von der Berechnung weniger Zeitschritte mit dem Ausgangsmodell wird zunächst ein reduziertes System erzeugt, dessen Gültigkeit aufgrund der wenigen Snapshots stark begrenzt ist. Die weitere Berechnung erfolgt dann mit dem Modell kleinen Freiheitsgrades und nur, wenn die mittels des genutzten Fehlerschätzers bestimmte Ungenauigkeit zu groß wird, führen weitere Rechenschritte mit dem Ausgangsmodell zu neuen Snapshots und einer Anpassung der Reduktionsbasis. Im weiteren

Simulationsverlauf können gegebenenfalls auch ausgewählte Systemzustände vom Anfang wieder entfernt werden, da sie nur noch wenig zur Beschreibung des aktuellen Systemverhaltens beitragen.

Insbesondere für sehr große Systeme steigt die Rechenzeit für die Singulärwertzerlegung mit wachsender Snapshotanzahl erheblich an. Des Weiteren kann die zulässige Größe der Snapshotmatrix durch den zur Verfügung stehenden Speicher limitiert sein. Für derartige Anwendungsfälle schlagen Himpe *et al.* eine hierarchische Berechnung der Reduktionsbasis vor [Himpe *et al.* 2018]. Dazu wird die Singulärwertzerlegung ausgeführt, sobald die Snapshotmatrix eine vorab definierte Größe erreicht. Im Anschluss daran können die zugehörigen Zustandsvektoren gelöscht werden und nur die ausgewählten Linkssingulärvektoren verbleiben im Speicher. Die auf diese Weise erzeugten Matrizen dienen dann als Snapshots einer erneuten Singulärwertzerlegung. Dieses Vorgehen kann in mehreren Stufen gestaffelt werden, sodass auch bei einer extrem hohen Snapshotanzahl eine Berechnung problemlos gelingt. Ein ähnliches Vorgehen wählen Wang *et al.* mit dem Ziel maximaler Parallelisierung, indem die einzelnen Simulationen auf getrennten Prozessoren ausgeführt und auch die zugehörigen Singulärvektoren lokal berechnet werden [Wang *et al.* 2016]. Erst am Schluss werden diese dann zusammengeführt und einer erneuten Singulärwertzerlegung unterzogen. Oxberry *et al.* berechnen die Reduktionsbasis inkrementell und passen diese während der Offline-Simulation mit jedem hinzukommenden Snapshot an, wenn eine bestimmte Fehlergrenze zwischen aktuellem reduziertem Modell und Ausgangsmodell überschritten wird [Oxberry *et al.* 2017]. Dies minimiert den notwendigen Speicherbedarf, da nur die aktuelle Projektionsmatrix und ein Zustandsvektor im Speicher benötigt werden.

### 3.6.2 Numerische Berechnung der Singulärwerte

Für die numerische Berechnung der Singulärwerte und somit auch der Projektionsmatrix stehen drei Verfahren zur Verfügung, welche nachfolgend diskutiert werden sollen [Pinnau 2008; Volkwein & Hepberger 2008]. Die erste Variante stellt die direkte Ausführung der Singulärwertzerlegung nach (3.41) dar, wozu die Matrix beispielsweise mittels Householder-Transformation in eine bidiagonale Form überführt wird, auf welche im zweiten Schritt eine QR-Zerlegung angewendet wird [Schwarz & Köckler 2009]. Die Linkssingulärvektoren stellen direkt die Ansatzfunktionen des reduzierten Systems dar, sodass für die Projektionsmatrix

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{U}}_L \quad (3.46)$$

gilt. Dieses Vorgehen ist jedoch mit einem hohen numerischen Aufwand verbunden.

Die zweite Variante nutzt die Äquivalenz zwischen den Singulärwerten und den Wurzeln der Eigenwerte  $\lambda_i$  des symmetrischen Eigenwertproblems

$$\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \boldsymbol{\phi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i \quad (3.47)$$

mit

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}. \quad (3.48)$$

Die Eigenvektoren  $\boldsymbol{\phi}_i$  entsprechen hier den linken Singulärvektoren und damit auch den Basisvektoren der Projektionsmatrix, sodass

$$\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{U}}_L = \boldsymbol{\Phi} \quad (3.49)$$

gilt. Zwar stehen zur Lösung des Eigenwertproblems auch für große Systemdimensionen effiziente Verfahren zur Verfügung, dennoch ist die beschriebene Vorgehensweise für die hier untersuchten Modelle mit erheblichen numerischen Schwierigkeiten verbunden. Das Matrixprodukt  $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$  stellt eine vollbesetzte Matrix dar, welche im Falle  $N > 10^5$  einen enormen Speicherplatz benötigt oder gar nicht mehr darstellbar ist. Deswegen eignet sich diese Methode vorrangig für kleine Systeme mit sehr vielen Snapshots  $\zeta > N$ , welche hier allerdings nicht vorliegen, weshalb dieser Ansatz nachfolgend nicht genutzt wird.

Auch das Eigenwertproblem

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \boldsymbol{\phi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i \quad (3.50)$$

eignet sich zur Extraktion der Singulärwerte [Volkwein2008]. Für die hier untersuchten Systeme mit  $N \gg \zeta$  ist dieses aufgrund des Matrixproduktes  $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{\zeta \times \zeta}$  mit geringem numerischem Aufwand lösbar. Die Singulärwerte

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad (3.51)$$

die linken Singulärvektoren  $\tilde{\mathbf{u}}_{L_i}$  und damit auch die Spalten der Projektionsmatrix  $\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} = \frac{\mathbf{Y} \boldsymbol{\phi}_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (3.52)$$

lassen sich auf einfache Weise berechnen. Allerdings ist beiden Berechnungsvarianten unter Nutzung des Eigenwertproblems gemeinsam, dass diese aus numerischer Sicht weniger stabil sind, was darauf zurückzuführen ist, dass sich aufgrund der Matrixprodukte  $\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T$  bzw.  $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$  die Konditionszahl erhöht [Bärwolff 2016]. Dennoch erweist sich hier das Eigenwertproblem (3.50) aufgrund der numerischen Effizienz als sehr gut geeignet zur Bestimmung der Projektionsmatrix.

### 3.6.3 Anwendungsbeispiel lineare Modellordnungsreduktion

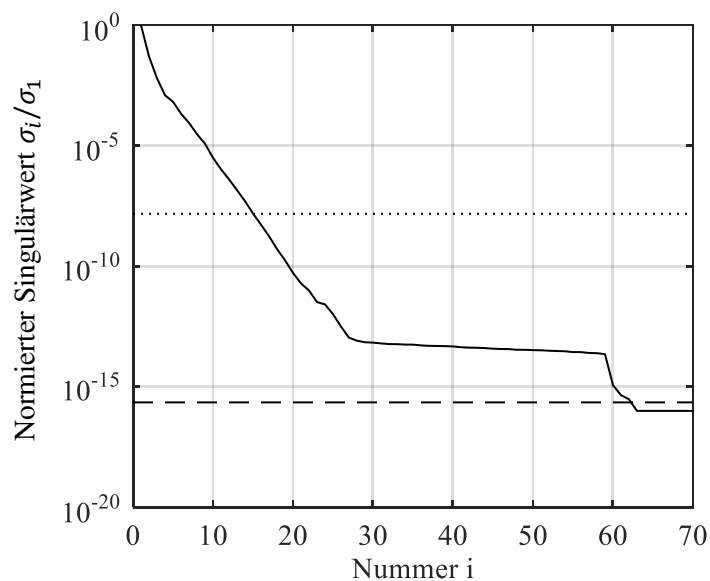
Analog zu Kapitel 3.5.3 wird zunächst das lineare Modell des vereinfachten Rotationsbehälters diskutiert. Die Wärmestrahlung bleibt somit unberücksichtigt. Anhand von vier Beispiellastfällen, deren Parameter in Tabelle 3.3 spezifiziert sind, soll nachfolgend die Empfindlichkeit gegenüber Abweichungen zwischen den Beispielsimulationen zur Snapshotgenerierung und den Simulationen im reduzierten System aufgezeigt werden. Dazu dient der zwecks nachfolgender Vergleichsmöglichkeiten bewusst gewählte Fall mit der Nutzung einer einzelnen Zeitbereichssimulation zur Erzeugung der Reduktionsbasis. Die für das Vollmodell zur Berechnung der Snapshots verwendeten Lastparameter entsprechen dabei dem Fall a) und die Abstrakte beträgt 100 s bei einer Gesamtsimulationsdauer von 10.000 s, sodass insgesamt 101 Snapshots erstellt werden. Für die Konvektion variiert nur die Umgebungstemperatur  $\theta_\infty$ , während der Wärmeübergangskoeffizient konstant bleibt. Im Lastfall b) findet eine Erhöhung der Heizleistungen

um 10 % statt und in c) eine Verminderung um 40 % bei konstanten Anfangsbedingungen sowie unveränderter Lager- und Umgebungstemperatur. Im Gegensatz dazu variieren in d) sämtliche Parameter, sodass die resultierenden Temperaturverteilungen signifikant abweichen.

**Tabelle 3.3** Lastparameter für die vier Simulationsszenarien in Anlehnung an Tabelle 2.7.

Lastfall	a)	b)	c)	d)
Heizung 1: $\dot{q}_1$	3 W/cm <sup>3</sup>	3,3 W/cm <sup>3</sup>	1,8 W/cm <sup>3</sup>	6 W/cm <sup>3</sup>
Heizung 2: $\dot{q}_2$	0,5 W/cm <sup>3</sup>	0,55 W/cm <sup>3</sup>	0,3 W/cm <sup>3</sup>	1 W/cm <sup>3</sup>
Heizung 3: $\dot{q}_3$	2,5 W/cm <sup>3</sup>	2,75 W/cm <sup>3</sup>	1,5 W/cm <sup>3</sup>	1 W/cm <sup>3</sup>
Lagertemperatur $\theta_{\text{Lager}}$	293,15 K	293,15 K	293,15 K	333,15 K
Umgebungstemperatur $\theta_{\infty}$	313,15 K	313,15 K	313,15 K	293,15 K
Anfangstemperatur $\theta_0$	293,15 K	293,15 K	293,15 K	333,15 K

Abbildung 3.8 zeigt den Abfall der auf den Maximalwert normierten Singulärwerte, wobei die Berechnung hier über die tatsächliche Singulärwertzerlegung und nicht über das Eigenwertproblem erfolgte. Insgesamt tritt insbesondere am Anfang ein starker Abfall auf und es ergeben sich 62 oberhalb der Rechengenauigkeit  $\epsilon_{ps}$  (gestrichelte Linie) liegende Singulärwerte. Die bei der Verwendung einer höheren reduzierten Dimension vorzufindenden minimalen Veränderungen des Berechnungsergebnisses gehen dann nur noch auf die Integrationstoleranzen zurück. Dient im Gegensatz dazu die Lösung des Eigenwertproblems (3.47) oder (3.50) zur Berechnung der Singulärwerte, können diese angesichts der Wurzelbildung in (3.48) bzw. (3.51) nur bis  $\sqrt{\epsilon_{ps}}$  (gepunktete Linie) mit hoher Genauigkeit ermittelt werden. Daraus folgt hier eine maximale reduzierte Dimension  $n = 15$ . Darüber hinaus ist die Verwendung von mehr Singulärvektoren in der Projektionsmatrix aufgrund der dann wirksamen numerischen Ungenauigkeiten mit erheblichen Verfälschungen des Systemverhaltens verknüpft und infolgedessen unzulässig.

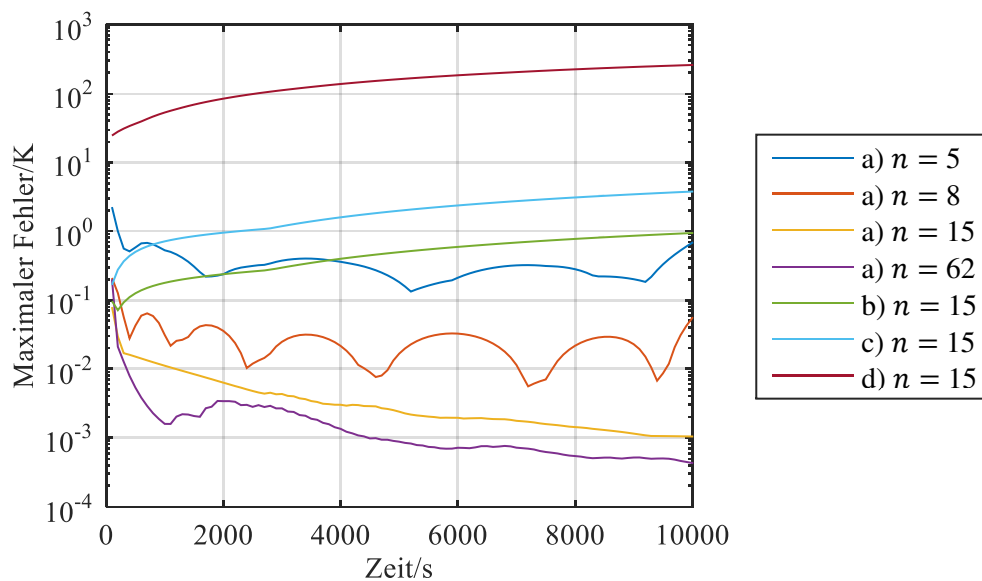


**Abbildung 3.8** Abfall der Singulärwerte der Snapshotmatrix mit der programmspezifischen Rechengenauigkeit (---) sowie deren Wurzel (⋯).

Die Gegenüberstellung der Reduktionsergebnisse in Abbildung 3.9 verdeutlicht, dass bereits mit einer sehr geringen Systemdimension  $n = 8$  im Fall a) nur minimale Fehler auftreten. Zwischen dem durch die Numerik des Eigenwertproblems begründeten Freiheitsgrad  $n = 15$  und der betrachteten Maximaldimension  $n = 62$  ergeben sich minimale Unterschiede, welche für die hier untersuchten Fragestellungen als unbedeutend eingestuft werden können. Somit kann auch für nachfolgende Untersuchungen die Abbruchgrenze

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_1} > \sqrt{\text{eps}} \quad (3.53)$$

verwendet werden. Die hohe Genauigkeit resultiert für den Fall a) daraus, dass die zugehörigen Berechnungsergebnisse des Ausgangsmodells als Snapshots dienen. Bereits geringfügige Änderungen der Lastparameter (Fall b) bewirken einen starken Anstieg des Fehlers und bei starken Abweichungen (Fall d) entstehen gänzlich unbrauchbare Ergebnisse. Es wären also noch deutlich mehr Trainingsdaten und damit auch Simulationen in der Offline-Phase notwendig, um das Systemverhalten innerhalb des untersuchten Parameterbereichs präzise abzubilden. Dies würde dann auch mit einem Anwachsen der erforderlichen reduzierten Dimension korrelieren. Weitere Untersuchungen zur Snapshotauswahl sind Gegenstand von Kapitel 3.6.4.



**Abbildung 3.9** Vergleich der maximalen Fehler des reduzierten Modells im Vergleich zum Ausgangsmodell bei variierender Reduktionsdimension für die vier Lastfälle nach Tabelle 3.3.

Aufgrund der Berechnungszeiten zur Erstellung der Snapshots erweist sich die Anwendung der Modellordnungsreduktion für eine einzelne Zeitbereichssimulation im Gegensatz zu den Krylov-Unterraummethoden in Kapitel 3.5.3 als nicht zielführend. Für große Parameterstreuungen ist ein erheblicher Rechenaufwand während der Offline-Phase notwendig, um den Gültigkeitsbereich des reduzierten Modells entsprechend auszuweiten. In Anbetracht dessen ergeben sich erst bei einer hohen Simulationsanzahl, beispielsweise im Zuge einer Optimierung, oder bei geforderter Echtzeitfähigkeit Vorteile des reduzierten Modells. Wie der

Vergleich der Rechenzeiten in Tabelle 3.4 belegt, erfolgt die Bestimmung der Projektionsmatrix über das Eigenwertproblem (3.50) etwa 30-mal schneller als die direkte Anwendung der Singulärwertzerlegung. Gerade für Modelle mit sehr hohem Freiheitsgrad kann sich dieser Rechenzeitvorteil als signifikant erweisen.

**Tabelle 3.4** Vergleich der Rechenzeiten für das POD-Verfahren inklusive Bestimmung der Projektionsmatrix mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (SVD) oder des Eigenwertproblems (EWP).

Berechnungsschritt	Vollmodell	Reduziertes Modell ( $n = 15$ )
Snapshotberechnung	---	240 s
Projektionsmatrix	SVD	1,79 s
	EWP	0,06 s
Projektion	---	0,20 s
Zeitbereichssimulation	240 s	0,10 s

### 3.6.4 Anwendungsbeispiel mit Wärmestrahlung

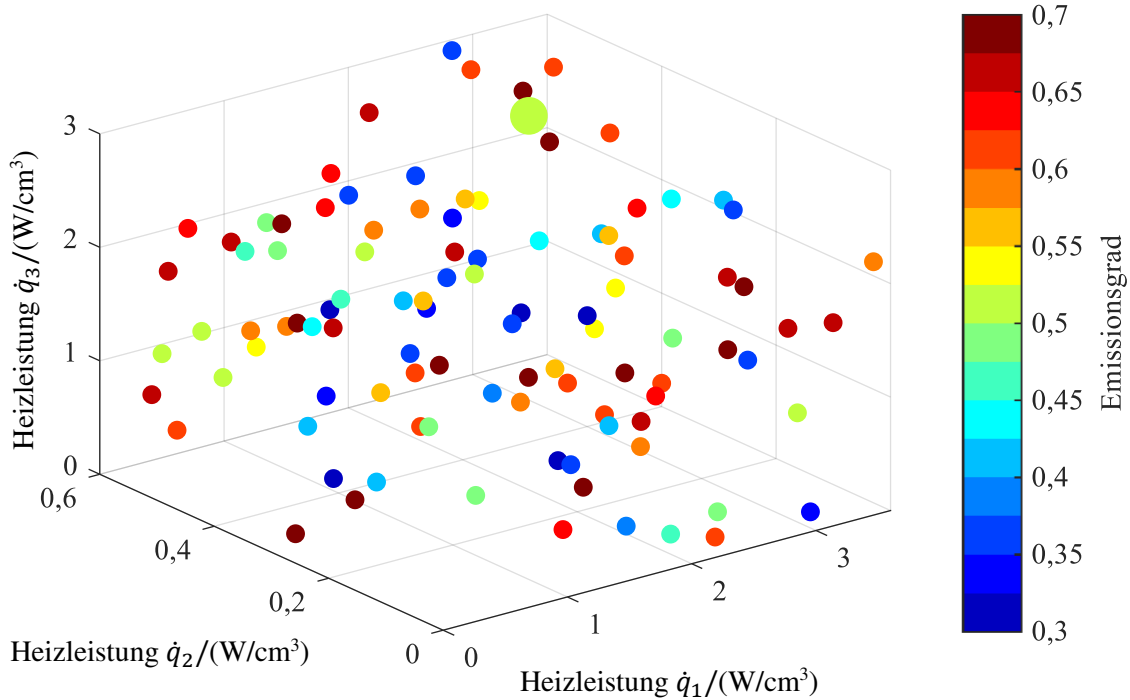
Mit Hilfe der Proper Orthogonal Decomposition können auch nichtlineare Systeme reduziert werden, sodass die Einbeziehung der Wärmestrahlung aus Sicht des Berechnungsablaufes problemlos gelingt. Mit Hilfe des nachfolgenden Beispiels soll der Einfluss der Snapshots auf die Reduktionsgüte näher betrachtet werden. Dabei wird das Ziel verfolgt, mit einer minimalen Anzahl von Simulationen in der Offline-Phase eine bestmögliche Approximation des Systemverhaltens innerhalb eines weiten Parameterspektrums zu erhalten.

Aufgrund dessen sollen innerhalb der Erwärmungssimulation des vereinfachten Rotationsbehälters aus Kapitel 2.4.1 insgesamt vier Parameter variiert werden. Dies betrifft einerseits die drei Heizleistungen der unterschiedlichen Heizfoliengruppierungen und andererseits den Emissionsgrad der Wärmestrahlung. Letzter ist in diesem Beispiel als unsicherer Parameter anzusehen, dessen Betrag stark von der Oberflächenbeschaffenheit abhängt. Aus diesem Grund wird das Intervall  $0,3 \leq \varepsilon \leq 0,7$  untersucht, wobei hier für alle Strahlungsvolumina ein einheitlicher Wert gewählt wird. Um eine besonders starke lokale Erwärmung zu verhindern, liegen die Heizleistungen maximal 20 % über dem Standardlastfall aus Tabelle 2.7. Die genauen Intervalle sind in Tabelle 3.5 angegeben.

**Tabelle 3.5** Minimal- und Maximalwerte für die Lastparametervariation in Anlehnung an Tabelle 2.7.

Lastparameter	Minimalwert	Maximalwert
Heizung 1: $\dot{q}_1$	0 W/cm <sup>3</sup>	3,6 W/cm <sup>3</sup>
Heizung 2: $\dot{q}_2$	0 W/cm <sup>3</sup>	0,6 W/cm <sup>3</sup>
Heizung 3: $\dot{q}_3$	0 W/cm <sup>3</sup>	3,0 W/cm <sup>3</sup>
Emissionsgrade $\varepsilon_i = \varepsilon$	0,3	0,7

Für jeden zu analysierenden Parametersatz ist auch eine Simulation des Vollmodells erforderlich, um den zugehörigen Reduktionsfehler genau zu berechnen. Deshalb kann nur eine begrenzte Anzahl von Kombinationen untersucht werden. Aus diesem Grund werden für jede Einflussgröße 100 Zufallswerte basierend auf einer Gleichverteilung im definierten Intervall erzeugt. Ergänzt wird dieser Datensatz durch den Standardlastfall aus Tabelle 2.7. Einen Überblick über die genutzten Parameterkombinationen gibt Abbildung 3.10 und die genauen Werte können Anhang C entnommen werden.



**Abbildung 3.10** Zufallsdatensatz für die Parametervariation in der Erwärmungssimulation ergänzt um den Standardlastfall aus Tabelle 2.7 (großer Kreis in grün).

Die iterative Bestimmung der minimal notwendigen Anzahl an Simulationen mit dem Ausgangsmodell während der Offline-Phase erfolgt beginnend mit dem Parametersatz 1, welcher zunächst als einziger der Snapshotzeugung dient. Mit dem derart gewonnenen reduzierten Modell werden dann alle Datensätze simuliert und die Parameterkombination, die während der transienten Berechnung den größten Fehler bedingt, vervollständigt die Snapshotbasis für den nächsten Iterationsschritt. Auf diese Weise vergrößert sich schrittweise die Anzahl an Offline-Simulationen, während der Reduktionsfehler sinkt. Der Iterationsprozess wird abgebrochen, wenn der maximale Fehler über alle Parametersätze unter 1 K fällt. Die reduzierte Dimension beträgt maximal  $n = 200$ , wenn aufgrund des starken Abfalls der Singulärwerte die Abbruchgrenze

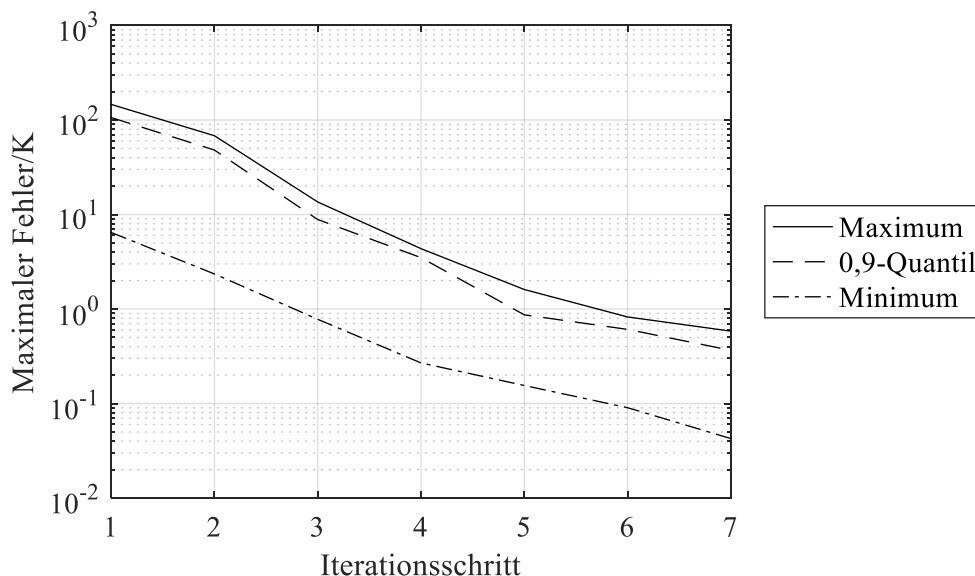
$$\frac{\sigma_i}{\sigma_1} < 10^6 \cdot eps \quad (3.54)$$

nicht schon vorher erreicht wird. Bei Wahl einer kleineren Abbruchtoleranz sinken die Zeitschrittweiten während der Integration des reduzierten Modells deutlich ohne signifikanten Genauigkeitsgewinn. Auf den numerischen Aufwand während eines Zeitschrittes hat die



reduzierte Dimension hingegen nur einen geringen Einfluss, da den rechenzeitintensivsten Teil die Bestimmung der Wärmeströme infolge Strahlung darstellt.

Abbildung 3.11 betrachtet den maximalen Fehler des reduzierten Modells für die 101 erzeugten Datensätzen hinsichtlich seines Maximums, Minimums und 0,9-Quantils. Dabei bezieht sich das gezeigte Minimum nur auf die Parameterkombinationen, die nicht als Snapshots der Erzeugung der Projektionsmatrix dienen, weil für letztere erwartungsgemäß stets sehr geringe Fehler auftreten. Das Ziel der Modellordnungsreduktion ist hingegen vorrangig, das Verhalten für nicht am Ausgangsmodell untersuchte Lastparameter mit hoher Genauigkeit abzubilden. In den ersten drei Iterationsschritten beträgt der Höchstwert des maximalen Fehlers über 10 K, die zugehörigen Berechnungsergebnisse sind folglich für die Auswertung thermisch induzierter Beanspruchungen ungeeignet. Das 0,9-Quantil, welches für 10 % der Simulationen überschritten wird, verdeutlicht, dass es sich hierbei nicht nur um einen einzelnen Ausreißer handelt. Die kleinsten maximalen Fehler sind für die Datensätze zu beobachten, welche den der Snapshot-erzeugung dienenden Punkten am nächsten liegen. Dennoch liefert keine der betrachteten Parameterkombinationen im ersten Iterationsschritt einen maximalen Fehler, der unter 6,5 K liegt, was die stark lokal begrenzte Validität des reduzierten Modells unterstreicht. Erst nach sechs Iterationen fällt der Höchstwert des maximalen Fehlers unter die angestrebte Grenze von 1 K.



**Abbildung 3.11** Maximum, Minimum und 0,9-Quantil des maximalen Fehlers für die einzelnen Parametersätze in Abhängigkeit von der Iterationsanzahl.

Die schrittweise Abnahme der Abweichung zwischen reduziertem System und Ausgangsmodell sowie die daraus resultierende Ausweitung des Gültigkeitsbereiches sind in Anhang D dokumentiert. In der unmittelbaren Umgebung der in den einzelnen Iterationen den Snapshots hinzugefügten Datensätzen sinkt der Fehler in der Regel am stärksten.

Als wesentlicher Nachteil der Proper Orthogonal Decomposition erweist sich der hohe numerische Aufwand während der Offline-Phase. So müssen im hier betrachteten Beispiel sechs Zeitbereichssimulationen des Ausgangsmodells durchgeführt werden, um mit den so generierten Snapshots ein für alle untersuchten Parametersätze valides Modell zu erzeugen. Aufgrund dessen ermöglicht dieses Reduktionsverfahren erst für eine große Anzahl durchzuführender Simulationen Rechenzeiteinsparungen. Gerade bei einer groben Abtastung des Parameterraums zur ungefähren Abschätzung der daraus resultierenden Tendenzen eignet sich diese Methode somit nicht. In praktischen Anwendungen stellt sich darüber hinaus die Frage, welche Datensätze als Snapshots heranzuziehen sind. Deshalb muss auf eine feine Abtastung zurückgegriffen werden, um einzelne Gebiete mit hohem Fehler im Parameterraum zu vermeiden. Abhilfe können hier nur geeignete Fehlerschätzer liefern, welche eine Bewertung der Qualität des reduzierten Modells zulassen (vergleiche Kapitel 3.6.1). Dabei ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, dass sich aufgrund der Lösung der Wärmestrahlungsgleichung in jedem Zeitschritt die Berechnungszeiten nur in begrenztem Maße vermindern lassen, weshalb auch eine hohe Anzahl von Auswertungen des reduzierten Systems einen erheblichen numerischen Aufwand bedeutet. Dies limitiert die Anwendbarkeit derartiger Verfahren.

### 3.7 Modellkorrelation

Wie die vorhergehenden Kapitel gezeigt haben, existieren für die meisten Reduktionsverfahren keine allgemeingültigen Fehlerschranken, welche eine Aussage zur Güte des reduzierten Modells zulassen. Deshalb muss diese im Nachgang der Reduktion analysiert werden. Dazu existieren insbesondere in der Mechanik zahlreiche Verfahren, über welche Lein und Beitel Schmidt einen Überblick geben [Lein & Beitel Schmidt 2014]. Dabei werden vier Kategorien unterschieden:

1. Eigenfrequenzbasierte Korrelationsverfahren
2. Eigenvektorbasierte Korrelationsverfahren
3. Übertragungsfunktionsbasierte Korrelationsverfahren
4. Matrixbezogene Korrelationsverfahren.

All diesen Methoden ist jedoch gemeinsam, dass sie zur Abschätzung eines globalen Fehlers eine valide modale Beschreibung des Vollmodells voraussetzen, was für die ersten beiden Kategorien direkt aus dem Namen folgt, schließlich müssen die relevanten Eigenfrequenzen und Eigenvektoren bekannt sein, welche das reduzierte Modell abbilden soll. Die übertragungsfunktionsbasierten Methoden bedingen naturgemäß die Berechnung der Übertragungsfunktionen zwischen ausgewählten Systemeingängen und -ausgängen. Für die hier betrachteten Anwendungsfälle ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, dass die präzise Ermittlung der thermisch induzierten Beanspruchungen eine genaue Abbildung des Temperaturfeldes an allen Modellknoten erfordert. Demzufolge müssten die Übertragungsfunktionen von allen Eingängen zu sämtlichen Knoten ausgewertet werden, was für das Vollmodell einen nicht handhabbaren numerischen Aufwand bedeutet. Anderenfalls gelingt höchstens eine stichprobenartige Überprüfung, wobei keine Aussagen zu den maximalen Fehlern möglich sind. Aus diesem Grund

wird in der Mechanik eine modale Beschreibung des nicht reduzierten Systems verwendet, welche die effektive Bestimmung der Übertragungsfunktionen zulässt. Darüber hinaus erfordern alle matrixbezogenen Korrelationsverfahren die Kenntnis der Modalmatrix [Lein & Beitelschmidt 2014].

In Kapitel 3.4 konnte gezeigt werden, dass die Identifizierung der relevanten Eigenformen des thermischen Systems aufgrund des numerischen Aufwands für viele Modelle nicht möglich ist, woraus resultierend die in der Mechanik genutzten Korrelationsverfahren nicht auf thermische Systeme übertragen werden können. Eine Überprüfung der Modellgüte ist deshalb nur im Zeitbereich durch den Vergleich der aus transienten Simulationen des Vollmodells und des reduzierten Modells resultierenden Temperaturfelder möglich, wie dies bereits in den Kapiteln 3.5 und 3.6 erfolgte.

Basierend auf (3.3) ergibt sich der Approximationsfehler  $\boldsymbol{\varepsilon}_R$  aus dem Temperaturvektor des Ausgangsmodells  $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$  und dem mit der Projektionsmatrix expandierten Zustandsvektor des reduzierten Modells  $\boldsymbol{x}_{\text{exp}} = \boldsymbol{\theta}_{\text{exp}}$  mit

$$\boldsymbol{x}_{\text{exp}} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{x}_R \quad (3.55)$$

zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}_R = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\text{exp}}. \quad (3.56)$$

Unter dem maximalen Fehler ist nachfolgend stets das betragsmäßig größte Element von  $\boldsymbol{\varepsilon}_R$  zu verstehen, was somit  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_R\|_\infty$  entspricht. Auch alle statistischen Auswertungen des Fehlers, wie beispielsweise die Mittelwertbildung, nutzen den Fehlerbetrag. Diese Größen haben gegenüber der euklidischen Norm des Fehlervektors  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_R\|_2$  den Vorteil, dass die Ergebnisgrößen direkt physikalisch interpretierbar sind. Darüber hinaus kann die präzise Ermittlung der thermisch induzierten Beanspruchungen nur gewährleistet werden, wenn in keinem Bereich des Modells hohe Fehler auftreten.

Da die transiente Simulation des Vollmodells mit hohen Rechenzeiten verbunden ist, muss sich die Validitätsanalyse allerdings auf ausgewählte Lastfälle beschränken und kann nur stichprobenartig erfolgen. Anderenfalls würden die angestrebten Rechenzeitvorteile egalisiert. Weiterführende Analysen der Modellvalidität insbesondere bei Parametervariation, wie in Homescu *et al.*, mit Hilfe statistischer Verfahren erscheinen nur sinnvoll, wenn die Anzahl der mit dem reduzierten Modell durchzuführenden Simulationen sehr hoch ausfällt, da eine Vielzahl von Berechnungen des Vollmodells erforderlich ist [Homescu *et al.* 2007]. Aus diesem Grund werden derartige Fehlerabschätzungen hier nicht weiter betrachtet.



## 4 Reduktion der Systemeingänge und -ausgänge

Im vorherigen Abschnitt wurden mit den Krylov-Unterraumverfahren und der Proper Orthogonal Decomposition zwei Methoden vorgestellt, die sich zur Lösung thermischer Feldprobleme mit ordnungsreduzierten Modellen eignen, welche aber beide spezifische Vor- und Nachteile aufweisen. So konnte in Kapitel 3.6.3 und 3.6.4 für die Proper Orthogonal Decomposition der große Einfluss der Trainingsdaten auf die Reduktionsgüte aufgezeigt werden. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes in der Offline-Phase rentiert sich die Modellordnungsreduktion erst für eine große Anzahl durchzuführender Simulationen. Darüber hinaus ist die Frage nach der Auswahl der Beispielsimulationen für die Snapshoterzeugung schwierig zu beantworten. Als wesentlicher Vorteil erweist sich hingegen, dass sich aus der Anzahl der Systemeingänge und -ausgänge keinerlei Restriktionen für die reduzierte Dimension ergeben. Des Weiteren lässt sich die Wärmestrahlung ohne wesentliche Anpassungen im Berechnungsablauf integrieren.

Im Gegensatz dazu erfordern die Krylov-Unterraumverfahren keine Offline-Phase, weshalb bereits für eine einzige transiente Simulation Rechenzeitvorteile entstanden. Für die Block-Krylov-Verfahren mit einer Entwicklungsstelle stellt allerdings nach (3.34) die reduzierte Dimension ein ganzzahliges Vielfaches der Eingangsanzahl dar. Da hier im Wesentlichen über die gesamte Bauteiloberfläche verteilte Lasten betrachtet werden, verhindert dies eine wirkungsvolle Verminderung des Freiheitsgrades. Deshalb erweist sich die Reduktion der Systemeingänge und -ausgänge als unumgänglich. Einen Überblick über den Stand der Technik gibt Kapitel 4.1.

Wie in Kapitel 3.5.3 bereits angedeutet, besteht die Möglichkeit bei Einhaltung gewisser Vorgaben, Eingänge ohne Genauigkeitsverlust zusammenzufassen. Dies ist Gegenstand von Kapitel 4.2, gelingt jedoch nicht für die aus der Wärmestrahlung resultierenden Lasten, welche sich aufgrund der Abhängigkeit vom Temperaturfeld an jedem Knoten separat ändern.

Des Weiteren wurde in Kapitel 3.5.2 die tangentielle Interpolation im Zuge des IRKA-Verfahrens vorgestellt, welche die Eingangsmatrix für jede Entwicklungsstelle auf einen Eingangsvektor komprimiert und auf diese Weise das System mit mehreren Ein- und Ausgängen (Multiple Input Multiple Output – MIMO) in ein System mit nur einem Ein- und Ausgang (Single Input Single Output – SISO) überführt. Die Anwendbarkeit dieser Methodik für den Fall  $\mathcal{O}(e) = \mathcal{O}(N)$  muss jedoch noch validiert werden, was ebenfalls in Kapitel 4.2 erfolgt.

Das für elektronische Systeme entwickelte und mittlerweile auch für mechanische Modelle angewandte Verfahren der Singular-Value-Decomposition-Model-Order-Reduction (SVD MOR) wird in Kapitel 4.3 hinsichtlich seiner Übertragbarkeit auf thermische Felder untersucht. Es basiert auf einer Approximation der Momente der Übertragungsfunktion mittels Singulärwertzerlegung.

In Kapitel 4.4 wird dann ein Verfahren entwickelt, welches die Vorteile der Krylov-Unterraumverfahren und der Proper Orthogonal Decomposition kombiniert. Snapshots des aus der Wärmestrahlung resultierenden Lastvektors dienen der Reduktion der Eingangsmatrix während für das Wärmeleitungsproblem inklusive der linearen Lasten die Krylov-Unterraummethoden

Anwendung finden, welche unabhängig von den in der Offline-Phase ausgeführten Simulationen eine hohe Genauigkeit liefern. Auf diese Weise soll die Gültigkeit des reduzierten Modells bei deutlich verminderter Anzahl von Rechnungen des Ausgangsmodells auf einen breiten Parameterbereich ausgeweitet werden. Abschließend zeigt Kapitel 4.5 eine Möglichkeit auf, die Berechnungszeiten bei der Snapshoterstellung deutlich zu reduzieren.

## 4.1 Stand der Technik

Viele Methoden zur Reduktion von Systemen mit einer hohen Anzahl von Ein- und Ausgängen gehen auf die Simulation elektrischer Schaltungen bestehend aus Widerständen, Spulen und Kondensatoren (RLC-Netze) zurück, wo häufig sehr viele elektrische Anschlüsse und somit Eingänge vorliegen. Ein großer Teil der genutzten Verfahren basiert auf der Eliminierung der internen Knoten des Netzwerkes, wie beispielsweise die Pole Analysis via Congruence Transformations (PACT) [Kerns & Yang 1997] und die Time Constant Equilibration Reduction (TICER) [Sheehan 1999]. Beide Methoden gehen aber von einer Erhaltung des Systemverhaltens innerhalb eines relevanten Frequenzbereiches aus und sind deshalb angesichts der Erkenntnisse aus Kapitel 3.4 für thermische Systeme ungeeignet. Auch das Verfahren Sparse Implicit Projection (SIP) [Ye *et al.* 2008] eliminiert die internen Systemknoten. Im Gegensatz zu den projektionsbasierten Reduktionsverfahren bleiben die Matrizen des reduzierten Systems dünn besetzt. Die reduzierte Dimension ist allerdings analog zum Block-Krylov-Verfahren weiterhin ein Vielfaches der Eingangsanzahl und deshalb für die betrachtete Anwendung nicht zielführend. Die Methode SparseRC [Ionutiu *et al.* 2011] vermag es in keinem der gezeigten Beispiele die reduzierte Dimension deutlich unter die Eingangsanzahl zu senken, weshalb auch dieses Verfahren im Falle sehr vieler Eingänge wenig vorteilhaft erscheint.

Su *et al.* schlagen die Aggregating based Model Order Reduction (AMOR) vor, welche auf einer Gruppierung der Eingänge entsprechend der Höhe der angelegten elektrischen Spannung basiert [Su *et al.* 2012]. Diese Zusammenfassung erfolgt anhand des Betrages der Werte in den Eigenvektoren des Systems. Für die hier betrachtete Wärmestrahlung haben benachbarte Knoten zwar ähnliche Temperaturen, aufgrund stark unterschiedlicher Elementgrößen können die daraus resultierenden einzuleitenden Wärmeströme aber sehr unterschiedlich sein. Im Gegensatz dazu verändert sich die Temperaturdifferenz weit entfernter Knoten im Verlauf der Simulation, sodass eine derartige Gruppierung hier nicht zielführend erscheint.

Benner *et al.* empfehlen die separate Reduktion für jede Spalte der Eingangsmatrix und die anschließende Superposition der Systemantwort aller reduzierten Modelle [Benner, Feng *et al.* 2008]. Im Falle der hier untersuchten Beispiele mit  $\mathcal{O}(e) = \mathcal{O}(N)$  sind folglich 10.000 bis 100.000 reduzierte Systeme parallel zu simulieren und entsprechend zu überlagern, was trotz der minimalen erreichbaren Dimension einen hohen numerischen Aufwand bedeutet. Banagaaya *et al.* erweitern diese Superpositionsmethodik und die SIP auf gekoppelte thermisch-elektrische Systeme [Banagaaya *et al.* 2016].

Beim balancierten Abschneiden kann im Gegensatz zu den Krylov-Unterraumverfahren die reduzierte Dimension unabhängig von der Eingangsanzahl gewählt werden [Nowakowski 2014]. Dennoch wird der Rechenaufwand bei der numerischen Lösung der Lyapunov-Gleichungen, welche die Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit des Systems beschreiben, in hohem Maße durch die Spaltenanzahl der Eingangsmatrix bestimmt. So tritt diese beispielsweise im Low Rank Alternating Direction Implicit (LRADI)-Algorithmus als rechte Seite im Gleichungssystem auf [Saak 2009]. Bei dessen Lösung entsteht folglich eine vollbesetzte Matrix mit der gleichen Dimension, was für sehr große Systeme leicht die Speicherkapazität übersteigt. Ein weiteres Lösungsverfahren nutzt Krylov-Unterraumverfahren, was aber aufgrund der bereits beschriebenen Probleme in Verbindung mit vielen Systemeingängen hier ebenfalls nicht zielführend ist. Benner und Schneider schlagen deshalb ein Verfahren vor, welches für Modelle anwendbar ist, die entweder viele Eingänge oder viele Ausgänge haben [Benner & Schneider 2010a]. Entweder die Eingangs- oder die Ausgangsmatrix hat demzufolge nur wenige Spalten, sodass die zugehörige Lyapunov-Gleichung mit den etablierten numerischen Verfahren handhabbar ist, während die Lösung der zweiten durch entsprechende Umformungen vermieden wird. Die Autoren verallgemeinern diese Methode später für Systeme mit beliebiger Systemmatrix  $\mathbf{E}$  in (3.1) [Benner & Schneider 2013]. Die Anwendung dieses Verfahrens würde folglich eine schiefe Projektion mit  $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}^T$  bedingen. Darüber hinaus bleibt der im Allgemeinen höhere numerische Aufwand des balancierten Abschneidens im Vergleich zu den Krylov-Unterraumverfahren mit wenigen Eingängen bestehen. Für Systeme mit moderater Eingangsanzahl ist auch eine zweistufige Reduktion möglich [Nowakowski 2014]. Mit Hilfe einer Krylov-Methode wird das Modell zunächst auf eine mittlere Dimension reduziert, welche aber zu groß für den späteren Anwendungsfall ist. Im nächsten Schritt lässt sich dann das balancierte Abschneiden nutzen, weil der numerische Aufwand nun deutlich geringer ausfällt. Auf diese Weise kann der Vorteil ausgenutzt werden, dass die reduzierte Dimension hierbei unabhängig von der Eingangsanzahl wählbar ist.

Die Singular-Value-Decomposition-Model-Order-Reduction (SVD MOR) [Feldmann 2004; Feldmann & Liu 2004] reduziert im Gegensatz zu den vorstehend beschriebenen Methoden die Anzahl der Ein- und Ausgänge und ermöglicht anschließend die Anwendung etablierter Reduktionsmethoden, wie beispielsweise der Krylov-Unterraumverfahren. Dieser Ansatz wird in Kapitel 4.3 näher beschrieben. Nowakowski *et al.* übertragen den ursprünglich für elektrische Netzwerke entwickelte Ansatz auf mechanische Systeme mit verteilten Lasten [Nowakowski *et al.* 2011].

## 4.2 Synchroner Lasten

Die Krylov-Unterraummethode approximieren die Übertragungsfunktionsmatrix  $\mathbf{H}(s)$  in (3.27) durch die Reihenentwicklung (3.28), bilden also das Systemverhalten zwischen den gewählten Ein- und Ausgängen ab. Dabei führt eine spezifische Last an einem Eingang entsprechend des Übertragungsverhaltens zu einer Temperaturänderung an den Ausgängen. Durch Superposition der aus allen Eingangslasten resultierenden Systemantworten ergibt sich

dann der Ausgangsvektor. Infolgedessen ist nur für Lastvektoren, die eine Linearkombination der Spalten der Eingangsmatrix darstellen, eine hohe Approximationsgüte zu erwarten. Diesen Umstand gilt es bei der Wahl der Systemeingänge zu beachten, weshalb die individuelle Anpassbarkeit voneinander unabhängiger Lastgrößen im Zuge der Eingangsreduktion erhalten bleiben muss.

Die einfachste Variante, dies zu gewährleisten, ist, jeden Knoten des Finite-Elemente-Modells, an dem während der Simulation Lasten aufgebracht werden sollen, als eigenen Eingang aufzufassen. Die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  stellt somit eine boolesche Matrix mit nur einem Eintrag je Spalte dar. Bereits für das vereinfachte Modell des Rotationsbehälters aus Kapitel 2.4.1 resultieren daraus im linearen Fall, wenn also analog zu Kapitel 3.5.3 nur Konvektions-, Temperatur- und Wärmestromrandbedingungen Berücksichtigung finden,  $e = 22.875$  Eingänge, deren Anzahl sich bei Einbeziehung der Wärmestrahlung wie in Kapitel 3.6.4 auf  $e = 44.242$  erhöht. Damit ist keine sinnvolle Anwendung des Block-Krylov-Verfahrens mehr möglich.

In vielen praktischen Anwendungen ist es aber nicht notwendig, jede Knotenlast separat variieren zu können. Für den hier betrachteten Rotationsbehälter betrifft dies beispielsweise die thermische Leistung der applizierten Heizfolien. Mittels der angelegten Spannung und Stromstärke, also der elektrischen Leistung, lässt sich die Wärmeentwicklung eines Foliensegmentes steuern und diese erfolgt dann gleichmäßig über der Fläche verteilt. Des Weiteren sind mehrere Foliensegmente zum einen aufgrund der begrenzten Anzahl von Übertragungskanälen in den Drehübertragern, welche der Leistungs- und Datenübertragung ins rotierende System dienen, und zum anderen zur Erhaltung der Symmetrie in Umfangsrichtung miteinander verbunden. Daraus ergeben sich die in Abbildung 2.5 gezeigten drei unabhängig voneinander ansteuerbaren Bereiche des Behältermantels, des Konus und der Kompensatoren. Innerhalb dieser erweist es sich als nicht notwendig, die spezifische Wärmezufuhr separat für die einzelnen Knoten anzupassen. Eine Verdopplung der angelegten elektrischen Leistung führt auch zu einer Verdopplung der Wärmeentwicklung, sodass sich alle zugehörigen Knotenlasten um den gleichen Faktor erhöhen. Sich derartig proportional verändernde Lasten sollen nachfolgend als synchron bezeichnet werden. Sie lassen sich zu einem Eingang zusammenfassen. Die Spalten der Eingangsmatrix  $\mathbf{b}_i$  entsprechen dann den Lastvektoren  $\mathbf{r}_t$  für eine aufgebrauchte Einheitslast

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{r}_{t_i}}{|\mathbf{r}_{t_i}|}, \quad (4.1)$$

welche zusätzlich noch normiert werden.

Das beschriebene Vorgehen ist in analoger Weise auf Konvektions- und Temperaturrandbedingungen anwendbar. Im Falle einer für die gesamte Fläche einheitlichen Temperatur, was auf die für den Rotationsbehälter betrachtete Lagertemperatur zutrifft, ergibt sich der zugehörige Lastvektor proportional zu dieser Temperatur (vergleiche Anhang A.3). Aber auch komplexe Temperaturverteilungen lassen sich abbilden, solange die geforderte Synchronizität gewährleistet bleibt. Wenn hingegen eine beliebige Temperaturverteilung um einen konstanten Offset verschoben werden soll, ist die Aufteilung in zwei Eingangsvektoren notwendig, einen für die



Verteilung und einen zweiten für den überlagerten Konstantwert. Generell ist eine exakte Abbildung in der Eingangsmatrix möglich, solange sich eine entsprechende Zerlegung findet. Unter diesem Gesichtspunkt lassen sich folglich auch Reihenentwicklungen nutzen. Nowakowski verwendet diesen Ansatz für die Lagerlasten einer Kurbelwelle in der elastischen Mehrkörpersimulation [Nowakowski 2014].

Im Falle der Konvektion stellt die Umgebungstemperatur  $\theta_\infty$  in (2.47) den zu variierenden Parameter dar, welcher für viele Anwendungen ortsunabhängig und konstant angenommen wird, was ebenfalls die Zusammenfassung in einem Systemeingang ermöglicht. Deshalb setzt sich die Eingangsmatrix für das lineare Modell ohne Wärmestrahlung aus fünf Spalten zusammen

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{t,\text{Heizung1}} & \mathbf{r}_{t,\text{Heizung2}} & \mathbf{r}_{t,\text{Heizung3}} & \mathbf{r}_{t,\text{Lager}} & \mathbf{r}_{t,\text{Konvektion}} \\ \mathbf{r}_{t,\text{Heizung1}} & \mathbf{r}_{t,\text{Heizung2}} & \mathbf{r}_{t,\text{Heizung3}} & \mathbf{r}_{t,\text{Lager}} & \mathbf{r}_{t,\text{Konvektion}} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

was einer erheblichen Verringerung von  $e = 22875$  auf  $e = 5$  entspricht. Dies erlaubt die Anwendung des Block-Krylov-Verfahrens für die nachgestellte Modellordnungsreduktion.

Allerdings ist die beschriebene Methode nicht für alle Lasten nutzbar. Die Wärmeströme infolge der Wärmestrahlung hängen von  $\theta^4$  ab, sodass sie sich für jeden Knoten unabhängig entwickeln und die geforderten synchronen Änderungen nicht gewährleistet werden können.

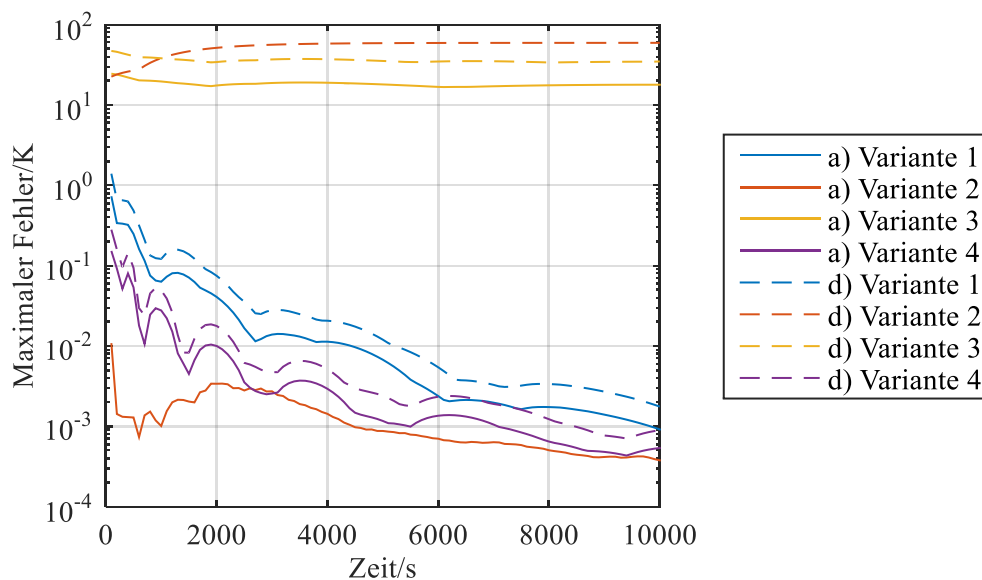
Deshalb findet die Wärmestrahlung analog zu den Kapiteln 3.5.3 und 3.6.3 im nachfolgenden Beispiel keine Berücksichtigung. Dieses vergleicht die vier Lastfälle aus Tabelle 3.3 für die Simulation des vereinfachten Behältermodells und stellt dabei vier Berechnungsvarianten gegenüber. Die reduzierte Dimension beträgt für alle Modelle einheitlich  $n = 60$ , was sich in den bisherigen Untersuchungen stets als hinreichend groß erwies, um genaue Ergebnisse zu erzielen (vergleiche Abbildung 3.6). Variante 1 folgt der soeben beschriebenen Vorgehensweise, sodass sich  $e = 5$  Eingänge ergeben. Im Gegensatz dazu werden für Variante 2 die fünf Lastvektoren aus Lastfall a) addiert und nach Normierung als einzige Spalte der Eingangsmatrix verwendet. Das zugehörige Modell hat somit nur einen Eingang ( $e = 1$ ). In beiden Fällen kommt das Block-Krylov-Verfahren mit einer einzigen Entwicklungsstelle  $s_k = 0$  zum Einsatz.

Bereits Gegenstand von Kapitel 3.5.2 war die tangentiale Interpolation, welche unter Berücksichtigung der tangentialen Richtungen das Ausgangssystem in eines mit nur einem Ein- und Ausgang überführt. Sie lässt sich einerseits auf die Eingangsmatrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times 22.875}$ , welche jeden Knoten, an dem Lasten appliziert werden, als eigenen Eingang betrachtet, anwenden (Variante 3) und andererseits auf das entsprechend Variante 1 auf fünf Eingänge reduzierte System (Variante 4). Letzteres entspricht dem Vorgehen aus Kapitel 3.5.3.

Abbildung 4.1 zeigt den maximalen Fehler der reduzierten Modelle für die Lastfälle a) und d), während die Ergebnisse der Lastfälle b) und c) in Anhang E dargestellt sind. Es wird deutlich, dass die direkte Anwendung der tangentialen Interpolation ohne vorherige Eingangsreduktion (Variante 3) stets eine ungenügende Reduktionsgüte liefert. Für Variante 2 dient der Lastvektor aus Lastfall a) der Bildung der einzigen Spalte der Eingangsmatrix. Erwartungsgemäß folgt für genau diesen Lastfall ein sehr gutes Ergebnis, wobei die Abweichungen zum Ausgangsmodell

aufgrund der höheren Entwicklungsordnung geringer ausfallen als für die Vergleichsvarianten. Je stärker sich der tatsächliche Lastvektor jedoch von diesem Konditionierungslastfall unterscheidet, desto stärker wächst der Fehler und im Lastfall d) ergibt sich ein gänzlich unbrauchbares reduziertes Modell. Dieses Verhalten ist ähnlich zur Proper Orthogonal Decomposition in Abbildung 3.9, obgleich hier eine geringere Sensitivität vorliegt.

Im Gegensatz dazu liefern die Varianten 1 und 4, abgesehen von den bereits in Kapitel 3.5.3 diskutierten geringen Abweichungen am Beginn des Erwärmungsprozesses, sehr gute Ergebnisse. Die Höhe des Fehlers zum Simulationsbeginn wird maßgeblich durch die Höhe der aufgebrachten Lasten bestimmt, weshalb der Lastfall d) aufgrund der im Vergleich zu Lastfall a) doppelt so hohen Heizleistung  $\dot{q}_1$  auch größere Ungenauigkeiten bedingt. Die höhere Reduktionsgüte des mit dem rationalen Krylov-Verfahren reduzierten Modells (Variante 4) gegenüber dem Block-Krylov-Verfahren (Variante 1) wurde schon in Kapitel 3.5.3 gezeigt.



**Abbildung 4.1** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell bei einer reduzierten Dimension  $n = 60$  für die Lastfälle a) und d) nach Tabelle 3.3: Variante 1 – 5 Eingänge; Variante 2 – 1 Eingang; Variante 3 – tangentielle Interpolation für 22.875 Eingänge; Variante 4 – tangentielle Interpolation für 5 Eingänge.

Unabhängig von der konkreten Krylov-Methode erweist sich die Eingangsreduktion als notwendig, wohingegen eine zu starke Verringerung der Eingangsanzahl die Möglichkeiten der Lastvariation erheblich einschränkt. Bei geeigneter Gruppierung der getrennt voneinander zu variierenden Lasten in den Spalten der Eingangsmatrix zeigt sich der Vorteil der Krylov-Unterraummethoden gegenüber der Proper Orthogonal Decomposition, da sich ohne Vorabsimulationen für ein sehr breites Lastparameterspektrum gültige reduzierte Systeme erzeugen lassen. Die Einbeziehung der Wärmestrahlung bleibt allerdings ein weiterhin offener Aspekt.

### 4.3 Singular-Value-Decomposition-Model-Order-Reduction

Obwohl es im vorherigen Abschnitt gelang, die Konvektions-, Wärmestrom- und Temperaturrandbedingungen durch Gruppierung zu wenigen Eingängen zusammenzufassen, verfügt die Eingangsmatrix bei Berücksichtigung der Wärmestrahlung noch über  $e = 32.823$  Spalten für das vereinfachte Rotationsbehältermodell. Deshalb erweist sich eine weitere Reduktion als unumgänglich, da auch die tangentielle Interpolation nicht für eine derart hohe Eingangsanzahl geeignet ist.

#### 4.3.1 Verfahrensgrundlagen

Den Ausgangspunkt für die Singular-Value-Decomposition-Model-Order-Reduction (SVD MOR) [Feldmann 2004; Feldmann & Liu 2004] stellt das Moment nullter Ordnung der Übertragungsfunktionsmatrix in (3.28) mit  $o = 1$  und  $s_k = 0$

$$\mathbf{M}_0^{s_k=0} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (4.3)$$

dar. Im Gegensatz zu den Krylov-Unterraummethoden wird dieses Moment jedoch nicht exakt, sondern nur näherungsweise, im System mit reduzierter Ein- und Ausgangszahl abgebildet. Dies geschieht über eine Singulärwertzerlegung analog zur Snapshotmatrix bei der Proper Orthogonal Decomposition in (3.41)

$$\mathbf{M}_0^{s_k=0} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{U}_L\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}_R^T \approx \tilde{\mathbf{U}}_L\tilde{\mathbf{\Sigma}}\tilde{\mathbf{U}}_R^T, \quad (4.4)$$

mit den Matrizen der Links- bzw. Rechtssingulärvektoren  $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R \in \mathbb{R}^{e \times e}$  sowie  $\tilde{\mathbf{U}}_L, \tilde{\mathbf{U}}_R \in \mathbb{R}^{e \times e_R}$ , wobei  $e$  und  $e_R < e$  die ursprüngliche und die reduzierte Eingangsanzahl darstellen. Im Idealfall gilt  $e_R \ll e$ . Wie in Kapitel 3.6.1 werden die kleinsten Singulärwerte und die zugehörigen Singulärvektoren im Zuge der Approximation abgeschnitten.

Auf diese Weise lassen sich die reduzierte Eingangsmatrix  $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times e_R}$  und die reduzierte Ausgangsmatrix  $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{e_R \times n}$  in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{U}}_R^T)^+ \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathbf{U}}_L^+ \mathbf{C} \end{aligned} \quad (4.5)$$

schreiben. Hierin zeigt  $(\dots)^+$  die Moore-Penrose-Inverse der entsprechenden Matrix an. Die Übertragungsfunktionsmatrix  $\mathbf{H}(s)$  aus (3.27)

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (4.6)$$

kann unter Nutzung von (4.5) näherungsweise beschrieben werden durch

$$\mathbf{H}(s) \approx \tilde{\mathbf{U}}_L\tilde{\mathbf{H}}(s)\tilde{\mathbf{U}}_R^T = \tilde{\mathbf{U}}_L\tilde{\mathbf{U}}_L^+\mathbf{C}(s\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{U}}_R^T)^+\tilde{\mathbf{U}}_R^T. \quad (4.7)$$

Die reduzierte Übertragungsfunktionsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(s) \in \mathbb{R}^{e_R \times e_R}$

$$\tilde{\mathbf{H}}(s) = \tilde{\mathbf{U}}_L^+\mathbf{C}(s\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{U}}_R^T)^+ \quad (4.8)$$

lässt sich dann mit gängigen Verfahren, wie Krylov-Unterraummethoden oder balanciertem Abschneiden, reduzieren.

Eine Erweiterung, die Extended SVDMOR (ESVDMOR), berücksichtigt auch Momente höherer Ordnung sowie mehrere Entwicklungsstellen in (4.4) und betrachtet darüber hinaus die Ein- und Ausgänge getrennt [Liu *et al.* 2008; Benner & Schneider 2010b]. Für die meisten Anwendungsfälle genügt jedoch die Betrachtung des Momentes nullter Ordnung [Feldmann 2004; Feldmann & Liu 2004]. Lediglich bei stark abweichender Anzahl an Ein- und Ausgängen empfiehlt sich die Hinzunahme von weiteren Momenten, da anderenfalls große Fehler zu erwarten sind [Liu *et al.* 2008].

Aus numerischer Sicht ist die Anwendbarkeit der SVDMOR jedoch limitiert. Die Berechnung des Momentes in (4.4) erfordert die Bildung von  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ , also die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit  $e$  rechten Seiten. Während die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  im Allgemeinen dünn besetzt ist, resultiert nach dem Lösen eine vollbesetzte Matrix der Dimension  $N \times e_{\mathbb{R}}$ . Im Falle eines sehr großen Systemfreiheitsgrades bei gleichzeitig sehr hoher Eingangsanzahl übersteigt deren Speicherung schnell die Möglichkeiten gewöhnlicher Arbeitsplatzcomputer. Nur auf Hochleistungsrechnern lassen sich diese Operationen dann noch ausführen. Die Anwendung der SVDMOR erfordert folglich entweder einen moderaten Systemfreiheitsgrad oder eine verhältnismäßig geringe Anzahl an Eingängen  $e \ll N$ . Für die praktische Ausführung der Singulärwertzerlegung kann die Äquivalenz zum Eigenwertproblem aus Kapitel 3.6.2 genutzt werden.

Die Grundidee, welche mit der Singulärwertzerlegung verfolgt wird, ist, dass bestimmte Eingänge zu sehr ähnlichen Antworten an den Ausgängen führen [Nowakowski 2014]. Dies lässt sich in der Mechanik leicht am Beispiel eines balkenförmigen Körpers, welcher mittels Volumenelementen diskretisiert ist, nachvollziehen. Unabhängig davon, an welchem Knoten im Querschnitt die Last, beispielsweise eine Querkraft, eingeleitet wird, unterscheidet sich die globale Durchbiegung nur unwesentlich. Liegen die untersuchten Ausgänge in ausreichender Entfernung von der Lasteinleitungsstelle, ähneln sich die Übertragungsfunktionen für die Verschiebungskomponenten in Lastrichtung stark. Unter diesem Aspekt lassen sich die entsprechenden Eingänge zu einem virtuellen Eingang zusammenfassen, ohne dass das dominante Systemverhalten stark abweicht. Bei Berücksichtigung der Torsion des Querschnitts ist die Lasteinleitungsposition hingegen von entscheidender Bedeutung. Derartige Effekte, die nur in deutlich geringerem Maße zur Gesamtverschiebung beitragen, können nach der Anwendung der SVDMOR wahrscheinlich nicht mehr korrekt wiedergegeben werden. Deshalb soll in den nachfolgenden zwei Anwendungsbeispielen untersucht werden, ob sich die Methode für thermische Systeme, deren Ziel die Ermittlung der aus dem Temperaturfeld resultierenden Beanspruchungen ist, eignet, schließlich müssen dabei auch die Temperaturen in unmittelbarer Nähe der Lasteinleitungsknoten korrekt wiedergegeben werden.

### 4.3.2 Anwendungsbeispiel Quader

Als erstes Beispiel wird hier angesichts des zu erwartenden hohen numerischen Aufwands bei der Lösung des Gleichungssystems in (4.4) zunächst ein Quadermodell mit den Abmessungen

100 mm × 10 mm × 10 mm verwendet, welches unter Verwendung quadratischer Ansatzfunktionen mit einer Elementkantenlänge von 2,5 mm vernetzt ist. Daraus resultiert ein Freiheitsgrad  $N = 3.665$ . Als einzige Last dient eine Wärmestromverteilung auf einer der quadratischen Außenflächen, was  $e = 65$  Eingängen entspricht. Dabei werden nachfolgend zwei Lastfälle unterschieden. Während der erste Lastfall von einer konstanten Wärmestromdichte  $\dot{q} = 0,02 \text{ W/mm}^2$  für die entsprechenden Elementflächen ausgeht, werden die sich daraus ergebenden Knotenwärmeströme im zweiten Lastfall einzeln mit einem gleichverteilten Zufallsfaktor im Intervall 0 ... 2 variiert. Infolgedessen besitzt jeder Knoten der lastbeaufschlagten Außenfläche einen individuellen Wärmestrom. Die Gesamtsimulationsdauer beträgt 1000 s, im Verlauf derer eine maximale Erwärmung um etwa 94 K auftritt.

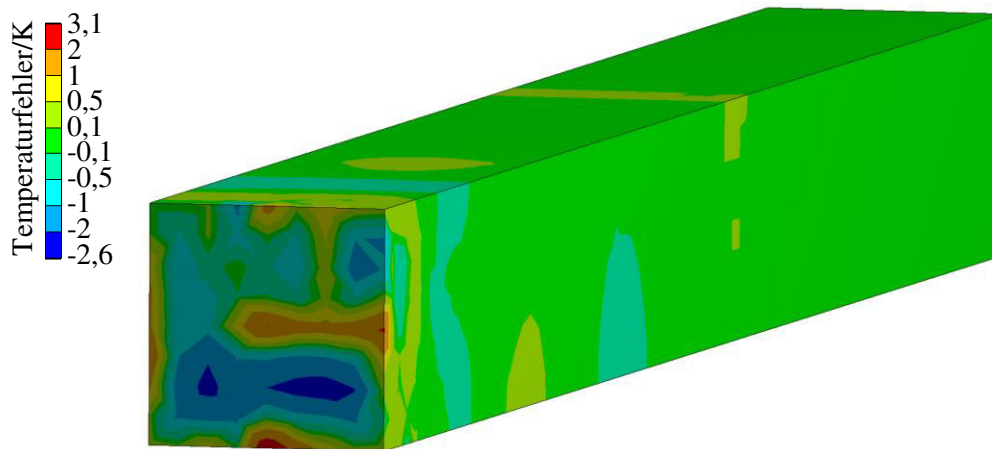
Die Anwendung des Block-Krylov-Verfahrens mit einer Entwicklungsstelle ( $K = 1$ ) und der Entwicklungsordnung  $o = 8$  führt ohne die Eingangsreduktion nach (3.34) auf eine reduzierte Dimension  $n = e \cdot o \cdot K = 65 \cdot 8 \cdot 1 = 520$ , womit zu geringe Rechenzeitvorteile gegenüber dem Ausgangsmodell zu erwarten sind. Deshalb wird mit Hilfe der SVD MOR die Eingangsanzahl auf  $e_R$  reduziert. Der dabei resultierende Fehler für die zwei Lastfälle ist in Tabelle 4.1 dargestellt. Es ist ersichtlich, dass Lastfall 1 mit der konstanten Wärmestromdichte deutlich besser abgebildet wird. Im Gegensatz dazu wird für den zweiten Lastfall erst ab  $e_R = 25$  die Fehlergrenze von 1 K unterschritten. Erfolgt keine Eingangsreduktion ( $e = e_R = 65$ ) tritt nur der Fehler der Krylov-Reduktion auf, welcher jedoch gegenüber den Ungenauigkeiten aus der Eingangsreduktion gering ausfällt.

**Tabelle 4.1** Maximaler Fehler im Vergleich zum Ausgangsmodell für die zwei untersuchten Lastfälle in Abhängigkeit von der reduzierten Eingangsanzahl.

Reduzierte Eingangsanzahl $e_R$	Maximaler Fehler Lastfall 1	Maximaler Fehler Lastfall 2
5	0,9784 K	4,0965 K
10	0,9783 K	3,0528 K
15	0,9002 K	2,1616 K
20	0,6002 K	2,2994 K
25	0,3568 K	0,7519 K
35	0,3729 K	0,6850 K
45	0,2506 K	0,2913 K
55	0,0938 K	0,0968 K
65	0,0005 K	0,0108 K

Die räumliche Verteilung des Fehlers zeigt Abbildung 4.2 exemplarisch für den Endzeitpunkt der Simulation und eine reduzierte Dimension  $n = 80$  am Beispiel des Lastfalls 2. Auf der im Vordergrund befindlichen Lasteinleitungsfläche ergeben sich die größten Fehler, welche zudem starken Schwankungen zwischen den einzelnen Knoten ausgesetzt sind. Eine präzise Ermittlung der daraus resultierenden Beanspruchungen erscheint nicht möglich. Im Gegensatz dazu nimmt der Fehler entlang der Quaderlängsseite schnell ab und am gegenüber liegendem Ende beträgt die maximale Abweichung weniger als 0,1 K. Daraus wird deutlich, dass die insgesamt

eingetragene Wärmemenge korrekt ist, eine Auswertung des Temperaturfeldes aber erst in hinreichender Entfernung von den Lasteinleitungsstellen verlässliche Ergebnisse liefert.



**Abbildung 4.2** Fehler des mittels SVDMOR auf  $e_R = 10$  Eingänge und anschließend mit dem Block-Krylov-Verfahren reduzierten Modells für den Lastfall 2 zum Zeitpunkt  $t = 1000$  s.

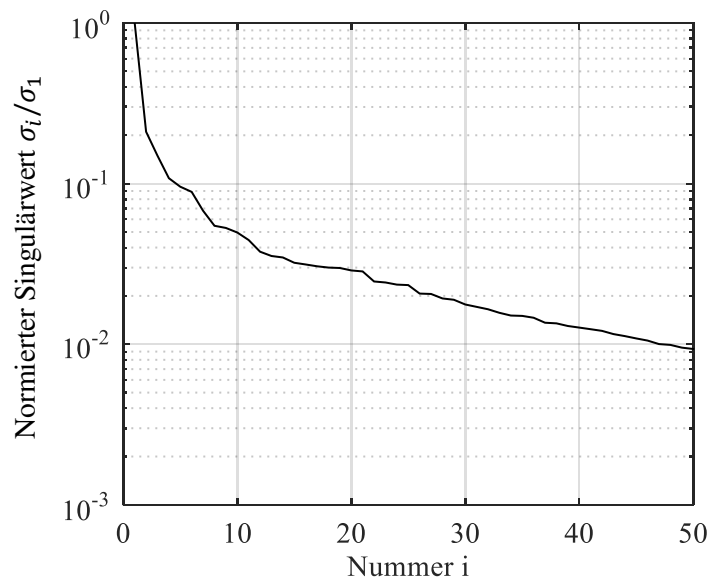
### 4.3.3 Anwendungsbeispiel Vorwärmprozess

Das zweite Beispiel bildet die Vorwärmsimulation des vereinfachten Rotationsbehälters analog zu Kapitel 3.6.4, wobei erneut die 100 Zufallsdatensätze ergänzt um den Standardlastfall aus Tabelle 2.7 zur Anwendung kommen. Die SVDMOR wird lediglich auf die Wärmestrahlung angewandt, wohingegen die Wärmestrom-, Konvektions- und Temperaturrandbedingungen als synchrone Lasten entsprechend Kapitel 4.2 betrachtet werden, um für diese eine maximale Präzision zu erzielen. Die Eingangsmatrix setzt sich nun aus den fünf Spalten, welche aus (4.2) resultieren, und den berücksichtigten Singulärvektoren der Wärmestrahlung zusammen, deren Anzahl mit  $e_R$  bezeichnet wird. Nach (3.34) beträgt die reduzierte Dimension  $n$  mit  $K = 1$  und  $o = 8$  folglich

$$n = (5 + e_R) \cdot o \cdot K = (5 + e_R) \cdot 8. \quad (4.9)$$

Die größten aus der Singulärwertzerlegung (4.4) resultierenden Singulärwerte sind in Abbildung 4.3 in normierter Form dargestellt. Hier ist nur ein sehr langsamer Abfall zu beobachten, sodass der Abbruch der Approximation im Wesentlichen durch die Limitierung der reduzierten Dimension bestimmt wird. Deshalb gibt Tabelle 4.2 den maximalen Fehler über alle 101 untersuchten Parameterkombinationen in Abhängigkeit von selbiger an. Da sich die Lasteinleitungsstellen aufgrund der an nahezu allen Oberflächen auftretenden Wärmestrahlung auf das gesamte Bauteil verteilen, ergibt sich im Gegensatz zu Kapitel 4.3.2 keine räumliche Begrenzung der höchsten Abweichungen zum Ausgangsmodell auf ein kleines Gebiet.

Generell kann trotz deutlich anwachsender reduzierter Dimension nur eine langsame Verminderung des maximalen Fehlers beobachtet werden, was mit der geringen Abnahme der Singulärwerte korreliert. Selbst bei einer Reduktion der Wärmestrahlung auf 50 Eingänge bleiben die Abweichungen deutlich oberhalb der angestrebten Fehlergrenze von 1 K.



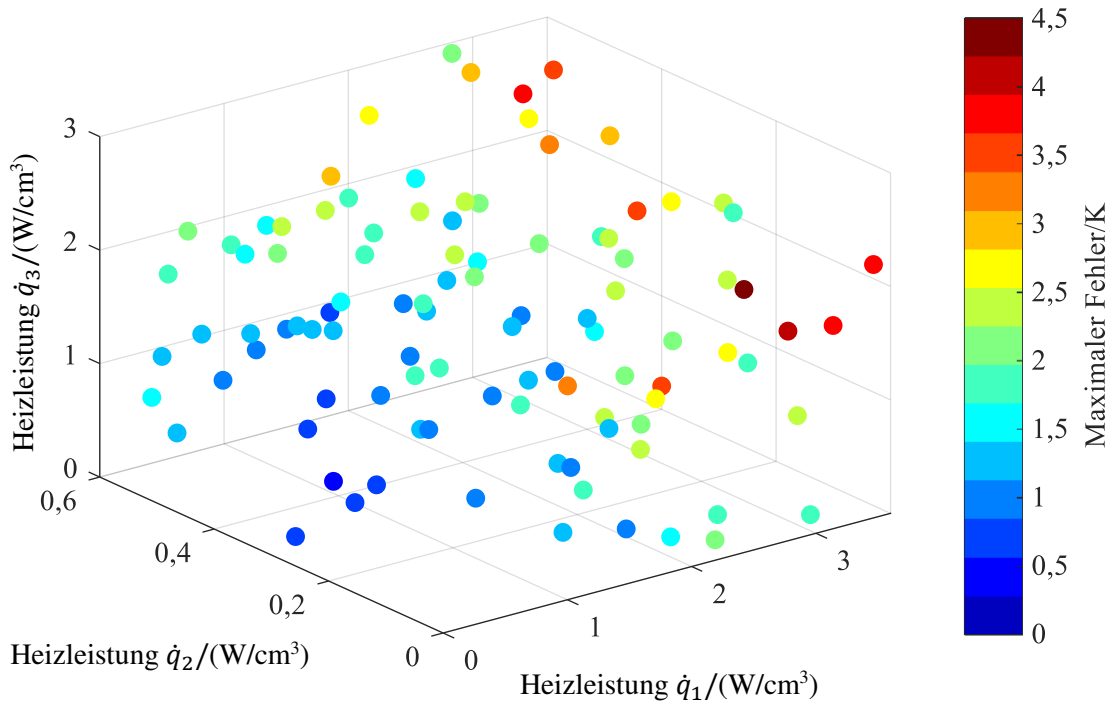
**Abbildung 4.3** Abfall der normierten Singulärwerte entsprechend (4.4).

In Abbildung 4.4 sind für den Fall  $n = 200$  die maximalen Fehler für die verschiedenen Parametersätze dargestellt. Die größten Unterschiede zum Ausgangsmodell sind zu beobachten, wenn die mittels Wärmestrahlung übertragene Wärmemenge sehr hoch ausfällt. Dies betrifft insbesondere große Werte für  $\dot{q}_1$ , welches maßgeblich die Strahlung im zentralen Zylindervolumen bestimmt. Des Weiteren kommt dem Emissionsgrad eine entscheidende Bedeutung zu. Im Vergleich mit Abbildung 3.10 zeigt sich, dass im Falle ähnlicher Heizleistungen für  $\varepsilon \approx 0,7$  höhere Fehler auftreten als für  $\varepsilon \approx 0,3$ . Eine gleichmäßige Verringerung der Wärmeströme bewirkt auch eine Reduzierung der Abweichungen zum Ausgangsmodell, weil aufgrund der insgesamt geringen Temperaturen die Wärmestrahlung einen kleineren Einfluss hat.

Bereits in Kapitel 4.3.1 wurde darauf hingewiesen, dass die Lösung des Gleichungssystems in (4.4) einen sehr hohen numerischen Aufwand bedeutet. Dies äußert sich einerseits in der Berechnungszeit, welche etwa 15 Simulationen des Ausgangsmodells entspricht, und andererseits im erforderlichen Arbeitsspeicher. Trotz des verhältnismäßig kleinen Freiheitsgrades  $N = 83.711$  benötigt der Standardgleichungslöser aus MATLAB bereits 60 GB. Dies begrenzt das mögliche Einsatzspektrum hinsichtlich der Modellgröße erheblich.

**Tabelle 4.2** Maximaler Fehler des reduzierten Modells in Abhängigkeit von der reduzierten Dimension.

Reduzierte Dimension	Eingänge Wärmestrahlung	Maximaler Fehler
$n = 120$	$e_R = 10$	5,75 K
$n = 160$	$e_R = 15$	4,84 K
$n = 200$	$e_R = 20$	4,50 K
$n = 280$	$e_R = 30$	3,03 K
$n = 440$	$e_R = 50$	2,96 K



**Abbildung 4.4** Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad  $n = 200$  für die untersuchten Parametersätze.

Zusammenfassend lässt sich folglich feststellen, dass die SVDMOR für die hier untersuchte Aufgabenstellung einer genauen Ermittlung der Temperaturen für das gesamte Bauteil, um im Anschluss die thermisch induzierten Beanspruchungen zu ermitteln, wenig geeignet ist. Die angestrebten Fehlertoleranzen werden nicht für eine hinreichend kleine reduzierte Dimension erreicht. Darüber hinaus erweisen sich die Berechnungszeiten für die Eingangsreduktion um etwa den Faktor zwei höher als die während der Offline-Phase der Proper Orthogonal Decomposition in Kapitel 3.6.4. Deshalb ist es erforderlich, einen alternativen Ansatz zur Reduktion der Systemeingänge zu entwickeln.

#### 4.4 Singulärwertzerlegung basierend auf Lastvektorsnapshots

Die SVDMOR versucht die Übertragungsfunktionsmatrix für beliebige Lasten an den Eingängen zu approximieren, was insbesondere in unmittelbarer Nähe der Lasteinleitungsstellen zu hohen Fehlern führte. Betrachtet man jedoch den Erwärmungsvorgang des Rotationsbehälters, beispielsweise für unterschiedliche Heizleistungen oder bei Variation des als unsicherer Parameter einzustufenden Emissionsgrades, unterscheiden sich die Temperaturverteilungen in der Regel nicht grundlegend. Diesen Umstand nutzt zum Beispiel die Proper Orthogonal Decomposition in Kapitel 3.6, die ausgehend von aus Beispielsimulationen gewonnenen Trainingsdaten das Systemverhalten approximiert. In Kapitel 3.6.3 führten allerdings bereits geringe Abweichungen der Wärmeströme zu stark anwachsenden Fehlern und in Kapitel 3.6.4 konnte gezeigt werden, dass sehr viele derartige Vorabrechnungen des Ausgangsmodells notwendig sind, um das Temperaturfeld über einen weiten Parameterbereich mit hoher Genauigkeit abzubilden.



Da die Krylov-Unterraummethoden direkt die Übertragungsfunktionen zwischen den einzelnen Ein- und Ausgängen annähern, weisen die damit erzeugten Modelle keinen derart eingeschränkten Gültigkeitsbereich auf (vergleiche Kapitel 4.2). Die Berücksichtigung der Wärmestrahlung führt aber auf eine sehr hohe Anzahl an Systemeingängen, was die angestrebten Rechenzeitgewinne aufgrund des hohen Freiheitsgrades des reduzierten Systems erheblich vermindert oder gänzlich aufhebt. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit ein Verfahren vorgeschlagen, welches eine Eingangsreduktion basierend auf der Tatsache ermöglicht, dass sich nicht nur die Temperaturverteilungen sondern auch die daraus resultierenden Wärmeströme infolge Strahlung bei Variation der Lastparameter in einem begrenzten Bereich nicht grundlegend verändern.

#### 4.4.1 Grundprinzip

Anstatt Temperatursnapshots, wie bei der Proper Orthogonal Decomposition in (3.40), werden in transienten Analysen während der Offline-Phase insgesamt  $\zeta$  Snapshots des Wärmestrahlungsvektors  $\mathbf{r}_{\text{tS}}$  in (2.81)

$$\mathbf{r}_{\text{tS}} = \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{\text{elem}} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.10)$$

erzeugt und in der Snapshotmatrix  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times \zeta}$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{r}_{\text{tS}_1} \quad \dots \quad \mathbf{r}_{\text{tS}_i} \quad \dots \quad \mathbf{r}_{\text{tS}_\zeta}] \quad (4.11)$$

mit  $i = 1 \dots \zeta$  zusammengefasst [Rother & Beitelschmidt 2018]. Auf selbige wird im nächsten Schritt die Singulärwertzerlegung angewandt

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}_L \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}_R^T, \quad (4.12)$$

wobei dafür aufgrund des geringen numerischen Aufwands in der Regel das Eigenwertproblem (3.50) genutzt wird. Die Singulärwerte  $\sigma_i$  in der Hauptdiagonale von  $\boldsymbol{\Sigma}$  fallen schnell ab, sodass die Snapshotmatrix in guter Näherung durch die größten Singulärwerte und die zugehörigen Matrizen der Links- und Rechtssingulärvektoren  $\tilde{\mathbf{U}}_L$  bzw.  $\tilde{\mathbf{U}}_R$

$$\mathbf{Y} \approx \tilde{\mathbf{U}}_L \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \tilde{\mathbf{U}}_R^T \quad (4.13)$$

mit  $\tilde{\mathbf{U}}_L, \tilde{\mathbf{U}}_R \in \mathbb{R}^{N \times e_R}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{e_R \times e_R}$  und  $e_R < \zeta$  approximiert werden kann. Die Spalten der reduzierten Eingangsmatrix  $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{N \times e_R}$  entsprechen den Linkssingulärvektoren aus (4.13)

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{U}}_L. \quad (4.14)$$

Wenn  $e_R$  hinreichend klein gewählt wird, ermöglicht dies die Anwendung des Block-Krylov-Verfahrens bei geringem Freiheitsgrad des erzeugten reduzierten Systems.

Im Allgemeinen treten in thermischen Systemen sowohl Wärmestrom-, Temperatur- und Konvektionsrandbedingungen als auch Wärmestrahlung auf. Dann lassen sich die Eingangsmatrix für synchrone Lasten  $\mathbf{B}_{\text{syn}}$  aus (4.2) und die zur Wärmestrahlung gehörende  $\mathbf{B}_S = \tilde{\mathbf{B}}$  aus (4.14) zur Gesamteingangsmatrix  $\mathbf{B}$  in (3.1) zusammenfassen

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{\text{syn}} \quad \mathbf{B}_S]. \quad (4.15)$$

Von dem beschriebenen Verfahren sind gegenüber der ausschließlich snapshotbasierten Proper Orthogonal Decomposition mehrere Vorteile zu erwarten. Strebt der Emissionsgrad  $\varepsilon$  gegen null ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) und tritt demzufolge keine Wärmestrahlung mehr auf, wird das Systemverhalten unabhängig von den weiteren Lastparametern mit hoher Genauigkeit durch die Krylov-Unterraummethoden abgebildet. Die Approximation der Wärmeleitung im Körper, der Wärmekapazität, der Wärmestrom-, Temperatur- und Konvektionsrandbedingungen erfolgt also nicht auf Basis von geeignet zu wählenden Beispielsimulationen. Lediglich für die Berücksichtigung der Wärmestrahlung sind diese notwendig. Deshalb lässt sich annehmen, dass einerseits weniger Rechnungen während der Offline-Phase notwendig sind und andererseits die auftretenden Fehler gerade bei Extrapolation aus dem den Snapshots zugrunde liegenden Parameterraum geringer ausfallen. Dies soll nun anhand zweier Beispiele überprüft werden.

#### 4.4.2 Parameterstudie Vorwärmprozess

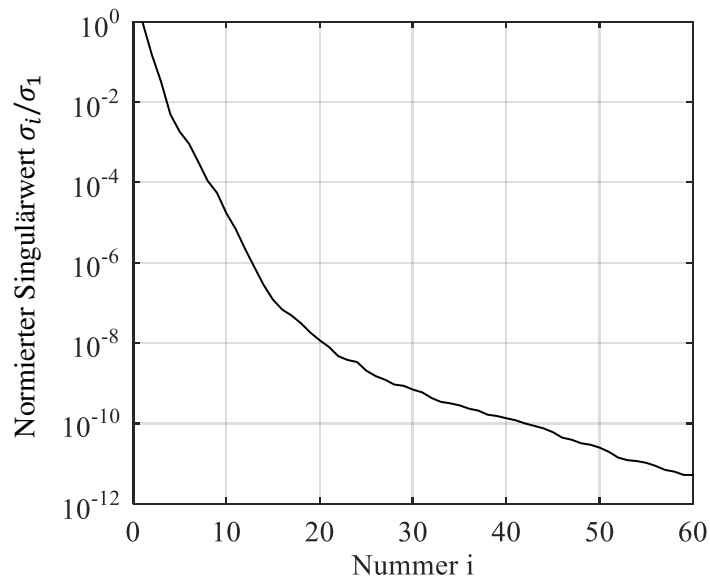
In Kapitel 3.6.4 wurde für die Proper Orthogonal Decomposition anhand des vereinfachten Rotationsbehälters der Einfluss der Snapshotauswahl auf die Reduktionsgüte bei Variation der Lastparameter Heizleistung und Emissionsgrad untersucht. Dieser Anwendungsfall soll jetzt für die neu entwickelte und im vorherigen Abschnitt vorgestellte Methode basierend auf der Singulärwertzerlegung der Lastvektorsnapshots aufgegriffen werden. Erneut dienen die 100 erzeugten Zufallsdatensätze der Abdeckung des Parameterraums (Abbildung 3.10). Ergänzt werden diese durch den Standardlastfall aus Tabelle 2.7, welcher gleichzeitig der Snapshotgenerierung im ersten Iterationsschritt dient. Zunächst beschränken sich die Untersuchungen auf das Block-Krylov-Verfahren, für welches die Entwicklungsordnung  $o = 8$  und als einzige Entwicklungsstelle  $s_k = 0$  gewählt werden. Der Abfall der Singulärwerte der Snapshotmatrix für die Wärmestrahlungslasten ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Die Eingangsmatrix setzt sich analog zu (4.15) aus den fünf Spalten, welche aus (4.2) resultieren, und den berücksichtigten Singulärvektoren der Wärmestrahlung zusammen, deren Anzahl mit  $e_R$  bezeichnet wird. Die reduzierte Dimension  $n$  beträgt mit  $K = 1$  folglich

$$n = (5 + e_R) \cdot o \cdot K = (5 + e_R) \cdot 8. \quad (4.16)$$

Nachfolgend werden die Varianten  $n = 120$ ,  $n = 160$  und  $n = 200$ , welche 10, 15 bzw. 20 Singulärvektoren einbeziehen, untersucht.

Tabelle 4.3 stellt die drei reduzierten Modelle hinsichtlich ihrer Genauigkeit in den einzelnen Iterationsschritten gegenüber. Während am Anfang nur eine Simulation des Ausgangsmodells der Snapshoterzeugung dient, kommt in jeder Iteration der Parametersatz mit dem größten Fehler hinzu, sodass sich der abgebildete Parameterraum sukzessive erweitert. Der Fehler wird erst ab einer Simulationszeit von 500 s ausgewertet, da sich bereits in Kapitel 3.5.3 zum Simulationsbeginn die größten Abweichungen der mit dem Block-Krylov-Verfahren reduzierten Modelle zeigten. Diese Ungenauigkeiten sind allerdings nicht auf die Eingangsreduktion zurückzuführen, weil aufgrund der einheitlichen Anfangstemperatur zunächst kaum Wärmestrahlung auftritt. Vielmehr handelt es hierbei um die ungenaue Wiedergabe der sehr schnellen Erwärmung am Anfang nach dem Einschalten der Heizelemente. Das Modell mit dem

Freiheitsgrad  $n = 200$  zum Beispiel weist nach 100 s einen maximalen Fehler von 0,8 K auf, welcher danach stark abnimmt. Die in Tabelle 4.3 angegebenen Höchstwerte sind hingegen in der Regel am Ende der Simulationszeit vorzufinden.



**Abbildung 4.5** Abfall der normierten Singulärwerte der Snapshotmatrix im ersten Iterationsschritt.

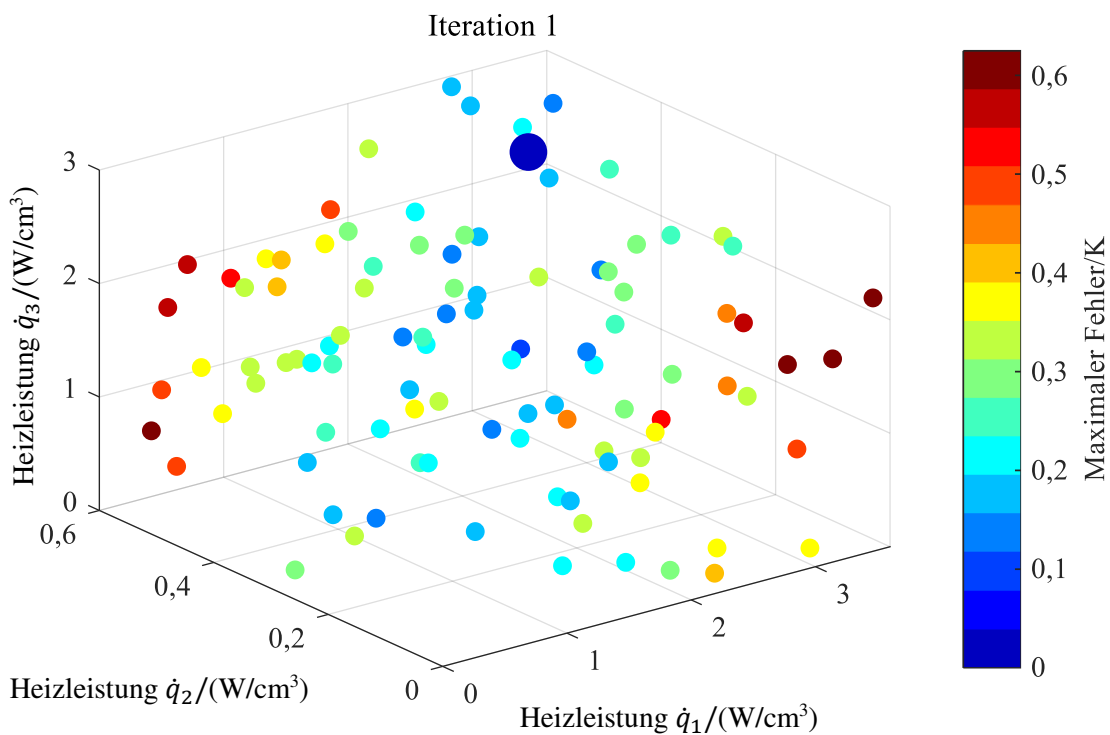
In der ersten Iteration treten für alle Varianten erheblich kleinere Abweichungen zum Vollmodell als bei der Proper Orthogonal Decomposition in Abbildung 3.11 auf. Bereits die Berücksichtigung von 15 Singulärvektoren ( $n = 160$ ) führt direkt auf einen maximalen Fehler unterhalb der festgelegten Toleranzgrenze von 1 K, während für  $n = 200$  ein Wert erreicht wird, der mit dem Fehlerhöchstwert nach sieben Iterationen in Abbildung 3.11 vergleichbar ist. Lediglich das kleinste reduzierte Modell ( $n = 120$ ) benötigt einen zweiten Iterationsschritt, um die Fehlergrenze zu unterschreiten. Nach drei Iterationen werden für alle Varianten sehr gute Ergebnisse erzielt. Die Anzahl an Simulationen während der Offline-Phase der Reduktion erweist sich folglich als erheblich geringer im Vergleich zu Kapitel 3.6.4 und die Gültigkeit des reduzierten Modells erstreckt sich über einen deutlich größeren Parameterbereich. In Anhang F ist die Abnahme des maximalen Fehlers für die ersten drei Iterationsschritte anhand des Systems mit dem Freiheitsgrad  $n = 120$  demonstriert.

**Tabelle 4.3** Maximaler Fehler der drei reduzierten Modelle für die einzelnen Iterationsschritte.

Reduzierte Dimension	$n = 120$	$n = 160$	$n = 200$
Anzahl Singulärvektoren	$e_R = 10$	$e_R = 15$	$e_R = 20$
Maximaler Fehler Iteration 1	1,68 K	0,95 K	0,63 K
Maximaler Fehler Iteration 2	0,56 K	0,44 K	0,44 K
Maximaler Fehler Iteration 3	0,29 K	0,26 K	0,18 K

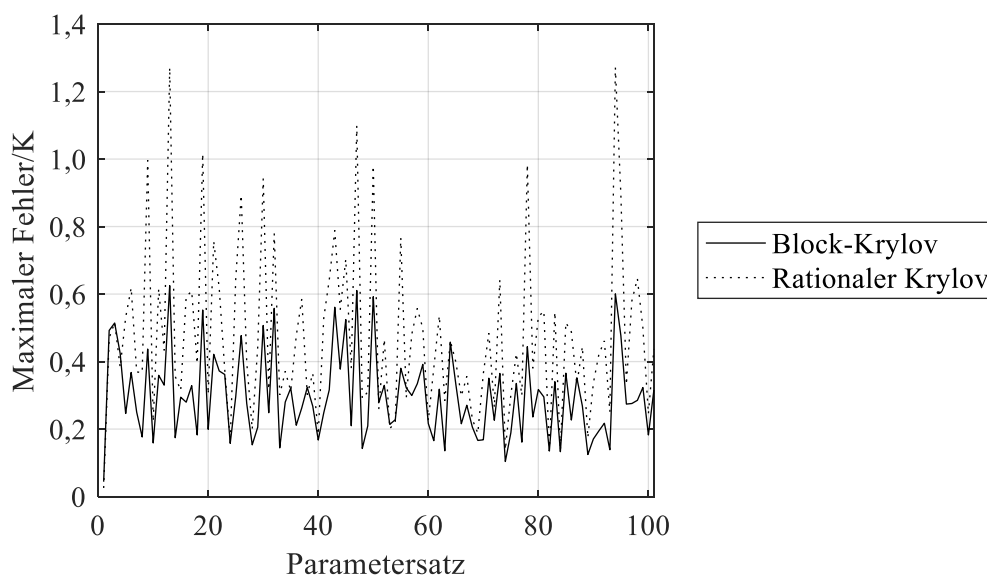
Eine weitere Erhöhung der reduzierten Dimension und damit der berücksichtigten Singulärvektoren bewirkt insbesondere im ersten Iterationsschritt kaum noch Verbesserungen. So fällt der maximale Fehler für  $n = 280$  auf 0,62 K und für  $n = 360$  auf 0,57 K. Dies lässt sich auf die gerade am Anfang kleine Snapshotbasis zurückführen, sodass durch die hinzugenommenen Singulärvektoren nur wenig zusätzliche Informationen hinzugefügt werden, was durch die niedrigen Singulärwerte angezeigt wird. Erst wenn der untersuchte Parameterraum mehr Snapshots erfordert, kann ein größerer Freiheitsgrad des reduzierten Modells Vorteile bringen.

Bei starker Verringerung der Heizleistung an einzelnen Segmenten gegenüber dem Bezugslastfall treten die größten Fehler auf. Dies zeigt Abbildung 4.6 exemplarisch für den ersten Iterationsschritt und die reduzierte Dimension  $n = 200$ . Gerade für  $\dot{q}_1 \approx 0$  und  $\dot{q}_2 \approx 0$  sind deutlich höhere Abweichungen als beispielsweise bei gleichzeitiger Verringerung aller drei Heizleistungen zu beobachten, was darin begründet liegt, dass sich die globale Temperaturverteilung erheblich ändert. Im ersten Fall ( $\dot{q}_1 \approx 0$ ) erhöht sich die Temperatur im Behältermantel anfangs kaum, während sich die Einbauten rund um den Kompensator nahezu unverändert aufheizen. Dies führt dazu, dass der Mantelbereich jetzt nicht mehr durch Strahlung Wärme abgibt, sondern welche von den zentralen Inneneinbauten aufnimmt. Die Richtung der Wärmeströme dreht sich also teilweise um. Gleiches gilt am Kompensator für  $\dot{q}_2 \approx 0$ . Bei simultaner Reduktion aller zugeführten Wärmeströme erwärmt sich hingegen der Behälter insgesamt langsamer, aber die warmen und kalten Bereiche ändern ihre Position nicht, sodass die Richtung der Wärmeströme infolge Strahlung unverändert bleibt, was deutlich besser durch die genutzten Trainingsdaten abgebildet wird.



**Abbildung 4.6** Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad  $n = 200$  im ersten Iterationsschritt für die untersuchten Parametersätze; der für die Snapshoterstellung genutzte Datensatz ist durch den vergrößerten Kreis gekennzeichnet.

Der rationale Krylov-Algorithmus, welcher hier dem ersten Iterationsschritt des IRKA-Verfahrens entspricht, lieferte für die Beispiele in Kapitel 3.5.3 und 4.2 insbesondere zu Simulationsbeginn bessere Ergebnisse als das Block-Krylov-Verfahren. Des Weiteren bietet sich aufgrund der tangentialen Interpolation die Möglichkeit, die Anzahl der berücksichtigten Singulärvektoren für die Wärmestrahlungsapproximation unabhängig von der reduzierten Dimension zu wählen. Der Freiheitsgrad des reduzierten Systems wird zu  $n = 200$  gewählt, da hierfür in Tabelle 4.3 bereits mit nur einer Offline-Simulation gute Ergebnisse erzielt wurden. Die maximalen Fehler der reduzierten Modelle sind im Intervall  $e_R = 15 \dots 30$  nahezu identisch, weshalb Abbildung 4.7 nur die Werte für  $e_R = 20$  darstellt. Zwar zeigt sich erneut die höhere Genauigkeit zu Simulationsbeginn im Vergleich zu den Block-Krylov-Verfahren, so liegt der Fehlerhöchstwert nach 100 s hier bei 0,08 K und somit um den Faktor 10 niedriger, allerdings treten am Simulationsende bis zu doppelt so hohe Abweichungen auf, was als deutlich kritischer zu bewerten ist. Hier dominiert der Fehler aus der Lastapproximation und diesbezüglich generiert das rationale Krylov-Verfahren keine Vorteile, vielmehr steigt die Ungenauigkeit infolge der tangentialen Interpolation bei gleichzeitig höherer Rechenzeit für die Erzeugung der Projektionsmatrix an, weshalb in zukünftigen Beispielen nur noch das Block-Krylov-Verfahren Anwendung findet.



**Abbildung 4.7** Maximaler Fehler des Block-Krylov-Verfahrens und des rationalen Krylov-Verfahrens für die 101 Parametersätze.

#### 4.4.3 Variation des Emissionsgrades

Je mehr Freiheitsgrade das Ausgangsmodell aufweist, desto wichtiger ist es, die Anzahl der Simulationen während der Offline-Phase minimal zu halten. Deshalb wird jetzt für das vollständige Rotationsbehältermodell aus Kapitel 2.4.2 eine Variation des Emissionsgrades im gesamten möglichen Intervall  $\varepsilon = 0 \dots 1$  untersucht. Zwar sind die in praktischen Anwendungen auftretenden Unsicherheiten hinsichtlich der Lastparameter deutlich kleiner, jedoch dient dieses Beispiel vorrangig dazu, den Gültigkeitsbereich des reduzierten Modells zu untersuchen.

Die Heizleistungen bleiben identisch zu den Werten in Tabelle 2.7 und für alle Lastfälle unverändert. In Anhang G sind die Temperaturverteilungen am Ende des betrachteten Erwärmungsvorgangs für  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 0,5$  sowie  $\varepsilon = 1$  dargestellt, aus welchen der starke Einfluss des Emissionsgrades deutlich wird. Dies drückt sich nicht bloß in den unterschiedlichen Maximaltemperaturen aus, auch die Erwärmung der Inneneinbauten, wie beispielsweise der Kompensatorstirnwand oder des Außenringes der Zylinderstirnwand (Benennung analog zu Abbildung 1.4), verändert sich erheblich. Die nachfolgenden Auswertungen beschränken sich stets auf die Stahlbauteile, da nur deren Temperaturen in die Beanspruchungsermittlung eingehen.

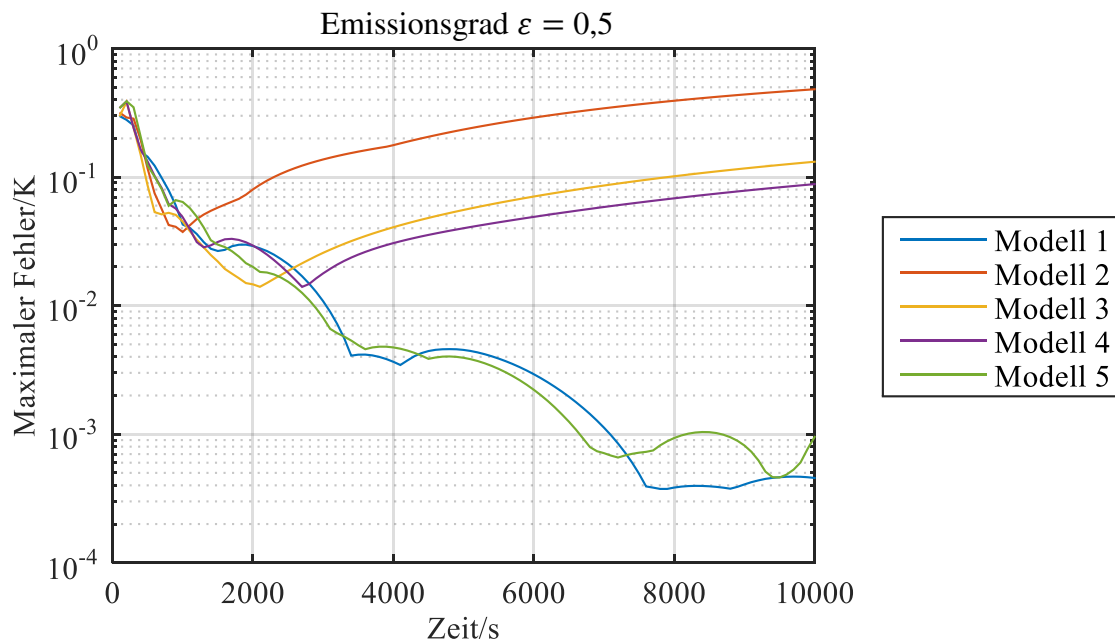
Für die Snapshoterstellung dienen Rechnungen des Ausgangsmodells für unterschiedliche Emissionsgrade. Die sich daraus ergebenden fünf Modellvarianten sind in Tabelle 4.4 zusammengestellt. Bei den ersten zwei Modellen werden lediglich die Lastvektoren einer Vollmodellsimulation für  $\varepsilon = 0,5$  bzw.  $\varepsilon = 0,8$  herangezogen, der numerische Aufwand in der Offline-Phase ist hier folglich am geringsten. Im Gegensatz dazu erfordern die Varianten 3 und 4 bereits zwei Vorabsimulationen und das fünfte Modell deckt schließlich den gesamten untersuchten Parameterbereich in dichter Staffelung ab.

**Tabelle 4.4** Modellvarianten je nach genutzten Emissionsgraden während der Berechnungen in der Offline-Phase.

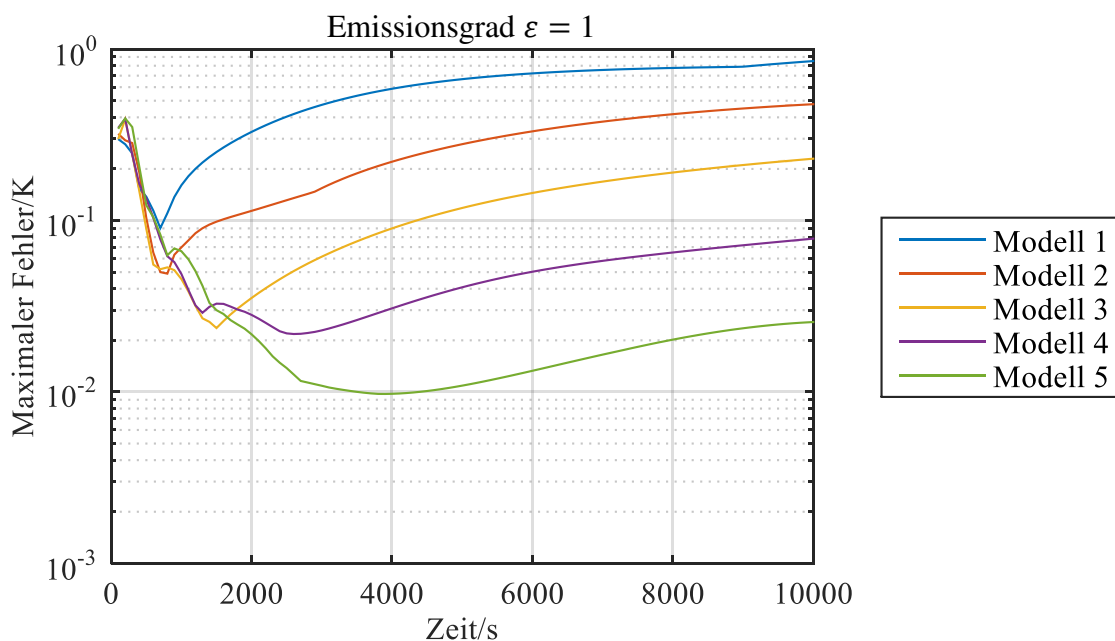
Modell	Emissionsgrade Snapshots
1	$\varepsilon = 0,5$
2	$\varepsilon = 0,8$
3	$\varepsilon = [0,2; 0,8]$
4	$\varepsilon = [0,3; 0,9]$
5	$\varepsilon = [0,1; 0,5; 0,9]$

Die Reduktion erfolgt unter Nutzung des Block-Krylov-Verfahrens mit einer Entwicklungsstelle  $s_k = 0$  und der Entwicklungsordnung  $o = 8$ , wobei stets  $e_R = 11$  Singulärvektoren zur Beschreibung der Wärmestrahlungseingänge herangezogen werden, sodass sich nach (4.16) der Freiheitsgrad des reduzierten Modells zu  $n = 128$  ergibt.

Abbildung 4.8 und Abbildung 4.9 veranschaulichen den maximalen Fehler der fünf Modelle für die Emissionsgrade  $\varepsilon = 0,5$  bzw.  $\varepsilon = 1$ . Der Fehlerhöchstwert liegt stets unterhalb der angestrebten Toleranzgrenze von 1 K. Die Ungenauigkeiten zum Simulationsbeginn von maximal 0,4 K lassen sich durch die Wahl einer höheren Entwicklungsordnung  $o$  verringern. Da die Wärmestrahlung aufgrund der einheitlichen Anfangstemperatur in diesem Zeitintervall allerdings sehr geringen Einfluss hat, sind die anfänglichen Abweichungen von untergeordneter Bedeutung für die Bewertung der Eingangsreduktion und werden im Folgenden nicht weiter betrachtet. Als deutlich entscheidender erweist sich hingegen der maximale Fehler am Simulationende.



**Abbildung 4.8** Maximaler Fehler der unterschiedlichen Modelle aus Tabelle 4.4 für den Emissionsgrad  $\varepsilon = 0,5$ .



**Abbildung 4.9** Maximaler Fehler der unterschiedlichen Modelle nach Tabelle 4.4 für den Emissionsgrad  $\varepsilon = 1$ .

Der Lastfall  $\varepsilon = 0,5$  ist für die Modelle 1 und 5 bereits in den Trainingsdaten enthalten. Dies erklärt die äußerst geringen Fehler mit zunehmender Zeit in Abbildung 4.8. Im Gegensatz dazu fällt die Abweichung für Modell 2 hier deutlich höher aus, allerdings ändert sich dies für den Fall  $\varepsilon = 1$ . Angesichts der mit steigendem Emissionsgrad zunehmenden Bedeutung der Wärmestrahlung treten für  $\varepsilon \rightarrow 1$  sowohl für Modell 1 als auch Modell 3 höhere Ungenauigkeiten auf als für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Deshalb empfiehlt sich eine unsymmetrische Auswahl innerhalb des Parameterraums für die Offline-Berechnungen. Dies veranschaulicht der Vergleich mit Modell 2 bzw. Modell 4. Auf diese Weise lässt sich die Modellgüte durch eine geeignete Snapshotselektion

gezielt beeinflussen. Mit zwei Simulationen des Ausgangssystems während der Offline-Phase liegt der maximale Fehler jedoch unabhängig von der konkreten Festlegung für  $t > 400$  s stets unter 0,3 K, solange keine gänzlich unsinnige Parameterwahl getroffen wird.

Bei Berücksichtigung hinreichend vieler Offline-Simulationen (Modell 5) kann für das gesamte Parameterspektrum eine hohe Reduktionsgüte erzielt werden, was Tabelle 4.5 für den Endzeitpunkt der Simulation ebenfalls belegt. Damit verringert sich aber gleichzeitig die Rechenzeiterparnis gegenüber der Proper Orthogonal Decomposition. Im Falle der Vernachlässigung der Wärmestrahlung ( $\varepsilon = 0$ ) liefern alle Modelle ein sehr gutes Ergebnis, weil dann nur der Fehler aus der Krylov-Reduktion relevant ist, was den Vorteil der entwickelten Methode unterstreicht. Anhand der minimalen Fehler zeigt sich die Lage der Datensätze, welche für die Snapshotgenerierung dienen. Für die gewählte Emissionsgradabstufung in den Offline-Simulationen in Schritten von 0,1 stellen die Modelle 2 und 4 das Optimum für eine bzw. zwei Vorabberechnungen des Ausgangsmodells dar. Sie zeichnen sich durch eine annähernd gleichmäßige Verteilung der maximalen Fehler bei Extrapolation und Interpolation des Emissionsgrades aus.

**Tabelle 4.5** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle zum Endzeitpunkt der Simulation  $t = 10.000$  s im Vergleich zum Ausgangsmodell. Die größten Fehler sind rot hinterlegt, während ein grüner Hintergrund auf eine geringe Abweichung hindeutet.

Emissions- grad	Maximaler Fehler				
	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
0	0,0004 K	0,0002 K	0,0002 K	0,0004 K	0,0004 K
0,05	0,1040 K	0,1191 K	0,0581 K	0,0617 K	0,0297 K
0,1	0,1591 K	0,2381 K	0,0518 K	0,0811 K	0,0020 K
0,15	0,1862 K	0,3492 K	0,0308 K	0,0752 K	0,0198 K
0,2	0,1991 K	0,4352 K	0,0005 K	0,0554 K	0,0304 K
0,25	0,1947 K	0,4959 K	0,0332 K	0,0288 K	0,0327 K
0,3	0,1764 K	0,5327 K	0,0647 K	0,0005 K	0,0296 K
0,35	0,1463 K	0,5478 K	0,0917 K	0,0276 K	0,0233 K
0,4	0,1058 K	0,5431 K	0,1124 K	0,0524 K	0,0154 K
0,45	0,0566 K	0,5207 K	0,1259 K	0,0728 K	0,0071 K
0,5	0,0005 K	0,4823 K	0,1317 K	0,0882 K	0,0010 K
0,55	0,0631 K	0,4296 K	0,1294 K	0,0980 K	0,0078 K
0,6	0,1314 K	0,3641 K	0,1190 K	0,1018 K	0,0132 K
0,65	0,2044 K	0,2872 K	0,1006 K	0,0995 K	0,0168 K
0,7	0,2814 K	0,2002 K	0,0745 K	0,0911 K	0,0184 K
0,75	0,3616 K	0,1041 K	0,0408 K	0,0767 K	0,0176 K
0,8	0,4446 K	0,0003 K	0,0007 K	0,0566 K	0,0144 K
0,85	0,5331 K	0,1109 K	0,0481 K	0,0309 K	0,0086 K
0,9	0,6345 K	0,2280 K	0,1026 K	0,0008 K	0,0022 K
0,95	0,7408 K	0,3503 K	0,1632 K	0,0369 K	0,0113 K
1	0,8516 K	0,4772 K	0,2296 K	0,0784 K	0,0256 K



In vielen praktischen Anwendungen gelingt keine derart intuitive Selektierung der Datensätze für die Offline-Simulationen, da häufig ein deutlich größerer Parameterraum betrachtet wird. Deshalb besteht weiterhin die Notwendigkeit den numerischen Aufwand der Vorabberechnungen zu minimieren, womit sich der nächste Abschnitt beschäftigt.

Abschließend sollen noch die Berechnungszeiten betrachtet werden. Eine Simulation des Ausgangsmodells dauert etwa 1 h, was durch die Modellordnungsreduktion auf circa 90 s verkürzt wird und einer Beschleunigung um den Faktor 40 entspricht. In Tabelle 4.5 konnte gezeigt werden, dass ein einziger Berechnungsdurchlauf während der Offline-Phase zur Einhaltung der angestrebten Fehlertoleranzen genügt. Deshalb verkürzt sich die Gesamtberechnungsdauer bei Analyse aller 21 Emissionsgrade inklusive der Modellordnungsreduktion auf die Dauer von ungefähr zwei Simulationen des Ausgangsmodells. Der Rechenzeitvorteil steigt mit der Anzahl untersuchter Varianten an. Eine ausführliche Aufschlüsselung der Berechnungszeiten findet sich in Kapitel 5.5.

## 4.5 Reduktion des Rechenaufwandes in der Offline-Phase

Zwar konnte mit der in Kapitel 4.4 entwickelten Methode der Rechenaufwand in der Offline-Phase gegenüber der Proper Orthogonal Decomposition erheblich reduziert werden, dennoch gestalten sich diese Simulationen des Ausgangsmodells weiterhin sehr zeitaufwendig. Wenn sehr große Parameterbereiche abgedeckt werden sollen, sind unter Umständen sogar mehrere transiente Rechnungen mit dem nicht reduzierten System auszuführen. Darüber hinaus besteht in praktischen Anwendungen nicht die Möglichkeit, die Gültigkeit des reduzierten Modells durch einen umfangreichen Abgleich mit dem Ausgangssystem zu evaluieren, schließlich sollen gerade diese Simulationen eingespart werden. Infolgedessen werden im Zweifelsfall wahrscheinlich mehr Berechnungen zur Bildung der Snapshotbasis durchgeführt, sodass deren effiziente Ermittlung essentiell ist.

### 4.5.1 Grundidee

Die Untersuchungen in Kapitel 4.4 haben gezeigt, dass die entwickelte Methode zur Eingangsreduktion basierend auf Lastvektorsnapshots in der Lage ist, reduzierte Modelle zu erzeugen, die innerhalb eines weiten Parameterspektrums gute Ergebnisse liefern. Aufgrund dessen kann geschlussfolgert werden, dass der exakten Abbildung der Temperaturvektoren in den Offline-Simulationen eine im Vergleich zur Proper Orthogonal Decomposition deutlich geringere Bedeutung zukommt. Dies heißt wiederum, dass auch trotz größerer Ungenauigkeiten in den Snapshots eine hohe Reduktionsgüte erzielbar ist. Dieser Umstand lässt sich gezielt zur Verringerung der Rechenzeiten bei der Erstellung der Trainingsdatensätze ausnutzen.

Viele Finite-Elemente-Präprozessoren, wie beispielsweise ANSYS Mechanical, verwenden standardmäßig Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen bei der Vernetzung [ANSYS, Inc. 2016]. Dies bietet bei Wärmestrahlungsproblemen unter Nutzung von Oberflächenelementen, wie für die Lastvektormethode in Kapitel 2.3.5, einen wesentlichen Vorteil. Während die

Wärmetransportvorgänge im Elementinneren aufgrund der linear veränderlichen Wärmeströme mit hoher Genauigkeit abgebildet werden können, bleibt die Anzahl der an der Wärmestrahlung beteiligten Oberflächenelemente überschaubar. Im Gegensatz dazu würde eine Halbierung der Elementkantenlänge bei Verwendung linearer Ansatzfunktionen in etwa zu einer Vervierfachung der Wärmestrahlungselemente führen, sodass die Anzahl der Einträge in der Matrix der Sichtfaktoren in (2.78) sogar um den Faktor 16 anwüchse. Dies kann leicht die zur Verfügung stehende Speicherkapazität übersteigen.

Bei hinreichender Erfahrung des Anwenders werden die Elementkantenlängen so gewählt, dass bei einem Wechsel von quadratischen zu linearen Ansatzfunktionen unter Beibehaltung der Position der Elementeckknoten die Ergebnisgüte nicht mehr ausreicht, was jedoch bei der Snapshoterstellung aufgrund der großen Toleranzen auch nicht notwendig ist. Deshalb wird hier der Ansatz vorgeschlagen, für die Simulationen während der Offline-Phase lineare statt quadratischer Elemente zu verwenden, indem die Seitenmittelknoten der Finiten Elemente eliminiert und die Elementtypen angepasst werden. Somit entfällt auch eine Neuvernetzung des Modells, welche einerseits eine in vielen Fällen nicht unerhebliche Arbeitszeit des Anwenders und andererseits eine Interpolation zwischen den unterschiedlichen Netzen erfordern würde. Des Weiteren bleiben die Oberflächenelemente für die Wärmestrahlung und damit die Sichtfaktormatrizen, deren Erzeugung den Großteil der Rechenzeit beim Export des Modells aus dem Finite-Elemente-Programm ausmacht, unverändert. Lediglich die Systemmatrizen und die Lastvektoren zur Abbildung der Konvektion und der Wärmeströme müssen neu erzeugt werden. Dies kann jedoch leicht automatisiert werden und ist nur mit einem minimalen Zeitaufwand verbunden. Die elementbezogenen Wärmeströme infolge Strahlung  $\mathbf{A}_{\text{elem}}\dot{\mathbf{q}}$  aus (2.81) müssen lediglich über die Zuordnungsmatrix  $\mathbf{T}_2$  in die Knotenwärmeströme des Finite-Elemente-Netzes mit quadratischen Ansatzfunktionen umgerechnet werden. Der zusätzliche numerische Aufwand im Anschluss an die Simulation des verkleinerten Ausgangssystems beschränkt sich folglich auf die Multiplikation der Elementlastvektoren mit einer dünnbesetzten Matrix und gestaltet sich gegenüber dem Rechenzeitvorteil durch den verminderten Freiheitsgrad als vernachlässigbar gering. Das nachfolgende Beispiel soll die Wirksamkeit der beschriebenen Methode demonstrieren.

#### 4.5.2 Anwendungsbeispiel

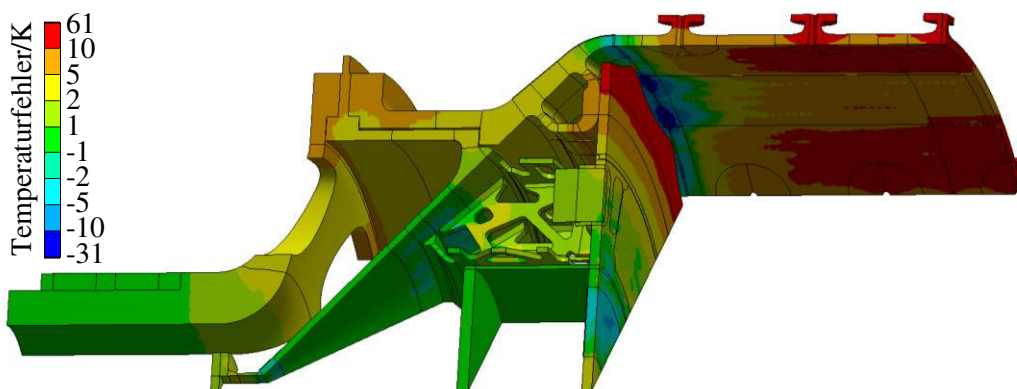
Die Untersuchungen erfolgen analog zu Kapitel 4.4.3 für das vollständige Rotationsbehältermodell unter Variation des Emissionsgrades  $\varepsilon = 0 \dots 1$ . Durch den Wegfall der Seitenmittelknoten reduziert sich der Freiheitsgrad des Ausgangsmodells von  $N = 368.793$  auf  $N = 76.124$ . Zunächst soll die Genauigkeit des derart verkleinerten Modells analysiert werden, um auszuschließen, dass mit dieser Methodik erzeugte gute Berechnungsergebnisse darauf beruhen, dass das Modell mit linearen Ansatzfunktionen das Temperaturfeld bereits hinreichend genau approximiert. Diesbezüglich stellt Tabelle 4.6 den maximalen Fehler, den Mittelwert des Fehlers über alle Knoten und dessen 0,9-Quantil für drei ausgewählte Emissionsgrade zum Endzeitpunkt der Simulation, für welchen die Abweichungen maximal werden, gegenüber. Je weniger Wärme über Strahlung transportiert wird, desto größer wird der Einfluss der

Wärmeleitung, deren Abbildungsgüte durch die Reduzierung der Ordnung der Ansatzfunktionen sinkt. Dies erklärt, dass die größten Unterschiede beim kleinsten Emissionsgrad auftreten.

**Tabelle 4.6** Fehler zwischen den Modellvarianten mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen am Simulationsende  $t = 10.000$  s.

Emissionsgrad	Maximaler Fehler	Fehlermittelwert	0,9-Quantil
$\varepsilon = 0,1$	60,55 K	3,36 K	7,66 K
$\varepsilon = 0,5$	45,75 K	3,03 K	6,45 K
$\varepsilon = 0,9$	34,27 K	2,81 K	5,57 K

Bereits die Fehlermittelwerte verdeutlichen, dass das Modell mit dem geringen Freiheitsgrad nicht in der Lage ist, die geforderte Berechnungsgenauigkeit zu erfüllen. Obgleich sich die Fehlerhöchstwerte auf einzelne Knoten in ausgewählten Kontaktbereichen beschränken, belegt Abbildung 4.10, dass dennoch größere Bauteilbereiche existieren, in denen die Ergebnisse mit einer Abweichung von mehr als 10 K als für die Ermittlung der thermischen Beanspruchungen unbrauchbar einzustufen sind. Dies betrifft vor allem den Wärmetransport durch den Behältermantel im Zylinderbereich sowie die Wärmeleitung durch das Fluid zwischen den Außenringen der Stirnwand und dem Behältermantel.



**Abbildung 4.10** Temperaturabweichung des Modells, welches Elemente mit linearen Ansatzfunktionen nutzt, im Vergleich zur Referenzlösung für Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen beim Emissionsgrad  $\varepsilon = 0,1$ ; Darstellung nur für die Stahlbauteile.

Die Berechnungszeit für eine Simulation des Ausgangsmodells verringert sich von ungefähr 1 h auf nur noch 205 s, also etwa um den Faktor 18. Aufgrund dessen lässt sich diese Methode in zweierlei Hinsicht nutzen. Zum einen kann bei gleichbleibender Anzahl an Offline-Simulationen die zugehörige Rechendauer verkürzt werden und zum anderen erlaubt die Untersuchung von deutlich mehr Parametervarianten bei unveränderter Simulationsdauer die engmaschigere Abdeckung des Parameterraums. Dies ist insbesondere in Fällen relevant, wo sich aufgrund sehr vieler Einflussgrößen die Wahl geeigneter Datensätze für die Snapshotzeugung als schwierig erweist. Des Weiteren verringert sich der Arbeitsspeicherbedarf, sofern dieser nicht durch die Wärmestrahlungsmatrizen dominiert wird, signifikant, was unter Umständen die Parallelisierung der Vorabsimulationen des Ausgangsmodells ermöglicht. Die angestrebte

Verringerung der Berechnungszeiten in der Offline-Phase wird also gewährleistet, jedoch muss dabei gleichzeitig die anvisierte Ergebnisgüte erhalten bleiben.

Tabelle 4.7 vergleicht dazu den maximalen Fehler der fünf Modellvarianten aus Tabelle 4.4, wobei jetzt die Snapshotgenerierung unter Nutzung des Modells mit linearen Ansatzfunktionen erfolgt. Erneut werden für die Auswertung nur die Stahlbauteile herangezogen. Als Reduktionsverfahren dient die Block-Krylov-Methode unter Verwendung identischer Parameter wie in Kapitel 4.4.3, sodass die reduzierte Dimension erneut  $n = 128$  beträgt. Erst Modell 5 kann die gesetzte Fehlergrenze von 1 K unterschreiten, welche durch die Modelle 2 bis 4 nur knapp verfehlt wird.

**Tabelle 4.7** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle zum Endzeitpunkt der Simulation  $t = 10.000$  s im Vergleich zum Ausgangsmodell, welches Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen nutzt. Die größten Fehler sind rot hinterlegt, während ein grüner Hintergrund auf eine geringe Abweichung hindeutet.

Emissions- grad	Maximaler Fehler				
	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
0	0,0003 K	0,0004 K	0,0004 K	0,0003 K	0,0005 K
0,05	0,1452 K	0,1363 K	0,1162 K	0,1161 K	0,0926 K
0,1	0,2400 K	0,2572 K	0,1701 K	0,1707 K	0,1730 K
0,15	0,2944 K	0,3844 K	0,2361 K	0,2402 K	0,2445 K
0,2	0,3194 K	0,4968 K	0,2963 K	0,3021 K	0,3084 K
0,25	0,3686 K	0,5933 K	0,3502 K	0,3574 K	0,3656 K
0,3	0,4274 K	0,6740 K	0,3987 K	0,4070 K	0,4169 K
0,35	0,4822 K	0,7396 K	0,4424 K	0,4515 K	0,4631 K
0,4	0,5570 K	0,7908 K	0,4820 K	0,4915 K	0,5042 K
0,45	0,6356 K	0,8285 K	0,5222 K	0,5271 K	0,5416 K
0,5	0,7168 K	0,8536 K	0,5728 K	0,5724 K	0,5765 K
0,55	0,7976 K	0,8668 K	0,6226 K	0,6201 K	0,6065 K
0,6	0,8778 K	0,8693 K	0,6714 K	0,6670 K	0,6343 K
0,65	0,9575 K	0,8629 K	0,7193 K	0,7132 K	0,6604 K
0,7	1,0363 K	0,8562 K	0,7661 K	0,7585 K	0,6894 K
0,75	1,1144 K	0,8469 K	0,8118 K	0,8031 K	0,7160 K
0,8	1,1917 K	0,8359 K	0,8577 K	0,8468 K	0,7398 K
0,85	1,2681 K	0,8796 K	0,9044 K	0,8898 K	0,7612 K
0,9	1,3438 K	0,9422 K	0,9506 K	0,9328 K	0,7801 K
0,95	1,4186 K	1,0045 K	0,9962 K	0,9772 K	0,7966 K
1	1,4928 K	1,0665 K	1,0414 K	1,0215 K	0,8107 K

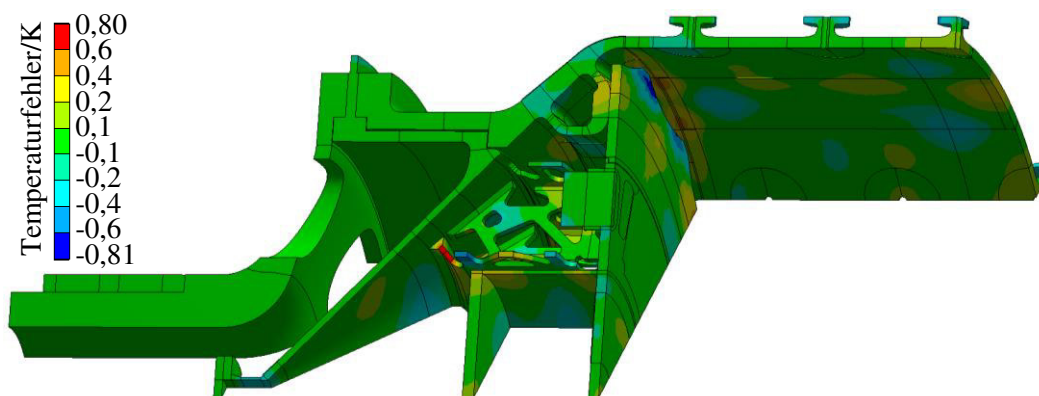
Im Vergleich zu Tabelle 4.5 ist ein deutlich geringerer Einfluss der Parameterwahl für die Offline-Simulationen zu beobachten. Lediglich die Varianten 1 und 2 weisen signifikante Unterschiede auf, wobei sich analog zu Kapitel 4.4.3 die Modelle 2 und 4 für die jeweils zugrunde liegende Anzahl an Vorabrechnungen bezüglich des Fehlermaximalwertes als

optimal erweisen. Bei der Nutzung von zwei Offline-Simulationen besitzt die konkrete Emissionsgradauswahl allerdings nur noch wenig Relevanz. Das Gleiche gilt im Falle von drei oder mehr Berechnungsdurchläufen des verkleinerten Ausgangsmodells. Im Gegensatz zu Kapitel 4.4.3 vermindert sich der maximale Fehler aufgrund der während der Snapshotzeugung auftretenden Ungenauigkeit jedoch nicht weiter als für Modell 5, sondern stagniert stattdessen auf diesem Niveau. Der maximale Fehler steigt im Wesentlichen mit dem Emissionsgrad und somit dem Einfluss der Wärmestrahlung an. Die in den Trainingsdaten repräsentierten Strahlungsparameter zeigen sich im Gegensatz zu Tabelle 4.5 hier nicht durch Abweichungen von weniger als 0,01 K.

Das reduzierte System ist in der Lage, erheblich genauere Ergebnisse zu liefern als das für die Offline-Simulationen genutzte Modell mit linearen Ansatzfunktionen. Dies verdeutlichen die Daten in Tabelle 4.8 im Vergleich zu Tabelle 4.6. Nicht nur der maximale Fehler sinkt deutlich, auch der Fehlermittelwert und das 0,9-Quantil verringern sich analog, wobei letzteres darauf hindeutet, dass für die meisten Modellknoten eine hohe Genauigkeit erzielt wird. Am Beispiel des Modells 5 zeigt dies Abbildung 4.11 für den Emissionsgrad  $\varepsilon = 1$ . Gerade im Zylinderbereich des Behältermantels ist zu erkennen, dass trotz hoher Abweichungen des verkleinerten Ausgangssystems nach der Modellordnungsreduktion geringe Fehler erreicht werden können. Die Ungenauigkeiten im Bereich des Fehlerhöchstwertes sind stark lokal begrenzt.

**Tabelle 4.8** Fehler des reduzierten Systems am Simulationsende  $t = 10.000$  s für die Modellvariante 5.

Emissionsgrad	Maximaler Fehler	Fehlermittelwert	0,9-Quantil
$\varepsilon = 0,1$	0,173 K	0,013 K	0,031 K
$\varepsilon = 0,5$	0,576 K	0,051 K	0,116 K
$\varepsilon = 0,9$	0,780 K	0,072 K	0,165 K



**Abbildung 4.11** Temperaturabweichung des reduzierten Modells (Modell 5) für den Emissionsgrad  $\varepsilon = 1$  im Vergleich zur Referenzlösung des Ausgangsmodells für Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen.

Die Nutzung des Modells mit linearen Ansatzfunktionen für die Snapshotzeugung bedingt eine höhere Anzahl an Offline-Simulationen im Vergleich zur Verwendung des Originalsystems. Im hier untersuchten Anwendungsfall genügen drei Vorabrechengänge, um eine Genauigkeit zu erreichen, die vergleichbar mit dem Modell 1 aus Kapitel 4.4.3 ist, welchem ein einziger Parametersatz zugrunde liegt. Dennoch verringert sich die Rechenzeit der Offline-Phase erheblich, von etwa 1 h auf dreimal 205 s und somit fast um den Faktor sechs. Gerade wenn es notwendig ist, durch eine Vielzahl an Simulationen die Gültigkeit des reduzierten Modells innerhalb eines weiten Parameterraums zu gewährleisten, ergeben sich hierdurch Vorteile.

Die Genauigkeit der entwickelten Methode genügt für die Identifizierung grundlegender Parameterabhängigkeiten und qualitativer Zusammenhänge. Für Anwendungen mit erhöhten Präzisionsanforderungen sind gegebenenfalls Anpassungen erforderlich. Dabei kann es sich einerseits um eine Anpassung der Elementkantenlängen beider Modelle handeln, sodass die gemeinsame Verwendung der Wärmestrahlungsmatrizen erhalten bleibt. Dies kann notwendig sein, da eine zu große Differenz zwischen den beiden Elementtypen nahelegt, dass auch das Modell mit quadratischen Ansatzfunktionen keine im Sinne der Netzverfeinerung konvergente Lösung liefert. Andererseits ist ebenfalls die alleinige Netzanpassung für das verkleinerte Ausgangssystem unter Beibehaltung der Polynomordnung der Ansatzfunktionen des Ursprungsmodells möglich. Dies erfordert eine Neuberechnung der Wärmestrahlungsmatrizen sowie die Interpolation zwischen den beiden Finite-Elemente-Netzen, was in der Praxis auf Temperaturebene erfolgen muss. Deshalb ist im Anschluss eine Neuberechnung der daraus resultierenden Lasten für das Ursprungsmodell notwendig. Dennoch können sich signifikante Zeiteinsparungen ergeben, insbesondere wenn wie im hier gewählten Anwendungsszenario die Lösung der Temperaturgleichung im Vergleich zur Wärmestrahlungsgleichung rechenzeitbestimmend ist.

## 5 Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung

Bei der Variation des Emissionsgrades für den Rotationsbehälter in Kapitel 4.3.3 verringerte sich im Zuge der Modellordnungsreduktion der Freiheitsgrad von  $N = 368.793$  auf  $n = 128$ . Dennoch sank die Berechnungszeit einer transienten Simulation lediglich um den Faktor 40, da sowohl die Wärmestrahlung auf die Umgebung in (3.11) als auch die Strahlung zwischen den Oberflächenelementen in (3.13) weiterhin basierend auf der ursprünglichen Dimension (vergleiche Tabelle 2.8) ermittelt werden. Trotz der nur einmaligen LU-Zerlegung der Matrix  $\mathbf{S}_3$  in (2.81) limitiert dies den erzielbaren Rechenzeitvorteil, welcher mit zunehmender Anzahl an Wärmestrahlungselementen sinkt.

Über 99 % der Berechnungszeit resultieren für das reduzierte Modell des Rotationsbehälters aus der Auswertung der nichtlinearen Last, wovon lediglich 0,5 % auf die Wärmestrahlung zur Umgebung und etwa 1 % auf die Transformationen zwischen den Größen auf Knoten- und Elementebene (2.71) bzw. (2.73) entfallen. Die Lösung des Gleichungssystems (2.79) benötigt folglich den mit Abstand größten Zeitanteil.

Eine weitere Verminderung der Simulationszeiten gelingt somit nur durch die Reduktion der Wärmestrahlung, wobei sich die Herausforderung aus der Behandlung der Nichtlinearität ergibt. Hierzu dienen sogenannte Methoden der Hyperreduktion, welche die Auswertung des nichtlinearen Lastterms auf einzelne Freiheitsgrade beschränken. Kapitel 5.1 gibt einen Überblick über diese Verfahren und Kapitel 5.2 geht näher auf die hier genutzte Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) ein, welche anschließend auf das Wärmestrahlungsproblem (Kapitel 5.3) adaptiert wird.

Anhand des Beispiels der Emissionsgradvariation aus Kapitel 4.4.3 erfolgt in Kapitel 5.4 ein umfangreicher Vergleich der in dieser Arbeit genutzten Reduktionsverfahren. Dieser schließt die Proper Orthogonal Decomposition, die Krylov-Unterraummethoden in Kombination mit der Eingangsreduktion basierend auf den Lastvektorsnapshots sowie selbige bei Nutzung des linearen Modells für die Offline-Simulation entsprechend Kapitel 4.5 jeweils mit und ohne Anwendung der Discrete Empirical Interpolation Method ein. Neben der bislang vorrangig betrachteten Genauigkeit des reduzierten Modells sind auch die Berechnungszeiten entscheidend für die Bewertung der Reduktionsverfahren. Deshalb widmet sich Kapitel 5.5 diesem Aspekt und weist dabei neben den Simulationszeiten für die Integration im Zeitbereich auch die weiteren Schritte der Prozesskette, wie beispielsweise den Export aus dem Finite-Elemente-Programm oder die Reduktionszeiten, aus. Abschließend greift Kapitel 5.6 noch einmal die Parameterstudie zur Vorwärmersimulation des vereinfachten Rotationsbehälters aus Kapitel 3.6.4 bzw. 4.4.2 auf und untersucht die Reduktion der Wärmestrahlung für dieses Beispiel.

## 5.1 Grundgedanke

Nichtlinearitäten treten sowohl in der Mechanik als auch in der Thermodynamik auf. Diese können sich entweder auf die gesamten Systemmatrizen beziehen oder auf den Lastvektor beschränken. Zur ersten Kategorie zählen beispielsweise eine temperaturabhängige Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit [Fritzen *et al.* 2018] oder die Betrachtung der Wärmestrahlung mit der Matrixmethode entsprechend (2.84). Des Weiteren sind auch Materialmodelle mit inneren Variablen, wie sie zum Beispiel für die Viskoelastizität auftreten, hier einzuordnen [Ryckelynck 2009]. Basierend auf (3.1) haben diese nach Anwendung der Modellordnungsreduktion, für welche hier in der Regel die Proper Orthogonal Decomposition zur Anwendung kommt, mit  $\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_R(t)$  die Form

$$\mathbf{V}^T \mathbf{E} \langle \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}}_R \rangle \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}}_R + \mathbf{V}^T \mathbf{A} \langle \mathbf{V} \mathbf{x}_R \rangle \mathbf{V} \mathbf{x}_R = \mathbf{V}^T \mathbf{f}(t), \quad (5.1)$$

wobei  $\mathbf{f}(t)$  eine allgemeine thermische oder mechanische Last repräsentiert. Hierbei müssen die Systemmatrizen in jedem Zeitschritt in Abhängigkeit vom aktuellen Zustandsvektor neu assembliert werden.

Hängt hingegen nur der Lastvektor nichtlinear vom Temperatur- bzw. Verschiebungsvektor ab, erfordert das reduzierte Gleichungssystem

$$\mathbf{V}^T \mathbf{E} \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}}_R + \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{x}_R = \mathbf{V}^T \mathbf{f} \langle \mathbf{V} \mathbf{x}_R \rangle \quad (5.2)$$

nur die einmalige Berechnung der reduzierten Systemmatrizen im Vorfeld der transienten Analysen. Hierzu zählt die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Wärmestrahlung nach (2.81) bzw. (2.82).

Die Auswertung der Nichtlinearität bedingt für jeden Lösungsschritt die Expansion des reduzierten Zustandsvektors und die Berechnung des nichtlinearen Terms in der ursprünglichen Dimension, woraus resultierend die erzielbaren Rechenzeitvorteile der Modellordnungsreduktion unter Umständen nur sehr gering ausfallen [Ryckelynck 2009; Rutzmoser & Rixen 2017]. Abhilfe schafft hier die Hyperreduktion, deren Ziel es ist, diese Berechnung auf ausgewählte Freiheitsgrade zu beschränken. Einen Überblick über dabei verwendete Verfahren geben Fritzen *et al.* [Fritzen *et al.* 2018]. Diese erfordern alle entsprechende Trainingsdatensätze. Wie für die Proper Orthogonal Decomposition und die Eingangsreduktion basierend auf Lastvektorsnapshots unterteilt sich der Simulationsprozess folglich in eine Offline-Phase zur Gewinnung dieser Trainingsdaten und eine Online-Phase, innerhalb derer die eigentlichen Berechnungen mit dem reduzierten Modell ausgeführt werden.

Einen ersten Ansatz zur Hyperreduktion liefert die Gappy-POD [Everson & Sirovich 1995], welche auf die Rekonstruktion von Bilddaten aus wenigen Punkten basierend auf Trainingsdatensätzen abzielt. Weitere Methoden sind beispielsweise die Missing Point Estimation [Astrid *et al.* 2008], die Compressive Tensor Approximation [Carlberg *et al.* 2011] sowie die Best-Points Interpolation (BPI) [Nguyen *et al.* 2008].

Ein anderes in den letzten Jahren für vielfältige Feldprobleme genutztes Verfahren ist die Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) [Chaturantabut 2008]. Erste Anwendungen



beziehen sich auf die Simulation von Neuronen [Chaturantabut & Sorensen 2009] und Strömungen in porösen Medien [Chaturantabut & Sorensen 2011]. Mittlerweile existieren auch Beispiele aus der Mechanik wie für die Modellierung nichtlinearer Elastizität [Radermacher & Reese 2016], der Magnetostatik [Sato *et al.* 2016] und der Akustik [Negri *et al.* 2015]. Brands *et al.* bilden mit diesem Verfahren eine bewegte Wärmequelle ab [Brands *et al.* 2016] und Fritzen *et al.* nutzen es im Falle einer nichtlinearen Wärmeleitfähigkeit [Fritzen *et al.* 2018]. Die Grundlage bildet die Empirical Interpolation Method (EIM) [Barrault *et al.* 2004], welche zunächst für kontinuierliche Systeme entwickelt wurde. Mit der DEIM erfolgte die Erweiterung dieses Verfahrens auf Systeme, wie sie bei der Ortsdiskretisierung mit Finiten Volumen oder Finiten Elementen auftreten.

Für den in (5.1) beschriebenen Fall zustandsabhängiger Systemmatrizen wird die Beschränkung der Auswertung der Nichtlinearität für wenige Freiheitsgrade dadurch erschwert, dass diese nicht nur von der Zustandsgröße an einem Knoten abhängt. Stattdessen müssen alle an diesen Knoten angrenzenden Elemente betrachtet werden, schließlich erfolgt die numerische Integration auf Elementebene. Somit hängt die nichtlineare Steifigkeit oder Wärmeleitfähigkeit von den Verschiebungen bzw. Temperaturen aller Knoten dieser Elemente ab. Dies steht der angestrebten Begrenzung auf wenige Freiheitsgrade entgegen und verringert folglich den erzielbaren Rechenzeitvorteil [Tiso & Rixen 2013]. Abhilfe schafft hierbei die Unassembled DEIM (UDEIM), welche die Berechnungen im unassemblierten System ausführt [Tiso & Rixen 2013]. Deshalb genügt für jeden Auswertepunkt die Betrachtung eines einzelnen Elementes, was den numerischen Aufwand deutlich reduziert.

Die Reduced Integration Domain (RID)-Methode begrenzt die numerische Integration auf einen Teil der Elemente und im Anschluss wird die reduzierte Systemmatrix approximiert. Erstmals fand dieses Verfahren für eine temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit Anwendung und wurde später für Systeme mit inneren Zustandsvariablen erweitert [Ryckelynck 2005, 2009]. Die bisher beschriebenen Methoden versuchen geeignete Punkte im Modell auszuwählen, für die die Nichtlinearität ausgewertet wird, um im Anschluss eine Approximation für alle Freiheitsgrade zu erreichen, welche dann mit der Projektionsmatrix wieder in den reduzierten Raum überführt wird [Rutzmoser & Rixen 2017].

Die Energy-Conserving Sampling and Weighting (ECSW)-Methode [Farhat *et al.* 2014, 2015] verfolgt im Gegensatz dazu das Ziel, direkt die virtuelle Arbeit der reduzierten inneren Lasten bestmöglich zu erhalten, indem durch Einführung entsprechender Wichtungsfaktoren die Berechnung auf wenige Elemente beschränkt wird. Den Kern des Verfahrens bildet nun die Bestimmung dieser Wichtungsfaktoren derart, dass möglichst viele identisch null sind und demzufolge die zugehörigen Freiheitsgrade aus der Berechnung entfallen. Die Lösung des sich daraus ergebenden Optimierungsproblems ist jedoch numerisch aufwendig [Rutzmoser & Rixen 2017]. Darüber hinaus benötigt das Verfahren weiterhin entsprechende Trainingsdatensätze, deren Berechnung in der Regel sehr zeitaufwändig ist. Deshalb nutzen Rutzmoser und Rixen anstatt von vollständigen transienten Simulationen stochastisch generierte Lasten und die

Krylov-Reduktion, welche nicht auf den Zustandsvektor sondern auf den Lastvektor angewendet wird [Rutzmoser & Rixen 2017]. Durch Skalierung der Krylov-Basisvektoren mit Zufallszahlen entsteht dann der Trainingsdatensatz, welcher durch das reduzierte Modell abgebildet werden muss. Der dabei erzielte Rechenzeitgewinn bleibt allerdings hinter dem mit anderen Verfahren der Hyperreduktion beobachteten zurück, weshalb die simulationsfreie Bestimmung der Reduktionsbasis Gegenstand aktueller Forschung ist [Meyer *et al.* 2017; Rutzmoser & Rixen 2017]. In Verbindung mit der Proper Orthogonal Decomposition erweist sich die Notwendigkeit von Vorabberechnungen jedoch als nachrangig, da ohnehin Offline-Simulationen zur Reduktion des Zustandsvektors benötigt werden. Auch für das in Kapitel 4.4 entwickelte Verfahren zur Eingangsreduktionen stehen entsprechende Snapshots zur Verfügung.

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Wärmestrahlung entsprechend (2.81) bzw. (2.82) erfordert keine wiederkehrende Integration auf Elementebene. Deshalb sind Verfahren wie die UDEIM oder die RID-Methode hier nicht notwendig. Aufgrund der vielfältigen Anwendung und der einfachen Implementierbarkeit soll für die Reduktion der Wärmestrahlung nachfolgend die Discrete Empirical Interpolation Method zur Anwendung kommen.

## 5.2 Discrete Empirical Interpolation Method

Betrachtet wird die allgemeine nichtlineare Last  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  mit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  aus (5.2). Analog zum Zustandsvektor in (3.3) soll diese nun durch Projektion in einen Unterraum approximiert werden

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{V}_{\text{HR}} \mathbf{c}(\mathbf{x}), \quad (5.3)$$

wobei  $\mathbf{V}_{\text{HR}} \in \mathbb{R}^{N \times m}$  die Projektionsmatrix der Hyperreduktion,  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  den zugehörigen Koeffizientenvektor und  $m$  die reduzierte Dimension darstellt [Chaturantabut & Sorensen 2009]. Das Gleichungssystem (5.3) zur Bestimmung von  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  ist überbestimmt, weshalb für die Lösung eine Beschränkung auf  $m$  Zeilen erfolgt. An dieser Stelle wird die Auswertung der Nichtlinearität somit auf ausgewählte Freiheitsgrade eingegrenzt. Dies geschieht durch Multiplikation mit der Zuordnungsmatrix  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times m}$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{V}_{\text{HR}} \mathbf{c}(\mathbf{x}). \quad (5.4)$$

Bei Auswahl des  $i$ -ten Freiheitsgrades entspricht die zugehörige Spalte dieser booleschen Matrix der  $i$ -ten Spalte der Einheitsmatrix  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  [Chaturantabut & Sorensen 2010]. Nach Auflösen von (5.4) nach  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  und Einsetzen in (5.3) folgt daraus

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{V}_{\text{HR}} (\mathbf{P}^T \mathbf{V}_{\text{HR}})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5.5)$$

Hierin sind bislang sowohl die Zuordnungsmatrix  $\mathbf{P}$  als auch die Projektionsmatrix  $\mathbf{V}_{\text{HR}}$  unbekannt. Letztere ergibt sich analog zur Proper Orthogonal Decomposition und setzt somit die geeignete Bestimmung von  $\zeta$  Lastvektorsnapshots  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_i))$  mit  $i = 1 \dots \zeta$  voraus, welche analog zu (3.40) eine Snapshotmatrix  $\mathbf{Y}$  bilden

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_1)) \quad \dots \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_i)) \quad \dots \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_\zeta))]. \quad (5.6)$$

Nach Anwendung der Singulärwertzerlegung sowie Abschneiden der kleinsten Singulärwerte und zugehörigen Singulärvektoren

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}_L \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}_R^T \approx \tilde{\mathbf{U}}_L \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \tilde{\mathbf{U}}_R^T \quad (5.7)$$

mit  $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R \in \mathbb{R}^{N \times \zeta}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{\zeta \times \zeta}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}_L, \tilde{\mathbf{U}}_R \in \mathbb{R}^{N \times m}$  sowie  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ergibt sich die Projektionsmatrix der Hyperreduktion zu

$$\mathbf{V}_{\text{HR}} = \tilde{\mathbf{U}}_L. \quad (5.8)$$

Die Discrete Empirical Interpolation Method, welche in Algorithmus 2 dargestellt ist, erlaubt darauf aufbauend die Berechnung der Zuordnungsmatrix  $\mathbf{P}$ . Die Indizierung in Algorithmus 2 erfolgt analog zu MATLAB, sodass  $\mathbf{P}\{i, j\} = P_{ij}$  gilt und  $\mathbf{V}_{\text{HR}}\{:, i\}$  der  $i$ -ten Spalte der Matrix  $\mathbf{V}_{\text{HR}}$  entspricht.

Als erster Freiheitsgrad wird in Zeile 2 derjenige ausgewählt, welcher den betragsmäßig größten Eintrag in der ersten Spalte der Projektionsmatrix besitzt. Dabei liefert die Funktion  $\text{index}\langle \max\langle \dots \rangle \rangle$  den zum Maximalwert gehörenden Zeilenindex. Auf diese Weise kann ein Lastvektor, der exakt der ersten Spalte von  $\mathbf{V}_{\text{HR}}$  entspricht, in (5.5) mit  $m = 1$  korrekt wiedergegeben werden. Im Gegensatz dazu ergibt sich ein Fehler, wenn die zweite Spalte von  $\mathbf{V}_{\text{HR}}$  auf der rechten Seite von (5.5) eingesetzt wird. Durch Lösung des Gleichungssystems (5.4) folgt dann der Koeffizientenvektor  $\mathbf{c}$  (Zeile 5) und durch Einsetzen in (5.5) ergibt sich in Zeile 6 das Residuum  $\mathbf{r}$  aus dem Vergleich der Lastvektoren auf der rechten und linken Seite von (5.5). Deshalb wird in der nächsten Iterationsschleife der Freiheitsgrad hinzugefügt, für den dieses Residuum maximal wird (Zeile 7) und die Zuordnungsmatrix entsprechend ergänzt (Zeile 8). Auf diese Weise werden insgesamt  $m$  Punkte ausgewählt, welche die in den Snapshots enthaltenen Lastvektoren bestmöglich approximieren.

**Algorithmus 2** Discrete Empirical Interpolation Method [Chaturantabut & Sorensen 2010] unter Verwendung der Matrixindizierung analog zu MATLAB.

---

**Eingang:** Projektionsmatrix Hyperreduktion  $\mathbf{V}_{\text{HR}} \in \mathbb{R}^{N \times m}$

**Ausgänge:** Vektor der diskreten Punkte  $\mathbf{p}$ ; Zuordnungsmatrix  $\mathbf{P}$

---

```

1   $\mathbf{p} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m \times 1}; \mathbf{P} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N \times m}$ 
2   $\mathbf{p}\{1\} = \text{index}\langle \max\langle |\mathbf{V}_{\text{HR}}\{:, 1\}| \rangle \rangle$ 
3   $\mathbf{P}\{\mathbf{p}\{1\}, 1\} = 1$ 
4  for  $l = 2:m$ 
5       $\mathbf{c} = (\mathbf{P}\{:, 1:(l-1)\}^T \mathbf{V}_{\text{HR}}\{:, 1:(l-1)\})^{-1} (\mathbf{P}\{:, 1:(l-1)\}^T \mathbf{V}_{\text{HR}}\{:, l\})$ 
6       $\mathbf{r} = \mathbf{V}_{\text{HR}}\{:, l\} - \mathbf{V}_{\text{HR}}\{:, 1:(l-1)\} \mathbf{c}$ 
7       $\mathbf{p}\{l\} = \text{index}\langle \max\langle |\mathbf{r}| \rangle \rangle$ 
8       $\mathbf{P}\{\mathbf{p}\{l\}, l\} = 1$ 
9  end
```

---

Nach Anwendung der Modellordnungsreduktion auf den Zustandsvektor ergibt sich der reduzierte Lastvektor  $\mathbf{f}_R\langle\mathbf{V}\mathbf{x}_R\rangle$  mit  $\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_R(t)$  aus (5.2) zu

$$\mathbf{f}_R\langle\mathbf{V}\mathbf{x}_R\rangle = \mathbf{V}^T \mathbf{f}\langle\mathbf{V}\mathbf{x}_R\rangle \approx \mathbf{V}^T \mathbf{V}_{HR} (\mathbf{P}^T \mathbf{V}_{HR})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{f}\langle\mathbf{V}\mathbf{x}_R\rangle. \quad (5.9)$$

Der Term  $\mathbf{V}^T \mathbf{V}_{HR} (\mathbf{P}^T \mathbf{V}_{HR})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , welcher nicht mehr von der Ausgangsdimension  $N$  abhängt, ist konstant und kann deshalb im Vorfeld berechnet werden. Unter Berücksichtigung des für die Discrete Empirical Interpolation Method angenommenen skalaren Zusammenhangs zwischen dem Zustandsvektor und dem Lastvektor im Sinne  $f_i = f_i\langle x_i \rangle$  vereinfacht sich der zweite Term aus (5.9) zu

$$\mathbf{P}^T \mathbf{f}\langle\mathbf{V}\mathbf{x}_R\rangle = \mathbf{f}\langle(\mathbf{P}^T \mathbf{V})\mathbf{x}_R\rangle, \quad (5.10)$$

womit sich die Expansion des reduzierten Zustandsvektors auf die  $m$  ausgewählten Freiheitsgrade beschränkt, sodass auch hier die Abhängigkeit von der Ausgangsdimension nicht mehr besteht [Tiso & Rixen 2013]. Infolgedessen verringert sich der numerische Aufwand bei der Bestimmung des reduzierten Lastvektors in (5.9) erheblich.

### 5.3 Anwendung der DEIM auf die Wärmestrahlung

Lediglich Qian *et al.* wendeten die Discrete Empirical Interpolation Method bisher auf Wärmestrahlungsprobleme an, wobei hier die Wärmestrahlung auf die Umgebung und die Wärmestrahlung zwischen Oberflächenelementen des Bauteils mit der in (2.82) vorgestellten Matrixmethode betrachtet wurden [Qian *et al.* 2015]. Letztere weist jedoch den Nachteil auf, dass die ausschließliche Einleitung der Wärmeströme infolge von Strahlung in die Eckknoten bei Verwendung von Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen zu einer ungleichmäßigen Oberflächentemperatur führt. Ein Wechsel zu Elementen mit linearen Ansatzfunktionen ist allerdings vielfach nicht möglich, da aufgrund der erforderlichen feineren Vernetzung zur Auflösung der durch Wärmeleitung transportierten Wärmeströme die Anzahl der Wärmestrahlungsflächen stark ansteigen würde. Angesichts der im Allgemeinen nahezu vollbesetzten Wärmestrahlungsmatrizen übersteigt dies leicht den zur Verfügung stehenden Arbeitsspeicher. Aufgrund dessen und in Anbetracht der besseren Kondition der Matrix  $\mathbf{S}_3$  im Vergleich zu  $\mathbf{S}_1$  stellt die Lastvektormethode aus (2.81) in der kommerziellen Finite-Elemente-Software ANSYS das Standardverfahren dar [ANSYS, Inc. 2016]. Für diese findet sich bislang keine Anwendung der Hyperreduktion in der Literatur.

#### 5.3.1 Standardfall

Alle Formen der Wärmestrahlung, die hier betrachtet werden, lassen sich auf eine allgemeine Schreibweise für den Lastvektor  $\mathbf{f}\langle\mathbf{x}\rangle$  mit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{f}\langle\mathbf{x}\rangle = \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 \mathbf{x})^{\hat{4}} \quad (5.11)$$

zurückführen. Dies betrifft sowohl die reine Wärmestrahlung auf die Umgebung als auch die allgemeine Variante zwischen den einzelnen Bauteilflächen, sowohl nach der Matrixmethode als auch der Lastvektormethode.

Die konkreten Ausdrücke für die Wärmestrahlungsmatrizen  $\mathbf{R}_1$  und  $\mathbf{R}_2$  sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Im Falle mehrerer Strahlungsvolumina können die zugehörigen Lastvektoren separat ermittelt und anschließend überlagert werden, weshalb sich die Ausführungen hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf ein einzelnes Strahlungsvolumen beziehen. Auch die Hyperreduktion erfolgt dann für die verschiedenen Bereiche getrennt. In der Regel tritt nicht an allen  $N$  Freiheitsgraden des Systems Strahlung auf die Umgebung oder für die Matrixmethode zwischen den Bauteiloberflächen auf. Dann sind mit  $\varepsilon_{\text{knoten}ii} = 0$  die zugehörigen Spalten und Zeilen der Matrix  $\mathbf{R}_1$  nicht besetzt. Somit genügt es, die Berechnungen auf die relevanten Freiheitsgrade als Teilmenge der Knoten zu beschränken. Davon unabhängig bleibt die Dimension dennoch in einer Größenordnung, die eine schnelle Berechnung in jedem Lastschritt verhindert.

**Tabelle 5.1** Wärmestrahlungsmatrizen des allgemeinen Lastvektors aus (5.11) für die unterschiedlichen Strahlungsvarianten.

Strahlungsvariante	$\mathbf{R}_1$	$\mathbf{R}_2$	Gleichung
Umgebung	$\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{knoten}} \mathbf{A}_{\text{knoten}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$	$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$	(2.87)
Matrixmethode	$\mathbf{A}_{\text{knoten}} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{S}_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$	$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$	(2.82)
Lastvektormethode	$\mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{\text{elem}} \mathbf{S}_4 \mathbf{S}_3^{-1} \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} \in \mathbb{R}^{N \times M}$	$\mathbf{T}_1 \in \mathbb{R}^{M \times N}$	(2.81)

Die Wärmestrahlung auf die Umgebung in (2.87) bzw. deren reduzierte Form (3.11) nach Anwendung der Modellordnungsreduktion auf den Zustandsvektors setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der zweite Summand darin, welcher die Strahlung von der Umgebung auf den Körper aufgrund der festgelegten Umgebungstemperatur  $\theta_\infty$  beschreibt, ist konstant und erfordert somit keine Anwendung der Hyperreduktion, weshalb hier nur die Wärmestrahlung vom Körper zur Umgebung betrachtet wird.

Nach Anwendung der Discrete Empirical Interpolation Method und der Modellordnungsreduktion nimmt (5.9) unter Berücksichtigung von (5.11) die Form

$$\mathbf{f}_R \langle \mathbf{V} \mathbf{x}_R \rangle \approx \mathbf{V}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{V}_{\text{HR}} (\mathbf{P}^T \mathbf{V}_{\text{HR}})^{-1} \mathbf{P}^T ((\mathbf{R}_2 \mathbf{V} \mathbf{x}_R)^{\hat{4}}) \quad (5.12)$$

an. Dies ist unabhängig vom konkreten Verfahren, welches für die Reduktion des Zustandsvektors genutzt wird. Wie bereits in Kapitel 5.2 kann der Term  $\mathbf{V}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{V}_{\text{HR}} (\mathbf{P}^T \mathbf{V}_{\text{HR}})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  im Vorfeld berechnet werden, schließlich lässt sich die Inverse von  $\mathbf{P}^T \mathbf{V}_{\text{HR}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  aufgrund der geringen Dimension direkt bilden. Für die komponentenweise berechnete vierte Potenz des Temperaturvektor gilt analog zu (5.10)

$$\mathbf{P}^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{V} \mathbf{x}_R)^{\hat{4}} = \left( (\mathbf{P}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{V}) \mathbf{x}_R \right)^{\hat{4}}. \quad (5.13)$$

Daraus resultiert dann der reduzierte Lastvektor

$$\mathbf{r}_{\text{tSR}} \langle t \rangle = \mathbf{V}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{V}_{\text{HR}} (\mathbf{P}^T \mathbf{V}_{\text{HR}})^{-1} \left( (\mathbf{P}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{V}) \mathbf{x}_R \right)^{\hat{4}}. \quad (5.14)$$

Mit  $\mathbf{V}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{V}_{\text{HR}} (\mathbf{P}^T \mathbf{V}_{\text{HR}})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $\mathbf{P}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sowie  $\mathbf{x}_R(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  hängt folglich kein Term mehr vom ursprünglichen Freiheitsgrad  $N$  oder der Ausgangsdimension der Wärmestrahlungsgleichung für die Oberflächenelemente  $M$  ab und während der gesamten Simulation des reduzierten Systems treten nur Größen mit den reduzierten Dimensionen  $n$  und  $m$  auf, was eine drastische Verringerung der Rechenzeiten erwarten lässt. Bei mehreren Wärmestrahlungsvolumina oder dem gleichzeitigen Auftreten von Wärmestrahlung zwischen Flächen und reiner Wärmestrahlung zur Umgebung im Modell ergibt sich der resultierende reduzierte Lastvektor  $\mathbf{r}_{\text{tSRres}}$  aus der Superposition der einzelnen reduzierten Lastvektoren

$$\mathbf{r}_{\text{tSRres}}(t) = \sum_i \mathbf{r}_{\text{tSR}_i}(t). \quad (5.15)$$

Die Genauigkeit des mittels DEIM reduzierten Modells lässt sich zum einen durch die Auswahl der Snapshots in (5.6) und zum anderen über die reduzierte Dimension  $m$  steuern. Bei Anwendung der Proper Orthogonal Decomposition oder der snapshotbasierten Eingangsreduktion in Kapitel 4.4 können die gleichen Trainingsdatensätze für die Hyperreduktion genutzt werden. Für die numerische Ausführung der Singulärwertzerlegung gelten die Aussagen aus Kapitel 3.6.2. Da häufig nur eine Teilmenge der Knoten an der Wärmestrahlung beteiligt ist, besitzt die Snapshotmatrix nur in den zugehörigen Zeilen von null verschiedene Einträge. Wenn lediglich die relevanten Freiheitsgrade betrachtet werden, reduziert sich die Dimension der Snapshotmatrix  $\mathbf{Y}$  in (5.6) zum Teil erheblich. Deshalb kann hier vielfach mit vertretbarem numerischem Aufwand die direkte Singulärwertzerlegung (3.44) anstatt des Eigenwertproblems (3.50) genutzt werden, da sich erstere durch eine bessere Kondition und höhere Genauigkeit auszeichnet. Aufgrund dessen werden hier stets alle Singulärwerte  $\sigma_i$  berücksichtigt, welche größer als die spezifische Rechengenauigkeit  $\epsilon_{\text{ps}}$  sind

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_1} > \epsilon_{\text{ps}}. \quad (5.16)$$

Dennoch ergab sich in allen untersuchten Fällen  $m < 100$ , was als hinreichende Reduktion betrachtet wird.

### 5.3.2 Emissionsgrad als Parameter

Wenn wie bei der Simulation des Vorwärmprozesses für den Rotationsbehälters in Kapitel 3.6.4 und 4.4.2 der Emissionsgrad einen unsicheren Parameter darstellt, dessen Einfluss auf das Ergebnis untersucht werden soll, muss die Wärmestrahlungsmatrix  $\mathbf{R}_1$  vor jeder Simulation angepasst werden. Das gleiche gilt für die Variation des Emissionsgrades in Kapitel 4.4.3 und 4.5.2. Für die Wärmestrahlung auf die Umgebung erweist sich der damit verbundene numerische Aufwand als gering, da sich die Auswertung des Terms  $\mathbf{V}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{V}_{\text{HR}} (\mathbf{P}^T \mathbf{V}_{\text{HR}})^{-1}$  auf Matrixmultiplikationen beschränkt. Im Gegensatz dazu hängen im Falle der Wärmestrahlung zwischen den Oberflächen die Matrizen  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_1(\boldsymbol{\epsilon}_{\text{knoten}})$  nach (2.68) bzw.  $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_3(\boldsymbol{\epsilon}_{\text{elem}})$  aus (2.78) vom Emissionsgrad ab.

Infolgedessen müssen vor der Simulation stets die aus der Zusammenführung von Tabelle 5.1 und (5.14) resultierenden Gleichungssysteme

$$\mathbf{S}_1 \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{S}_2 \mathbf{V}_{\text{HR}} \quad (5.17)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{S}_3 \bar{\mathbf{x}} = \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} \mathbf{V}_{\text{HR}} \quad (5.18)$$

gelöst werden, wobei  $\bar{\mathbf{x}}$  einen allgemeinen Lösungsvektor darstellt. Am Beispiel der Lastvektormethode in (5.18) soll dies nun näher betrachtet werden. Eine Übertragung auf die Matrixmethode ist aber in analoger Form möglich. Im Allgemeinen ist die Matrix der Sichtfaktoren und damit auch  $\mathbf{S}_3$  dicht besetzt, sodass trotz des für den vollständigen Rotationsbehälter auftretenden Dimensionsunterschiedes  $N \approx 26 \cdot \max\langle M_i \rangle$  die Lösung des Gleichungssystems (5.18) die Gesamtberechnungsdauer für einen Simulationsdurchlauf des hyperreduzierten Systems dominiert. Die Zeitintegration benötigt mindestens zwei Größenordnungen weniger an Rechenzeit.

Eine weitere Beschleunigung des Simulationsprozesses gelingt folglich nur durch Anwendung eines zusätzlichen Reduktionsschrittes auf (5.18). Zwar ist die Matrix  $\mathbf{S}_3$  für einen festgelegten Parametersatz konstant und ändert sich über der Zeit nicht, wenn weder zeit- noch temperaturabhängige Emissionsgrade vorliegen, allerdings soll hier im Gegensatz zu den bisherigen Szenarien die Berechnungszeit für das einmalige Lösen des Gleichungssystems verringert werden. Zwischen den einzelnen Simulationen ändert sich schließlich der Emissionsgrad und damit auch  $\mathbf{S}_3$ . Dies verhindert den Einsatz der klassischen Reduktionsverfahren wie Guyan-Reduktion oder Krylov-Unterraummethoden, welche von konstanten Systemmatrizen ausgehen. Da die Discrete Empirical Interpolation Method ohnehin ein snapshotbasiertes Verfahren ist und somit die Trainingsdatensätze vorliegen, soll jetzt die Proper Orthogonal Decomposition auf (5.18) angewandt werden. Ein weiterer möglicher Ansatz wäre die Verwendung einer parametrischen Modellordnungsreduktion, welche für diskrete Werte die Reduktion ausführt und im Anschluss zwischen den erzeugten reduzierten Systemen interpoliert.

Im Verlauf der Offline-Simulationen werden insgesamt  $\zeta$  Snapshots des Vektors  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  basierend auf (2.81)

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{S}_3^{-1} \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} (\mathbf{T}_1 \boldsymbol{\theta})^{\hat{4}} \quad (5.19)$$

erstellt, welche analog zu (3.40) die Snapshotmatrix  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{M \times \zeta}$

$$\mathbf{Y} = [\bar{\mathbf{x}}_1 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{x}}_i \quad \dots \quad \bar{\mathbf{x}}_\zeta] \quad (5.20)$$

bilden. Nach Anwendung der Singulärwertzerlegung und Abbruch der Approximation nach  $\bar{m}$  Singulärwerten entsprechend (3.44)

$$\mathbf{Y} \approx \tilde{\mathbf{U}}_L \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \tilde{\mathbf{U}}_R^T \quad (5.21)$$

ergibt sich die Projektionsmatrix  $\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{U}}_L \in \mathbb{R}^{M \times \bar{m}}$ . Diese unterscheidet sich von der in Kapitel 3.1 für die schiefe Projektion genutzten Matrix, welche dort, da stets von orthogonaler Projektion  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$  ausgegangen wird,  $\mathbf{V}$  entspricht.

Mit dem Ansatz  $\bar{\mathbf{x}} \approx \mathbf{W}\bar{\mathbf{x}}_R$  aus (3.3), in dem  $\bar{\mathbf{x}}_R \in \mathbb{R}^{\bar{m} \times 1}$  den zu  $\bar{\mathbf{x}}$  gehörenden reduzierten Vektor darstellt, und durch Linksmultiplikation mit  $\mathbf{W}^T$  reduziert sich die Dimension des Systems in (5.18) von  $M$  auf  $\bar{m}$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{S}_3 \mathbf{W} \bar{\mathbf{x}}_R = \mathbf{W}^T \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} \mathbf{V}_{\text{HR}}. \quad (5.22)$$

Die zunächst durchgeführte Projektion in den Unterraum basierend auf Matrixmultiplikationen und das anschließende Lösen für die  $\bar{m}$  Unbekannten in  $\bar{\mathbf{x}}_R$  ist aus numerischer Sicht mit einem erheblich geringeren Aufwand verbunden als die einmalige Berechnung von  $\bar{\mathbf{x}}$  mit dem nicht reduzierten Gleichungssystem. Mit der Anpassung

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{V}^T \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{\text{elem}} \mathbf{S}_4 \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{S}_3 \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} \quad (5.23)$$

gegenüber Tabelle 5.1 fügt sich dieses System problemlos in den allgemeinen Ansatz der Hyperreduktion in Kapitel 5.3.1 ein.

Prinzipiell ist an dieser Stelle auch die getrennte Reduktion der Temperaturgleichung und der Wärmestrahlungsgleichung bei gleichzeitigem Verzicht auf die Nutzung der Discrete Empirical Interpolation Method denkbar. Dann nimmt (3.13) die Form

$$\mathbf{r}_{\text{tSR}} \langle t \rangle = \mathbf{V}^T \mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{\text{elem}} \mathbf{S}_4 \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{S}_3 \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{elem}} (\mathbf{T}_1 \mathbf{V} \mathbf{x}_R \langle t \rangle)^4 \quad (5.24)$$

an. Bereits am Anfang von Kapitel 5 wurde festgestellt, dass der Großteil der Berechnungszeit (mehr als 98 %) bei der Auswertung der Wärmestrahlung für die Lösung des Gleichungssystems (2.79) benötigt wird, sodass auch ohne die Hyperreduktion eine deutliche Rechenzeitverkürzung mit dem gewählten Ansatz möglich ist. Der Term  $\mathbf{T}_1 \mathbf{V} \mathbf{x}_R \langle t \rangle \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  führt jedoch dazu, dass das reduzierte System nicht gänzlich unabhängig von der Ausgangsdimension ist. Dieses Vorgehen erscheint nur sinnvoll, wenn der Gesamtfehler durch die Ungenauigkeit der Hyperreduktion bestimmt wird und somit ohne diese bei etwas höherem numerischen Aufwand eine Verbesserung der Reduktionsgüte gelingt. Diese Untersuchung wird unter anderem Gegenstand des folgenden Beispiels sein.

## 5.4 Variation des Emissionsgrades

In den bisherigen Kapiteln wurden verschiedene Verfahren der Modellordnungsreduktion vorgestellt und bereits auf mehrere Untersuchungsszenarien angewandt. An dieser Stelle soll noch einmal auf die Variation des Emissionsgrades aus Kapitel 4.4.3 für das vollständige Rotationsbehältermodell eingegangen werden. Mit der Proper Orthogonal Decomposition aus Kapitel 3.6 und den Krylov-Unterraummethoden aus Kapitel 3.5 stehen zwei Verfahren zur Reduktion der Temperaturgleichung aus (2.81) zur Verfügung, wobei letztere stets mit der Eingangsreduktion aus Kapitel 4.4 zu kombinieren sind, da anderenfalls keine ausreichende Dimensionsverminderung für die hier betrachteten verteilten Lasten möglich ist. In Kapitel 4.5 wurde eine Möglichkeit aufgezeigt, den Rechenaufwand während der erforderlichen Offline-Simulationen erheblich zu senken, indem ein Ausgangsmodell geringer Ergebnislösung zum Einsatz kommt. Die Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung erfolgte in Kapitel 5.3.1 unter Nutzung der Discrete Empirical Interpolation Method. Darüber hinaus wurde in Kapitel 5.3.2



ein Ansatz vorgestellt, um durch die zusätzliche Anwendung der Proper Orthogonal Decomposition auf die Wärmestrahlung den Berechnungsaufwand infolge der Modifizierung des Emissionsgrades zu minimieren. Alle diese Methoden sollen nun vergleichend gegenübergestellt werden.

#### 5.4.1 Reduktion der Wärmestrahlung

Hierbei liegt der Fokus zunächst auf der Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung. Aus diesem Grund wird das Block-Krylov-Verfahren in Verbindung mit der Eingangsreduktion basierend auf Lastvektorsnapshots analog zu Kapitel 4.4.3 auf die Temperaturgleichung angewandt, schließlich lieferte dieses hierfür bislang die besten Ergebnisse. Auf diese Weise lässt sich die aus der Wärmestrahlungsreduktion resultierende Ungenauigkeit am geeignetsten evaluieren. Die vier untersuchten reduzierten Systeme sind in Tabelle 5.2 gegenübergestellt. Bei Variante 1 wird auf die Reduktion der Wärmestrahlung verzichtet, sodass diese für die anderen als Referenz dient. Gegenüber dem Ausgangsmodell verkürzt sich die Simulationszeit bereits von etwa 1 h auf circa 90 s. Die Erstellung der Wärmestrahlungsmatrix inklusive der einmaligen vollständigen LU-Zerlegung nimmt ungefähr weitere 42 s in Anspruch, sodass ein Berechnungsdurchlauf bei variierendem Emissionsgrad insgesamt etwa 132 s dauert.

Bei Anwendung der DEIM (Variante 2) verkürzt sich die Berechnungsdauer für die Zeitintegration um ungefähr den Faktor 450, was einer Beschleunigung gegenüber dem Ausgangssystem um den Faktor 18.000 entspricht. Wenn der Emissionsgrad als konstant betrachtet wird, sich also zwischen den einzelnen Simulationsdurchläufen nicht ändert, kann die Berechnungszeit von 45 s für das einmalige Lösen von (5.18) zur Bereitstellung des temperaturunabhängigen Terms in (5.14) als unerheblich gelten, da eine Vielzahl von Varianten innerhalb kürzester Zeit untersucht werden kann. Stellt der Emissionsgrad hingegen einen Systemparameter dar, muss die Wärmestrahlungsmatrix also vor jeder Simulation erneut bestimmt werden, verringert sich der Rechenzeitvorteil drastisch und entspricht nur noch dem Faktor 3.

**Tabelle 5.2** Modellvarianten für die Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung mit Angabe der Zeit für die Berechnung der emissionsgradabhängigen Wärmestrahlungsmatrix sowie der Simulationszeit für die Zeitintegration.

	Variante 1	Variante 2	Variante 3	Variante 4
Krylov-Reduktion	✓	✓	✓	✓
Eingangsreduktion	✓	✓	✓	✓
DEIM	✗	✓	✓	✗
POD Wärmestrahlung	✗	✗	✓	✓
Wärmestrahlungsmatrix	42 s	45 s	3 s	3 s
Simulationszeit	90 s	0,2 s	0,2 s	3 s

Deshalb wurde in Kapitel 5.3.2 zusätzlich die Proper Orthogonal Decomposition auf die Wärmestrahlungsgleichung angewandt (Variante 3). Durch die Projektion von (5.18) in einen

Unterraum und Lösung in der verkleinerten Dimension kann die Rechenzeit für die Bereitstellung der Wärmestrahlungsmatrix gegenüber der Variante 2 bei gleichbleibender Simulationszeit um 94 % vermindert werden. Variante 4 verzichtet auf die Hyperreduktion und verwendet nur die Proper Orthogonal Decomposition zur Reduktion der Wärmestrahlung. Aufgrund der Expansion des reduzierten Temperaturvektors in jedem Rechenschritt verlängert sich somit zwar die Rechenzeit für die transiente Simulation, im Vergleich zu Variante 2 wird dennoch ein Rechenzeitvorteil von 87 % erzielt, wenn sich der Emissionsgrad für jeden Berechnungsgang ändert, da die Ermittlung der Wärmestrahlungsmatrix erheblich beschleunigt wird.

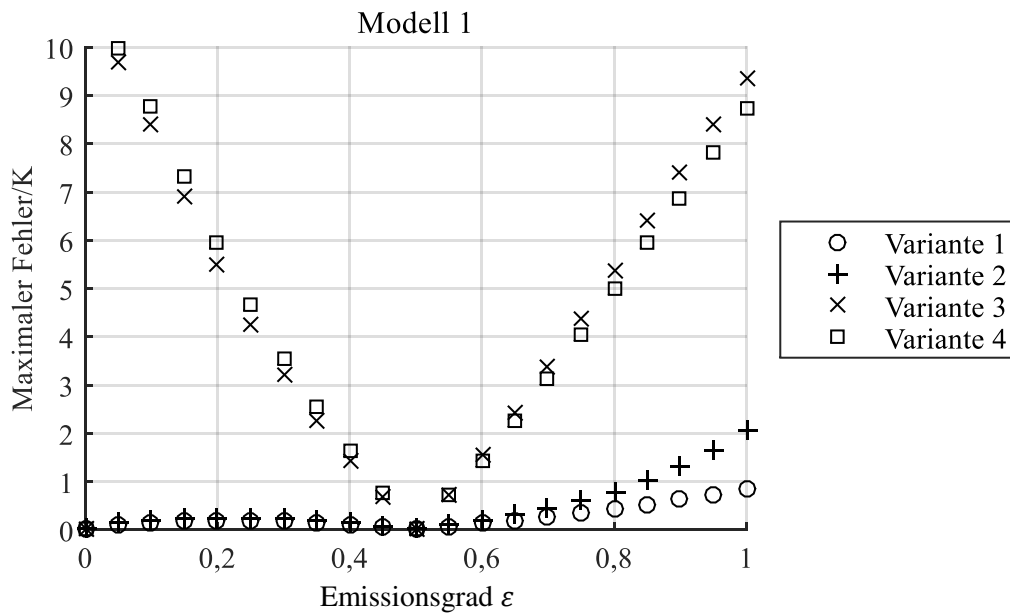
Für die Bewertung der Reduktionsgüte werden die Modellvarianten 1 ( $\varepsilon_{\text{snap}} = 0,5$ ) und 3 ( $\varepsilon_{\text{snap}} = 0,2$  &  $0,8$ ) sowie 5 ( $\varepsilon_{\text{snap}} = 0,1$  &  $0,5$  &  $0,9$ ) aus Tabelle 4.4 mit den entsprechenden für die Offline-Simulationen verwendeten Emissionsgraden  $\varepsilon_{\text{snap}}$  herangezogen. Tabelle 5.3 dokumentiert den Freiheitsgrad des Modells 3 sowohl in Bezug auf die Temperaturgleichung als auch für die einzelnen Wärmestrahlungsvolumina. Trotz der gewählten Abbruchtoleranz für die Singulärwerte sowohl bei der Discrete Empirical Interpolation Method als auch der Proper Orthogonal Decomposition, welche der spezifischen Rechengenauigkeit  $\text{eps}$  entspricht, werden sehr kleine reduzierte Dimensionen erreicht. Auch für die anderen Modelle ergeben sich vergleichbare Werte mit einem leichten Anstieg bei anwachsender Snapshotsanzahl, wobei das Maximum bezogen auf die Wärmestrahlung  $m_{\text{max}} = 42$  beträgt.

**Tabelle 5.3** Vergleich der Freiheitsgrade des Ausgangsmodells und der reduzierten Systeme am Beispiel des Modells 3 aus Tabelle 4.4.

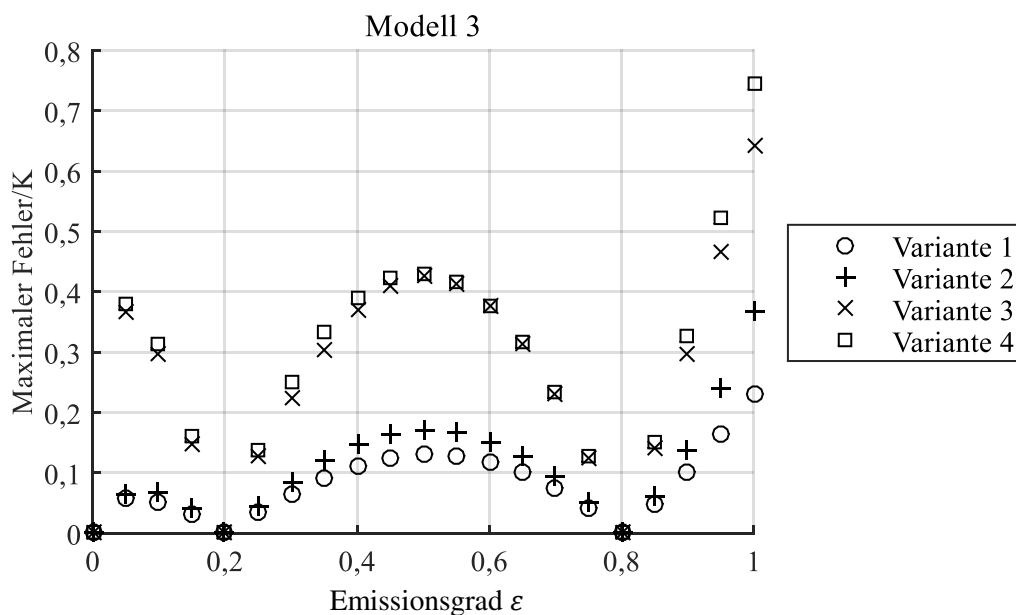
	Ausgangsmodell	DEIM	POD Wärmestrahlung
Temperaturgleichung	$N = 368.793$	$n = 128$	$n = 128$
Strahlungsvolumen 1	$M_1 = 3.047$	$m_1 = 33$	$\bar{m}_1 = 31$
Strahlungsvolumen 2	$M_2 = 14.151$	$m_2 = 31$	$\bar{m}_2 = 31$
Strahlungsvolumen 3	$M_3 = 334$	$m_3 = 26$	$\bar{m}_3 = 26$
Strahlungsvolumen 4	$M_4 = 1.216$	$m_4 = 27$	$\bar{m}_4 = 27$
Strahlungsvolumen 5	$M_5 = 1.152$	$m_5 = 23$	$\bar{m}_5 = 26$
Strahlung Umgebung	$M_u = 16.469$	$m_u = 32$	---

Einen Vergleich der Reduktionsergebnisse in Form des maximalen Fehlers zeigen Abbildung 5.1 bis Abbildung 5.3 für die drei untersuchten Modelle. Erwartungsgemäß zeichnet sich Variante 1 aus Tabelle 5.2 stets durch die geringsten Abweichungen aus, da die Wärmestrahlungsgleichung in der Ausgangsdimension gelöst wird. Hier unterschreitet bereits das Modell 1, welchem nur eine Offline-Simulation zugrunde liegt, die anvisierte Fehlergrenze von 1 K. Zwar verfehlt Variante 2, bei der die Wärmestrahlung mittels DEIM reduziert wird, diese Toleranz für Modell 1 bei  $\varepsilon > 0,8$ , dennoch wird mit Abstand die zweitbeste Reduktionsgüte erzielt. Darüber hinaus sind für Modell 5 teilweise kaum noch Unterschiede feststellbar. Bei Verwendung von zwei Vorabberechnungen des Ausgangssystems werden innerhalb des gesamten untersuchten Parameterspektrums sehr gute Ergebnisse erreicht.

Im Gegensatz dazu liefern die Varianten 3 und 4, welche zur Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung unter anderem beziehungsweise ausschließlich die POD nutzen, zunächst unbrauchbare Ergebnisse (Abbildung 5.1). Aber auch hier wird mit zwei Offline-Simulationen die angestrebte Genauigkeit erreicht (Abbildung 5.2). Dennoch bleiben die Abweichungen stets größer als für Variante 2. Untereinander unterscheiden sich die beiden Varianten hingegen nur geringfügig. Der Verzicht auf die Nutzung der DEIM (Variante 4) bewirkt verlängerte Simulationszeiten bei zumeist etwas höheren Fehlern, sodass diese Vorgehensweise basierend auf den durchgeführten Untersuchungen nicht zu empfehlen ist.

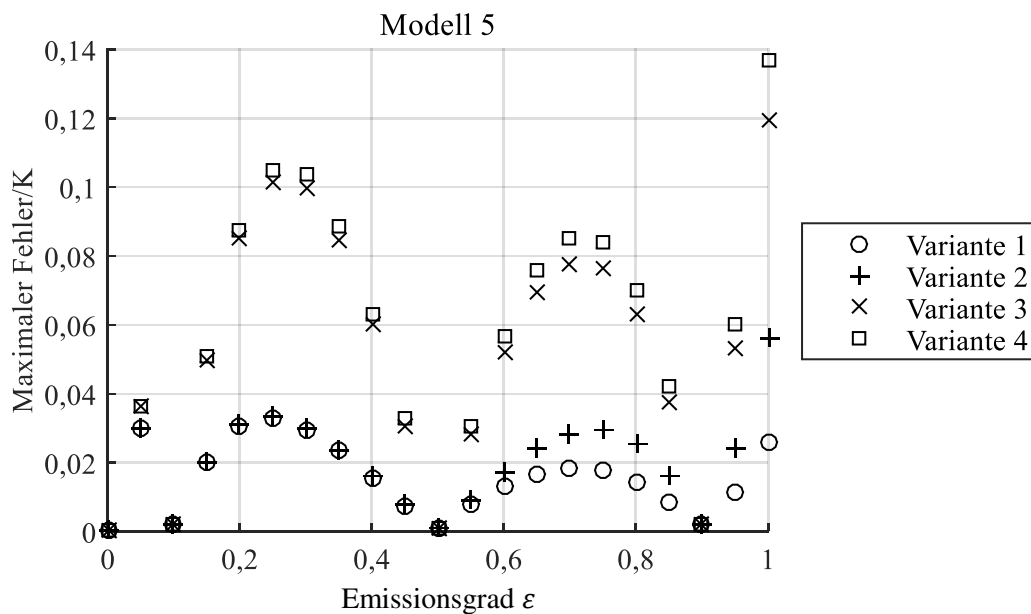


**Abbildung 5.1** Maximaler Fehler im Vergleich zum Ausgangssystem des Modells 1 (1 Trainingssimulation) nach Tabelle 4.4 für die Varianten entsprechend Tabelle 5.2.



**Abbildung 5.2** Maximaler Fehler im Vergleich zum Ausgangssystem des Modells 3 (2 Trainingssimulationen) nach Tabelle 4.4 für die Varianten entsprechend Tabelle 5.2.

Für Anwendungsfälle, in denen bei minimaler Anzahl an Offline-Simulationen nur wenige Parametervariationen berechnet werden sollen, eignet sich die Variante 1 aufgrund der höchsten Genauigkeit bei kleinem Snapshotdatensatz am besten. Hier kann auf die Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung verzichtet werden. Für umfangreichere Parameterstudien ermöglicht die DEIM demgegenüber erhebliche Rechenzeitverringerungen, erfordert allerdings eine bessere Auflösung des Parameterraums in den Vorabsimulationen. Im Falle eines unveränderlichen Emissionsgrades sollte auf die Nutzung der POD für die Wärmestrahlung verzichtet werden, wohingegen ihr Einsatz bei einer erforderlichen Anpassung vor jedem Berechnungsdurchlauf empfehlenswert ist. Der numerische Aufwand in der Offline-Phase zur Erzielung eines vergleichbaren Reduktionsergebnisses ist hierbei am höchsten.



**Abbildung 5.3** Maximaler Fehler im Vergleich zum Ausgangssystem des Modells 5 (3 Trainingssimulationen) nach Tabelle 4.4 für die Varianten entsprechend Tabelle 5.2.

#### 5.4.2 Betrachtung Gesamtprozess

Nachdem im vorherigen Abschnitt der Schwerpunkt auf der Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung lag, soll nun der Gesamtprozess der Modellordnungsreduktion betrachtet werden, welcher die Reduktion des Temperaturfeldes und die Hyperreduktion einschließt. Aufgrund der vielfältigen Anwendungsbeispiele der Proper Orthogonal Decomposition für nichtlineare Modelle kann diese als Stand der Technik für derartige Systeme gelten. Auch Qian *et al.* nutzen dieses Verfahren zur Reduktion des darin untersuchten Wärmestrahlungsproblems [Qian *et al.* 2015]. Deshalb soll es nun der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Methodik unter Verwendung der Block-Krylov-Methode mit vorheriger Eingangsreduktion gegenübergestellt werden. Die Variation des Emissionsgrades erfolgt für  $\varepsilon = 0; 0,05 \dots 1$  und für die Krylov-Reduktion beträgt die Dimension des reduzierten Temperaturvektors erneut  $n = 128$ , unabhängig davon, ob für die Simulationen während der Offline-Phase Elemente mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen zum Einsatz kommen.

Mit der gewählten Abbruchtoleranz  $\sigma_i/\sigma_1 > 10^6 \cdot eps$  für die Singulärwertzerlegung im Rahmen der Proper Orthogonal Decomposition ergeben sich die in Tabelle 5.4 dokumentierten Freiheitsgrade. Diese sind zwar deutlich geringer als für das Krylov-Verfahren, die Berücksichtigung von mehr Singulärvektoren in der Projektionsmatrix bewirkt allerdings nur eine geringfügige Verringerung des Fehlers um weniger als 10 % bei gleichzeitig zum Teil stark ansteigender Rechenzeit. Aufgrund signifikant kleinerer Zeitschrittweiten verzehnfacht sich der Berechnungsaufwand für einige reduzierte Modelle, sodass der Rechenzeitvorteil gegenüber dem Ausgangsmodell nahezu verschwindet. Deshalb wird auf eine Absenkung der Abbruchtoleranz verzichtet. Generell sind im Vergleich zu den reduzierten Modellen unter Nutzung der Krylov-Reduktion trotz des kleineren Freiheitsgrades ähnliche Berechnungsdauern zu beobachten.

**Tabelle 5.4** Reduzierte Dimension bei Anwendung der Proper Orthogonal Decomposition auf die Temperaturgleichung.

	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
Reduzierte Dimension	$n = 23$	$n = 26$	$n = 40$	$n = 41$	$n = 50$

Die Dimensionen der reduzierten Wärmestrahlungsgleichung für die einzelnen Strahlungsvolumina ergibt sich unabhängig vom Reduktionsverfahren für die Temperaturgleichung, sodass die Werte aus Tabelle 5.3 weiterhin Gültigkeit besitzen. Die Nutzung des Modells mit linearen Ansatzfunktionen für die Erzeugung der Trainingsdatensätze führt nur zu minimalen Änderungen, welche keinen feststellbaren Einfluss auf die Rechenzeiten haben, weshalb auf die Angabe der genauen Werte verzichtet wird.

Der Vergleich der Reduktionsergebnisse in Tabelle 5.5 zeigt gravierende Unterschiede zwischen den reduzierten Systemen. Lediglich bei Verwendung der Krylov-Unterraummethode mit Eingangsreduktion aber ohne Reduktion der Wärmestrahlung genügt eine einzige Offline-Simulation, wenn die angestrebte Fehlergrenze von 1 K eingehalten werden soll. Bei Einsatz der Hyperreduktion zur weiteren Verkürzung der Berechnungszeiten ist hingegen die transiente Berechnung mit dem Ausgangsmodell für mindestens zwei verschiedene Emissionsgrade notwendig.

Die Snapshotgenerierung mit einem verkleinerten Modell unter Nutzung linearer Ansatzfunktionen ist nicht mit der DEIM kombinierbar. Der dabei resultierende maximale Fehler liegt stets oberhalb von 2 K. Auch das Hinzuziehen weiterer Offline-Simulationen bewirkt keine signifikanten Verbesserungen mehr. Dies liegt darin begründet, dass die auftretenden Abweichungen in den Snapshots angesichts der reduzierten Ansatzordnung der Elemente zu hoch ausfallen, um das Wärmestrahlungsproblem mit ausreichender Genauigkeit zu beschreiben. Das durch die Singulärwertzerlegung (5.7) approximierte Systemverhalten entspricht nicht dem realen Verhalten des Ausgangsmodells mit quadratischen Ansatzfunktionen. Aufgrund dessen ist die Anwendung dieser Methodik auf ein spezielles Einsatzspektrum beschränkt, in welchem für

eine überschaubare Variantenvielfalt qualitative Tendenzen untersucht oder grobe Abschätzungen der Temperaturverteilung getroffen werden. Der geringe numerische Aufwand für die Offline-Berechnungen erlaubt die schnelle Erzeugung des reduzierten Modells.

**Tabelle 5.5** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle zum Endzeitpunkt der Simulation  $t = 10.000$  s im Vergleich zum Ausgangsmodell in Abhängigkeit vom Reduktionsverfahren für die Temperaturgleichung (Temp.) und die Wärmestrahlungsgleichung (Strahlung). Die Krylov-Reduktion (KSM) schließt die Eingangsreduktion auf Basis der Lastvektorsnapshots ein, wobei diese für KSM linear mit dem Modell mit linearen Ansatzfunktionen berechnet werden. Die größten Fehler sind rot hinterlegt, während ein grüner Hintergrund auf eine geringe Abweichung hindeutet.

Reduktionsverfahren		Maximaler Fehler				
Temp.	Strahlung	Modell 1	Modell 2	Modell 3	Modell 4	Modell 5
KSM		0,852 K	0,548 K	0,230 K	0,102 K	0,033 K
	DEIM	2,055 K	1,063 K	0,367 K	0,153 K	0,056 K
	DEIM+POD	9,791 K	10,424 K	0,643 K	0,546 K	0,120 K
KSM linear		1,493 K	1,067 K	1,041 K	1,021 K	0,811 K
	DEIM	4,170 K	4,683 K	2,978 K	2,768 K	3,079 K
	DEIM+POD	9,943 K	9,373 K	3,566 K	3,963 K	3,332 K
POD		16,239 K	16,776 K	2,897 K	3,513 K	2,135 K
	DEIM	16,239 K	16,776 K	2,897 K	3,513 K	2,135 K
	DEIM+POD	18,290 K	17,074 K	2,897 K	3,513 K	2,135 K
POD $\varepsilon \neq 0$		14,160 K	16,023 K	1,606 K	2,449 K	0,544 K
	DEIM	14,155 K	16,101 K	1,606 K	2,449 K	0,545 K
	DEIM+POD	18,290 K	17,074 K	1,725 K	2,636 K	0,543 K

Als mögliches Anwendungsszenario kann eine Optimierung oder Variantenstudie in einem sehr großen Parameterraum gesehen werden. Die Repräsentation des Systemverhaltens in den erzeugten Trainingsdatensätzen erfordert sehr viele Simulationen des Ausgangsmodells, was mit dem kleineren Modell erheblich beschleunigt wird. Anschließend ermöglicht die grobe Abtastung des Parameterspektrums die Identifizierung der für eine detaillierte Untersuchung relevanten Bereiche, wozu dann ein zweites reduziertes System mit höherer Genauigkeit zum Einsatz kommt. Die Anzahl der notwendigen Offline-Simulationen ist jedoch aufgrund des eingegrenzten Parameterraums erheblich geringer.

Die Anwendung der Proper Orthogonal Decomposition auf die Temperaturgleichung erfordert einen deutlich höheren numerischen Aufwand für die Vorabsimulationen als die Krylov-Unterraummethoden. Keines der fünf Modelle in Tabelle 5.5 hält die Fehlerschranke von 1 K ein. Erst mit vier Offline-Simulationen gelingt es diese zu unterschreiten, wobei auch dann der Fehler im Vergleich zum Block-Krylov-Verfahren noch erheblich höher ausfällt. Größtenteils zeigen sich identische Ergebnisse für die Modellvarianten mit und ohne Hyperreduktion. Dies liegt darin begründet, dass der teilweise mit Abstand größte Fehler für  $\varepsilon = 0$  auftritt, wo die Wärmestrahlung keinen Einfluss hat. Aus diesem Grund sind in Tabelle 5.5 auch die maximalen Abweichungen ohne Berücksichtigung des Falls  $\varepsilon = 0$  angegeben. Dann genügen die drei

Modell 5 zugrunde liegenden Berechnungen des Ausgangsmodells zur Einhaltung der gesetzten Fehlertoleranz. Aber auch hier liegt der Fehler noch deutlich oberhalb dessen der Krylov-Unterraummethoden. Der Einfluss der Hyperreduktion ist im Vergleich zu den Ungenauigkeiten aus der Reduktion der Temperaturgleichung nahezu vernachlässigbar.

Insbesondere im Vergleich der Modelle 3 und 4 fällt auf, dass sich die optimale Auswahl der für die Erzeugung der Trainingsdatensätze genutzten Parameter je nach verwendetem Reduktionsverfahren unterscheidet. Bei Anwendung der Krylov-Reduktion auf das Temperaturfeld empfiehlt sich eine Verschiebung zu höheren Emissionsgraden, da für diese der Einfluss der Wärmestrahlung ansteigt. Im Gegensatz dazu erfordert die Proper Orthogonal Decomposition eine eher gleichmäßige Verteilung im Parameterraum, um neben der Wärmestrahlungsgleichung auch die Temperaturgleichung mit hoher Genauigkeit zu approximieren. An dieser Stelle wäre die Einbeziehung des Falls  $\varepsilon = 0$  in die Snapshoterzeugung sinnvoll.

Insgesamt unterstreicht dieses Beispiel den Vorteil der entwickelten Methode zur Anwendung der Krylov-Unterraumverfahren mit entsprechender Eingangsreduktion auf ein Wärmestrahlungsproblem. Mit geringem Berechnungsaufwand während der Offline-Phase lassen sich reduzierte Modelle höherer Qualität im Vergleich zur Proper Orthogonal Decomposition erzeugen.

## 5.5 Berechnungszeiten

Neben der Ergebnisqualität stellt die erzielbare Rechenzeiteinsparung einen zentralen Bewertungspunkt beim Vergleich unterschiedlicher Reduktionsverfahren dar. Dies schließt jedoch notwendigerweise die vollständige Prozesskette ein, weshalb auf selbige hier in ihrer Gesamtheit eingegangen werden soll. Als Anwendungsbeispiel dient das vollständige Rotationsbehältermodell, wie es in Kapitel 5.4 für die Variation des Emissionsgrades genutzt wurde.

Im ersten Schritt müssen die erforderlichen Daten bereitgestellt werden. Die Modellerstellung sowie die Erzeugung der Wärmestrahlungsmatrizen sind unabhängig davon notwendig, ob die Simulation direkt in der Finite-Elemente-Software oder in MATLAB erfolgt, sodass der zugehörige Zeitaufwand kein Unterscheidungskriterium darstellt. Angesichts der im Modell vorhandenen drei bzw. vier Symmetrieebenen der Wärmestrahlungsvolumina benötigt die Ermittlung der Sichtfaktoren sehr viel Zeit, da diese ohne Symmetriberücksichtigung erfolgt. Infolgedessen entstehen nahezu vollbesetzte Matrizen in der acht- bzw. sechzehnfachen Dimension im Vergleich zu Tabelle 2.8. Dies erklärt die etwa 9 h, welche für die Erstellung und den Export der Wärmestrahlungsmatrizen benötigt werden sowie die etwa 20 min, welche für das anschließende Einlesen in MATLAB und die Einarbeitung der Symmetriebedingungen erforderlich sind (Tabelle 5.6). Ebenso wie diese Schritte erfolgt der Export der benötigten Systemmatrizen und Lastvektoren nur einmalig. Wenn die Trainingsdatensätze analog zu Kapitel 4.5 mit einem verkleinerten Modell unter Nutzung von Elementen mit linearen Ansatzfunktionen erzeugt werden, müssen zusätzlich die hierzu gehörenden Systemmatrizen bereitgestellt werden. Aufgrund der unterschiedlichen Rechenzeiten der nicht reduzierten Modelle

ergeben sich trotz dieses Zusatzaufwandes aber bereits für eine Simulation während der Offline-Phase Rechenzeitvorteile. Auf die Berechnung des Ausgangssystems in der Finite-Elemente-Software ANSYS wird an dieser Stelle verzichtet, schließlich wurden bereits für das vereinfachte Rotationsbehältermodell insbesondere in Verbindung mit strikten Genauigkeitsanforderungen sehr hohe Rechenzeiten beobachtet (vergleiche Anhang A.5).

**Tabelle 5.6** Zeiten für Datenexport und -import sowie die Berechnung des Ausgangsmodells während der Offline-Phase.

	Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen	Elemente mit linearen Ansatzfunktionen
Erstellung und Export der Wärmestrahlungsmatrizen	32.300 s $\approx$ 9 h	
Konvertierung der Wärmestrahlungsmatrizen	1.230 s	
Export der Systemmatrizen und Lastvektoren	480 s	290 s
Einlesen der Daten in MATLAB	24 s	15 s
Simulation Ausgangsmodell und Bereitstellung Snapshotmatrizen	3600 s	205 s

Die Rechenzeiten in Tabelle 5.7 beziehen sich auf den Fall, dass nur die Temperaturgleichung, nicht aber die Wärmestrahlungsgleichung, reduziert wird. Hierzu dienen einerseits die Proper Orthogonal Decomposition und andererseits das Block-Krylov-Verfahren mit vorheriger Eingangsreduktion basierend auf Lastvektorsnapshots, welche in Kapitel 5.4.2 bereits hinsichtlich der erzielten Reduktionsgüte gegenübergestellt wurden. Alle angegebenen Zeiten basieren auf dem Modell 3 aus Tabelle 4.4, welchem zwei Offline-Simulationen zugrunde liegen.

Der Rechenaufwand für die eigentliche Eingangsreduktion, also die Singulärwertzerlegung (4.13) entsprechend des Eigenwertproblems (3.50), ist mit 1 s äußerst gering. Dies gilt ebenfalls für die Erzeugung der Projektionsmatrix bei der POD. Dabei gilt es jedoch zu beachten, dass sich in beiden Fällen der maßgebliche Rechenzeitanteil allerdings aus den Simulationszeiten zur Erstellung der Snapshots ergibt. Dies bedeutet, dass die geringere Rechenzeit bei der Erzeugung der Projektionsmatrix den Mehraufwand, wenn wie in den untersuchten Beispielen mehr Trainingsdaten zur Erzielung der gewünschten Reduktionsgüte notwendig sind, nicht kompensieren kann. Darüber hinaus steigt der numerische Aufwand der Singulärwertzerlegung mit der Anzahl der berücksichtigten Snapshots. Die unterschiedlichen Zeiten für die Projektion in den Unterraum entsprechend (3.7) ergeben sich aus den abweichenden Freiheitsgraden von  $n = 128$  für das Krylov-Verfahren und  $n = 40$  für die POD. Die Anzahl der Entwicklungsstellen, welche hier jedoch stets zu  $K = 1$  gewählt wird, und die Entwicklungsordnung  $o$  gehen etwa linear in die Reduktionszeit für das Block-Krylov-Verfahren ein. Im Gegensatz dazu besitzt die Eingangsanzahl  $e$  nur einen geringen Einfluss, wenn direkte statt iterativer Verfahren zur Lösung der Gleichungssysteme in Zeile 4 und Zeile 8 von Algorithmus 1 zum Einsatz kommen.



Die Anpassung der Wärmestrahlungsmatrix ist unabhängig vom Reduktionsverfahren und der zugehörige Rechenaufwand wird durch die LU-Zerlegung von  $\mathbf{S}_3$  in (3.13) bestimmt. Für die Simulation des reduzierten Modells ergeben sich sehr ähnliche Rechenzeiten, obwohl sich die reduzierte Dimension  $n$  deutlich unterscheidet, da die Berechnung der Wärmeströme infolge Strahlung den numerischen Aufwand dominiert.

**Tabelle 5.7** Rechenzeiten bei reduzierter Temperaturgleichung und nicht reduzierter Wärmestrahlungsgleichung basierend auf 202 Snapshots für das Modell 3 aus Tabelle 4.4.

	Block-Krylov-Verfahren mit Eingangsreduktion	Proper Orthogonal Decomposition
Eingangsreduktion	1 s	---
Erzeugung Projektionsmatrix	770 s	10 s
Projektion in den Unterraum	11 s	3 s
Anpassung Strahlungsmatrix	42 s	
Simulation reduziertes Modell	90 s	88 s
Expansion der Lösung	0,4 s	0,2 s

In Anbetracht der Simulationszeiten ist der Zeitaufwand für die Expansion der reduzierten Lösung zur Bestimmung sämtlicher Knotentemperaturen vernachlässigbar. Dies gilt jedoch nicht mehr, wenn wie in Tabelle 5.8 auch die Wärmestrahlungsgleichung reduziert wird. Dann ist es sinnvoll, sowohl die Anzahl der Zeitpunkte, für die eine Auswertung erfolgt, als auch die untersuchten Modellknoten auf ein Minimum zu beschränken, wobei letzteres nur gelingt, wenn nicht die Ermittlung der thermisch induzierten Beanspruchungen das Ziel ist. Tabelle 5.8 vergleicht die Varianten 2 und 3 aus Tabelle 5.2, wobei einmal nur die DEIM und im anderen Fall die DEIM und die POD zur Reduktion der Wärmestrahlung zum Einsatz kommen. Die Berechnungszeiten für die einmalig durchzuführenden Reduktionsschritte sind erneut sehr gering, wobei die angegebenen Zeiten bereits die Summe für alle Wärmestrahlungsvolumina und die Strahlung zur Umgebung darstellen. Analog zur POD in Tabelle 5.7 gilt jedoch, dass die eigentliche Berechnungszeit erneut durch unter Umständen notwendige zusätzliche Offline-Simulationen bestimmt wird. Die unterschiedliche Dauer für die Anpassung der Wärmestrahlungsmatrix wurde bereits in Kapitel 5.4.1 diskutiert.

**Tabelle 5.8** Rechenzeiten bei reduzierter Temperaturgleichung und mit DEIM bzw. DEIM und POD reduzierter Wärmestrahlungsgleichung (Variante 2 und 3 aus Tabelle 5.2) basierend auf 202 Snapshots für das Modell 3 aus Tabelle 4.4.

	Variante 2: DEIM	Variante 3: DEIM + POD
DEIM Wärmestrahlung	1 s	
POD Wärmestrahlung	---	0,4 s
Anpassung Strahlungsmatrix	45 s	2,5 s
Simulation reduziertes Modell	0,2 s	

Angesichts der für die betrachteten Beispiele um ein Mehrfaches geringeren Rechenzeiten bei Nutzung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten MATLAB-Programms im Vergleich zu ANSYS rentiert sich die Simulation trotz der notwendigen Export- und Importzeiten schon für einen einzelnen Berechnungsdurchlauf. Ohne Berücksichtigung der Wärmestrahlung sind keine Vorabberechnungen des Ausgangsmodells erforderlich. Da die Berechnungszeit zur Erstellung der Projektionsmatrix deutlich unterhalb derer für eine transiente Simulation liegt, ergibt sich auch hier stets ein Zeitvorteil. Die für die Eingangsreduktion erforderlichen Offline-Simulationen bei Einbeziehung der Strahlung führen dazu, dass sich aus praktischen Gesichtspunkten eine Modellordnungsreduktion erst lohnt, wenn die Anzahl der durchzuführenden Berechnungsgänge die der Vorabsimulationen deutlich übersteigt, gerade wenn ein weites Parameterspektrum abgedeckt werden soll und sich somit die Wahl der Parameterkombinationen für die Simulationen des Ausgangssystems als schwierig erweist.

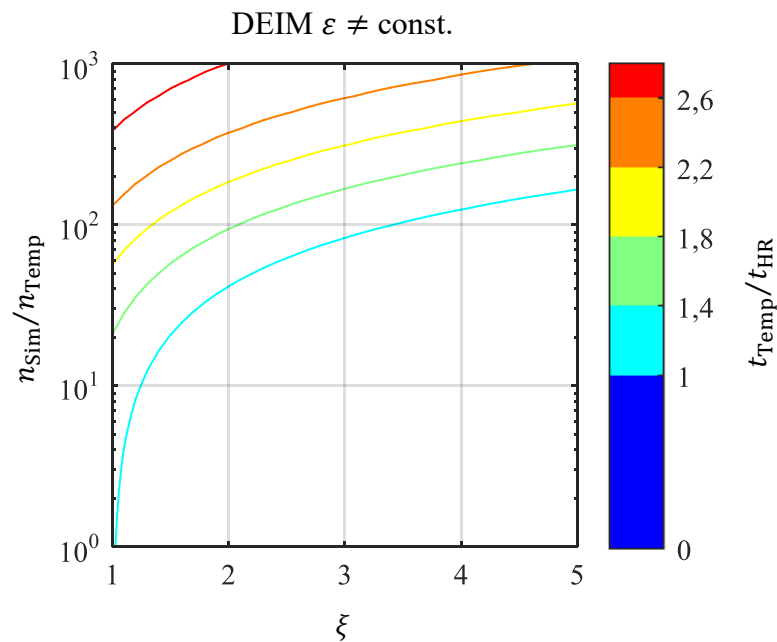
Anhand des Beispiels der Variation des Emissionsgrades konnte in Kapitel 5.4 bereits gezeigt werden, dass die Reduktion der Wärmestrahlung aufgrund des zusätzlichen Approximationschrittes in der Regel mehr Trainingsdaten voraussetzt, um eine vergleichbare Ergebnisqualität des reduzierten Modells zu erhalten. Dies muss auf jeden Fall bei der Ermittlung der Berechnungsanzahl, ab welcher sich die Anwendung der Hyperreduktion rentiert, Berücksichtigung finden, sofern nicht aufgrund weiterer Restriktionen wie Echtzeitfähigkeit die damit einhergehende Rechenzeitverkürzung essentiell ist. Der Rechenzeitvorteil hängt vom Verhältnis  $\xi$  der Anzahl an Offline-Simulationen mit Hyperreduktion  $n_{HR}$  und bei ausschließlicher Reduktion der Temperaturgleichung  $n_{Temp}$  ab

$$\xi = \frac{n_{HR}}{n_{Temp}}. \quad (5.25)$$

Des Weiteren stellt die Anzahl der zusätzlich zu den Vorabsimulationen insgesamt durchzuführenden Berechnungen  $n_{Sim}$  als Vielfaches von  $n_{Temp}$  einen Einflussfaktor dar. Das Verhältnis der zugehörigen Rechenzeiten mit  $t_{HR}$  und ohne  $t_{Temp}$  Reduktion der Wärmestrahlung gibt Auskunft über den Rechenzeitvorteil, wobei hier auch die Berechnungsdauer sämtlicher Simulationen des Ausgangsmodells mit eingeht. Abbildung 5.4 veranschaulicht dies für die Variante 2 aus Tabelle 5.2 unter der Annahme, dass der Emissionsgrad einen Parameter darstellt und deshalb vor jeder transienten Simulation die Wärmestrahlungsmatrix angepasst werden muss. Die gezeigten Werte beziehen sich ausschließlich auf die Rechenzeiten für diese Anpassung und die Simulation. Die Expansion des Lösungsvektors findet keine Berücksichtigung, da dies stark von den Zeitpunkten und Knoten, für die eine Auswertung erfolgt, abhängt.

Ein Beispiel soll dies nun veranschaulichen. Angenommen die notwendige Anzahl an Offline-Simulationen ohne Reduktion der Wärmestrahlung beträgt  $n_{Temp} = 2$  und bei Nutzung der DEIM  $n_{HR} = 4$ , woraus sich  $\xi = 2$  ergibt. Für  $t_{Temp}/t_{HR} = 1$ , wenn also die Rechenzeit mit und ohne Anwendung der Hyperreduktion identisch ist, folgt aus Abbildung 5.4 ein Wert  $n_{Sim}/n_{Temp} = 41,4$ . Somit ergibt sich erst ab  $n_{Sim} = 83$  ein Rechenzeitvorteil, wenn also mindestens 83 Simulationen mit dem reduzierten Modell durchgeführt werden. Mit der Rechenzeit für eine transiente Simulation des Ausgangsmodells aus Tabelle 5.6 von 3600 s, der Gesamtberechnungszeit für ein Modell von 132 s ohne und 45 s mit Anwendung der DEIM

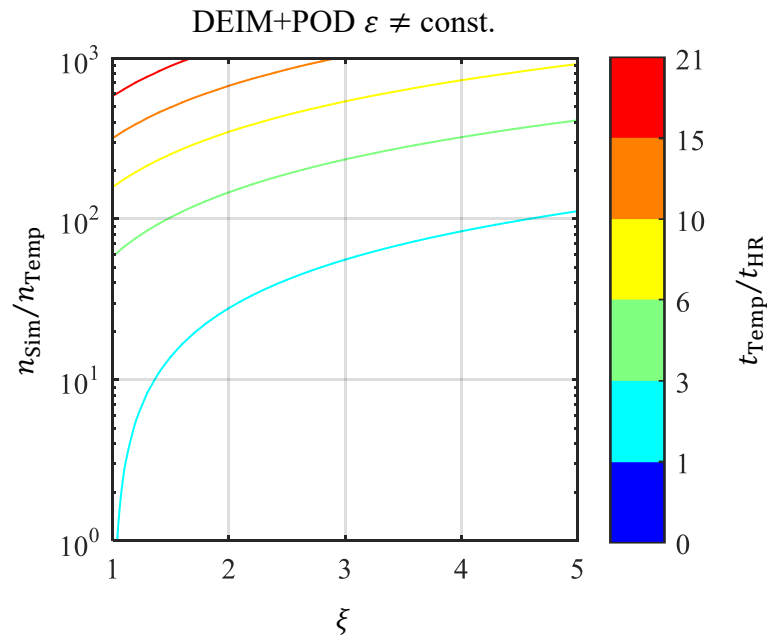
nach Tabelle 5.7 und Tabelle 5.8 folgt die Berechnungszeit der vollständigen Analyse zu  $3600 \text{ s} \cdot n_{\text{Temp}} + 132 \text{ s} \cdot n_{\text{Sim}} = 18.156 \text{ s}$  bzw.  $3600 \text{ s} \cdot n_{\text{HR}} + 45 \text{ s} \cdot n_{\text{Sim}} = 18.135 \text{ s}$ . Daraus wird deutlich, dass sich erst für sehr viele Simulationen signifikante Rechenzeitgewinne ergeben, was im hohen numerischen Aufwand für die Anpassung der Wärmestrahlungsmatrix begründet liegt. Darüber hinaus ist die maximale Rechenzeitverringerung für  $n_{\text{Sim}} \rightarrow \infty$  durch den Faktor  $132 \text{ s}/45 \text{ s} = 2,93$  nach oben beschränkt.



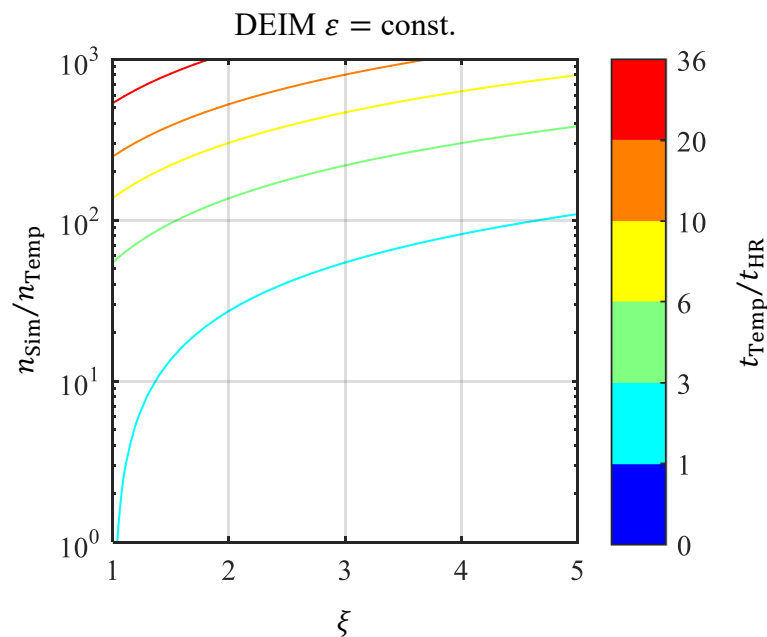
**Abbildung 5.4** Rechenzeitvorteil bei Anwendung der DEIM in Abhängigkeit vom Verhältnis der notwendigen Offline-Simulationen und der Gesamtberechnungsanzahl bei Annahme eines variablen Emissionsgrades.

Aufgrund dessen wurde in Kapitel 5.3.2 zusätzlich die Proper Orthogonal Decomposition auf die Wärmestrahlung angewandt, sodass entsprechend Tabelle 5.8 die Rechenzeit für jeden Parametersatz auf ungefähr 3 s sinkt. Abbildung 5.5 zeigt die hierzu gehörenden Beschleunigungen der Simulation, wobei insbesondere für viele Berechnungsvarianten erheblich höhere Zeiteinsparungen möglich sind.

Abschließend geht Abbildung 5.6 auf den Fall eines konstanten Emissionsgrades ein. Die Wärmestrahlungsmatrix bleibt demzufolge unverändert und muss nur einmalig im Vorfeld angepasst werden. Somit wird die Rechenzeit ausschließlich durch die transiente Simulation bestimmt, sofern die Expansion der Lösungsvektoren nicht signifikant zu dieser beiträgt. Dadurch lässt sich die benötigte Gesamtzeit noch einmal deutlich senken. Aber auch hier wird ersichtlich, dass sich die Verwendung der DEIM erst bei sehr vielen Varianten oder wenn keine oder kaum zusätzliche Offline-Simulationen für die Snapshotgenerierung notwendig sind, rentiert.



**Abbildung 5.5** Rechenzeitvorteil bei Kombination der DEIM und der POD für die Wärmestrahlung in Abhängigkeit vom Verhältnis der notwendigen Offline-Simulationen und der Gesamtberechnungszahl bei Annahme eines variablen Emissionsgrades.



**Abbildung 5.6** Rechenzeitvorteil für einen konstanten Emissionsgrad bei Anwendung der DEIM in Abhängigkeit vom Verhältnis der notwendigen Offline-Simulationen und der Gesamtberechnungszahl.

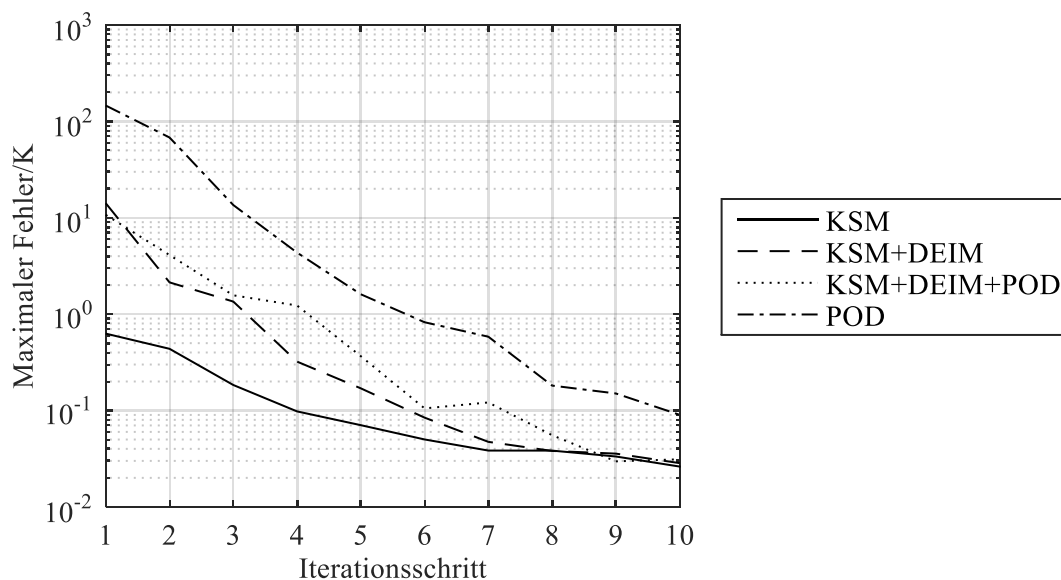
## 5.6 Parameterstudie Vorwärmprozess

Als abschließendes Beispiel wird noch einmal der Vorwärmprozess des vereinfachten Rotationsbehältermodells analog zu Kapitel 3.6.4 und Kapitel 4.4.2 betrachtet, da dieser im Vergleich zum vorherigen Abschnitt einen erheblich größeren Parameterraum bietet. Erneut werden die

101 Datensätze aus Abbildung 3.10 bzw. Anhang C analysiert. Am Anfang dient als Trainingsdatensatz lediglich die Simulation für den Standardlastfall aus Tabelle 2.7 ( $\dot{q}_1 = 3 \text{ W/cm}^3$ ,  $\dot{q}_2 = 0,5 \text{ W/cm}^3$ ,  $\dot{q}_3 = 2,5 \text{ W/cm}^3$  und  $\varepsilon = 0,5$ ). Danach werden in jedem Iterationsschritt die zur Parameterkombination, welche den maximalen Fehler liefert, gehörenden Last- bzw. Zustandsvektoren den Snapshots hinzugefügt, sodass die Anzahl der Offline-Simulationen stetig wächst.

Wie im vorherigen Kapitel werden das Block-Krylov-Verfahren mit vorheriger Eingangsreduktion (KSM) und unter Berücksichtigung von  $e_R = 20$  Singulärvektoren, sodass der Freiheitsgrad  $n = 200$  beträgt, sowie die POD gegenübergestellt. Die zugehörigen Ergebnisse stammen bereits aus Kapitel 4.4.2 bzw. 3.6.4. Zusätzlich werden jetzt allerdings noch zwei Modelle betrachtet, bei denen in Ergänzung zum Block-Krylov-Verfahren für die Temperaturgleichung eine Reduktion der Wärmestrahlung erfolgt, entweder nur mit der DEIM (KSM+DEIM) oder durch Kombination von DEIM und POD (KSM+DEIM+POD). In Abbildung 5.7 ist der maximale Fehler in Abhängigkeit vom Iterationsschritt dargestellt.

Hierbei bestätigen sich die Tendenzen aus den vorherigen Kapiteln. Den mit Abstand größten Fehler liefert die POD, obwohl hier auf die Reduktion der Wärmestrahlung verzichtet wird. Die Rechenzeiten sind folglich deutlich höher als für die Modelle unter Verwendung der Hyperreduktion (vergleiche Tabelle 5.9). Erst nach sechs Iterationen wird die angestrebte Fehlergrenze von 1 K unterschritten, während für die anderen Modelle fünf (KSM+DEIM+POD) bzw. vier (KSM+DEIM) genügen. Das mit Abstand beste Ergebnis liefert das Krylov-Verfahren ohne Wärmestrahlungsreduktion, wobei hier bereits ein Trainingsdatensatz zur Erzeugung eines validen Modells für alle untersuchten Parameterkombinationen ausreicht. Nach neun Iterationsschritten ist der Einfluss der Hyperreduktion vernachlässigbar.



**Abbildung 5.7** Maximaler Fehler über alle Datensätze in Abhängigkeit von der Iterationsanzahl.

Der aus der Reduktion der Temperaturgleichung resultierende Rechenzeitvorteil fällt deutlich geringer aus als für das größere Rotationsbehältermodell, was darin begründet liegt, dass der Zeitanteil für die Wärmestrahlungsberechnung angesichts des kleineren Systemfreiheitsgrades  $N$  höher ist. Erst durch die Anwendung der DEIM verringert sich die Berechnungsdauer für die transiente Simulation erheblich, sodass dann auch hier wieder die Anpassung der Wärmestrahlungsmatrix rechenzeitbestimmend wird. Aufgrund der in diesem Beispiel nur sehr geringen Genauigkeitsunterschiede zwischen den Varianten mit und ohne zusätzliche Strahlungsreduktion durch die POD bietet die Kombination aus Block-Krylov-Verfahren mit Eingangsreduktion sowie DEIM und POD für die 101 hier zu untersuchenden Varianten die geringste Gesamtrechenzeit. Darüber hinaus steigt der Rechenzeitvorteil, wenn weitere Parameterkombinationen hinzugenommen werden. Somit verdeutlicht auch dieses Anwendungsbeispiel die Vorteile der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Methodik zur Reduktion des thermischen Modells unter Berücksichtigung der Wärmestrahlung.

**Tabelle 5.9** Rechenzeiten für die Anpassung der Wärmestrahlungsmatrix und die transiente Simulation des Ausgangsmodells und der reduzierten Modelle.

Modell	Anpassung Strahlungsmatrix	Transiente Simulation
Ausgangsmodell	2,3 s	114 s
KSM	2,3 s	31 s
KSM+DEIM	2,7 s	0,11 s
KSM+DEIM+POD	0,34 s	0,13 s
POD	2,3 s	30 s

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Der Wärmestrom infolge der Wärmestrahlung, welcher von der vierten Potenz der Temperatur abhängt, führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem zur Beschreibung des diskretisierten thermischen Feldproblems. Aufgrund dessen steigen insbesondere für transiente Simulationen die Rechenzeiten stark an, was im Rahmen von Optimierungsprozessen oder Parameterstudien die Anwendung der Modellordnungsreduktion zur Verringerung des numerischen Aufwands unumgänglich macht. Hierbei erschwert die auftretende Nichtlinearität allerdings die Nutzung vieler Reduktionsverfahren, wie beispielsweise der Krylov-Unterraummethoden. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit die Wärmestrahlung als äußere Last betrachtet. Auf diese Weise unterteilt sich das Gesamtgleichungssystem in eines zur Ermittlung des Temperaturfeldes infolge der aufgeprägten Lasten und ein zweites zur Bestimmung der aus der aktuellen Temperaturverteilung resultierenden Wärmeströme durch Strahlung. Für ersteres ergeben sich unter der Voraussetzung geometrischer und materieller Linearität konstante Systemmatrizen, was die Verwendung von für lineare Modelle entwickelten Reduktionsverfahren zulässt.

Thermische Lasten sind jedoch in der Regel flächig verteilt, sodass ein erheblicher Anteil der Systemfreiheitsgrade als Systemeingang fungiert. Darüber hinaus erfordert die Berechnung der thermisch induzierten Beanspruchungen die Kenntnis des gesamten Temperaturfeldes, sodass sich sehr hohe Ein- und Ausgangsanzahlen ergeben. Für viele Reduktionsverfahren hängt aber die minimal erreichbare Dimension oder zumindest der numerische Aufwand von diesen ab, was eine Eingangsreduktion erforderlich macht. Hierbei werden zwei Arten von Lasten unterschieden. Synchron veränderliche Lasten, bei denen das Verhältnis der Knotenwärmeströme untereinander konstant bleibt, lassen sich zu einem Eingang gruppieren. Aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Wärmestrahlung gelingt das in diesem Fall jedoch nicht, da sich an jedem involvierten Freiheitsgrad ein individueller Wärmestrom ergibt. Aus diesem Grund wird hier ein Verfahren entwickelt, welches die Proper Orthogonal Decomposition (POD) auf die Eingangsreduktion adaptiert. Anstatt die Singulärwertzerlegung auf diskrete Zustandsvektoren, welche aus Trainingssimulationen des Systems resultieren, anzuwenden, werden für repräsentative Parametersätze erzeugte Momentaufnahmen des Lastvektors infolge Strahlung, die sogenannten Snapshots, herangezogen. Die zu den größten Singulärwerten korrespondierenden Singulärvektoren bilden dann die Spalten der Eingangsmatrix und erlauben eine erhebliche Verringerung der Eingangsanzahl.

Dies ermöglicht erst die Anwendung von Krylov-Unterraummethoden zur Reduktion des Temperaturvektors. Auf diese Weise ergibt sich ein wesentlicher Vorteil des gewählten Ansatzes gegenüber ausschließlich snapshotbasierten Verfahren wie der POD. Lediglich die Nichtlinearität wird anhand der empirischen Daten approximiert, wohingegen die Wärmekapazität, der Wärmetransport und die sonstigen Lastvektoren durch eine parameterunabhängige Methode reduziert werden. Daraus resultierend erstreckt sich die Gültigkeit des reduzierten Modells auf einen deutlich größeren Parameterraum. Neben dem Block-Krylov-Verfahren mit einer

Entwicklungsstelle, welche identisch null gewählt wird, findet auch ein iterativer rationaler Krylov-Algorithmus (IRKA) Anwendung. Allerdings tritt für die betrachteten Anwendungsbeispiele keine Konvergenz auf und die Kombination aus der tangentialen Interpolation und der entwickelten Eingangsreduktion führt auf höhere Fehler im Vergleich zur Block-Krylov-Methode.

Als maßgeblich für den Rechenaufwand zur Erzeugung des reduzierten Systems erweist sich die Bereitstellung der Trainingsdaten aus transienten Analysen, welche das analysierte Parameterspektrum bestmöglich abdecken sollten. In Anbetracht dessen ist diese sogenannte Offline-Phase häufig mit sehr hohen Rechenzeiten verbunden. Die Untersuchungen in dieser Arbeit haben gezeigt, dass im Gegensatz zur POD sogar größere Ungenauigkeiten in den Snapshots nur zu geringfügigen Fehlern im reduzierten System führen. Deshalb wird der Ansatz vorgeschlagen, die Trainingssimulationen mit einem kleineren Modell und folglich verkürzten Rechenzeiten durchzuführen. Da die Ermittlung der Matrizen der Sichtfaktoren für die Wärmestrahlung den mit Abstand größten Zeitanteil bei der Modellvorbereitung ausmacht, empfiehlt es sich, durch die Verringerung der Elementansatzordnung den Freiheitsgrad zu vermindern. Auf diese Weise bleiben die Oberflächenelemente, zwischen denen Strahlung auftritt, unverändert. Das derart abgeleitete reduzierte Modell weist dann eine deutlich höhere Ergebnisqualität auf als das für die Erzeugung der Trainingsdatensätze zugrunde gelegte. Gerade wenn ein großer Parameterraum viele Vorabsimulationen mit dem nicht reduzierten System erfordert, bietet diese Methode wesentliche Vorteile.

In Anwendungsfällen, in denen entweder sehr viele Berechnungen des reduzierten Modells durchgeführt werden oder die Dimension des Wärmestrahlungsproblems vergleichbar mit der des Temperaturvektors ist, genügt die Beschränkung der Modellordnungsreduktion auf das Temperaturfeld in der Regel nicht. Deshalb wird die Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) genutzt, um die Auswertung der Wärmestrahlung auf wenige Freiheitsgrade zu beschränken und somit die Rechenzeiten der transienten Simulation erheblich zu verringern. Dies gelingt allerdings nur im gewünschten Maße, wenn der Emissionsgrad und folglich auch die Wärmestrahlungsmatrix konstant sind. Anderenfalls wird die Gesamtberechnungsdauer durch die vor jeder Simulation notwendige Berechnung dieser Matrix bestimmt. Aufgrund dessen erfolgt bei variablem Emissionsgrad die zusätzliche Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung mit Hilfe der POD. Beide Varianten basieren jedoch auf Trainingsdaten, welche im Vorfeld bereitgestellt werden müssen.

Aus Sicht der Betriebsfestigkeit ist neben der Kenntnis des zeitlich veränderlichen Temperaturfeldes auch die Ermittlung der quasistationären thermisch induzierten Beanspruchungen von Interesse. Dazu dient hier die Guyan-Reduktion, welche im statischen Fall ein exaktes Ergebnis liefert. Diese setzt jedoch unveränderliche Lasten an den zu eliminierenden Freiheitsgraden voraus, was angesichts der zeitveränderlichen Temperaturverteilung nicht gewährleistet ist. Allerdings wird gezeigt, dass die Verschiebungen an den externen Freiheitsgraden auch für nicht konstante Lasten ermittelt werden können. Durch die geeignete Wahl dieser Masterfreiheitsgrade gelingt sodann die Berechnung der Beanspruchungen an ausgewählten Positionen.



Bei Kenntnis der kritischen Stellen ermöglicht dieser Ansatz die Überwachung der Spannungen mit sehr geringem Rechenaufwand.

Anhand des Vorwärmprozesses eines Rotationsbehälters für geo- und astrophysikalische Experimente werden die entwickelten Methoden validiert. Dabei zeigen sich wesentliche Genauigkeitsvorteile der entwickelten Eingangsreduktion gegenüber etablierten Methoden wie der Singular-Value-Decomposition-Model-Order-Reduction (SVDMOR). Des Weiteren genügen erheblich weniger Trainingsdaten zur Einhaltung vorgegebener Toleranzschranken im Vergleich zur POD, welche für derartige nichtlineare Systeme als Standardmethode angesehen werden kann. Somit sind ebenfalls die bei unzureichender Abdeckung des Parameterraums in den Snapshots zu erwartenden Ungenauigkeiten wesentlich geringer, was deutlich mehr Sicherheit bei der Anwendung verleiht. Für die beiden untersuchten Beispiele konnte bereits mit einer einzigen Offline-Simulation das gesamte Parameterspektrum im reduzierten Modell mit der angestrebten Genauigkeit von 1 K repräsentiert werden.

Die Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung mit DEIM bzw. DEIM und POD erfordert zwar mehr Trainingsdaten und verlängert somit die Offline-Phase, für die feiner diskretisierte Variante des Rotationsbehältermodells verkürzt sich aber auf diese Weise die Rechenzeit von etwa einer Stunde auf 3 s bei variablem Emissionsgrad und 0,2 s bei konstantem Emissionsgrad. Der Mehraufwand für die Bereitstellung der erforderlichen Snapshots rentiert sich allerdings erst, wenn die Anzahl der zu untersuchenden Varianten ein gewisses Mindestmaß überschreitet. Im Vergleich zur Anwendung der POD ausschließlich auf die Temperaturgleichung werden auf Basis identischer Vorabsimulationen des Ausgangsmodells mit diesem mehrstufigen Reduktionsprozess höhere Ergebnismenüen bei geringerer Berechnungsdauer erzielt.

## 6.2 Ausblick

Im Zuge der Verfahrensvergleiche für die unterschiedlichen Reduktionsmethoden erfolgt bei der Untersuchung des Vorwärmprozesses die Ermittlung der Trainingsdaten durch iterative Erweiterung der zur Erzeugung der Trainingsdaten genutzten Parameterkombinationen. Diese basiert hier auf der bekannten Lösung des Ausgangsmodells. Da deren Berechnung in praktischen Anwendungen jedoch vermieden werden soll, empfiehlt sich die Verwendung geeigneter Fehlerschätzer zur Ermittlung der Modellgüte [Haasdonk 2013; Paul-Dubois-Taine & Amsallem 2015]. Für die Parameterbereiche, in welchen sich große Abweichungen ergeben, sind dann weitere Offline-Simulationen vorzunehmen. Darüber hinaus dient bislang eine äquidistante Abtastung im Zeitbereich zur Snapshoterzeugung. In der Literatur konnte jedoch gezeigt werden, dass eine problemangepasste Zeitschrittweite oder die Berücksichtigung von Zeitableitungen in den Trainingsdaten zur Verbesserung der Ergebnismenüen beitragen können [Kunisch & Volkwein 2010; Hoppe & Liu 2014; Kostova-Vassilevska & Oxberry 2018]. Infolgedessen erscheint eine derartige Optimierung der Snapshotauswahl auch hier zielführend.

Wenn längere Erwärmungsprozesse analysiert werden, deren Endzustand sich nur noch geringfügig von der stationären Temperaturverteilung unterscheidet, kann dies in zweierlei Hinsicht genutzt werden. Zum einen lassen sich die stationären Zustände, deren Berechnung im Vergleich zu den transienten Analysen mit einem deutlich geringeren numerischen Aufwand verbunden ist, zur Ergänzung der Trainingsdaten nutzen. Da der aus der Wärmestrahlung resultierende Fehler in der Regel am Simulationsende seinen Maximalwert erreicht, können sie zum anderen aber auch der Validierung dienen. Durch Vergleich der aus der Zeitbereichsintegration des reduzierten Systems folgenden Temperaturverteilung mit dem stationären Temperaturvektor des Ausgangsmodells gelingt auf diese Weise bei verhältnismäßig geringer Rechenzeit die Überprüfung der Reduktionsgüte für eine Vielzahl von Eingangsparametern.

Das entwickelte Verfahren der Eingangsreduktion erlaubt ohne notwendige Anpassungen die Verknüpfung mit anderen Reduktionsverfahren, wie beispielsweise dem balancierten Abschneiden. Des Weiteren ist die Kombination mit Methoden der parametrischen Modellordnungsreduktion basierend auf Interpolation analog zu Panzer *et al.* möglich [Panzer *et al.* 2010]. Diese beruhen auf der Reduktion für diskrete Parameterwerte und der anschließenden Interpolation und verwenden häufig Krylov-Unterraummethoden. Somit lässt sich die Abhängigkeit des Modells von wenigen Einflussgrößen mit hoher Genauigkeit berücksichtigen.

Diese Arbeit fokussierte sich auf geometrisch und materiell lineare Systeme mit daraus resultierend konstanten Systemmatrizen. Bei Ausweitung des untersuchten Temperaturspektrums kann diese Annahme im Allgemeinen nicht mehr erfüllt werden, was sich beispielsweise in temperaturabhängigen Materialparametern ausdrückt. Demzufolge müssen die Wärmekapazitäts- und Wärmetransportmatrix in jedem Lastschritt angepasst werden. Die Anwendung der Krylov-Reduktion ist dann nicht mehr zielführend. Mit der Proper Orthogonal Decomposition und der Discrete Empirical Interpolation Method werden aber im Rahmen dieser Arbeit zwei Methoden vorgestellt, die sich auch für dieses Anwendungsszenario nutzen lassen.

In verallgemeinerter Form können der Temperaturvektor und der Wärmestrom infolge Strahlung als zwei getrennte Felder betrachtet werden, deren Gleichungssysteme jeweils über einen Lastvektor gekoppelt sind, wobei die Elementtemperatur die Last des Wärmestrahlungsproblems bestimmt. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, die entwickelte Eingangsreduktion auf andere Feldkopplungen zu erweitern. Angesichts der in der Regel großflächigen Wechselwirkung der verschiedenen Domänen resultieren daraus viele Systemeingänge und -ausgänge, sodass die Reduktion von deren Anzahl essentiell für den Erhalt kleiner und somit rechenzeit-sparender reduzierter Modelle ist. Aufgrund der Kombinierbarkeit mit etablierten Verfahren zur Reduktion des jeweiligen Zustandsvektors ergibt sich daraus ein breites Einsatzspektrum.

Darüber hinaus lassen sich aber auch allgemeine flächige Lasten, wie beispielsweise Druckverteilungen, mit der Eingangsreduktion approximieren. Des Weiteren wurde in (2.47) die Konvektionsrandbedingung in zwei Terme aufgeteilt, einen zur Beschreibung des Wärmestroms von der Umgebung zum Körper, welcher eine äußere Last darstellt, und einen zweiten, welcher die Wärmeabgabe des Bauteils an die Umgebung beschreibt. Dieser wurde

---

bislang stets in die Wärmetransportmatrix integriert. Stellt der darin enthaltene Wärmeübergangskoeffizient allerdings einen variablen Systemparameter dar, resultiert daraus erneut die Schwierigkeit veränderlicher Systemmatrizen. In diesem Fall kann analog zur Wärmestrahlung vorgegangen werden, sodass der gesamte konvektive Wärmestrom als äußere Last aufgefasst wird. Die Reduktion der Eingangsanzahl ermöglicht dann die Anwendung der Standardreduktionsverfahren, um Parameterstudien oder Optimierungsrechnungen bei geringer Rechenzeit durchzuführen. Angesichts der linearen Abhängigkeit des Wärmestroms von der Temperatur kann auf die Hyperreduktion mit der DEIM verzichtet werden, wohingegen ein analoges Vorgehen zur Nutzung der POD für die Wärmestrahlung eine schnelle Anpassung des Wärmeübergangskoeffizienten erlaubt.



## Literaturverzeichnis

- Altenbach, H. (2015) *Kontinuumsmechanik*. 3. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-662-47070-1.
- ANSYS, Inc. (2016) „ANSYS Academic Research Mechanical, Release 18.0, Help System“. Canonsburg, PA.
- Antoulas, A. C. (2005) *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics. doi: 10.1137/1.9780898718713.
- Antoulas, A. C.; Beattie, C. A. und Gugercin, S. (2010) „Interpolatory model reduction of large-scale dynamical systems“, in Mohammadpor, J. und Grigoriadis, K. (Hrsg.) *Efficient Modeling and Control of Large-Scale Systems*. Boston, MA: Springer, S. 3–58. doi: 10.1007/978-1-4419-5757-3\_1.
- Arnoldi, W. E. (1951) „The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem“, *Quarterly of Applied Mathematics*, 9(1), S. 17–29. doi: 10.1090/qam/42792.
- Astrid, P.; Weiland, S.; Willcox, K. und Backx, T. (2008) „Missing Point Estimation in Models Described by Proper Orthogonal Decomposition“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(10), S. 2237–2251. doi: 10.1109/TAC.2008.2006102.
- Bai, Z. und Skoogh, D. (2006) „A projection method for model reduction of bilinear dynamical systems“, *Linear Algebra and Its Applications*, 415(2–3), S. 406–425. doi: 10.1016/j.laa.2005.04.032.
- Balke, H. (2010) *Einführung in die Technische Mechanik*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer (Springer-Lehrbuch). doi: 10.1007/978-3-642-10386-5.
- Ballarin, F.; Faggiano, E.; Ippolito, S.; Manzoni, A.; Quarteroni, A.; Rozza, G. und Scrofani, R. (2016) „Fast simulations of patient-specific haemodynamics of coronary artery bypass grafts based on a POD-Galerkin method and a vascular shape parametrization“, *Journal of Computational Physics*, 315, S. 609–628. doi: 10.1016/j.jcp.2016.03.065.
- Ballarin, F.; Rozza, G. und Maday, Y. (2017) „Reduced-Order Semi-Implicit Schemes for Fluid-Structure Interaction Problems“, in Benner, P.; Ohlberger, M.; Patera, A.; Rozza, G. und Urban, K. (Hrsg.) *Model Reduction of Parametrized Systems*. Cham: Springer International Publishing, S. 149–167. doi: 10.1007/978-3-319-58786-8\_10.
- Bamer, F. und Bucher, C. (2012) „Application of the proper orthogonal decomposition for linear and nonlinear structures under transient excitations“, *Acta Mechanica*, 223(12), S. 2549–2563. doi: 10.1007/s00707-012-0726-9.
- Banagaaya, N.; Feng, L.; Schoenmaker, W.; Meuris, P.; Wieers, A.; Gillonz, R. und Benner, P. (2016) „Model Order Reduction for Nanoelectronics Coupled Problems with Many Inputs“, in *Proceedings of the 2016 Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE)*. Singapore, S. 313–318. doi: 10.3850/9783981537079\_0996.
- Barrault, M.; Maday, Y.; Nguyen, N. C. und Patera, A. T. (2004) „An ‘empirical interpolation’ method: application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations“, *Comptes Rendus Mathematique*, 339(9), S. 667–672. doi: 10.1016/j.crma.2004.08.006.
- Bärwolff, G. (2016) *Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-662-48016-8.
- Bathe, K.-J. (2002) *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Baur, U.; Benner, P. und Feng, L. (2014) „Model Order Reduction for Linear and Nonlinear Systems: A System-Theoretic Perspective“, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 21(4), S. 331–358. doi: 10.1007/s11831-014-9111-2.
- Beattie, C.; Gugercin, S. und Mehrmann, V. (2017) „Model reduction for systems with inhomogeneous initial conditions“, *Systems & Control Letters*, 99, S. 99–106. doi: 10.1016/j.sysconle.2016.11.007.

- Beattie, C. und Gugercin, S. (2017) „Model Reduction by Rational Interpolation“, in Benner, P.; Ohlberger, M.; Cohen, A. und Willcox, K. (Hrsg.) *Model Reduction and Approximation*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, S. 297–334. doi: 10.1137/1.9781611974829.ch7.
- Bechtold, T.; Rudnyi, E. B. und Korvink, J. G. (2005) „Error indicators for fully automatic extraction of heat-transfer macromodels for MEMS“, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15(3), S. 430–440. doi: 10.1088/0960-1317/15/3/002.
- Benner, P. (2006) „Numerical Linear Algebra for Model Reduction in Control and Simulation“, *GAMM-Mitteilungen*, 29(2), S. 275–296. doi: 10.1002/gamm.201490034.
- Benner, P.; Li, J.-R. und Penzl, T. (2008) „Numerical solution of large-scale Lyapunov equations, Riccati equations, and linear-quadratic optimal control problems“, *Numerical Linear Algebra with Applications*, 15(9), S. 755–777. doi: 10.1002/nla.622.
- Benner, P.; Feng, L. und Rudnyi, E. (2008) „Using the Superposition Property for Model Reduction of Linear Systems with a Large Number of Inputs“, in *Proceedings of the 18th International Symposium on Mathematical Theory of Networks & Systems*. Blacksburg, VA, S. 79–81.
- Benner, P.; Gugercin, S. und Willcox, K. (2015) „A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems“, *SIAM Review*, 57(4), S. 483–531. doi: 10.1137/130932715.
- Benner, P.; Kürschner, P. und Saak, J. (2016) „Frequency-Limited Balanced Truncation with Low-Rank Approximations“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(1), S. A471–A499. doi: 10.1137/15M1030911.
- Benner, P.; Herzog, R.; Lang, N.; Riedel, I. und Saak, J. (2019) „Comparison of model order reduction methods for optimal sensor placement for thermo-elastic models“, *Engineering Optimization*, 51(3), S. 465–483. doi: 10.1080/0305215X.2018.1469133.
- Benner, P. und Feng, L. (2015) „Model order reduction for coupled problems“, *Applied and Computational Mathematics*, 14(1), S. 3–22.
- Benner, P. und Schneider, A. (2010a) „Balanced truncation model order reduction for LTI systems with many inputs or outputs“, in *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*. Budapest, S. 1971–1974.
- Benner, P. und Schneider, A. (2010b) „Model Order and Terminal Reduction Approaches via Matrix Decomposition and Low Rank Approximation“, in Roos, J. und Costa, L. R. J. (Hrsg.) *Scientific Computing in Electrical Engineering SCEE 2008*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 523–530. doi: 10.1007/978-3-642-12294-1\_64.
- Benner, P. und Schneider, A. (2013) „Balanced Truncation for Descriptor Systems with Many Terminals“, *Max Planck Institute Magdeburg*, MPIMD/13-1.
- Benner, P. und Werner, S. W. R. (2018) „Model Reduction of Descriptor Systems with the MORLAB Toolbox“, *IFAC-PapersOnLine*, 51(2), S. 547–552. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.03.092.
- Besselink, B.; Tabak, U.; Lutowska, A.; van de Wouw, N.; Nijmeijer, H.; Rixen, D. J.; Hochstenbach, M. E. und Schilders, W. H. A. (2013) „A comparison of model reduction techniques from structural dynamics, numerical mathematics and systems and control“, *Journal of Sound and Vibration*. Elsevier, 332(19), S. 4403–4422. doi: 10.1016/j.jsv.2013.03.025.
- Białecki, R. A.; Kassab, A. J. und Fic, A. (2005) „Proper orthogonal decomposition and modal analysis for acceleration of transient FEM thermal analysis“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(6), S. 774–797. doi: 10.1002/nme.1205.
- Botto, D.; Zucca, S. und Gola, M. M. (2007) „Reduced-order models for the calculation of thermal transients of heat conduction/convection FE models“, *Journal of Thermal Stresses*, 30(8), S. 819–839. doi: 10.1080/01495730701415806.

- Brands, B.; Mergheim, J. und Steinmann, P. (2016) „Reduced-order modelling for linear heat conduction with parametrised moving heat sources“, *GAMM Mitteilungen*, 39(2), S. 170–188. doi: 10.1002/gamm.201610011.
- Bruns, A. und Benner, P. (2015) „Parametric model order reduction of thermal models using the bilinear interpolatory rational Krylov algorithm“, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 21(2), S. 103–129. doi: 10.1080/13873954.2014.924534.
- Bui-Thanh, T.; Willcox, K.; Ghattas, O. und van Bloemen Waanders, B. (2007) „Goal-oriented, model-constrained optimization for reduction of large-scale systems“, *Journal of Computational Physics*, 224(2), S. 880–896. doi: 10.1016/j.jcp.2006.10.026.
- Carlberg, K.; Bou-Mosleh, C. und Farhat, C. (2011) „Efficient non-linear model reduction via a least-squares Petrov-Galerkin projection and compressive tensor approximations“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(2), S. 155–181. doi: 10.1002/nme.3050.
- Castagnotto, A.; Cruz Varona, M.; Jeschek, L. und Lohmann, B. (2017) „Sss & sssMOR: Analysis and reduction of large-scale dynamic systems in MATLAB“, *Automatisierungstechnik*, 65(2), S. 134–150. doi: 10.1515/auto-2016-0137.
- Chaturantabut, S. (2008) *Dimension Reduction for Unsteady Nonlinear Partial Differential Equations via Empirical Interpolation Methods*. Rice University, Dissertation.
- Chaturantabut, S. und Sorensen, D. C. (2009) „Discrete Empirical Interpolation for nonlinear model reduction“, in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) and 28th Chinese Control Conference*. Shanghai: IEEE, S. 4316–4321. doi: 10.1109/CDC.2009.5400045.
- Chaturantabut, S. und Sorensen, D. C. (2010) „Nonlinear Model Reduction via Discrete Empirical Interpolation“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5), S. 2737–2764. doi: 10.1137/090766498.
- Chaturantabut, S. und Sorensen, D. C. (2011) „Application of POD and DEIM on dimension reduction of non-linear miscible viscous fingering in porous media“, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 17(4), S. 337–353. doi: 10.1080/13873954.2011.547660.
- Chen, P.; Quarteroni, A. und Rozza, G. (2017) „Reduced Basis Methods for Uncertainty Quantification“, *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 5(1), S. 813–869. doi: 10.1137/151004550.
- Cohen, M. F. und Greenberg, D. P. (1985) „The Hemi-Cube: A Radiosity Solution for Complex Environments“, *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 19(3), S. 31–40. doi: <http://doi.acm.org/10.1145/325165.325171>.
- Craig, R. R. J. und Bampton, M. C. C. (1968) „Coupling of substructures for dynamic analyses.“, *AIAA Journal*, 6(7), S. 1313–1319. doi: 10.2514/3.4741.
- Dahmen, W. und Reusken, A. (2008) *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer (Springer-Lehrbuch). doi: 10.1007/978-3-540-76493-9.
- Davison, E. (1966) „A method for simplifying linear dynamic systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(1), S. 93–101. doi: 10.1109/TAC.1966.1098264.
- Dolci, V. und Arina, R. (2016) „Proper Orthogonal Decomposition as Surrogate Model for Aerodynamic Optimization“, *International Journal of Aerospace Engineering*, 2016, S. 1–15. doi: 10.1155/2016/8092824.
- Druskin, V.; Knizhnerman, L. und Simoncini, V. (2011) „Analysis of the Rational Krylov Subspace and ADI Methods for Solving the Lyapunov Equation“, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(5), S. 1875–1898. doi: 10.1137/100813257.
- Everson, R. und Sirovich, L. (1995) „Karhunen–Loève procedure for gappy data“, *Journal of the Optical Society of America A*, 12(8), S. 1657–1664. doi: 10.1364/JOSAA.12.001657.

- Fagiano, L. und Gati, R. (2016) „On the order reduction of the radiative heat transfer model for the simulation of plasma arcs in switchgear devices“, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 169, S. 58–78. doi: 10.1016/j.jqsrt.2015.10.002.
- Falkiewicz, N. J. und S. Cesnik, C. E. (2011) „Proper Orthogonal Decomposition for Reduced-Order Thermal Solution in Hypersonic Aerothermoelastic Simulations“, *AIAA Journal*, 49(5), S. 994–1009. doi: 10.2514/1.j050701.
- Farhat, C.; Avery, P.; Chapman, T. und Cortial, J. (2014) „Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(9), S. 625–662. doi: 10.1002/nme.4668.
- Farhat, C.; Chapman, T. und Avery, P. (2015) „Structure-preserving, stability, and accuracy properties of the energy-conserving sampling and weighting method for the hyper reduction of nonlinear finite element dynamic models“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(5), S. 1077–1110. doi: 10.1002/nme.4820.
- Fehr, J. (2011) *Automated and Error Controlled Model Reduction in Elastic Multibody Systems*. Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart, Dissertation.
- Fehr, J.; Fischer, M.; Haasdonk, B. und Eberhard, P. (2013) „Greedy-based approximation of frequency-weighted gramian matrices for model reduction in multibody dynamics“, *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 93(8), S. 501–519. doi: 10.1002/zamm.201200014.
- Fehr, J.; Grunert, D.; Holzwarth, P.; Fröhlich, B.; Walker, N. und Eberhard, P. (2018) „Morembs—A Model Order Reduction Package for Elastic Multibody Systems and Beyond“, in Keiper, W.; Milde, A. und Volkwein, S. (Hrsg.) *Reduced-Order Modeling (ROM) for Simulation and Optimization*. Cham: Springer International Publishing, S. 141–166. doi: 10.1007/978-3-319-75319-5\_7.
- Feldmann, P. (2004) „Model order reduction techniques for linear systems with large numbers of terminals“, in *Proceedings of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*, S. 944–947. doi: 10.1109/DATE.2004.1269013.
- Feldmann, P. und Freund, R. W. (1995) „Efficient linear circuit analysis by Paddé approximation via a Lanczos method“, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 14(5), S. 639–649.
- Feldmann, P. und Liu, F. (2004) „Sparse and efficient reduced order modeling of linear subcircuits with large number of terminals“, in *IEEE/ACM International Conference on Computer-aided Design*. Washington, DC, S. 88–92. doi: 10.1109/iccad.2004.1382548.
- Feng, L.; Zeng, X.; Chiang, C.; Zhou, D. und Fang, Q. (2004) „Direct nonlinear order reduction with variational analysis“, in *Proceedings Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*. IEEE Comput. Soc, S. 1316–1321. doi: 10.1109/DATE.2004.1269077.
- Feng, L.; Yue, Y.; Banagaaya, N.; Meuris, P.; Schoenmaker, W. und Benner, P. (2016) „Parametric modeling and model order reduction for (electro-)thermal analysis of nanoelectronic structures“, *Journal of Mathematics in Industry*, 6(1). doi: 10.1186/s13362-016-0030-8.
- Forschungskuratorium Maschinenbau (2012) *Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile*. 6. Auflage. Frankfurt: VDMA-Verlag.
- Freund, R. W. (2003) „Model reduction methods based on Krylov subspaces“, *Acta Numerica*. Cambridge University Press, 12, S. 267–319. doi: 10.1017/S0962492902000120.
- Fritzen, F.; Haasdonk, B.; Ryckelynck, D. und Schöps, S. (2018) „An Algorithmic Comparison of the Hyper-Reduction and the Discrete Empirical Interpolation Method for a Nonlinear Thermal Problem“, *Mathematical and Computational Applications*, 23(1). doi: 10.3390/mca23010008.
- Gailitis, A.; Lielausis, O.; Platacis, E.; Gerbeth, G. und Stefani, F. (2002) „Colloquium: Laboratory experiments on hydromagnetic dynamos“, *Reviews of Modern Physics*, 74(4), S. 973–990. doi: 10.1103/revmodphys.74.973.



- Gailitis, A.; Lielausis, O.; Platacis, E.; Gerbeth, G. und Stefani, F. (2003) „The Riga dynamo experiment“, *Surveys in Geophysics*, 24(3), S. 247–267. doi: 10.1023/A:1024851818821.
- Galant, A.; Großmann, K. und Mühl, A. (2015) „Thermo-Elastic Simulation of Entire Machine Tool“, in Großmann, K. (Hrsg.) *Thermo-energetic Design of Machine Tools*. Cham: Springer, S. 69–84. doi: 10.1007/978-3-319-12625-8\_7.
- Ghavamian, F.; Tiso, P. und Simone, A. (2017) „POD–DEIM model order reduction for strain softening viscoplasticity“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317, S. 458–479. doi: 10.1016/j.cma.2016.11.025.
- Giesecke, A.; Albrecht, T.; Gerbeth, G.; Gundrum, T. und Stefani, F. (2014) „Numerical simulations for the DRESDYN precession dynamo“, *Magnetohydrodynamics*, 51(2), S. 293–302. Verfügbar unter: <http://arxiv.org/abs/1411.1195>.
- Giesecke, A.; Albrecht, T.; Gundrum, T.; Herault, J. und Stefani, F. (2015) „Triadic resonances in nonlinear simulations of a fluid flow in a precessing cylinder“, *New Journal of Physics*, 17(11). doi: 10.1088/1367-2630/17/11/113044.
- Giesecke, A.; Vogt, T.; Gundrum, T. und Stefani, F. (2018) „Nonlinear Large Scale Flow in a Precessing Cylinder and Its Ability To Drive Dynamo Action“, *Physical Review Letters*, 120(2). doi: 10.1103/PhysRevLett.120.024502.
- Glover, K. (1984) „All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L_\infty$ -error bounds“, *International Journal of Control*, 39(6), S. 1115–1193. doi: 10.1080/00207178408933239.
- Grepl, M. A.; Maday, Y.; Nguyen, N. C. und Patera, A. T. (2007) „Efficient reduced-basis treatment of nonaffine and nonlinear partial differential equations“, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 41(3), S. 575–605. doi: 10.1051/m2an:2007031.
- Grimme, E. J. (1997) *Krylov projection methods for model reduction*. University of Illinois, Urbana-Champaign, Dissertation.
- Gugercin, S. (2008) „An iterative SVD-Krylov based method for model reduction of large-scale dynamical systems“, *Linear Algebra and Its Applications*, 428(8–9), S. 1964–1986. doi: 10.1016/j.laa.2007.10.041.
- Gugercin, S.; Antoulas, A. C. und Beattie, C. (2008) „H2 Model Reduction for Large-Scale Linear Dynamical Systems“, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 30(2), S. 609–638. doi: 10.1137/060666123.
- Guyan, R. J. (1965) „Reduction of stiffness and mass matrices“, *AIAA Journal*, 3(2), S. 380–380. doi: 10.2514/3.2874.
- Haasdonk, B. (2013) „Convergence Rates of the POD–Greedy Method“, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 47(3), S. 859–873. doi: 10.1051/m2an/2012045.
- Haasdonk, B. und Ohlberger, M. (2008) „Reduced basis method for finite volume approximations of parametrized linear evolution equations“, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42(2), S. 277–302. doi: 10.1051/m2an:2008001.
- Heinkenschloss, M.; Reis, T. und Antoulas, A. C. (2011) „Balanced truncation model reduction for systems with inhomogeneous initial conditions“, *Automatica*, 47(3), S. 559–564. doi: 10.1016/j.automatica.2010.12.002.
- Henke, H. (2015) *Elektromagnetische Felder*. 5. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer (Springer-Lehrbuch). doi: 10.1007/978-3-662-46918-7.
- Himpe, C.; Leibner, T. und Rave, S. (2018) „Hierarchical Approximate Proper Orthogonal Decomposition“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 40(5), S. A3267–A3292. doi: 10.1137/16M1085413.
- Homescu, C.; Petzold, L. R. und Serban, R. (2007) „Error Estimation for Reduced-Order Models of Dynamical Systems“, *SIAM Review*, 49(2), S. 277–299. doi: 10.1137/070684392.

- Hooijkamp, E. C. und Keulen, F. van (2018) „Topology optimization for linear thermo-mechanical transient problems: Modal reduction and adjoint sensitivities“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113(8), S. 1230–1257. doi: 10.1002/nme.5635.
- Hoppe, R. H. W. und Liu, Z. (2014) „Snapshot location by error equilibration in proper orthogonal decomposition for linear and semilinear parabolic partial differential equations“, *Journal of Numerical Mathematics*, 22(1), S. 1–32. doi: 10.1515/jnum-2014-0001.
- Iben, H. K. (1999) *Tensorrechnung*. 2. Auflage. Stuttgart, Leipzig: B. G. Teubner.
- Ionutiu, R.; Rommes, J. und Schilders, W. H. A. (2011) „SparseRC: Sparsity preserving model reduction for RC circuits with many terminals“, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 30(12), S. 1828–1841. doi: 10.1109/TCAD.2011.2166075.
- Kerns, K. J. und Yang, A. T. (1997) „Stable and efficient reduction of large, multiport rc networks by pole analysis via congruence transformations“, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 16(7), S. 734–744. doi: 10.1109/43.644034.
- Kienzler, R. und Schröder, R. (2009) *Einführung in die Höhere Festigkeitslehre*. Berlin, Heidelberg: Springer (Springer-Lehrbuch). doi: 10.1007/978-3-540-89325-7.
- Klein, B. (2015) *FEM*. 10. Auflag. Wiesbaden: Springer Fachmedien. doi: 10.1007/978-3-658-06054-1.
- Konkel, Y.; Farle, O. und Dyczij-Edlinger, R. (2008) „Ein Fehlerschätzer für die Krylov-Unterraum basierte Ordnungsreduktion“, in *GMA-Fachausschuss 1.30 Workshop „Modellbildung, Identifikation und Simulation in der Automatisierungstechnik“*. Anif/Salzburg.
- Köster, L.; Gerth, H. und Haase, H. (2000) „Thermal modes and their application to turbogenerator rotors“, *Electrical Engineering*, 82(3), S. 135–144. doi: 10.1007/s002020050004.
- Kostova-Vassilevska, T. und Oxberry, G. M. (2018) „Model reduction of dynamical systems by proper orthogonal decomposition: Error bounds and comparison of methods using snapshots from the solution and the time derivatives“, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 330, S. 553–573. doi: 10.1016/j.cam.2017.09.001.
- Koutsovasilis, P. (2009) *Model Order Reduction in Structural Mechanics*. Institut für Bahnfahrzeuge und Bahntechnik der Technischen Universität Dresden, Dissertation.
- Kunisch, K. und Volkwein, S. (2010) „Optimal snapshot location for computing POD basis functions“, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 44(3), S. 509–529. doi: 10.1051/m2an/2010011.
- Lanczos, C. (1950) „An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators“, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45(4), S. 255–282. doi: 10.6028/jres.045.026.
- Lass, O. und Volkwein, S. (2014) „Adaptive POD basis computation for parametrized nonlinear systems using optimal snapshot location“, *Computational Optimization and Applications*, 58(3), S. 645–677. doi: 10.1007/s10589-014-9646-z.
- Lassila, T.; Manzoni, A.; Quarteroni, A. und Rozza, G. (2014) „Model Order Reduction in Fluid Dynamics: Challenges and Perspectives“, in Quarteroni, A. und Rozza, G. (Hrsg.) *Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction*. Cham: Springer International Publishing, S. 235–273. doi: 10.1007/978-3-319-02090-7\_9.
- Lehner, M. (2007) *Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen*. Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart, Dissertation.
- Lein, C. und Beitelschmidt, M. (2012) „MORPACK-Schnittstelle zum import von FE-strukturen nach SIMPACK“, *At-Automatisierungstechnik*, 60(9), S. 547–560. doi: 10.1524/auto.2012.1025.
- Lein, C. und Beitelschmidt, M. (2014) „Comparative study of model correlation methods with application to model order reduction“, in *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA 2014*. Leuven, S. 2683–2700.

- Link, M. (2014) *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. 4. Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien. doi: 10.1007/978-3-658-03557-0.
- Liu, P.; Tan, S. X. D.; Yan, B. und McGaughy, B. (2008) „An efficient terminal and model order reduction algorithm“, *Integration, the VLSI Journal*, 41(2), S. 210–218. doi: 10.1016/j.vlsi.2007.05.004.
- Mahdiabadi, M. K.; Buchmann, E.; Xu, D.; Bartl, A. und Rixen, D. J. (2017) „Dynamic Substructuring of Geometrically Nonlinear Finite Element Models Using Residual Flexibility Modes“, in Allen, M. S.; Mayes, R. L. und Rixen, D. J. (Hrsg.) *Dynamics of Coupled Structures, Volume 4, Proceedings of the 35th IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics 2017*. Cham: Springer International Publishing, S. 215–223. doi: 10.1007/978-3-319-54930-9\_19.
- Marshall, S. A. (1966) „An approximate method for reducing the order of a linear system“, *International Journal of Control*, 5, S. 642–643.
- Meyer, C. H.; Lerch, C.; Lohmann, B. und Rixen, D. J. (2017) „Model Order Reduction for Parametric Non-linear Mechanical Systems: State of the Art and Future Research“, *PAMM*, 17(1), S. 37–40. doi: 10.1002/pamm.201710011.
- Milk, R.; Rave, S. und Schindler, F. (2016) „pyMOR -- Generic Algorithms and Interfaces for Model Order Reduction“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(5), S. S194–S216. doi: 10.1137/15M1026614.
- Moore, B. (1981) „Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1), S. 17–32. doi: 10.1109/TAC.1981.1102568.
- My-Ha, D.; Lim, K. M.; Khoo, B. C. und Willcox, K. (2007) „Real-time optimization using proper orthogonal decomposition: Free surface shape prediction due to underwater bubble dynamics“, *Computers and Fluids*, 36(3), S. 499–512. doi: 10.1016/j.compfluid.2006.01.016.
- Nasdala, L. (2015) *FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik*. 3. Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien. doi: 10.1007/978-3-658-06630-7.
- Negri, F.; Manzoni, A. und Amsallem, D. (2015) „Efficient model reduction of parametrized systems by matrix discrete empirical interpolation“, *Journal of Computational Physics*, 303, S. 431–454. doi: 10.1016/j.jcp.2015.09.046.
- Nguyen, N. C.; Patera, A. T. und Peraire, J. (2008) „A ‘best points’ interpolation method for efficient approximation of parametrized functions“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(4), S. 521–543. doi: 10.1002/nme.2086.
- Nigro, P. S. B.; Anndif, M.; Teixeira, Y.; Pimenta, P. M. und Wriggers, P. (2016) „An adaptive model order reduction by proper snapshot selection for nonlinear dynamical problems“, *Computational Mechanics*, 57(4), S. 537–554. doi: 10.1007/s00466-015-1238-y.
- Nowakowski, C.; Fehr, J. und Eberhard, P. (2011) „Einfluss von Schnittstellenmodellierungen bei der Reduktion elastischer Mehrkörpersysteme“, *At-Automatisierungstechnik*, 59(8), S. 512–520. doi: 10.1524/auto.2011.0929.
- Nowakowski, C. (2014) *Zur Modellierung und Reduktion elastischer Bauteile unter verteilten Lasten für die Mehrkörpersimulation*. Universität Stuttgart.
- Nusselt, W. (1928) „Graphische Bestimmung des Winkelverhältnisses bei der Wärmestrahlung“, *VDI Zeitschrift*, 72, S. 673.
- Nye, J. F. (1985) *Physical Properties of Crystals*. Oxford: Oxford University Press.
- Ohlberger, M. und Rave, S. (2016) „Reduced Basis Methods: Success, Limitations and Future Challenges“, in *Proceedings of ALGORITHMY*, S. 1–12. Verfügbar unter: <http://arxiv.org/abs/1511.02021>.
- Oxberry, G. M.; Kostova-Vassilevska, T.; Arrighi, W. und Chand, K. (2017) „Limited-memory adaptive snapshot selection for proper orthogonal decomposition“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(2), S. 198–217. doi: 10.1002/nme.5283.

- Panzer, H.; Mohring, J.; Eid, R. und Lohmann, B. (2010) „Parametric Model Order Reduction by Matrix Interpolation“, *At-Automatisierungstechnik*, 58(8), S. 475–484. doi: 10.1524/auto.2010.0863.
- Panzer, H.; Wolf, T. und Lohmann, B. (2013) „H<sub>2</sub> and H<sub>∞</sub> Error Bounds for Model Order Reduction of Second Order Systems by Krylov Subspace Methods“, in *2013 European Control Conference (ECC)*. Zürich, S. 4484–4489. doi: 10.23919/ECC.2013.6669657.
- Panzer, H. (2014) *Model Order Reduction by Krylov Subspace Methods with Global Error Bounds and Automatic Choice of Parameters*. Lehrstuhl für Regelungstechnik der Technischen Universität München, Dissertation.
- Paul-Dubois-Taine, A. und Amsallem, D. (2015) „An adaptive and efficient greedy procedure for the optimal training of parametric reduced-order models“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(5), S. 1262–1292. doi: 10.1002/nme.4759.
- Phillips, J. R. (2003) „Projection-Based Approaches for Model Reduction“, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 22(2), S. 171–187.
- Pinnau, R. (2008) „Model Reduction via Proper Orthogonal Decomposition“, in Schilders, W. H. A.; van der Vorst, H. A. und Rommes, J. (Hrsg.) *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications. Mathematics in Industry*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 95–109. doi: 10.1007/978-3-540-78841-6\_5.
- Polifke, W. und Kopitz, J. (2005) *Wärmeübertragung*. München: Pearson Studium.
- Qian, J.; Wang, Y.; Song, H.; Pant, K.; Peabody, H.; Ku, J. und Butler, C. D. (2015) „Projection-Based Reduced-Order Modeling for Spacecraft Thermal Analysis“, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 52(3), S. 978–989. doi: 10.2514/1.A33117.
- Qu, Z.-Q. (2004) *Model Order Reduction Techniques*. London: Springer. doi: 10.1007/978-1-4471-3827-3.
- Radermacher, A. und Reese, S. (2013) „A comparison of projection-based model reduction concepts in the context of nonlinear biomechanics“, *Archive of Applied Mechanics*, 83(8), S. 1193–1213. doi: 10.1007/s00419-013-0742-9.
- Radermacher, A. und Reese, S. (2016) „POD-based model reduction with empirical interpolation applied to nonlinear elasticity“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107(6), S. 477–495. doi: 10.1002/nme.5177.
- Rewieński, M.; Lamecki, A. und Mrozowski, M. (2016) „Greedy Multipoint Model-Order Reduction Technique for Fast Computation of Scattering Parameters of Electromagnetic Systems“, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 64(6), S. 1681–1693. doi: 10.1109/TMTT.2016.2560167.
- Rewieński, M. und White, J. (2003) „A trajectory piecewise-linear approach to model order reduction and fast simulation of nonlinear circuits and micromachined devices“, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 22(2), S. 155–170. doi: 10.1109/TCAD.2002.806601.
- Rieß, A. (2014) *Model Order Reduction Based Simulation and Optimization of Large Bore Internal Combustion Engines*. Universität Augsburg, Dissertation.
- Rother, S. und Beitelschmidt, M. (2017) „Strength Assessment of a Precession Driven Dynamo“, *Technische Mechanik*, 37(2–5), S. 120–128. doi: 10.24352/UB.OVGU-2017-089.
- Rother, S. und Beitelschmidt, M. (2018) „Load Snapshot Decomposition to Consider Heat Radiation in Thermal Model Order Reduction“, *IFAC-PapersOnLine*, 51(2), S. 667–672. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.03.113.
- Rust, W. (2011) *Nichtlineare Finite-Elemente- Berechnungen*. 2. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Rutzmoser, J. B. und Rixen, D. J. (2017) „A lean and efficient snapshot generation technique for the Hyper-Reduction of nonlinear structural dynamics“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 325, S. 330–349. doi: 10.1016/j.cma.2017.06.009.

- Ryckelynck, D. (2005) „A priori hyperreduction method: an adaptive approach“, *Journal of Computational Physics*, 202(1), S. 346–366. doi: 10.1016/j.jcp.2004.07.015.
- Ryckelynck, D. (2009) „Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1), S. 75–89. doi: 10.1002/nme.2406.
- Saad, Y. (2003) *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2nd Aufl. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. doi: 10.1016/S1570-579X(01)80025-2.
- Saak, J. (2009) *Efficient Numerical Solution of Large Scale Algebraic Matrix Equations in PDE Control and Model Order Reduction*. Fakultät Mathematik der Technischen Universität Chemnitz, Dissertation.
- Sachs, E. W. und Volkwein, S. (2010) „POD-Galerkin approximations in PDE-constrained optimization“, *GAMM-Mitteilungen*, 33(2), S. 194–208. doi: 10.1002/gamm.201010015.
- Salleras, M.; Bechtold, T.; Fonseca, L.; Santander, J.; Rudnyi, E. B.; Korvink, J. G. und Marco, S. (2005) „Comparison of model order reduction methodologies for thermal problems“, in *EuroSimE 2005. Proceedings of the 6th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Micro-Electronics and Micro-Systems.*, S. 60–65. doi: 10.1109/ESIME.2005.1502773.
- Sato, Y.; Clemens, M. und Igarashi, H. (2016) „Adaptive Subdomain Model Order Reduction With Discrete Empirical Interpolation Method for Nonlinear Magneto-Quasi-Static Problems“, *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3), S. 1–4. doi: 10.1109/TMAG.2015.2489264.
- Schilders, W. (2008) „Introduction to Model Order Reduction“, in Schilders, W.; van der Vorst, H. A. und Rommes, J. (Hrsg.) *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications. Mathematics in Industry*. Berlin, Heidelberg: S, S. 3–32. doi: 10.1007/978-3-540-78841-6\_1.
- Schwarz, H. R. und Köckler, N. (2009) *Numerische Mathematik*. 7. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Sheehan, B. N. (1999) „TICER: realizable reduction of extracted RC circuits“, in *Proceedings of the 1999 IEEE/ACM International conference on Computer-aided design*. San Jose, CA, S. 200–203.
- Siegel, R.; Howell, J. R. und Lohrengel, J. (1988) *Wärmeübertragung durch Strahlung Teil 1 Grundlagen und Materialeigenschaften*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Siegel, R.; Howell, J. R. und Lohrengel, J. (1991) *Wärmeübertragung durch Strahlung Teil 2 Strahlungsaustausch zwischen Oberflächen und Umhüllungen*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Sirovich, L. (1987) „Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures“, *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3), S. 561–571. doi: 10.1090/qam/910463.
- Skolaut, W. (Hrsg.) (2014) *Maschinenbau*. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-8274-2554-6.
- Smetana, K. und Patera, A. T. (2016) „Optimal Local Approximation Spaces for Component-Based Static Condensation Procedures“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(5), S. A3318–A3356. doi: 10.1137/15M1009603.
- Stefani, F.; Gailitis, A. und Gerbeth, G. (2008) „Magnetohydrodynamic experiments on cosmic magnetic fields“, *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 88(12), S. 930–954. doi: 10.1002/zamm.200800102.
- Stefani, F.; Eckert, S.; Gerbeth, G.; Giesecke, A.; Gundrum, T.; Steglich, C.; Weier, T. und Wustmann, B. (2012) „DRESDYN - A new facility for MHD experiments with liquid sodium“, *Magnetohydrodynamics*, 48(1), S. 103–114.
- Stefani, F.; Albrecht, T.; Gerbeth, G.; Giesecke, A.; Gundrum, T.; Herault, J.; Nore, C. und Steglich, C. (2015) „Towards a precession driven dynamo experiment“, *Magnetohydrodynamics*, 51(2), S. 275–284.

- Stefani, F.; Gailitis, A.; Gerbeth, G.; Giesecke, A.; Gundrum, T.; Rüdiger, G.; Seilmayer, M. und Vogt, T. (2018) „The DRESHDYN project: liquid metal experiments on dynamo action and magnetorotational instability“, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 1929, S. 1–20. doi: 10.1080/03091929.2018.1501481.
- Steinke, P. (2015) *Finite-Elemente-Methode*. 5. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-53937-4.
- Su, Y.; Yang, F. und Zeng, X. (2012) „AMOR: An efficient aggregating based model order reduction method for many-terminal interconnect circuits“, in *Proceedings of the 49th Annual Design Automation Conference on - DAC '12*. New York, NY: ACM Press, S. 295–301. doi: 10.1145/2228360.2228416.
- The MathWorks, Inc. (2014) „MATLAB Release 2014b“. Natick, MA.
- Tiso, P. und Rixen, D. J. (2013) „Discrete Empirical Interpolation Method for Finite Element Structural Dynamics“, in Kerschen, G.; Adams, D. und Carrella, A. (Hrsg.) *Topics in Nonlinear Dynamics, Volume 1, Proceedings of the 31st IMAC, A Conference on Structural Dynamics, 2013*. New York, NY: Springer (Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series), S. 203–212. doi: 10.1007/978-1-4614-6570-6.
- Ulbricht, V. (1997) „Studienbrief Kontinuumsmechanik“. Dresden: Technische Universität Dresden, Vorlesungsskript.
- VDI (2013) *VDI-Wärmeatlas*. 11. Auflag. Herausgegeben von VDI-Gesellschaft Verfahrenstechnik und Chemieingenieurwesen. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-19981-3.
- Voigt, W. (1966) *Lehrbuch der Kristallphysik*. New York, NY: Johnson.
- Volkwein, S. (2012) „Proper Orthogonal Decomposition: Theory and Reduced-Order Modelling“. University of Konstanz, Lecture Notes.
- Volkwein, S. und Hepberger, A. (2008) „Impedance Identification by POD Model Reduction Techniques (Impedanz-Identifikation mittels POD Modellreduktion)“, *At-Automatisierungstechnik*, 56(8/2008), S. 437–446. doi: 10.1524/auto.2008.0724.
- Walker, N.; Fröhlich, B. und Eberhard, P. (2018) „Model Order Reduction for Parameter Dependent Substructured Systems using Krylov Subspaces“, *IFAC-PapersOnLine*, 51(2), S. 553–558. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.03.093.
- Wang, Z.; McBee, B. und Iliescu, T. (2016) „Approximate partitioned method of snapshots for POD“, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 307, S. 374–384. doi: 10.1016/j.cam.2015.11.023.
- Woschke, E.; Strackeljan, J. und Daniel, C. (2009) „Einbindung thermischer Zustandsvariablen in Mehrkörpersysteme“, in *SIRM 2009 - 8th International Conference on Vibrations in Rotating Machines*. Wien.
- Ye, Z.; Vasilyev, D.; Zhu, Z. und Phillips, J. R. (2008) „Sparse implicit projection (SIP) for reduction of general many-terminal networks“, in *Proceedings of the 2008 IEEE/ACM International conference on Computer-aided design*. San Jose, CA, S. 736–743. doi: 10.1109/ICCAD.2008.4681658.
- Yousefi, A.; Lienemann, J.; Lohmann, B. und Korvink, J. G. (2004) „Nonlinear Heat Transfer Modelling and Reduction“, in *Proceedings of the 12th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Kusadasi.
- Yuan, C. D.; Jadhav, O. S.; Rudnyi, E. B.; Hohlfeld, D. und Bechtold, T. (2018) „Parametric model order reduction of a thermoelectric generator for electrically active implants“, in *19th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE)*. IEEE, S. 1–6. doi: 10.1109/EuroSimE.2018.8369946.
- Zhu, J.; Ni, J. und Shih, A. J. (2008) „Robust Machine Tool Thermal Error Modeling Through Thermal Mode Concept“, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 130(6). doi: 10.1115/1.2976148.

# Verzeichnis wissenschaftlicher Publikationen

## Originalpublikationen<sup>1</sup>

- 1 Beisitzer, S.; Scheffler, M. und Beitelschmidt, M. (2014) „Assessment of the static and fatigue strength of a precession driven dynamo under thermomechanical loads“, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 14, S. 229-230. doi: 10.1002/pamm.201410102.
- 2\* Rother, S. und Beitelschmidt, M. (2017) „Strength Assessment of a Precession Driven Dynamo“, *Technische Mechanik*, 37(2–5), S. 120–128. doi: 10.24352/UB.OVGU-2017-089.
- 3\* Rother, S. und Beitelschmidt, M. (2017) „Model order reduction for thermomechanical problems including radiation“, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 17, S. 547-548. doi: 10.1002/pamm.201710243.
- 4\* Rother, S. und Beitelschmidt, M. (2018) „Load Snapshot Decomposition to Consider Heat Radiation in Thermal Model Order Reduction“, *IFAC-PapersOnLine*, 51(2), S. 667–672. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.03.113.

## Tagungsbeiträge und Vorträge

- 1 Rother, S. und Beitelschmidt, M. (2018) „Thermal Model Order Reduction Using Load Vector Snapshots to Consider Heat Radiation“, *IUTAM Symposium on Model Order Reduction of Coupled Systems (MORCOS)*, Stuttgart, 22.05.-25.05.2018.
- 2 Rother, S. und Beitelschmidt, M. (2018) „Load Snapshot Decomposition to Consider Heat Radiation in Thermal Model Order Reduction“, *9th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, Wien, 21.02.-23.02.2018.
- 3 Rother, S. (2017) „Reduktion thermischer FE-Modelle“, *27. AUC-Workshop*, Dresden, 04.05.-05.05.2017.
- 4 Rother, S. und Beitelschmidt, M. (2017) „Model order reduction for thermomechanical problems including radiation“, *88th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics*, Weimar, 06.03.-10.03.2017.
- 5 Beisitzer, S. und Beitelschmidt, M. (2017) „Betriebsfeste Auslegung eines Präzessionsdynamos“, *12th International Conference on Vibration in Rotating Machines*, Graz, 15.02.-17.02.2017.
- 6 Beisitzer, S.; Scheffler, M. und Beitelschmidt, M. (2014) „Rechnerischer Festigkeitsnachweis eines Präzessionsdynamos nach FKM-Richtlinie in ANSYS“, *SAXSIM Saxon Simulation Meeting*, Chemnitz, 01.04.2014.

<sup>1</sup> Teile der vorliegenden Arbeit wurden bereits in den mit (\*) markierten Originalpublikationen veröffentlicht.

- 7 Beisitzer, S.; Scheffler, M. und Beitelschmidt, M. (2014) „Assessment of the static and fatigue strength of a precession driven dynamo under thermomechanical loads“, *85th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics*, Erlangen, 10.03.-14.03.2014.
- 8 Beisitzer, S. (2012) „Fallstudien zur thermischen Simulation von bewegten, profilschienggeführten Baugruppen“, *ANSYS CONFERENCE & 30. CADFEM USERS' MEETING*, Kassel, 24.10.-26.10.2012.



# Abbildungsverzeichnis

<b>Abbildung 1.1</b> Aufbau der geplanten Versuchsanlage.....	2
<b>Abbildung 1.2</b> Schnittdarstellung des Rotationsbehälters. ....	4
<b>Abbildung 1.3</b> Schnittdarstellung des Rotationsbehälters mit Heizflächenbelegung (rot). ....	6
<b>Abbildung 1.4</b> Bauteile zur Auswertung der Wärmestromanteile. ....	7
<b>Abbildung 1.5</b> Aufteilung der Wärmeströme für ausgewählte Baugruppen des Rotationsbehälters. ....	8
<b>Abbildung 1.6</b> Ablauf der Modellordnungsreduktion.....	10
<b>Abbildung 2.1</b> Projektion der Fläche $A_j$ auf eine Einheitshalbkugel um die Fläche $A_i$ zur Bestimmung der Sichtfaktoren.....	24
<b>Abbildung 2.2</b> Bestimmung der gesamten von der Fläche $dA_i$ abgestrahlten Leistung anhand einer Einheitshalbkugel. ....	25
<b>Abbildung 2.3</b> Zerlegung eines Viereckelementes zur Berechnung der Elementtemperatur. ....	28
<b>Abbildung 2.4</b> Finite-Elemente-Modell des vereinfachten Rotationsbehälters. ....	32
<b>Abbildung 2.5</b> Lasten am Sechzehntelmodell des Rotationsbehälters.....	33
<b>Abbildung 2.6</b> Finite-Elemente-Modell des Rotationsbehälters. ....	35
<b>Abbildung 2.7</b> Temperaturverteilung nach einer Simulationszeit von 10.000 s dargestellt für die Stahlbauteile des Rotationsbehälters. ....	35
<b>Abbildung 3.1</b> Reduktion der Systemdimension durch orthogonale Projektion.....	39
<b>Abbildung 3.2</b> Positionen für die Spannungsauswertung. ....	47
<b>Abbildung 3.3</b> Temperaturverteilung und Finite-Elemente-Netz (Elementkantenlänge 12,5 mm) des Beispielmodells für die modale Reduktion. ....	49
<b>Abbildung 3.4</b> Maximaler Fehler des reduzierten Modells in Abhängigkeit von der Anzahl berücksichtigter Eigenformen und dem Freiheitsgrad (FHG) des Modells. ....	50
<b>Abbildung 3.5</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension $n = 30$ .....	57
<b>Abbildung 3.6</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension $n = 60$ .....	57
<b>Abbildung 3.7</b> Lage der Entwicklungsstellen in den unterschiedlichen Iterationsschritten $l$ für das reduzierte Modell der Dimension $n = 30$ . ....	58
<b>Abbildung 3.8</b> Abfall der Singulärwerte der Snapshotmatrix mit der programmspezifischen Rechengenauigkeit (---) sowie deren Wurzel (···).....	65
<b>Abbildung 3.9</b> Vergleich der maximalen Fehler des reduzierten Modells im Vergleich zum Ausgangsmodell bei variierender Reduktionsdimension.....	66
<b>Abbildung 3.10</b> Zufallsdatensatz für die Parametervariation in der Erwärmungssimulation ergänzt um den Standardlastfall aus Tabelle 2.7 (großer Kreis in grün).....	68
<b>Abbildung 3.11</b> Maximum, Minimum und 0,9-Quantil des maximalen Fehlers für die einzelnen Parametersätze in Abhängigkeit von der Iterationsanzahl. ....	69
<b>Abbildung 4.1</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell bei einer reduzierten Dimension $n = 60$ .....	78

<b>Abbildung 4.2</b> Fehler des mittels SVD MOR auf $eR = 10$ Eingänge und anschließend mit dem Block-Krylov-Verfahren reduzierten Modells .....	82
<b>Abbildung 4.3</b> Abfall der normierten Singulärwerte entsprechend (4.4).....	83
<b>Abbildung 4.4</b> Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad $n = 200$ für die untersuchten Parametersätze. ....	84
<b>Abbildung 4.5</b> Abfall der normierten Singulärwerte der Snapshotmatrix im ersten Iterationsschritt.....	87
<b>Abbildung 4.6</b> Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad $n = 200$ im ersten Iterationsschritt .....	88
<b>Abbildung 4.7</b> Maximaler Fehler des Block-Krylov-Verfahrens und des rationalen Krylov-Verfahrens für die 101 Parametersätze. ....	89
<b>Abbildung 4.8</b> Maximaler Fehler der unterschiedlichen Modelle aus Tabelle 4.4 für den Emissionsgrad $\varepsilon = 0,5$ . ....	91
<b>Abbildung 4.9</b> Maximaler Fehler der unterschiedlichen Modelle nach Tabelle 4.4 für den Emissionsgrad $\varepsilon = 1$ . ....	91
<b>Abbildung 4.10</b> Temperaturabweichung des Modells, welches Elemente mit linearen Ansatzfunktionen nutzt, im Vergleich zur Referenzlösung .....	95
<b>Abbildung 4.11</b> Temperaturabweichung des reduzierten Modells (Modell 5) für den Emissionsgrad $\varepsilon = 1$ .....	97
<b>Abbildung 5.1</b> Maximaler Fehler im Vergleich zum Ausgangssystem des Modells 1 (1 Trainingssimulation) nach Tabelle 4.4 für die Varianten entsprechend Tabelle 5.2. ....	111
<b>Abbildung 5.2</b> Maximaler Fehler im Vergleich zum Ausgangssystem des Modells 3 (2 Trainingssimulationen) nach Tabelle 4.4 für die Varianten entsprechend Tabelle 5.2.....	111
<b>Abbildung 5.3</b> Maximaler Fehler im Vergleich zum Ausgangssystem des Modells 5 (3 Trainingssimulationen) nach Tabelle 4.4 für die Varianten entsprechend Tabelle 5.2.....	112
<b>Abbildung 5.4</b> Rechenzeitvorteil bei Anwendung der DEIM.....	119
<b>Abbildung 5.5</b> Rechenzeitvorteil bei Kombination der DEIM und der POD für die Wärmestrahlung .....	120
<b>Abbildung 5.6</b> Rechenzeitvorteil für einen konstanten Emissionsgrad bei Anwendung der DEIM.....	120
<b>Abbildung 5.7</b> Maximaler Fehler über alle Datensätze in Abhängigkeit von der Iterationsanzahl. ....	121
<b>Abbildung A.1</b> Temperaturabweichungen der ANSYS-Lösungen im Vergleich zur in MATLAB erzeugten Referenzlösung, Benennung siehe Tabelle A.4. ....	161
<b>Abbildung A.2</b> Maximale Abweichung zwischen der Berechnung in MATLAB und ANSYS unter Verwendung der Matrixmethode. ....	162
<b>Abbildung A.3</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension $n = 90$ .....	163
<b>Abbildung A.4</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension $n = 120$ .....	163
<b>Abbildung A.5</b> Einfluss der reduzierten Systemdimension $n$ auf den maximalen Fehler des reduzierten Modells.....	164

---

<b>Abbildung A.6</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 1. ....	169
<b>Abbildung A.7</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 2. ....	170
<b>Abbildung A.8</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 3. ....	170
<b>Abbildung A.9</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 4. ....	171
<b>Abbildung A.10</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 5. ....	171
<b>Abbildung A.11</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 6. ....	172
<b>Abbildung A.12</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 7. ....	172
<b>Abbildung A.13</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension $n = 60$ für den Lastfall b).....	173
<b>Abbildung A.14</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension $n = 60$ für den Lastfall c).....	173
<b>Abbildung A.15</b> Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad $n = 120$ im ersten Iterationsschritt für die untersuchten Parametersätze. ....	175
<b>Abbildung A.16</b> Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad $n = 120$ im zweiten Iterationsschritt für die untersuchten Parametersätze. ....	176
<b>Abbildung A.17</b> Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad $n = 120$ im dritten Iterationsschritt für die untersuchten Parametersätze. ....	176
<b>Abbildung A.18</b> Temperaturfeld ohne Wärmestrahlung ( $\varepsilon = 0$ ) zum Zeitpunkt $t = 10.000$ s mit einer Maximaltemperatur von $261,4$ °C.....	177
<b>Abbildung A.19</b> Temperaturfeld für den Emissionsgrad $\varepsilon = 0,5$ zum Zeitpunkt $t = 10.000$ s mit einer Maximaltemperatur von $210,6$ °C.....	177
<b>Abbildung A.20</b> Temperaturfeld für den Emissionsgrad $\varepsilon = 1$ zum Zeitpunkt $t = 10.000$ s mit einer Maximaltemperatur von $186,6$ °C.....	177



## Tabellenverzeichnis

<b>Tabelle 2.1</b> Bilanzgrößen der Massebilanz.....	12
<b>Tabelle 2.2</b> Bilanzgrößen der Impulsbilanz.....	12
<b>Tabelle 2.3</b> Bilanzgrößen der Drehimpulsbilanz.....	13
<b>Tabelle 2.4</b> Bilanzgrößen der Energiebilanz mit $v = vx, t$ .....	14
<b>Tabelle 2.5</b> Bilanzgrößen der Entropiebilanz.....	15
<b>Tabelle 2.6</b> Überblick über die Elementmatrizen [Bathe 2002; ANSYS, Inc. 2016].....	21
<b>Tabelle 2.7</b> Zusammenfassung der Lastparameter.....	34
<b>Tabelle 2.8</b> Anzahl der Wärmestrahlungsflächen $M_i$ für die einzelnen Strahlungsvolumina nach Abbildung 2.5.....	34
<b>Tabelle 3.1</b> Gegenüberstellung der Vergleichsspannung nach von Mises $\sigma_V$ für die unterschiedlichen Berechnungsvarianten.....	48
<b>Tabelle 3.2</b> Vergleich der Rechenzeiten für das Block-Krylov- und das IRKA-Verfahren....	59
<b>Tabelle 3.3</b> Lastparameter für die vier Simulationsszenarien in Anlehnung an Tabelle 2.7...	65
<b>Tabelle 3.4</b> Vergleich der Rechenzeiten für das POD-Verfahren.....	67
<b>Tabelle 3.5</b> Minimal- und Maximalwerte für die Lastparametervariation in Anlehnung an Tabelle 2.7.....	67
<b>Tabelle 4.1</b> Maximaler Fehler im Vergleich zum Ausgangsmodell für die zwei untersuchten Lastfälle in Abhängigkeit von der reduzierten Eingangsanzahl.....	81
<b>Tabelle 4.2</b> Maximaler Fehler des reduzierten Modells in Abhängigkeit von der reduzierten Dimension.....	83
<b>Tabelle 4.3</b> Maximaler Fehler der drei reduzierten Modelle für die einzelnen Iterationsschritte.....	87
<b>Tabelle 4.4</b> Modellvarianten je nach genutzten Emissionsgraden während der Berechnungen in der Offline-Phase.....	90
<b>Tabelle 4.5</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle zum Endzeitpunkt der Simulation $t = 10.000$ s im Vergleich zum Ausgangsmodell.....	92
<b>Tabelle 4.6</b> Fehler zwischen den Modellvarianten mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen am Simulationsende $t = 10.000$ s.....	95
<b>Tabelle 4.7</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle zum Endzeitpunkt der Simulation $t = 10.000$ s im Vergleich zum Ausgangsmodell.....	96
<b>Tabelle 4.8</b> Fehler des reduzierten Systems am Simulationsende $t = 10.000$ s für die Modellvariante 5.....	97
<b>Tabelle 5.1</b> Wärmestrahlungsmatrizen des allgemeinen Lastvektors aus (5.11) für die unterschiedlichen Strahlungsvarianten.....	105
<b>Tabelle 5.2</b> Modellvarianten für die Reduktion der Wärmestrahlungsgleichung.....	109
<b>Tabelle 5.3</b> Vergleich der Freiheitsgrade des Ausgangsmodells und der reduzierten Systeme am Beispiel des Modells 3 aus Tabelle 4.4.....	110
<b>Tabelle 5.4</b> Reduzierte Dimension bei Anwendung der Proper Orthogonal Decomposition auf die Temperaturgleichung.....	113

---

<b>Tabelle 5.5</b> Maximaler Fehler der reduzierten Modelle zum Endzeitpunkt der Simulation .	114
<b>Tabelle 5.6</b> Zeiten für Datenexport und -import sowie die Berechnung des Ausgangsmodells während der Offline-Phase.....	116
<b>Tabelle 5.7</b> Rechenzeiten bei reduzierter Temperaturgleichung und nicht reduzierter Wärmestrahlungsgleichung basierend auf 202 Snapshots für das Modell 3 aus Tabelle 4.4.	117
<b>Tabelle 5.8</b> Rechenzeiten bei reduzierter Temperaturgleichung und mit DEIM bzw. DEIM und POD reduzierter Wärmestrahlungsgleichung.....	117
<b>Tabelle 5.9</b> Rechenzeiten für die Anpassung der Wärmestrahlungsmatrix und die transiente Simulation des Ausgangsmodells und der reduzierten Modelle. ....	122
<b>Tabelle A.1</b> Vorgehen zur Ermittlung der Systemmatrizen und Lastvektoren. ....	156
<b>Tabelle A.2</b> Ermittlung der Matrizen für die Wärmestrahlungsberechnung nach der Lastvektormethode. ....	156
<b>Tabelle A.3</b> Vergleich der Rechenzeiten für die verschiedenen Integratoren in MATLAB.	159
<b>Tabelle A.4</b> Vergleich der Rechenzeiten für die Simulationen in der Software ANSYS. ....	160
<b>Tabelle A.5</b> Parameterdatensätze für die Erwärmungssimulation.....	165

# Symbolverzeichnis

Index	Bedeutung
$(\dots)_e$	Größe auf Elementebene
$(\dots)_R$	Größe im reduzierten System

Ausdruck	Bedeutung
$(\dots)^{\hat{4}}$	komponentenweise Bildung der vierten Potenz
$(\dots)^{\sim}$	Approximation mittels unvollständiger Singulärwertzerlegung
$(\dots)^+$	Moore-Penrose-Inverse
$f\langle \dots \rangle$	funktionale Abhängigkeit; $f$ als Funktion der angegebenen Größen

Formelzeichen	Beschreibung
$a$	Anzahl der Ausgänge
$A$	Fläche
$A_{\text{elem}}$	Elementflächeninhalt
$A_i$	Flächeninhalt der Fläche $i$
$\mathbf{A}$	Systemmatrix
$\mathbf{A}_{\text{AEH}}$	Almansi-Euler-Hamel'scher Verzerrungstensor
$\mathbf{A}_{\text{elem}}$	Matrix der Elementflächeninhalte
$\mathbf{A}_{\text{knoten}}$	Matrix der den Knoten zugeordneten Flächeninhalte
$\mathbf{b}_i$	$i$ -te Spalte der Eingangsmatrix
$\vec{B}$	magnetische Flussdichte
$\mathbf{B}$	Eingangsmatrix
$\mathbf{B}_S$	Eingangsmatrix der Wärmestrahlungslasten
$\mathbf{B}_{\text{syn}}$	Eingangsmatrix synchrone Lasten
$c_V$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$\mathbf{c}$	Koeffizientenvektor der Hyperreduktion
$\mathbf{C}$	Ausgangsmatrix
$\mathbf{D}$	Streckgeschwindigkeitstensor
$\mathbf{D}_{\text{mm}}$	Dämpfungsmatrix
$\mathbf{D}_{\text{tm}}$	Matrix der thermoelastischen Dämpfung
$\mathbf{D}_{\text{tt}}$	Wärmekapazitätsmatrix
$e$	Anzahl der Eingänge
$e\langle \theta \rangle$	Emissionsvermögen
$s_e\langle \theta \rangle$	Emissionsvermögen des schwarzen Körpers
$E$	Gesamtenergie
$\mathbf{E}$	Systemmatrix

---

$\mathbf{E}_V$	Elastizitätsmatrix in Voigt'scher Notation
$E_{ijkl}$	Elastizitätstensor
$f$	freie Helmholtz'sche Energie
$F_{i \rightarrow j}$	Sichtfaktor der Fläche $j$ bezüglich Fläche $i$
$\vec{f}^A$	Oberflächenlast
$\vec{f}^V$	Volumenlast
$\mathbf{f}$	allgemeiner Lastvektor
$\mathbf{f}_m$	Knotenlastvektor
$\mathbf{F}$	Matrix der Sichtfaktoren
$\mathbf{G}_m$	Differentialoperatormatrix Verzerrungen
$\mathbf{G}_t$	Differentialoperatormatrix Temperaturgradienten
$h$	Wärmeübergangskoeffizient
$\vec{h}$	Wärmestromvektor
$\mathbf{H}\langle s \rangle$	Übertragungsfunktionsmatrix
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$K$	Anzahl der Entwicklungsstellen
$\mathbf{K}_{\text{ANSYS}}$	Systemmatrix im Finite-Elemente-Programm ANSYS
$\mathbf{K}_{\text{Ktt}}$	Konvektionsmatrix
$\mathbf{K}_{\text{Ltt}}$	Wärmeleitungsmatrix
$\mathbf{K}_{\text{mm}}$	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_{\text{mt}}$	Thermoelastische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_{\text{Stt}}$	Wärmtransportmatrix Wärmestrahlung
$\mathbf{K}_{\text{tt}}$	Wärmtransportmatrix
$l$	charakteristische Abmessung
$\vec{L}$	Drehimpuls
$m$	Reduzierte Wärmestrahlungsdimension bei Anwendung der DEIM
$m$	Masse (nur Kapitel 2.1.1)
$\bar{m}$	Reduzierte Dimension bei Anwendung der POD auf die Wärmestrahlung
$M$	Anzahl der Wärmestrahlungselemente
$\mathbf{M}_i^{s_k}$	$i$ -tes Moment der Übertragungsfunktion des nicht reduzierten Systems zur Entwicklungsstelle $s_k$
$\hat{\mathbf{M}}_i^{s_k}$	$i$ -tes Moment der Übertragungsfunktion des reduzierten Systems zur Entwicklungsstelle $s_k$
$\mathbf{M}_{\text{mm}}$	Massenmatrix
$n$	Dimension des reduzierten Zustandsvektors
$N$	Dimension des Ausgangszustandsvektors
$\vec{n}$	Normalenvektor
$\mathbf{N}_m$	Matrix der Formfunktionen für das Verschiebungsfeld
$\mathbf{N}_t$	Matrix der Formfunktionen für das Temperaturfeld
$o$	Ordnung der Reihenentwicklung
$\mathbf{o}$	Vektor der Entwicklungsordnungen
$\vec{p}$	Impuls

---



---

$\mathbf{p}$	Vektor der diskreten Punkte DEIM
$\mathbf{P}$	Zuordnungsmatrix DEIM
$\dot{q}_i$	spezifische Heizleistung der Heizfoliengruppe $i$
$\dot{q}_{ab}$	spezifische abgegebene Wärmeleistung
$\dot{Q}$	Wärmeleistung
$\dot{Q}_{ab}$	abgegebene Wärmeleistung
$\dot{Q}_A$	absorbierte Wärmeleistung
$\dot{Q}_{ein}$	einfallende Wärmeleistung
$\dot{Q}_{em}$	emittierte Wärmeleistung
$\dot{Q}_{i \rightarrow j}$	von Fläche $i$ auf Fläche $j$ abgestrahlte Wärmeleistung
$\dot{Q}_R$	reflektierte Wärmeleistung
$\dot{Q}_T$	transmittierte Wärmeleistung
$\dot{Q}_u$	von der Umgebung durch Strahlung zugeführte Wärmeleistung
$\dot{\mathbf{q}}$	Vektor der spezifischen Elementwärmestrahlungsleistung
$r_{(ij)}$	Abstand der Flächen $i$ und $j$
$r^A$	Wärmestrom senkrecht zur Oberfläche
$r^V$	volumenspezifische Wärmeleistung
$R_m$	magnetische Reynoldszahl
$\mathbf{r}_{ANSYS}$	Knotenwärmestromvektor in ANSYS
$\mathbf{r}_t$	Knotenwärmestromvektor
$\mathbf{r}_{tS}$	Knotenwärmestromvektor Strahlung
$\mathbf{R}_1$	Wärmestrahlungsmatrix DEIM
$\mathbf{R}_2$	Wärmestrahlungsmatrix DEIM
$s$	spezifische Entropie
$S_k$	Entwicklungsstelle der Übertragungsfunktionsmatrix
$S$	Entropie
$\mathbf{s}$	Vektor der Entwicklungsstellen
$\mathbf{S}_1$	Wärmestrahlungsmatrix
$\mathbf{S}_2$	Wärmestrahlungsmatrix
$\mathbf{S}_3$	Wärmestrahlungsmatrix
$\mathbf{S}_4$	Wärmestrahlungsmatrix
$t$	Zeit
$t_0$	Anfangszeit
$\vec{t}$	Spannungsvektor
$\mathbf{t}_k$	$k$ -ter Vektor der tangentialen Richtungen
$\mathbf{T}_1$	Zuordnungsmatrix zwischen Knoten- und Elementtemperaturen
$\mathbf{T}_2$	Zuordnungsmatrix zwischen Element- und Knotenwärmeströmen
$u$	spezifische innere Energie
$\vec{u}$	Verschiebungsvektor
$\vec{u}_0$	Vektor der Anfangsverschiebungen
$\mathbf{u}$	Vektor der Knotenverschiebungen

---

---

$\mathbf{U}_L$	Matrix der linken Singulärvektoren
$\mathbf{U}_R$	Matrix der rechten Singulärvektoren
$v$	charakteristische Geschwindigkeit
$V$	Volumen
$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$\vec{v}_0$	Vektor der Anfangsgeschwindigkeiten
$\mathbf{v}_i$	$i$ -te Spalte der Projektionsmatrix
$\mathbf{V}$	Projektionsmatrix
$\mathbf{V}_{HR}$	Projektionsmatrix Hyperreduktion
$\mathbf{W}$	Projektionsmatrix
$\vec{x}$	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
$\vec{X}$	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor
$\bar{\mathbf{x}}$	allgemeiner Lösungsvektor eines linearen Gleichungssystems
$\mathbf{x}_{\text{exp}}$	expandierter Zustandsvektor
$\mathbf{y}$	Ausgangsvektor
$\mathbf{Y}$	Snapshotmatrix
$\mathbf{Y}\langle s \rangle$	Ausgangsvektor im Laplace-Bereich
$\mathbf{z}$	Eingangsvektor
$\mathbf{Z}\langle s \rangle$	Eingangsvektor im Laplace-Bereich

---

$\alpha_S$	Absorptionsgrad
$\alpha_V$	Vektor der Wärmeausdehnungskoeffizienten in Voigt'scher Notation
$\alpha$	Matrix der Wärmeausdehnungskoeffizienten
$\beta$	Steifheit der Differentialgleichung
$\gamma$	Tensorstufe
${}^\gamma \Gamma$	Bilanzgröße als Tensor der Stufe $\gamma$
$\delta$	Dämpfungskonstante
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol
$\varepsilon$	Emissionsgrad
$\varepsilon_R$	Reduktionsfehler
$\varepsilon_V$	Verzerrungsvektor in Voigt'scher Notation
$\varepsilon$	Verzerrungstensor
$\varepsilon_{\text{elem}}$	Matrix der Elementemissionsgrade
$\varepsilon_{\text{knoten}}$	Matrix der Knotenemissionsgrade
$\varepsilon_{jki}$	Permutationssymbol
$\zeta$	Snapshotanzahl
$\eta$	Präzessionsrate
$\theta$	Temperatur
$\theta_0$	Referenztemperatur des spannungsfreien Zustands
$\theta_\infty$	Umgebungstemperatur
$\theta_{\text{Lager}}$	Lagertemperatur

---

---

$\theta_{\text{start}}$	Anfangstemperatur
$\boldsymbol{\theta}$	Vektor der Knotentemperaturen
$\boldsymbol{\theta}_{\text{elem}}$	Vektor der Elementtemperaturen
$\kappa$	Elektrische Leitfähigkeit
$\lambda_i$	$i$ -ter Eigenwert
$\boldsymbol{\lambda}$	Matrix der Wärmeleitfähigkeiten
$\boldsymbol{\Lambda}$	Spektralmatrix
$\mu_0$	Permeabilitätskonstante des Vakuums
$\gamma \boldsymbol{\Xi}$	Quellterm der Bilanzgröße als Tensor der Stufe $\gamma$
$\gamma \boldsymbol{\Pi}$	Fluss über die Oberfläche als Tensor der Stufe $\gamma$
$\rho$	Dichte
$\rho_S$	Reflektionsgrad
$\sigma$	Stefan-Boltzmann-Konstante
$\sigma_i$	$i$ -ter Singulärwert
$\sigma_V$	Vergleichsspannung nach von Mises
$\boldsymbol{\sigma}_V$	Spannungsvektor in Voigt'scher Notation
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy'scher Spannungstensor
$\boldsymbol{\Sigma}$	Matrix der Singulärwerte
$\tau_S$	Transmissionsgrad
$\varphi$	Strahlungswinkel
$\boldsymbol{\phi}_i$	$i$ -ter Eigenvektor
$\boldsymbol{\Phi}$	Modalmatrix
$\psi$	Raumwinkel
$\boldsymbol{\Psi}$	erster Krylov-Basisvektor
$\gamma \boldsymbol{\Psi}$	massebezogene Dichteverteilung der Bilanzgröße
$\omega$	Eigenkreisfrequenz
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeitsvektor
$\boldsymbol{\Omega}$	Matrix im Rahmen der Krylov-Reduktion

---



# Abkürzungsverzeichnis

<b>Abkürzung</b>	<b>Bedeutung</b>
KSM	Krylov Subspace Method
POD	Proper Orthogonal Decomposition
DEIM	Discrete Empirical Interpolation Method
EIM	Empirical Interpolation Method
UDEIM	Unassembled Discrete Empirical Interpolation Method
SVDMOR	Singular-Value-Decomposition-Model-Order-Reduction
ESVDMOR	Extended Singular-Value-Decomposition-Model-Order-Reduction
DRESHDYN	Dresden Sodium Facility for Dynamo and Thermohydraulic Studies
FEM	Finite-Elemente-Methode
RB	Reduced Bases
NASA	National Aeronautics and Space Administration
CN	Crank-Nicolson
EI	Euler implizit
PCG	Preconditioned Conjugate Gradient
DAE	Differential-Algebraic system of Equations
IRKA	Iterativer rationaler Krylov-Algorithmus
SVD	Singulärwertzerlegung (engl. Singular Value Decomposition)
EWP	Eigenwertproblem
SIP	Sparse Implicit Projection
MIMO	Multiple Input Multiple Output
SISO	Single Input Single Output
PACT	Pole Analysis via Congruence Transformations
TICER	Time Constant Equilibration Reduction
AMOR	Aggregating based Model Order Reduction
LRADI	Low Rank Alternating Direction Implicit
BPI	Best-Points-Interpolation
RID	Reduced Integration Domain
ECSW	Energy-Conserving Sampling and Weighting



# Anhang

## Anhang A Berechnungsprogramm Temperaturfeldberechnung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Berechnungsprogramm zur Ermittlung der Temperaturfelder unter Berücksichtigung der Wärmestrahlung basierend auf der Finite-Elemente-Methode in MATLAB implementiert, welches nachfolgend kurz erläutert wird. Als Präprozessor für die Vernetzung sowie zur Bestimmung der Systemmatrizen und der einzelnen Lastvektoren dient die kommerzielle Finite-Elemente-Software ANSYS. Deshalb müssen im Vorfeld der Analyse die relevanten Systeminformationen aus ANSYS extrahiert werden. Im Anschluss daran erfolgt die Validierung anhand ausgewählter Beispielsimulationen.

### A.1 Extraktion der Matrizen und Vektoren aus ANSYS

Unabhängig von der verwendeten Methode zur Beschreibung der Wärmestrahlung zwischen Bauteiloberflächen lassen sich die Systemmatrizen sowie die weiteren Lastvektoren durch geeignete Analysen in ANSYS generieren und sich anschließend in MATLAB einlesen (Tabelle A.1), wobei der Index  $t$  zur Kennzeichnung des thermischen Systems aus Gründen der Übersichtlichkeit hier und im Folgenden weggelassen wird. Um ein Höchstmaß an Flexibilität bei den Berechnungen zu gewährleisten, kommen Einheitslasten oder zumindest feste Bezugswerte zum Einsatz, sodass im Berechnungsprogramm später eine problemlose Anpassung an die konkrete Lastsituation möglich ist. Größen, die im Nachgang unabhängig voneinander adaptierbar sein sollen, müssen hierbei separat betrachtet werden. Dies betrifft für den Rotationsbehälter beispielsweise die drei frei wählbaren Heizleistungen in Tabelle 2.7, gilt aber ebenso bei der Definition mehrerer Umgebungstemperaturen oder einer individuellen Modifizierung der Wärmeübergangskoeffizienten für einzelne Oberflächenbereiche. Darüber hinaus müssen noch die Matrizen zur Beschreibung der Wärmestrahlung bereitgestellt werden, was an dieser Stelle getrennt für die Lastvektormethode und die Matrixmethode nach Kapitel 2.3.5 bzw. 2.3.6 erfolgt.

Bei der Lastvektormethode werden neben der Matrix der Sichtfaktoren  $\mathbf{F}$ , die Zuordnungsmatrizen  $\mathbf{T}_1$  und  $\mathbf{T}_2$  in (2.71) bzw. (2.73) sowie die Flächeninhalte der Oberflächenelemente benötigt (Tabelle A.2). Eine besondere Herausforderung stellen dabei die veränderlichen Elementwärmeströme dar, sodass die Bestimmung der Lastvektoren nicht im assemblierten System erfolgen kann, sondern auf Elementebene durchzuführen ist. Die geometrische Ermittlung der Sichtfaktoren berücksichtigt die Achsensymmetrie nicht, weshalb diese im Nachgang eingearbeitet werden muss. Dies geschieht durch Partitionierung der Matrix der Sichtfaktoren

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

wobei entsprechend der Symmetrie zueinander korrespondierende Elemente an der gleichen Stelle in den Teilmatrizen positioniert sind. Die Matrix der Sichtfaktoren für das symmetrische System  $\mathbf{F}_{\text{symm}}$  ergibt sich dann zu

$$\mathbf{F}_{\text{symm}} = \mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12}. \quad (\text{A.2})$$

**Tabelle A.1** Vorgehen zur Ermittlung der Systemmatrizen und Lastvektoren.

Matrix/Vektor	Analyse	Extraktion	Anpassung
Wärmeleitfähigkeitsmatrix $\mathbf{K}_L$ Wärmekapazitätsmatrix $\mathbf{D}$	Harmonische Analyse mit Anregungsfrequenz $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$	Systemmatrix $\mathbf{K}_{\text{ANSYS}} = \mathbf{K}_L + i\omega\mathbf{D}$	
Konvektionsmatrix $\mathbf{K}_K$ Konvektionslastvektor $\mathbf{r}_K$	Statische Analyse mit Referenzwärmübergangskoeffizient $h_{\text{ref}}$ und Referenzumgebungstemperatur $\theta_{\infty\text{ref}}$	Systemmatrix $\mathbf{K}_{\text{ANSYS}} = \mathbf{K}_{\text{Kref}} + \mathbf{K}_L$ Lastvektor $\mathbf{r}_{\text{ANSYS}} = \mathbf{r}_{\text{Kref}}$	Wärmeübergangskoeffizient $h$ Umgebungstemperatur $\theta_{\infty}$ $\mathbf{K}_K = \frac{h}{h_{\text{ref}}} \mathbf{K}_{\text{Kref}}$ $\mathbf{r}_K = \frac{h\theta_{\infty}}{h_{\text{ref}}\theta_{\infty\text{ref}}} \mathbf{r}_{\text{Kref}}$
Wärmestromlastvektor $\mathbf{r}_W$	Statische Analyse mit Referenzwärmestrom $\dot{q}_{\text{ref}}$	Lastvektor $\mathbf{r}_{\text{ANSYS}} = \mathbf{r}_{\text{Wref}}$	Wärmestrom $\dot{q}$ $\mathbf{r}_W = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_{\text{ref}}} \mathbf{r}_{\text{Wref}}$
Lastvektor Wärmestrahlung auf die Umgebung $\mathbf{r}_{S1}$ Lastvektor Wärmestrahlung von der Umgebung auf den Körper $\mathbf{r}_{S2}$	Statische Analyse mit Referenzwärmestrom $\dot{q}_{\text{ref}} = 1 \text{ W/cm}^3$	Lastvektor $\mathbf{r}_{\text{ANSYS}} = \mathbf{r}_{\text{Sref}}$	Emissionsgrad je Element $\varepsilon_i$ Umgebungstemperatur $\theta_{\infty}$ $r_{S1_i} = \varepsilon_i \sigma r_{\text{Sref}_i} \theta_i^4$ $r_{S2_i} = -\varepsilon_i \sigma r_{\text{Sref}_i} \theta_{\infty}^4$

Das beschriebene Vorgehen lässt sich bei Vorhandensein mehrerer Symmetrieebenen wiederholt hintereinander anwenden. Die Matrix  $\mathbf{F}$  wird hier für jedes Strahlungsvolumen separat berechnet, was den Vorteil bietet, dass eine unterschiedliche Anzahl von Symmetrieebenen Berücksichtigung finden kann. So sind dies für Strahlungsvolumen 1 in Abbildung 2.5 vier und für die restlichen Volumina nur drei Symmetrieebenen, was den Rechenaufwand und den Speicherplatz erheblich verringert.

**Tabelle A.2** Ermittlung der Matrizen für die Wärmestrahlungsberechnung nach der Lastvektormethode.

	Analyse	Extraktion
Elementflächeninhalte $A_i$		Direkte Ausgabe
Zuordnungsmatrix $\mathbf{T}_1$ Matrix der Sichtfaktoren $\mathbf{F}$	Oberflächenvernetzung mit Wärmestrahlungselementen (SURF252) Berechnung der Sichtfaktoren	Elementliste der Wärmestrahlungselemente mit Knotenzuordnung Knotenliste mit Positionen für Teilflächenberechnung in (2.70) Matrix der Sichtfaktoren
Zuordnungsmatrix $\mathbf{T}_2$	Statische Analyse mit Referenzwärmestrom $\dot{q}_{\text{ref}} = 1 \text{ W/cm}^3$	Knotenwärmestrom je Element (aus EMAT-Datei) Elementliste mit Knotenzuordnung



Die Matrixmethode integriert die Wärmestrahlungsanteile direkt in die Systemmatrizen, weshalb im Gegensatz zur Lastvektormethode lediglich die Matrix der Sichtfaktoren zu ermitteln ist. Die Wärmestrahlungsoberflächen werden dazu zunächst mit thermischen Schalenelementen (SHELL131) vernetzt, nach Berechnung der Sichtfaktoren ergibt sich ein Superelement (MATRIX50), in dessen Wärmetransportmatrix die Wärmestrahlungsanteile enthalten sind. Mit dem Ziel den Rechenaufwand zu minimieren, werden die Volumenelemente dabei unterdrückt. Wenn die Temperatur aller beteiligten Knoten einheitlich und der Emissionsgrad  $\varepsilon = 1$  gewählt werden, kann nun aus der Wärmetransportmatrix mit  $S_{1,ij} = \delta_{ij}$  in (2.68) der Temperaturanteil aus (2.83) eliminiert werden, sodass die Matrix der Sichtfaktoren aus (2.68) folgt.

## A.2 Elementtypen und Kontaktformulierung

Es können alle in ANSYS vorhandenen homogenen thermischen Elemente verwendet werden, sofern die in Kapitel 2 beschriebenen Voraussetzungen erfüllt sind, was sich insbesondere auf die Vernachlässigung eines Wärmetransportes durch Stofftransport bezieht. Des Weiteren werden sowohl die Materialparameter als auch die Geometrie als konstant angenommen. Für die Volumenelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen vom Elementtyp SOLID90 (Hexaeder) und SOLID87 (Tetraeder) sind sowohl die Verwendung einer konsistenten als auch einer diagonalisierten Wärmekapazitätsmatrix möglich, wobei die zweite Beschreibung den numerischen Aufwand bei einem gewissen Genauigkeitsverlust reduziert. Außerdem bietet diese Variante den Vorteil, dass die Wärmekapazitätsmatrix nicht singulär werden kann, was bei konsistenter Formulierung infolge Netzsymmetrien möglich ist und damit das Portfolio der verwendbaren Integratoren in MATLAB einschränkt. Alle anderen Elementtypen verwenden grundsätzlich die diagonalisierte Form [ANSYS, Inc. 2016].

Angesichts der geforderten konstanten Geometrie und der daraus resultierenden Unzulässigkeit von Kontaktformulierungen mit veränderlichem Status können lediglich lineare Kontakte zum Einsatz kommen, welche der Verbindung von Oberflächen unterschiedlicher Vernetzung dienen. Für diese in ANSYS als Verbundkontakt bezeichnete Form können als Kontaktformulierung die Penalty-Methode, welche die zugehörigen Flächen durch diskrete Wärmeleitfähigkeiten verbindet, oder die Multi-Point-Constraint-Methode (MPC-Methode) verwendet werden. Letztere führt eine direkte Eliminierung der Freiheitsgrade auf einer Kontaktseite durch, was zu einer Verringerung der Dimension des zu lösenden Gleichungssystems führt [Rust 2011; ANSYS, Inc. 2016]. Der Wärmeübergangskoeffizient ist damit unendlich, was bei stoffschlüssigen Verbindungen erwünscht ist. Aufgrund der Freiheitsgradeliminierung muss allerdings die Bindungsmatrix in die Bestimmung der Zuordnungsmatrizen  $T_1$  und  $T_2$  einbezogen werden. Im Gegensatz dazu bleibt bei der Penalty-Methode die Systemdimension unverändert und die Kontaktformulierung erlaubt die Festlegung endlicher Wärmeübergangskoeffizienten, wie dies im untersuchten Anwendungsfall beispielsweise zwischen dem Stahlmantel und dem Argon im Behälterinneren wünschenswert ist. An Verbindungsstellen, wo ein möglichst großer Wärmeübergangskoeffizient angestrebt wird, können die daraus resultierenden hohen Werte in der Wärmetransportmatrix allerdings zu einer Verschlechterung der Matrixkondition führen.

### A.3 Temperaturreandbedingungen

Die Temperaturreandbedingungen werden erst in MATLAB durch Eliminierung der entsprechenden Freiheitsgrade in das Gleichungssystem eingearbeitet. Gerade bei Berücksichtigung der Wärmestrahlung treten allerdings aufgrund der Verwendung absoluter Temperaturen nur in Sonderfällen Nullrandbedingungen auf, sodass die entsprechenden Lasten auf die restliche Struktur beachtet werden müssen. Dazu wird der Vektor der Knotentemperaturen in (2.44) aufgespalten in die unbekanntenen Knotentemperaturen  $\boldsymbol{\theta}_1$  und die durch die Randbedingungen vorgegebenen Temperaturen  $\boldsymbol{\theta}_2$ , sodass das Gleichungssystem die Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

annimmt [Bathe 2002]. Die erste Gleichung von (A.3) ergibt sich somit nach Überführung der bekannten Größen auf die rechte Seite zu

$$\mathbf{D}_{11}\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \mathbf{K}_{11}\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{D}_{12}\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 - \mathbf{K}_{12}\boldsymbol{\theta}_2. \quad (\text{A.4})$$

Aus der zweiten Gleichung in (A.3) resultieren dann die Lagerreaktionen als Wärmeströme an den Knoten mit Temperaturreandbedingungen.

### A.4 Integratoren

Anhand des vereinfachten Behältermodells aus Kapitel 2.4.1 sollen zunächst die verschiedenen in MATLAB vorhandenen Integratoren miteinander verglichen werden. Das zu untersuchende Differentialgleichungssystem erweist sich dabei als steif entsprechend der Definition für die Steifheit  $\beta$

$$\beta = \frac{\max\langle |\operatorname{Re}(\lambda_j)| \rangle}{\min\langle |\operatorname{Re}(\lambda_j)| \rangle} \quad (\text{A.5})$$

mit  $j = 1 \dots N$  für Werte  $\beta > 1000$  [Bärwolff 2016]. Hierin stellen die  $\lambda_j$  die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}$  im Gleichungssystem

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{r} \quad (\text{A.6})$$

dar, welches aus (2.44) hervorgeht. Im vorliegenden Fall beträgt die Steifheit somit  $\beta = 5,82 \cdot 10^{10}$  und liegt mehrere Größenordnungen über der definierten Grenze. Dies erklärt auch, warum mit dem Integrator ode45 aufgrund extrem kleiner Zeitschrittweiten keine Lösung innerhalb eines vertretbaren Zeitrahmens erzielt wird (Tabelle A.3). Die Toleranzen sind dabei stets identisch gewählt und als Referenz dient eine mit dem Integrator ode15s und um den Faktor 10 verringerten Toleranzen gewonnene Lösung.

Die Integratoren ode15s, ode23s und ode23tb, welche für steife Differentialgleichungssysteme geeignet sind [The MathWorks, Inc. 2014], liefern gute Ergebnisse bei allerdings deutlich unterschiedlichen Rechenzeiten. Darüber hinaus wird noch der implizite Integrator ode15i verwendet. Von den Standardverfahren bieten nur ode15s und ode15i eine hohe Genauigkeit bei gleichzeitig geringen Rechenzeiten.

**Tabelle A.3** Vergleich der Rechenzeiten für die verschiedenen Integratoren in MATLAB.

Solver	Rechenzeit	Maximale Abweichung
ode15s	255 s	$3,3 \cdot 10^{-3}$ K
ode23s	5.714 s	$2,3 \cdot 10^{-3}$ K
ode23t	446 s	3,23 K
ode23tb	675 s	$5,3 \cdot 10^{-3}$ K
ode45	$\gg 50.000$ s	---
ode15i	270 s	$4,8 \cdot 10^{-4}$ K
ode15i + PCG-Solver	524 s	$4,8 \cdot 10^{-4}$ K
ode15i + ANSYS-Solver	114 s	$5,3 \cdot 10^{-4}$ K

Allerdings erfolgt bei beiden Verfahren im Falle der Zeitschrittanpassung eine vollständige LU-Zerlegung einer Matrix, welche sich aus der Wärmetransport- und Wärmekapazitätsmatrix bildet. Für sehr große Systeme, wie das vollständige Modell des Rotationsbehälters, zieht dies einen enormen Arbeitsspeicherbedarf nach sich und ist unter Umständen nicht ausführbar. Eine erste Alternative hierzu bietet ein Verzicht auf die LU-Zerlegung. Stattdessen wird in jedem Zeitschritt das vollständige Gleichungssystem gelöst, was zwar den benötigten Arbeitsspeicher reduziert, jedoch kann nun nicht mehr davon profitiert werden, dass die Matrix im Gleichungssystem bei unveränderter Zeitschrittweite konstant bleibt, sodass die Rechenzeit zum Teil deutlich ansteigt. Im Falle einer singulären Wärmekapazitätsmatrix, wie sie bei Verwendung der konsistenten Formulierung auftreten kann, geht das gewöhnliche Differentialgleichungssystem in ein Differential-algebraisches Gleichungssystem (DAE-System) über, sodass für den ode15s unsymmetrische Gleichungssysteme im Zuge der Zeitschrittintegration gelöst werden müssen, was den Speicherbedarf weiter erhöht. Im Falle des impliziten Integrators ode15i bleibt die Systemmatrix  $L$

$$L = K + \frac{1}{\Delta t} D \quad (\text{A.7})$$

symmetrisch. Mit dem Ziel den benötigten Arbeitsspeicher deutlich zu reduzieren und somit auch sehr große Systeme berechnen zu können, wird im Rahmen des ode15i ein iterativer Solver implementiert. Aufgrund der symmetrischen, positiv definiten Koeffizientenmatrix  $L$  kommt die Methode der konjugierten Gradienten mit symmetrischer Vorkonditionierung (Preconditioned Conjugate Gradient Method – PCG-Method) zum Einsatz. Die Vorkonditionierung erfolgt dabei durch eine unvollständige Cholesky-Zerlegung. Bei unveränderter Genauigkeit ist in etwa eine Verdopplung der Rechenzeit zu beobachten, was einen erheblichen Nachteil darstellt.

Deswegen wird abschließend die Verwendung eines externen Gleichungslösers untersucht. Aufgrund des Ursprungs der Systemmatrizen aus einer Finite-Elemente-Diskretisierung bietet es sich an, hierzu direkt auf ANSYS zurückzugreifen, dessen Lösungsalgorithmen auf die vorzufindende Bandstruktur der Matrizen optimiert sind. Für den hier betrachteten Fall konstanter Systemmatrizen erweist sich der Datentransfer zwischen MATLAB und ANSYS als unproblematisch, weil in jedem Zeitschritt lediglich der neue Lastvektor an ANSYS übergeben

werden muss, welches dann den aktuellen Lösungsvektor zurückliefert. Darüber hinaus liegen die Systemmatrizen aufgrund des gewählten Vorgehens bei der Modellerstellung ohnehin als ANSYS-Dateien vor. Auf diese Weise lassen sich mehrere Vorteile kombinieren, was sich in sinkenden Berechnungszeiten (vgl. Tabelle A.3) bei gleichzeitig verringertem Arbeitsspeicherbedarf ausdrückt. Des Weiteren stehen für die Lösung des Gleichungssystems sämtliche Funktionalitäten der ANSYS-Bibliotheken zur Verfügung. Deshalb kommt in allen Simulationen mit dem großen Rotationsbehältermodell (Kapitel 2.4.2) diese Berechnungsmethodik zum Einsatz.

### A.5 Validierung im Vergleich zu ANSYS

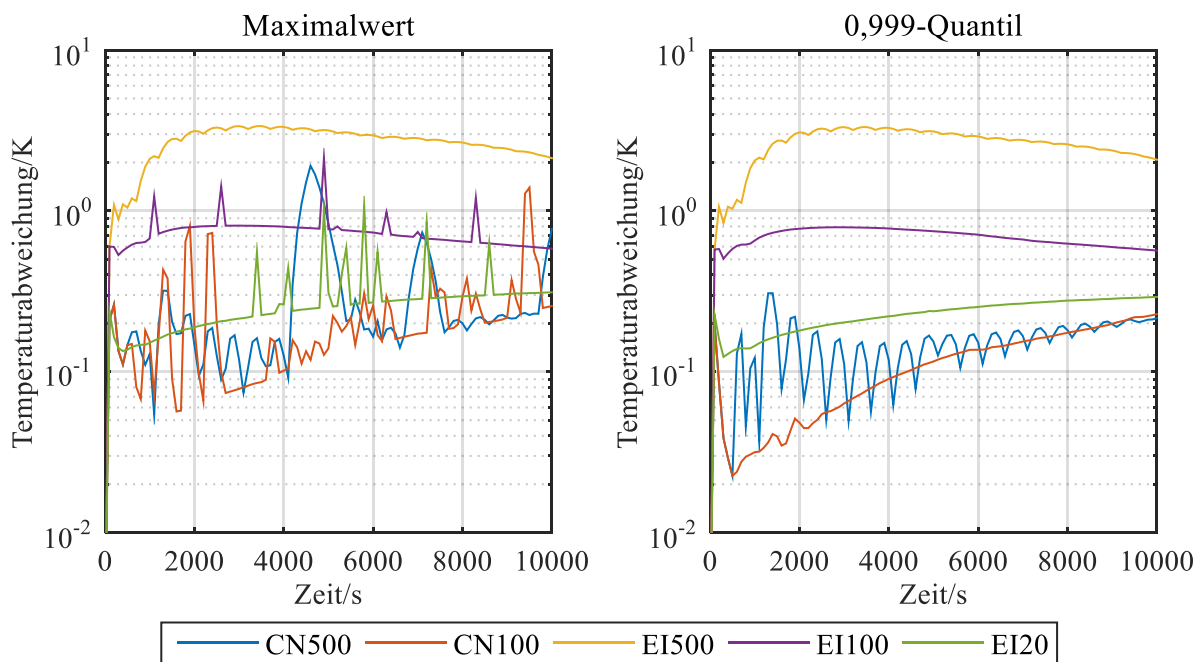
Abschließend soll das implementierte Berechnungsprogramm im Vergleich zur kommerziellen Finite-Elemente-Software ANSYS für das vereinfachte Rotationsbehältermodell nach Kapitel 2.4.1 validiert werden. Hierbei wird zunächst die Lastvektormethode (Kapitel 2.3.5) zur Beschreibung der Wärmestrahlung verwendet. In ANSYS stehen mit dem impliziten Eulerverfahren und dem Crank-Nicolson-Verfahren (Trapezmethode) ein Verfahren 1. Ordnung und eines 2. Ordnung zur Verfügung, welche im Gegensatz zu MATLAB allerdings keine direkte Vorgabe der Integrationstoleranz zulassen, weshalb sich die vorzugebene maximale Zeitschrittweite als wesentliche Einflussgröße zur Genauigkeitssteuerung erweist [Schwarz & Köckler 2009; ANSYS, Inc. 2016]. Tabelle A.4 dokumentiert die Benennung der einzelnen Varianten und die zugehörigen Rechenzeiten.

**Tabelle A.4** Vergleich der Rechenzeiten für die Simulationen in der Software ANSYS.

Benennung	Verfahren	Maximale Zeitschrittweite	Rechenzeit
CN500	Crank-Nicolson	500 s	4,2 h
CN100	Crank-Nicolson	100 s	11,4 h
EI500	Euler implizit	500 s	4,0 h
EI100	Euler implizit	100 s	9,5 h
EI20	Euler implizit	20 s	17,4 h

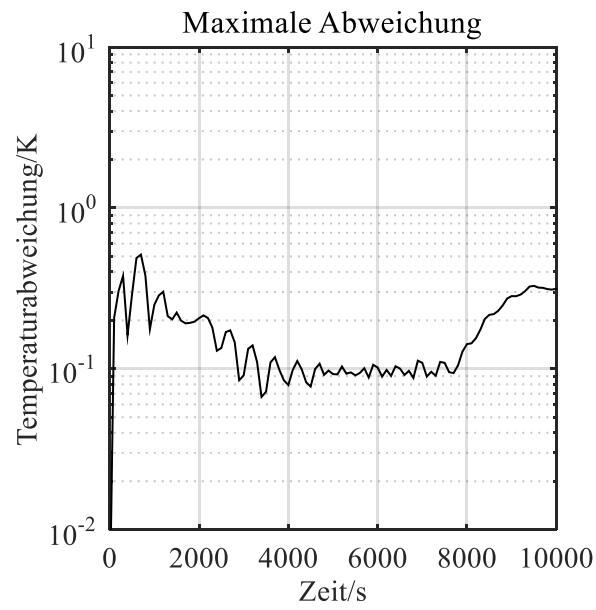
Abbildung A.1 zeigt, dass bei sinkender Zeitschrittweite die in ANSYS ermittelten Lösungen gegen die in MATLAB mit dem Integrator ode15s gewonnene Referenzlösung streben, da sich die Abweichung verringert. Neben der maximalen Abweichung, welche in den Kontaktbereichen zum Teil Unstetigkeiten aufweist, ist auch das 0,999-Quantil der Temperaturdifferenz dargestellt, das heißt, dass 99,9 % der Knoten eine geringere Abweichung als den dargestellten Wert aufweisen, was somit lediglich an 83 Knoten des Modells größere Unterschiede zulässt. Die auftretenden Temperaturdifferenzen sind hinreichend klein, sodass von einer fehlerfreien Implementierung des Berechnungsprogramms ausgegangen werden kann.

Insbesondere bei Verwendung des impliziten Eulerverfahrens in ANSYS muss die zulässige Zeitschrittweite äußerst gering gewählt werden, was mit einem sehr hohen numerischen Aufwand korrespondiert. Generell sind die mit ANSYS erzielten Rechenzeiten mindestens um den Faktor 100 größer als die schnellste Variante nach Tabelle A.3, was im Wesentlichen mit der Einschränkung der zulässigen Nichtlinearität auf die Wärmestrahlung zusammenhängt. Infolgedessen kann beispielsweise die Jakobimatrix in MATLAB explizit angegeben werden, wohingegen in ANSYS allgemeinere Formen der Nichtlinearität zulässig sind.



**Abbildung A.1** Temperaturabweichungen der ANSYS-Lösungen im Vergleich zur in MATLAB erzeugten Referenzlösung, Benennung siehe Tabelle A.4.

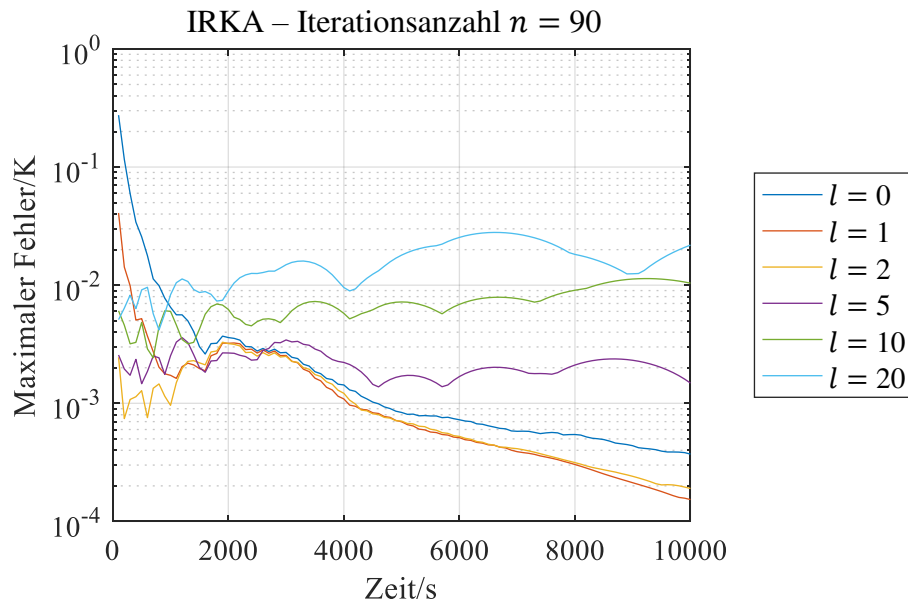
Abschließend erfolgt die Validierung unter Anwendung der Matrixmethode nach Kapitel 2.3.6. In ANSYS wird mit dem Crank-Nicolson-Verfahren und einer maximalen Zeitschrittweite von 500 s eine Rechenzeit von 9,6 h erzielt, was gegenüber der Lastvektormethode mehr als eine Verdopplung darstellt (vgl. Tabelle A.4). Im Gegensatz dazu verringert sich die Integrationszeit in MATLAB sogar geringfügig, da sich die Auswertung der Wärmestrahlung aufgrund der Bestimmung des Terms  $\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_2$  aus (2.82) im Vorfeld der Analyse auf Vektor-Matrix-Multiplikationen beschränkt. In Abbildung A.2 ist die Abweichung gegenüber der Berechnung in MATLAB dargestellt, wobei sich bei einer maximalen Temperaturdifferenz von 0,51 K mit Abbildung A.1 vergleichbare Werte ergeben. Damit wird auch die zweite Berechnungsmethode als validiert bewertet.



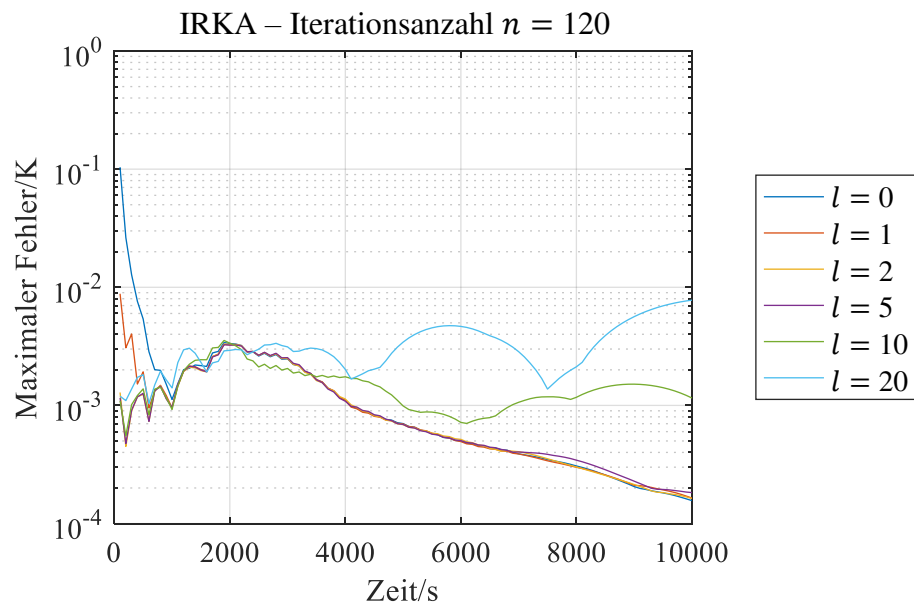
**Abbildung A.2** Maximale Abweichung zwischen der Berechnung in MATLAB und ANSYS unter Verwendung der Matrixmethode.

## Anhang B Einfluss der Iterationsanzahl für IRKA

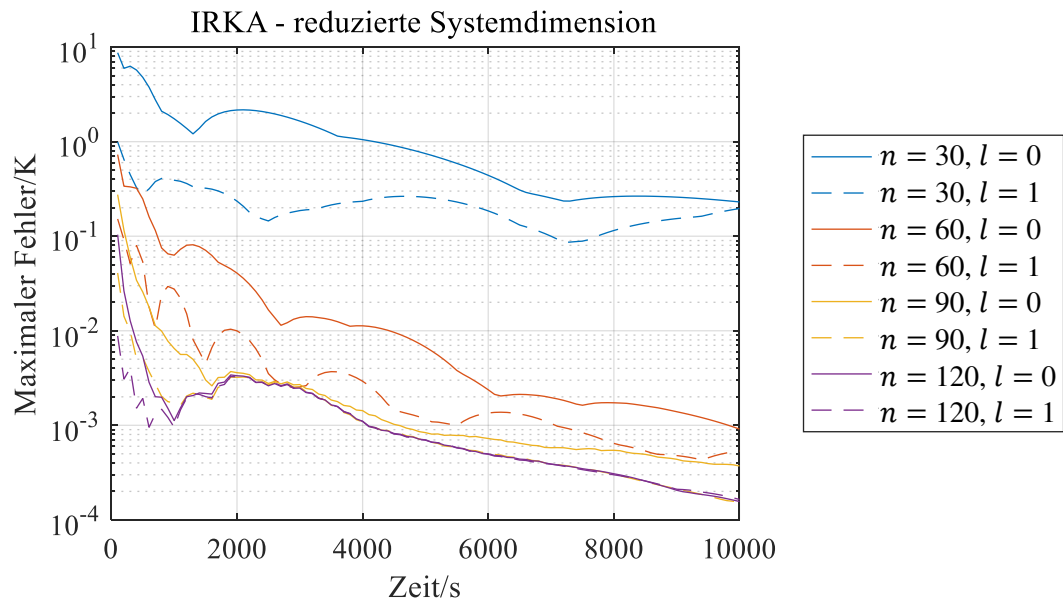
In Kapitel 3.5.3 wird der Einfluss der reduzierten Systemdimension und der Anzahl an Iterationen während des IRKA-Verfahrens auf die Reduktionsgüte untersucht (Abbildung A.3 bis Abbildung A.5). Die Ergebnisse beziehen sich auf das vereinfachte Rotationsbehältermodell (Kapitel 2.4.1) unter Vernachlässigung der Wärmestrahlung.



**Abbildung A.3** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension  $n = 90$  bei Verwendung von  $e = 5$  Eingängen in Abhängigkeit von der Anzahl an IRKA-Iterationen  $l$ .



**Abbildung A.4** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension  $n = 120$  bei Verwendung von  $e = 5$  Eingängen in Abhängigkeit von der Anzahl an IRKA-Iterationen  $l$ .



**Abbildung A.5** Einfluss der reduzierten Systemdimension  $n$  auf den maximalen Fehler des reduzierten Modells während der transienten Simulation im Vergleich zum Ausgangsmodell bei Verwendung von  $e = 5$  Eingängen jeweils für das Block-Krylov-Verfahren ( $l = 0$ ) und die erste IRKA-Iteration ( $l = 1$ ).



## Anhang C Zufallsdatensatz für die Parametervariation

In Kapitel 3.6.4 und 4.4.2 sowie 5.6 wird der Einfluss der Anzahl an Berechnungen während der Offline-Phase der Modellordnungsreduktion für die Proper Orthogonal Decomposition bzw. die Krylov-Unterraummethoden mit vorheriger Eingangsreduktion auf die Reduktionsgüte untersucht. Dazu dienen die nachfolgenden 100 Datensätze in Tabelle A.5, denen der Standardlastfall aus Tabelle 2.7 vorangestellt ist. Die entsprechenden Intervalle sind in Tabelle 3.5 dokumentiert.

**Tabelle A.5** Parameterdatensätze für die Erwärmungssimulation.

Nummer	Emissionsgrad $\varepsilon$	Heizleistung $\dot{q}_1$ in $\text{W}/\text{cm}^3$	Heizleistung $\dot{q}_2$ in $\text{W}/\text{cm}^3$	Heizleistung $\dot{q}_3$ in $\text{W}/\text{cm}^3$
1	0,500	3,000	0,500	2,500
2	0,635	0,774	0,363	2,959
3	0,607	3,267	0,326	0,464
4	0,482	0,101	0,310	2,598
5	0,338	1,510	0,530	0,397
6	0,494	2,418	0,044	0,226
7	0,654	1,138	0,438	1,320
8	0,361	2,023	0,495	0,702
9	0,695	2,502	0,044	1,629
10	0,610	2,793	0,556	2,839
11	0,521	0,007	0,422	1,657
12	0,694	0,918	0,352	0,066
13	0,654	3,347	0,044	1,621
14	0,680	2,785	0,417	2,524
15	0,551	1,426	0,269	2,757
16	0,649	3,105	0,334	2,037
17	0,542	0,687	0,474	1,199
18	0,695	1,193	0,108	1,622
19	0,698	3,598	0,254	1,383
20	0,380	1,871	0,085	0,167
21	0,604	2,292	0,021	0,094
22	0,496	1,058	0,537	2,044
23	0,627	0,950	0,410	2,497
24	0,360	1,901	0,188	0,462
25	0,619	2,032	0,123	2,413
26	0,522	0,275	0,549	1,090
27	0,699	0,220	0,304	0,080
28	0,402	2,818	0,334	1,895
29	0,352	2,512	0,592	1,904

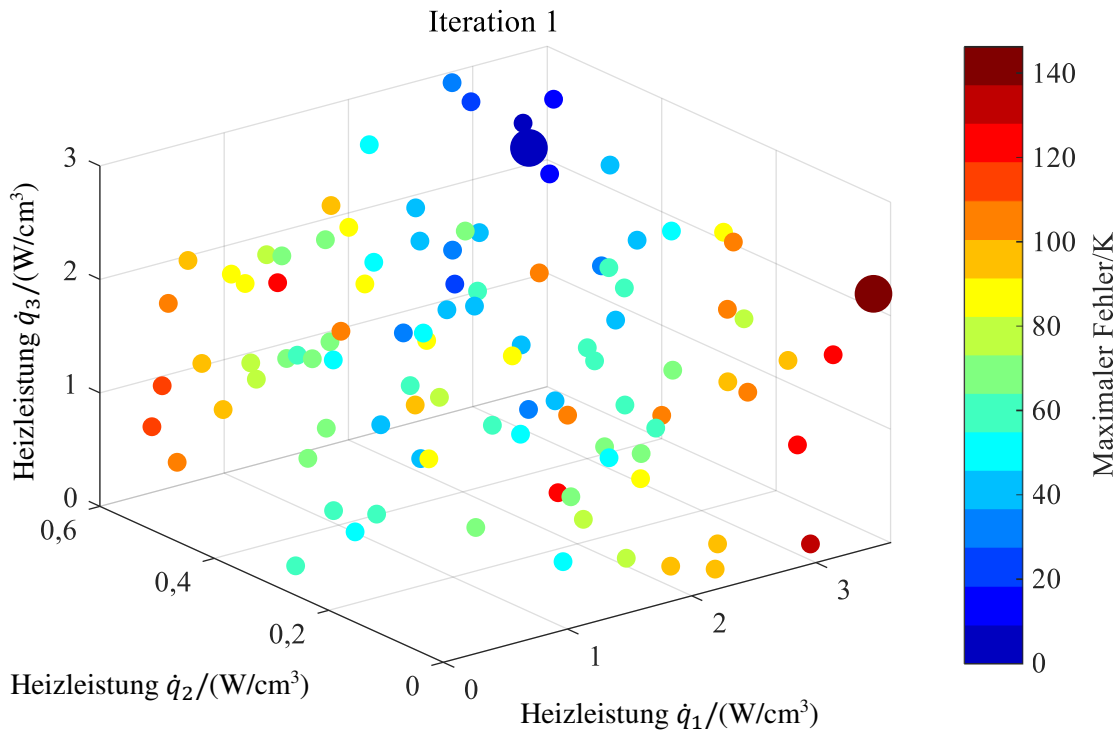
Nummer	Emissionsgrad $\varepsilon$	Heizleistung $\dot{q}_1$ in W/cm <sup>3</sup>	Heizleistung $\dot{q}_2$ in W/cm <sup>3</sup>	Heizleistung $\dot{q}_3$ in W/cm <sup>3</sup>
30	0,613	0,489	0,570	0,306
31	0,618	1,486	0,360	0,526
32	0,634	0,446	0,541	2,162
33	0,318	1,428	0,057	2,215
34	0,598	2,501	0,582	1,637
35	0,699	0,289	0,068	2,087
36	0,530	1,591	0,079	2,000
37	0,361	2,641	0,065	2,773
38	0,516	0,732	0,294	2,437
39	0,552	2,275	0,527	1,019
40	0,548	1,852	0,337	2,463
41	0,607	2,782	0,311	2,846
42	0,653	2,111	0,111	0,959
43	0,671	0,109	0,502	1,971
44	0,350	2,989	0,006	0,146
45	0,672	0,884	0,561	1,869
46	0,636	1,432	0,100	0,230
47	0,655	3,566	0,170	1,217
48	0,407	1,765	0,451	1,344
49	0,551	1,446	0,421	0,696
50	0,667	0,325	0,578	0,648
51	0,355	1,054	0,392	2,618
52	0,684	0,949	0,459	1,368
53	0,488	0,054	0,035	1,688
54	0,317	2,466	0,333	0,000
55	0,508	0,690	0,533	0,796
56	0,464	0,260	0,233	2,297
57	0,472	2,144	0,066	0,058
58	0,457	0,602	0,475	2,065
59	0,689	0,746	0,442	2,341
60	0,596	2,057	0,310	0,689
61	0,570	1,439	0,115	1,610
62	0,598	0,930	0,474	1,311
63	0,424	1,142	0,363	0,132
64	0,625	2,992	0,431	0,307
65	0,426	1,063	0,061	2,971
66	0,675	3,134	0,539	2,589
67	0,437	3,463	0,352	1,972
68	0,353	0,849	0,062	2,301
69	0,479	1,548	0,278	0,090

Nummer	Emissionsgrad $\varepsilon$	Heizleistung $\dot{q}_1$ in W/cm <sup>3</sup>	Heizleistung $\dot{q}_2$ in W/cm <sup>3</sup>	Heizleistung $\dot{q}_3$ in W/cm <sup>3</sup>
70	0,324	1,011	0,409	0,094
71	0,667	2,026	0,568	2,659
72	0,447	0,407	0,315	1,824
73	0,644	2,619	0,196	0,840
74	0,304	1,480	0,183	1,934
75	0,409	2,047	0,153	0,844
76	0,618	2,473	0,253	0,586
77	0,365	2,730	0,531	1,246
78	0,654	2,353	0,013	2,384
79	0,537	2,784	0,301	1,501
80	0,411	3,344	0,235	2,264
81	0,494	2,571	0,155	1,456
82	0,366	1,366	0,288	2,037
83	0,597	0,415	0,425	1,535
84	0,346	1,820	0,377	2,227
85	0,593	2,510	0,198	0,420
86	0,339	2,603	0,593	0,708
87	0,617	0,002	0,048	2,149
88	0,588	2,108	0,577	1,576
89	0,380	0,747	0,075	1,690
90	0,365	2,823	0,596	2,907
91	0,404	0,801	0,409	0,618
92	0,313	1,500	0,522	1,181
93	0,615	3,171	0,494	2,893
94	0,576	3,503	0,007	2,196
95	0,524	2,912	0,012	1,027
96	0,668	2,304	0,478	1,554
97	0,565	1,784	0,096	2,726
98	0,686	2,076	0,132	1,349
99	0,363	2,992	0,116	1,230
100	0,516	2,499	0,486	1,284
101	0,675	1,998	0,187	0,236

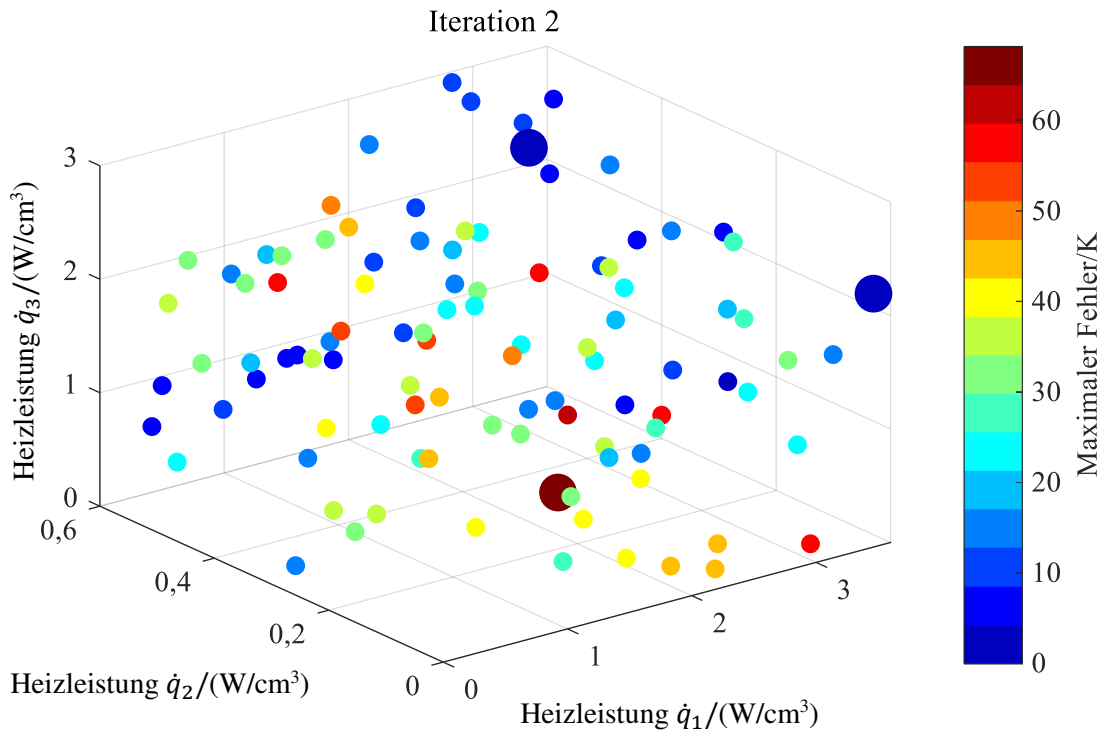


## Anhang D Snapshotanpassung für POD mit Wärmestrahlung

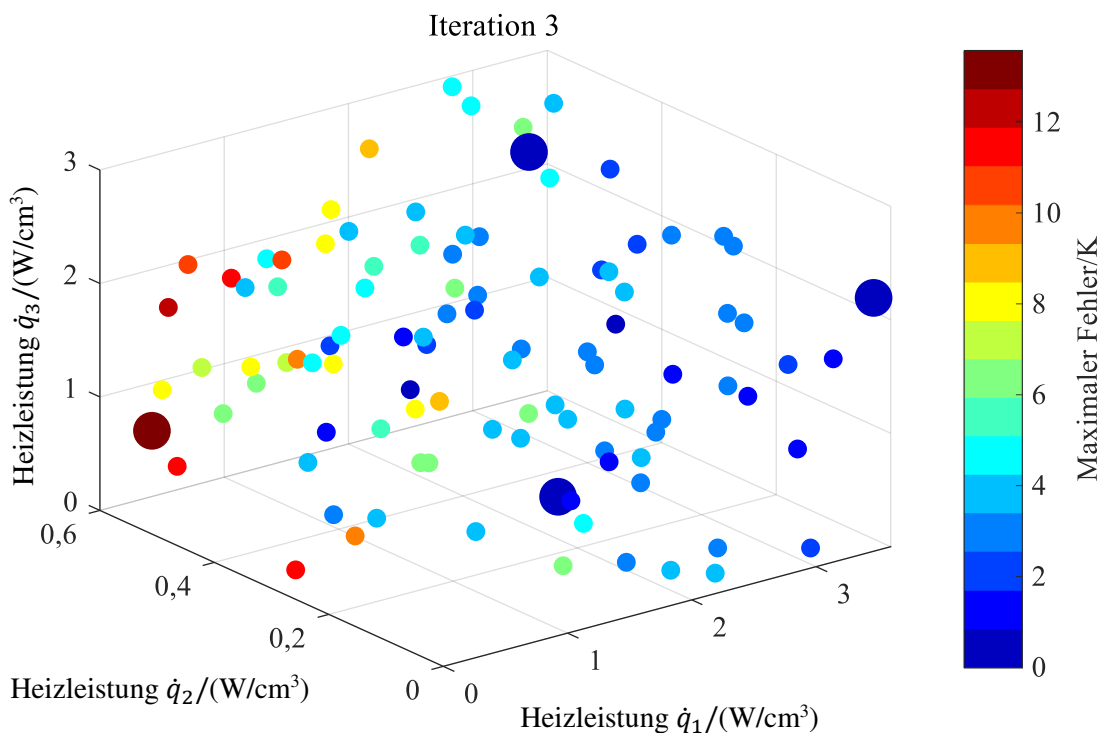
Kapitel 3.6.4 widmet sich anhand des vereinfachten Rotationsbehälters der iterativen Bestimmung der erforderlichen Anzahl an Offline-Simulationen für den Datensatz aus Anhang C. Neben einem Absinken des gesamten Fehlerniveaus mit zunehmender Iterationsanzahl zeigt sich besonders deutlich, wie in unmittelbarer Umgebung der ergänzten Parametersätze die Reduktionsgüte stark zunimmt (Abbildung A.6 bis Abbildung A.12).



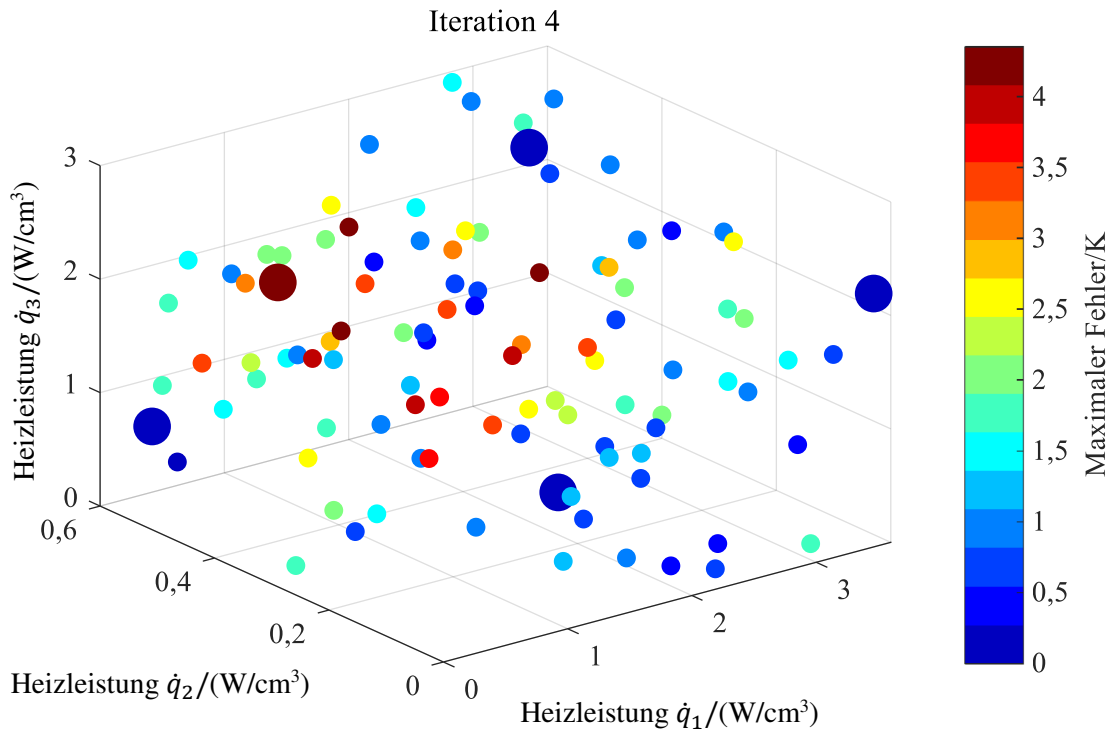
**Abbildung A.6** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 1. Die bereits in den Snapshots berücksichtigte Parameterkombination und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.



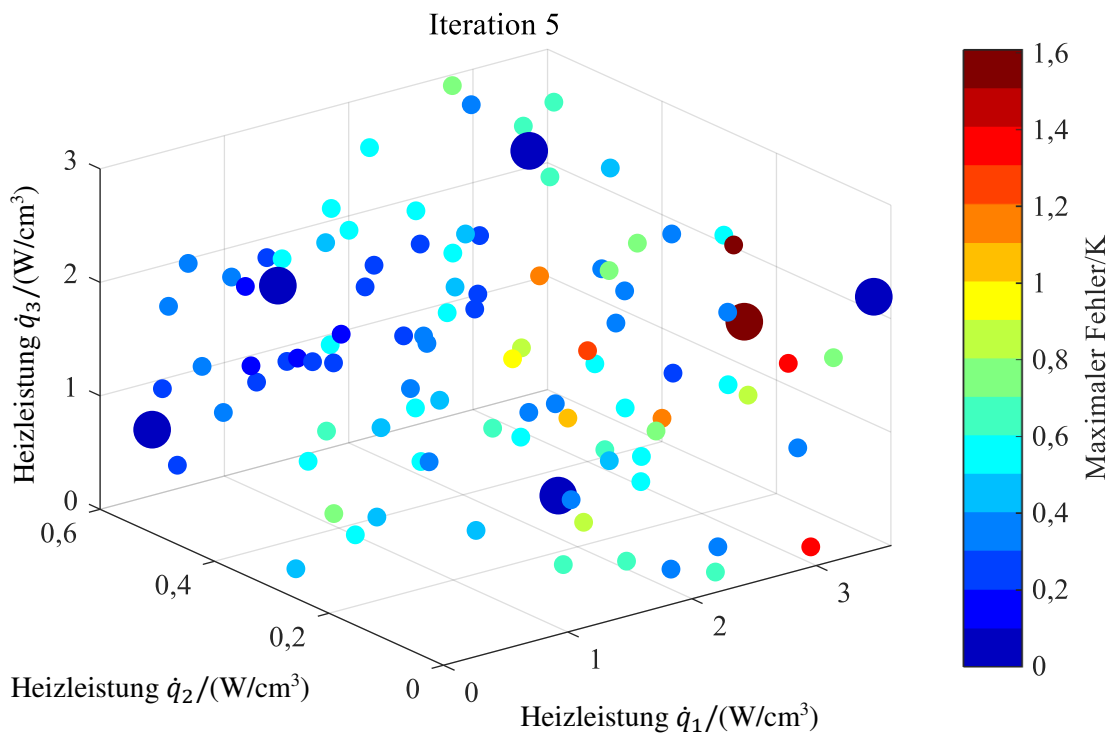
**Abbildung A.7** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 2. Die bereits in den Snapshots berücksichtigten Parameterkombinationen und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.



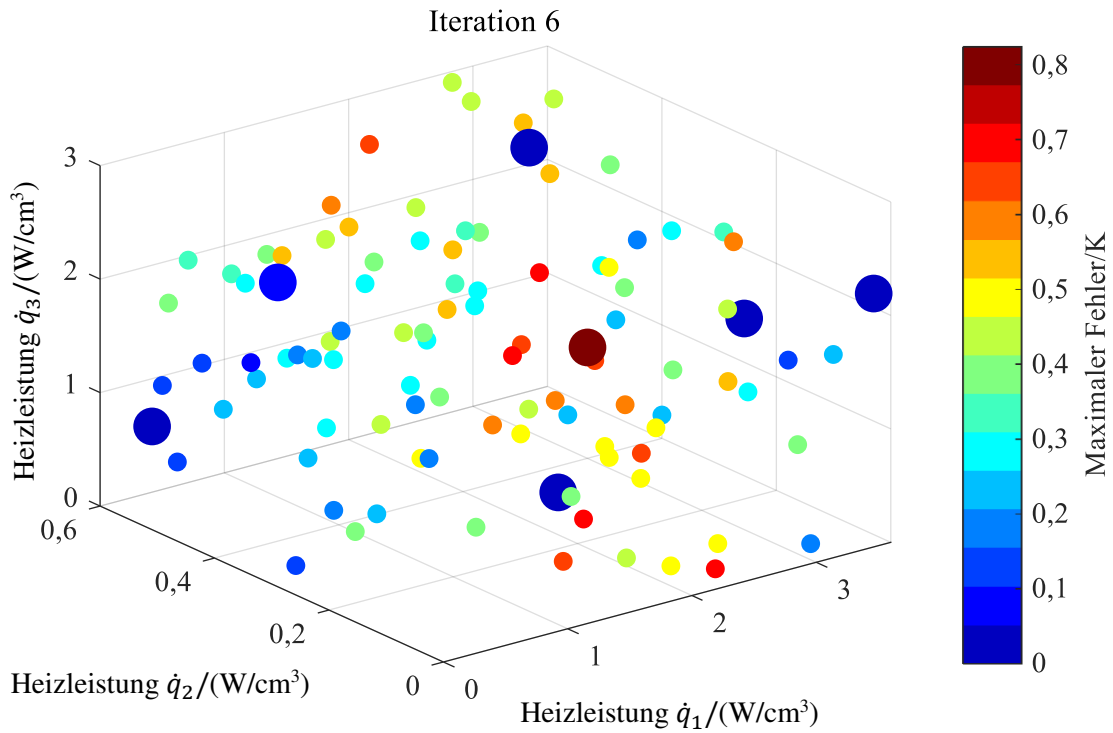
**Abbildung A.8** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 3. Die bereits in den Snapshots berücksichtigten Parameterkombinationen und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.



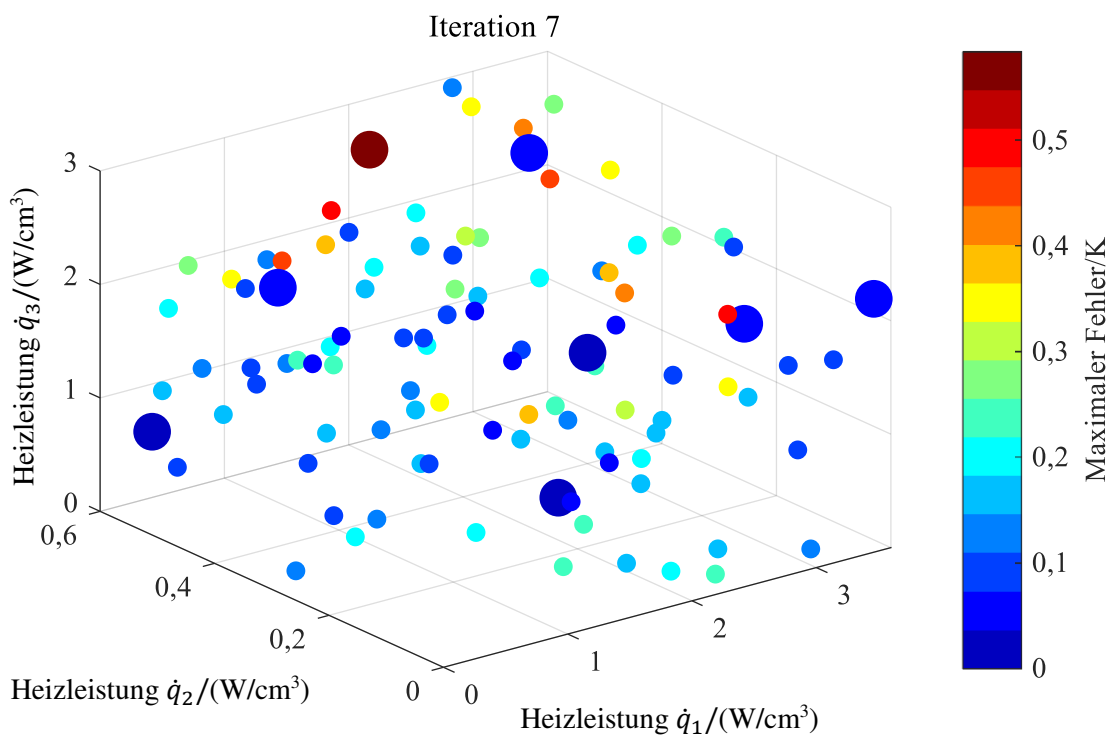
**Abbildung A.9** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 4. Die bereits in den Snapshots berücksichtigten Parameterkombinationen und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.



**Abbildung A.10** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 5. Die bereits in den Snapshots berücksichtigten Parameterkombinationen und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.



**Abbildung A.11** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 6. Die bereits in den Snapshots berücksichtigten Parameterkombinationen und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.

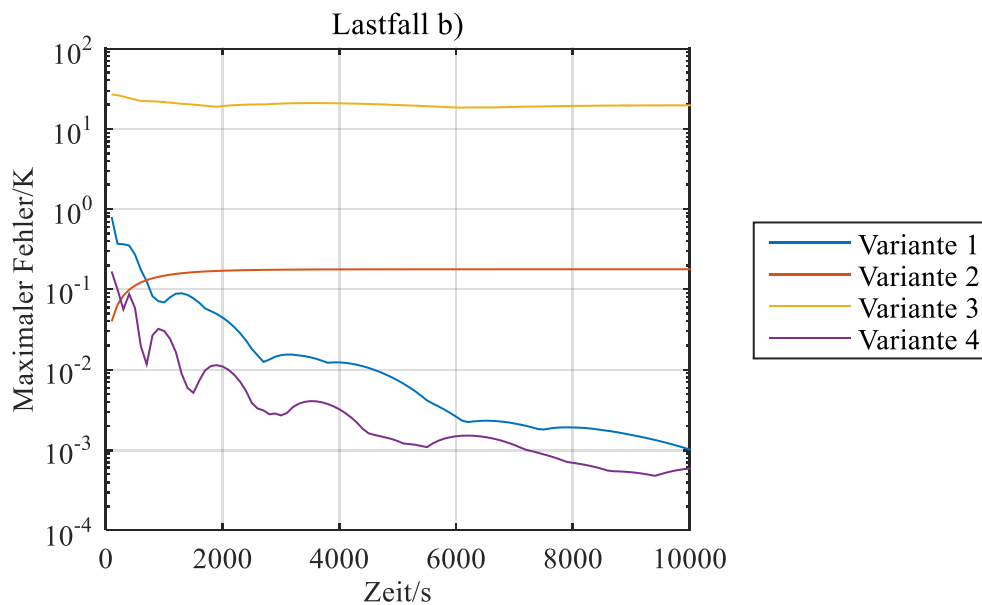


**Abbildung A.12** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle in Iterationsschritt 7. Die bereits in den Snapshots berücksichtigten Parameterkombinationen und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.

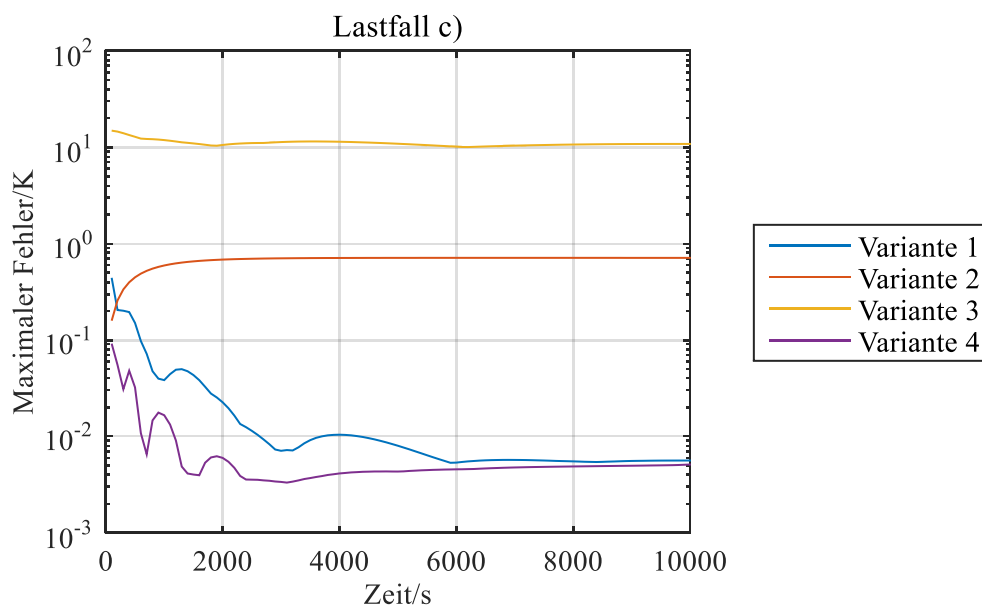


## Anhang E Eingangsreduktion für synchrone Lasten

Kapitel 4.2 stellt am Beispiel des vereinfachten Rotationsbehälters aus Kapitel 2.4.1 unter Vernachlässigung der Wärmestrahlung für die Lastfälle aus Tabelle 3.3 Methoden zur Reduktion der Anzahl von Systemeingängen und -ausgängen vor. Die zugehörigen Ergebnisse der Lastfälle b) und c) sind nachfolgend in Abbildung A.13 und Abbildung A.14 dargestellt.



**Abbildung A.13** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension  $n = 60$  für den Lastfall b) nach Tabelle 3.3: Variante 1 – 5 Eingänge; Variante 2 – 1 Eingang; Variante 3 – tangentielle Interpolation für 22.875 Eingänge; Variante 4 – tangentielle Interpolation für 5 Eingänge.

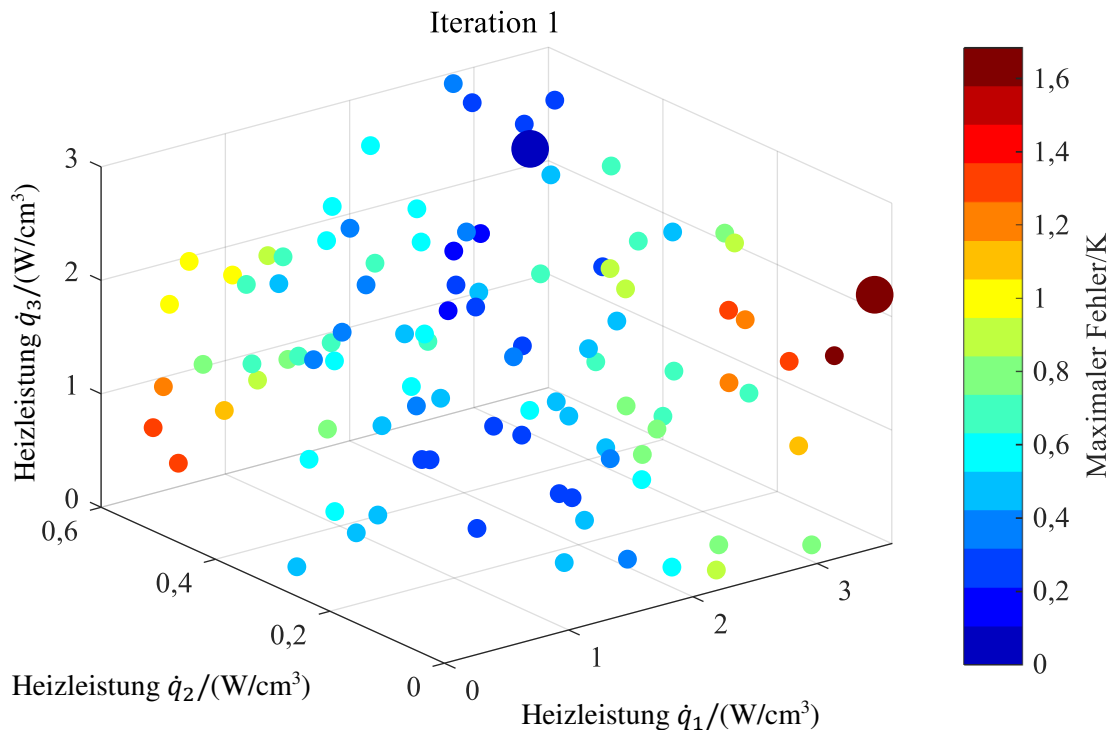


**Abbildung A.14** Maximaler Fehler der reduzierten Modelle im Vergleich zum Ausgangsmodell für eine reduzierte Dimension  $n = 60$  für den Lastfall c) nach Tabelle 3.3: Variante 1 – 5 Eingänge; Variante 2 – 1 Eingang; Variante 3 – tangentielle Interpolation für 22.875 Eingänge; Variante 4 – tangentielle Interpolation für 5 Eingänge.

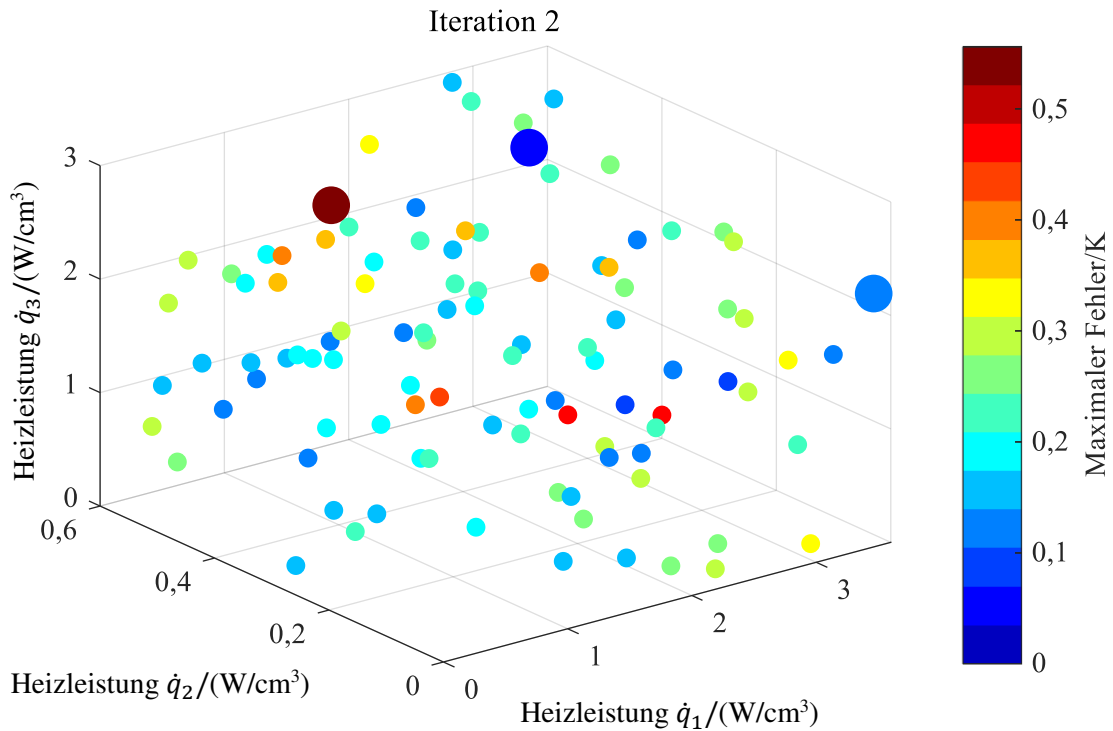


## Anhang F Anpassung Lastvektorsnapshots

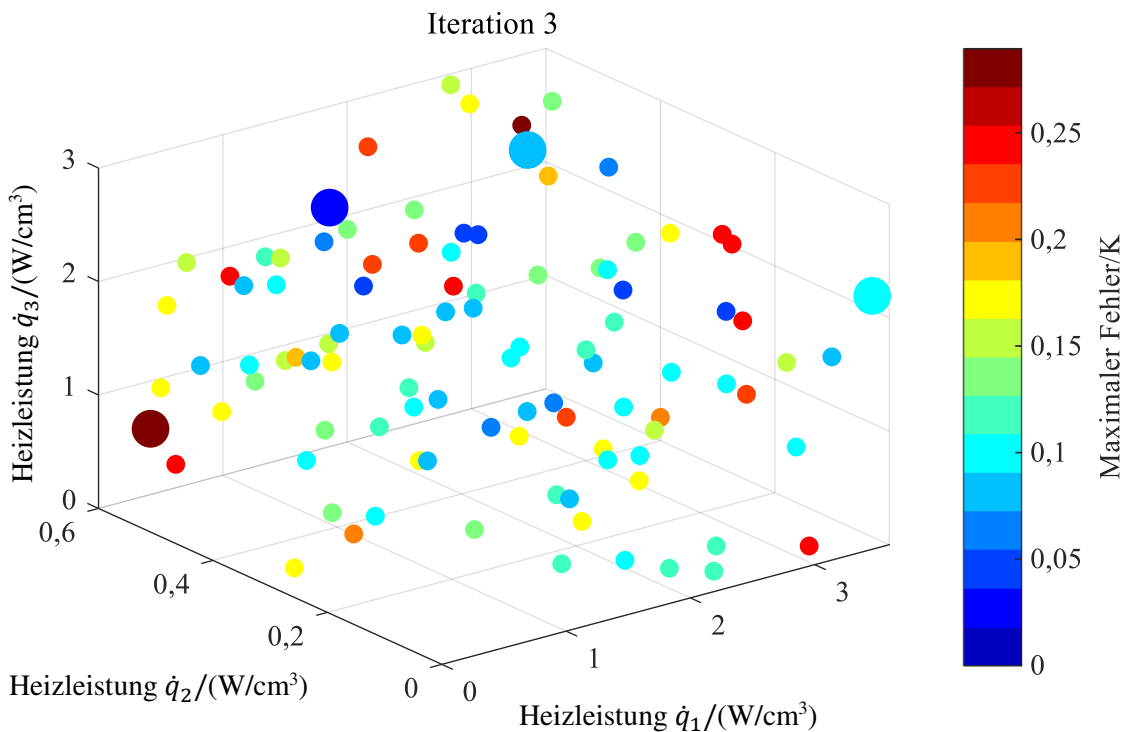
Die Untersuchung der Anzahl erforderlicher Offline-Simulationen für die entwickelte Methode der Singulärwertzerlegung basierend auf Lastvektorsnapshots ist Gegenstand von Kapitel 4.4.2. Für das hier dargestellte reduzierte Modell unter Berücksichtigung von  $e_R = 10$  Singulärvektoren mit dem Freiheitsgrad  $n = 120$  treten in der ersten Iteration noch Fehler über 1 K auf, während die gewählte Fehlergrenze bereits in Iteration 2 unterschritten wird. Abbildung A.15 bis Abbildung A.17 zeigen den maximalen Fehler des reduzierten Systems für die verschiedenen Parametersätze nach Abbildung 3.10 bzw. Anhang C. Durch einen größeren Kreis sind die den Snapshots zugrunde liegenden Datensätze (blau) und der im nächsten Iterationsschritt aufgrund des größten Fehlers hinzugefügte (dunkelrot) gekennzeichnet.



**Abbildung A.15** Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad  $n = 120$  im ersten Iterationsschritt für die untersuchten Parametersätze. Die bereits in den Snapshots berücksichtigte Parameterkombination und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.



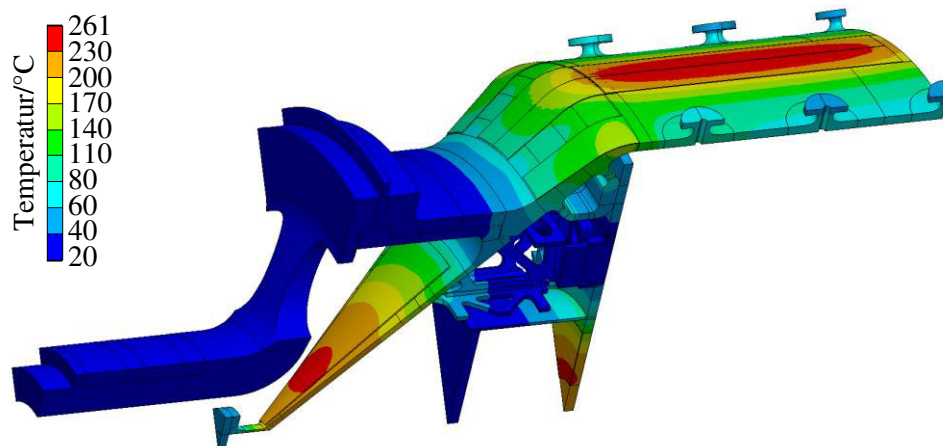
**Abbildung A.16** Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad  $n = 120$  im zweiten Iterationsschritt für die untersuchten Parametersätze. Die bereits in den Snapshots berücksichtigten Parameterkombinationen und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.



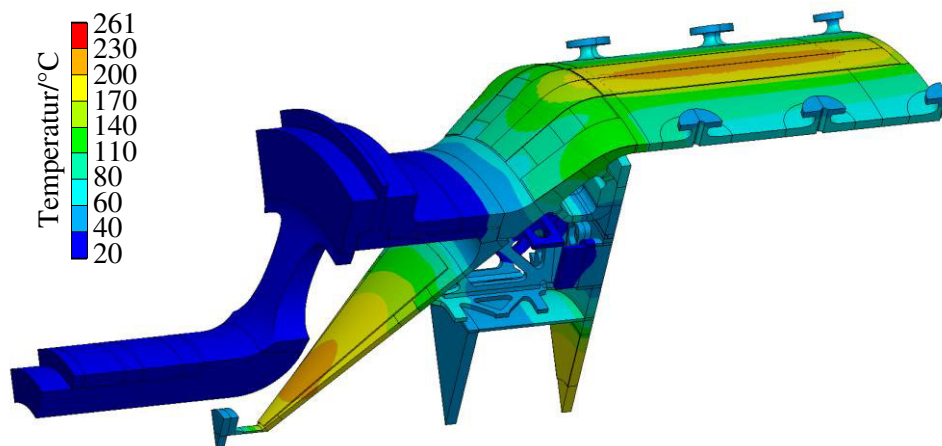
**Abbildung A.17** Maximaler Fehler des reduzierten Modells mit dem Freiheitsgrad  $n = 120$  im dritten Iterationsschritt für die untersuchten Parametersätze. Die bereits in den Snapshots berücksichtigten Parameterkombinationen und diejenige mit dem maximalen Fehler, welche im nächsten Iterationsschritt hinzugenommen wird, sind durch vergrößerte Symbole gekennzeichnet.

## Anhang G Temperaturfelder bei Emissionsgradvariation

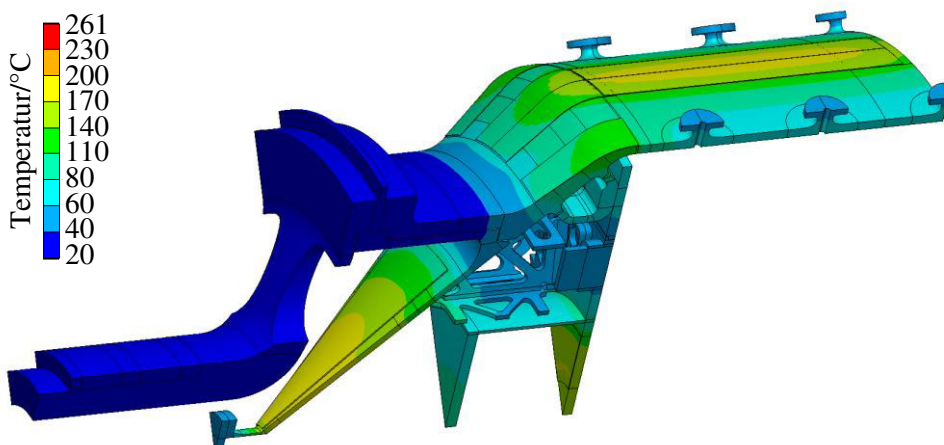
In Kapitel 4.4.3 sowie Kapitel 5.4 wird die Reduktionsgüte in Abhängigkeit vom Emissionsgrad untersucht, welcher im Intervall  $\varepsilon = 0 \dots 1$  variiert wird. Abbildung A.18 bis Abbildung A.20 verdeutlichen den signifikanten Einfluss auf das Temperaturfeld.



**Abbildung A.18** Temperaturfeld ohne Wärmestrahlung ( $\varepsilon = 0$ ) zum Zeitpunkt  $t = 10.000$  s mit einer Maximaltemperatur von  $261,4$  °C.



**Abbildung A.19** Temperaturfeld für den Emissionsgrad  $\varepsilon = 0,5$  zum Zeitpunkt  $t = 10.000$  s mit einer Maximaltemperatur von  $210,6$  °C.



**Abbildung A.20** Temperaturfeld für den Emissionsgrad  $\varepsilon = 1$  zum Zeitpunkt  $t = 10.000$  s mit einer Maximaltemperatur von  $186,6$  °C.