

Tragfähigkeitsberechnung von Bauteilen mit Mehrfachkerben im Nennspannungskonzept

Jörg Wendler

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

URN: urn:nbn:de:bsz:14-qucosa2-352028

[<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa2-352028>]

Satz/Layout: Jörg Wendler

Einbandgestaltung: Jörg Wendler

Tragfähigkeitsberechnung von Bauteilen mit Mehrfachkerben im Nennspannungskonzept

Von der Fakultät Maschinenwesen
der
Technischen Universität Dresden
zur
Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

angenommene Dissertation

Dipl.-Ing. Jörg Wendler
geb. am 18. September 1985 in Löbau

Tag der Einreichung: 28. Februar 2019
Tag der Verteidigung: 03. Juli 2019

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht
Prof. Dr.-Ing. Erhard Leidich

Vorsitzender der
Promotionskommission: Prof. Dr.-Ing. habil. Uwe Füssel

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand überwiegend während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Maschinenelemente der Technischen Universität Dresden unter Leitung von Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht. Die Ergebnisse der Arbeit basieren auf Forschungsvorhaben, welche von der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) sowie der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen »Otto von Guericke« e.V. (AiF) gefördert wurden. In diesem Zusammenhang möchte ich dem FVA-Arbeitskreis »Welle-Nabe-Verbindungen« für die fachliche Begleitung danken.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht für das mir entgegengebrachte Vertrauen, für die Ermöglichung und stets gewährte Unterstützung meines Promotionsvorhabens sowie für das hervorragende Arbeitsumfeld am Lehrstuhl. Prof. Dr.-Ing. Erhard Leidich danke ich für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens und die darüber hinausgehenden, intensiven fachlichen Diskussionen.

Meinem Oberingenieur Dr.-Ing. Michael Senf danke ich von ganzem Herzen für die enge fachliche Begleitung, die persönliche Förderung und umfassende Unterstützung während der gesamten Bearbeitungszeit. Das väterlich-freundschaftliche Verhältnis und sein stets offenes Ohr bei Problemen jedweder Art trugen wesentlich zum Gelingen der Arbeit bei.

Weiterhin bedanke ich mich ausdrücklich bei allen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen des Lehrstuhls für die angenehme Zusammenarbeit und die vielfältige gemeinsame Freizeitgestaltung. Für die zahlreichen Fachgespräche und Anregungen zur Arbeit danke ich besonders Mathias Höfgen, David Bretschneider, Kai Neikes, Sebastian Grams und Carsten Ulrich.

Abschließend möchte ich meiner gesamten Familie und insbesondere meiner lieben Ehefrau Corinne für ihre Unterstützung und Geduld meinen ganz besonderen Dank aussprechen.

Bad Mergentheim, August 2019

Jörg Wendler

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	xi
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	5
2.1 Kerben und Kerbwirkung	5
2.1.1 Allgemeines zu Kerben und Kerbarten	5
2.1.2 Mechanismen der Kerbwirkung	7
2.1.3 Formzahl	8
2.1.4 Formzahldiagramme für Standardkerbfälle (Herkunft)	9
2.1.5 Kerbwirkungszahl	12
2.1.6 Rechnerische Bestimmung der Kerbwirkung bei Mehrfachkerben	16
2.2 Zahnwellenverbindungen (Beispiel einer Mehrfachkerbe)	18
2.2.1 Einordnung	18
2.2.2 Geometrische Gestaltung	18
2.2.3 Literaturübersicht zu Form- und Kerbwirkungszahlen von Zahn-	
wellen	22
2.3 Rechnerischer Ermüdungsfestigkeitsnachweis für Wellen und Achsen .	26
2.3.1 Nachweisverfahren	26
2.3.2 Regelwerke	27
3 Berechnungsmethode für Mehrfachkerben	31
3.1 Erweiterung des Nennspannungsnachweises nach DIN 743	31
3.1.1 Herleitung der bestehenden Tragfähigkeitsberechnung gegen Er-	
müdungsbrüche	31
3.1.2 Problem: Mehrachsiger Spannungszustand und Kerbformzahl .	33
3.1.3 Neue Methode zur Berücksichtigung von mehrachsigen Span-	
nungszuständen	35
3.2 Numerische Spannungsanalyse (FEM) von Bauteilen mit Mehrfachkerben	38
3.2.1 Modellaufbau	38
3.2.2 Vernetzungsstrategien	41
3.2.3 Elementauswahl	45

3.2.4	Netzdichte/Netzverfeinerung und Konvergenzanalyse	47
3.2.5	Randbedingungen	49
3.2.6	Simulationsarten	56
3.3	Kerbspannungsermittlung an einer Beispielgeometrie	60
3.4	Einflussanalyse von typischen Kerbspannungsaspekten	62
3.4.1	Mehrachsigkeit	62
3.4.2	Ort der Auswertung bei zusammengesetzter Belastung	65
3.4.3	Grundlastfallfreie Mittelspannung	68
3.5	Entwicklung einer Berechnungsanleitung	71
4	Kerbwirkungsfaktoren für Zahnwellenverbindungen	75
4.1	Automatisierte Erstellung, Berechnung und Auswertung von Finite- Elemente-Modellen	75
4.1.1	Entwicklung eines Präprozessors	75
4.1.2	Entwicklung eines Postprozessors	80
4.1.3	Umsetzung einer Server-Client-Architektur für die verteilte Be- rechnung	81
4.2	Grundlegende theoretische Untersuchungen zur Kerbbeanspruchung .	82
4.2.1	Beanspruchungssituation im freien Zahnauslauf	82
4.2.2	Beanspruchungssituation im Zahnfuß	85
4.2.3	Beanspruchungsverteilung unter zusammengesetzter Torsions- und Biegebelastung	87
4.3	Formzahlbestimmung und Spannungsgefälle	92
4.3.1	Theoretische Untersuchungen zum Nennquerschnitt	92
4.3.2	Formzahlbestimmung zur Anwendung im Nennspannungskon- zept	97
4.3.3	Überprüfung der Beanspruchungsannahme mit höherwertiger Festigkeitshypothese	99
4.3.4	Abschätzung des bezogenen Spannungsgefälles	102
4.4	Mehrdimensionale Parameterstudie	103
4.5	Ableitung von Näherungsgleichungen zur Formzahlberechnung . . .	107
5	Diskussion und Vergleich mit experimentellen Ergebnissen	111
5.1	Zahnwellenverbindungen	111
5.2	Bewertung der neuen Berechnungsmethode	113
6	Ergebnisübersicht / Anwendungshinweise	119
7	Zusammenfassung	121

A	Anleitung: DIN 743 mit Kerbspannungen aus FE-Analyse	125
A.1	Allgemeines	125
A.1.1	Anwendungsbereich	125
A.1.2	Spannungen und Belastungsarten	126
A.2	Berechnungsmethode	127
A.2.1	Örtliche Spannungen und Koordinatenausrichtung	127
A.2.2	Formzahl	129
A.2.3	Stützwirkung und Kerbwirkungszahl	133
A.2.4	Grundlastfallfreie Mittelspannungen (Presssitz)	134
A.2.5	Sicherheitsnachweis des Vermeidens von Dauerbrüchen	135
A.3	Beispiel	141
A.3.1	Aufgabenstellung	141
A.3.2	Auswertung der FE-Analyse	142
A.3.3	Ermüdungsfestigkeitsnachweis	143
B	Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf	147
B.1	Torsion	148
B.2	Biegung	157
C	Kerbspannungen Beispielgeometrie	167
D	Berechnung der Zahnprofilkurve	169
D.1	Bestimmung der Evolventenflanke	169
D.2	Bestimmung der Zahnfußübergangskurve	170
D.2.1	Fußkurve bei Herstellung mit Wälzfräser	170
D.2.2	Fußkurve bei Herstellung mit Schneidrad (Wälzstoßen)	172
D.3	Berechnung des Fußformkreisdurchmessers	173
	Literaturverzeichnis	175

Symbolverzeichnis

Formelzeichen

α	Formzahl
α_f	Formzahl der unendlich flachen Kerbe
α_t	Formzahl der unendlich tiefen Kerbe
β	Kerbwirkungszahl
δ	Phasenverschiebung zwischen Spannungsverläufen
ϵ	Störgröße
ρ_f	Fußrundungsradius
ρ_{fP}	Fußrundungsradius am Bezugsprofil
σ	Normalspannung
$\boldsymbol{\sigma}$	Räumlicher Tensor der örtlichen Spannung
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Ebener Spannungstensor der örtlichen Kerbspannung
σ_0	Nennspannung im <i>ungekerbten</i> Bauteilquerschnitt
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	Allgemeine Normalspannungskomponente
$\sigma_{\gamma\varphi}$	Normalspannung der Schnittebene $\gamma\varphi$
σ_a, σ_t, τ	Komponenten der örtlichen Kerbspannung in der Zahnfußausrundung (a – axial, t – tangential)
σ_{ADK}, τ_{ADK}	Spannungsamplitude der Bauteildauerfestigkeit für bestimmte Mittelspannung
σ_B	Zugfestigkeit
σ_S	Streckgrenze
σ_W, τ_W	Werkstoffwechselfestigkeit
σ_{WK}, τ_{WK}	Bauteilwechselfestigkeit
$\sigma_z, \sigma_\varphi, \tau$	Komponenten der örtlichen Kerbspannung an der lastfreien Bauteiloberfläche (allgemein)
τ	Schubspannung

$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$	Allgemeine Schubspannungskomponente
$\tau_{\gamma\varphi}$	Schubspannung der Schnittebene $\gamma\varphi$
φ	Fasenwinkel Zahnauslauf
$\psi_{\sigma K}, \psi_{\tau K}$	Einflussfaktor der Mittelspannungsempfindlichkeit
A	Flächeninhalt der Querschnittsfläche
A_0	Querschnittsfläche des ungekerbten Bauteils
A_K	Querschnittsfläche des gekerbten Bauteils im Kerbgrund
c_h	Geometriefaktor zur Berechnung des Ersatzdurchmessers d_h
D	Bauteildurchmesser am Wellenabsatz
d, d_n	Bauteildurchmesser (Nenndurchmesser) im Kerbquerschnitt
d_a	Kopfkreisdurchmesser
d_B	Bezugsdurchmesser der Verzahnung bzw. der Werkstoffprobe
d_{eff}	Für die Wärmebehandlung maßgebender Durchmesser
d_f	Fußkreisdurchmesser
d_h	Ersatzdurchmesser zur Berechnung des Trägheitsmomentes
d_i	Innendurchmesser
d_w	Durchmesser der ungestörten/freien Welle
e	Exzentrizität
\vec{e}_3	Basisvektor des globalen Koordinatensystems bzw. Richtungsvektor der Wellenachse
F_{zd}	Kraft (Zug/Druck)
G	Spannungsgefälle
G'	Bezogenes Spannungsgefälle
h	Zahnhöhe
h_{FP}	Fußhöhe des Bezugsprofils
I_p	Polares Flächenträgheitsmoment
I_t	Torsions-Trägheitsmoment
K	Gesamteinflussfaktor
$K_1(d_{\text{eff}})$	Technologischer Größeneinflussfaktor
$K_2(d)$	Geometrischer Größeneinflussfaktor
K_f	Kerbwirkungszahl
$K_{F\sigma}, K_{F\tau}$	Einflussfaktor der Oberflächenrauheit
K_t	Formzahl
K_V	Einflussfaktor der Oberflächenverfestigung

L	Nabenlänge
m	Zahnmodul
M_b	Biegemoment
M_t	Torsionsmoment
n	Stützziffer
\vec{n}	Normalenvektor der Bauteiloberfläche
$P_{\bar{U}}$	Überlebenswahrscheinlichkeit
r	Kerbradius
r_w	Absatzradius Zahnauslauf (zur freien Welle)
S	Flächenschwerpunkt
s	Ortskoordinate von der Kerboberfläche ins Bauteilinnere
S, S_D	Rechnerische Sicherheit gegen Dauerbruch
s_g	Gleitschichtbreite
t	Kerbtiefe
T	Transformationsmatrix
t_a	Kerbtiefe vom Kopfkreis der Verzahnung zum Wellendurchmesser
t_f	Kerbtiefe vom Fußkreis der Verzahnung zum Wellendurchmesser
w	Querschnittverwölbung
W_b, W_t	Widerstandsmoment des Querschnittes (gegen Biegung, Torsion)
x	Profilverschiebungsfaktor
z	Zähnezahl
$\vec{z}, \vec{\varphi}, \vec{n}$	Basisvektoren des lokalen Koordinatensystems an der Kerboberfläche (Achsal-, Umfangs-, Normalenrichtung)

Abkürzungen

FE, FEM	Finite-Elemente-Methode
FKM	Forschungskuratorium Maschinenbau
GEH	Gestaltänderungsenergiehypothese
MaxP	Größte Hauptspannung
MaxS	Größte Schubspannung
SIH	Schubspannungsintensitätshypothese
ZA	Zahnauslauf
ZF	Zahnfuß

Indizes

a	Amplitude
b	Biege-
exp	Experimentell
ges	Gesamt- (bei Mehrfachkerben)
I	Haupt-
K	Örtlich- oder gekerbtes Bauteil
Komp	Komponentenweise Berechnung
m	Mittel-
max	Maximal-
n	Nenn-
orig	Original
p	Grundlastfallfrei-
t	Torsion
v	Vergleichs-
zd	Zug/Druck

1 Einleitung

Motivation

In vielen Anwendungsgebieten der Antriebstechnik, z.B. bei Automobilgetrieben, Windenergiegetrieben oder Industriegetrieben, erfolgt eine Auslegungs- sowie Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und wellenähnlichen Bauteilen mit genormten Berechnungsmethoden. Diese führen den Festigkeitsnachweis häufig mit dem Nennspannungskonzept durch. Dabei wird die, durch konstruktive Kerben hervorgerufene, örtliche Spannungskonzentration anhand von Form- und Kerbwirkungszahlen für bestimmte versagenskritische Querschnitte erfasst. Eine zentrale Rolle im deutschen und internationalen Maschinenbau fällt hierbei der erprobten und bewährten Norm DIN 743 »Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen« [13] zu.

Aufgrund hoher Leistungsdichte und der Forderung nach Kompaktheit, sowie unter Berücksichtigung funktionaler und konstruktiver Gesichtspunkte sind viele Bauteile durch eine komplexe Geometrie charakterisiert. Zudem können sich bestimmte Kerbstellen aufgrund eines geringen geometrischen Abstandes überlagern und spannungsmechanisch beeinflussen (siehe beispielsweise Abbildung 1.1). Diese Kerbstellen werden auch als *Mehrfachkerben* bezeichnet. Eine Norm kann verständlicherweise Spannungskonzentrationsfaktoren (Kerbformzahl, Kerbwirkungszahl) nur für eine begrenzte Anzahl an Kerbformen bereitstellen. Der Formzahlkatalog von Peterson [62] deckt eine Reihe verschiedener Formen von konstruktiven Kerben ab. Er basiert auf theoretischen Untersuchungen, vorrangig von Neuber [59], sowie auf einer Zusammenstellung experimenteller Ergebnisse zur Kerbwirkung. Allerdings lässt sich die mechanische Wirkung von Mehrfachkerben nicht durch eine Kombination der Kerbform- oder Kerbwirkungszahlen der zugehörigen Einzelkerben beschreiben [82, S. 80]. Für nicht in der Norm oder Literatur erfasste Kerbfälle – insbesondere für Mehrfachkerben oder Kerbformen mit komplexer, nicht durch wenige Parameter beschreibbarer Geometrie – wird die versagenskritische Beanspruchung eines Bauteiles zunehmend mit Finite-Elemente-Programmen ermittelt. Die numerische Strukturanalyse mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) ermöglicht die Spannungsberechnung von beliebig gestalteten Kerbgeometrien. Ohne den Rahmen eines

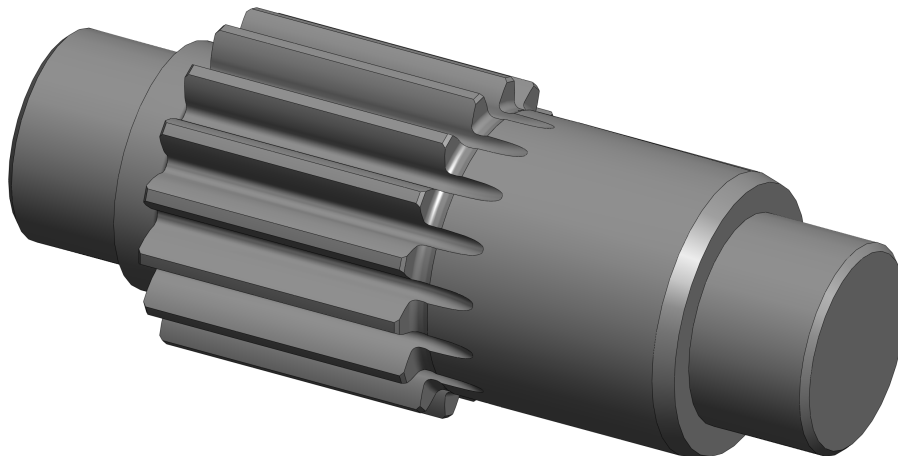


Abb. 1.1: Getriebezwischenwelle mit Mehrfachkerbe (Durchdringungskerben)

entsprechenden Nachweisverfahrens kann mit den Spannungsergebnissen einer FE-Analyse jedoch kein Festigkeitsnachweis durchgeführt werden. Neben den grundlegenden Werkstoffeigenschaften ist der Einfluss der Bauteilgröße, der Oberflächenrauheit und des Oberflächenverfestigungsverfahrens zu berücksichtigen. Weiterhin gilt es, eine Bewertung des Spannungszustandes (Mehrachsigkeit) und des Spannungs-Zeit-Verlaufes (z. B. hinsichtlich Mittelspannungsempfindlichkeit) vorzunehmen.

Diese Arbeit möchte daher die numerisch bestimmten, elastischen Kerbspannungen in die genormte Tragfähigkeitsberechnung nach DIN 743 integrieren. Dies erfordert die Integration örtlicher Spannungen in das Nennspannungskonzept. Dieser Ansatz wurde bereits im Zusammenhang mit Gestaltfestigkeitsuntersuchungen an verschiedenen Kerbformen verfolgt, z. B. in [10], [21], [54]. Allerdings beinhalten die häufig verwendeten Methoden zur Bestimmung einer entsprechenden Kerbformzahl spannungsmechanische Unstimmigkeiten, die in Abschnitt 3.1 aufgezeigt werden. Aus diesem Grund erfolgt in der Arbeit die Ableitung einer neuen, spannungsmechanisch begründeten Methode zur Integration von örtlich mehrachsigen Spannungszuständen in den nennspannungsbasierten Tragfähigkeitsnachweis nach DIN 743.

Voraussetzung für einen Tragfähigkeitsnachweis von Bauteilen mit Mehrfachkerbe bleibt hierbei jedoch eine FE-Spannungsanalyse der entsprechenden Kerbstelle. Aufgrund der oft individuell gestalteten Kerbgeometrie kann dieser Schritt dem Anwender nicht gänzlich abgenommen werden. Es gibt allerdings einige Formen von Überlagerungskerben, die in verschiedenen Anwendungen in gleicher Konstellation immer wiederkehren. Ein Wellenende mit Passverzahnung tritt in der Praxis beispielsweise zwangsläufig zusammen mit einer fertigungsbedingten Zahnauslaufkontur auf. Konstruktiv wird zwischen Zahnwellen mit freiem und gebundenem Zahnauslauf unterschieden (siehe Abbildung 1.2). Neben den Kerbspannungen in der Zahnfußausrun-

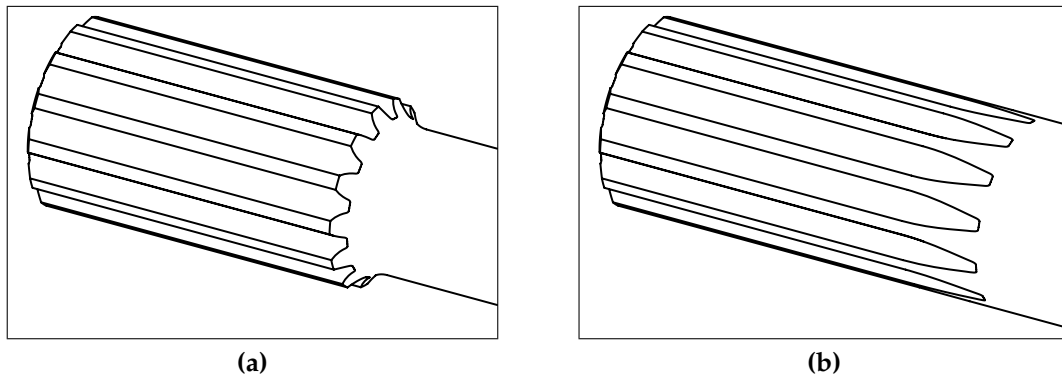


Abb. 1.2: Zahnwelle mit freiem (a) und gebundenem (b) Auslauf

ding verursacht der Übergang von verzahnter Welle zu glatter Welle eine überlagerte Beanspruchungserhöhung. Zusätzlich bilden sich, bedingt durch die Steifigkeitsänderung, Spannungskonzentrationen am Übergang von Zahnwelle zur Welle-Nabe-Verbindung aus (Nabeneinfluss).

Diese wiederkehrende Form der Mehrfachkerbe ist mit einer überschaubaren Anzahl an geometrischen Parametern beschreibbar und damit prinzipiell für die Aufnahme in einem Formzahlkatalog geeignet. Die Form der Verzahnungskontur ist zudem durch Normen standardisiert, z. B. für Passverzahnungen mit Evolventenflanken (Zahnwelle) nach DIN 5480 [15]. Im Falle einer Zahnwelle bzw. Zahnwellenverbindung erlauben die bislang normativ bereitgestellten Faktoren zur rechnerischen Erfassung der Kerbwirkung (DIN 743 [13], DIN 5466 [14], FKM-Richtlinie [22]) jedoch nur eine sehr grobe Abschätzung der Ermüdungsfestigkeit. Wesentliche geometrische Größen, durch die sich verschiedene Ausführungen von Zahnwellen unterscheiden, finden keine Berücksichtigung. Die vorhandenen, darüber hinausgehenden Forschungsergebnisse weisen ebenfalls Lücken hinsichtlich des Einflusses der Nabe oder der Zahnauslaufgeometrie auf (siehe Abschnitt 2.2.3).

Es bietet sich demzufolge ergänzend an, die nahezu standardisierte Mehrfachkerbe »Zahnwellenverbindung inklusive Zahnauslaufgeometrie« vorab numerisch zu analysieren und die erhaltenen Kerbspannungen in Form von verallgemeinerten Kerbformzahlen bereitzustellen. Zusammen mit der zuvor entwickelten, allgemein gültigen Berechnungsmethode befähigen die Ergebnisse den Anwender zu einer Tragfähigkeitsberechnung der speziellen Kerbform ohne selbstständige FE-Analyse.

Teile der vorgestellten Untersuchungen wurden bereits vom Autor in Zeitschriften- und Tagungsbeiträgen im Rahmen der Promotion vorveröffentlicht [70], [71], [92], [93], [94], [95]. Auf eine gesonderte Kennzeichnung von entnommenen Abbildungen und Textpassagen aus diesen eigenen Werken wird verzichtet.

Zielsetzung der Arbeit

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung einer Methode zur Tragfähigkeitsberechnung von Bauteilen mit komplex gestalteten oder überlagerten Kerbstellen (Mehrfachkerben) durch die Verknüpfung von numerisch (mit FEM) gewonnenen Ergebnissen der örtlichen Spannungskonzentration mit dem bewährten Nachweisverfahren nach DIN 743 (Nennspannungskonzept). Neben der Betrachtung allgemeiner Kerbgeometrien steht die konkrete Mehrfachkerbe »Zahnwellenverbindung mit freiem Zahnauslauf« im Mittelpunkt. Alle Untersuchungen beschränken sich hierbei auf die *Gestaltdauerfestigkeit* (Ermüdungsfestigkeit des gekerbten Bauteils im Dauerfestigkeitsgebiet) von Achsen und Wellen bzw. wellenähnlichen Bauteilen, für die ein Nennquerschnitt definiert werden kann.

Die einzelnen Kapitel verfolgen die nachstehenden Teilziele:

- Bereitstellung einer Methodik zur Integration örtlich mehrachsiger Spannungszustände in den nennspannungsbasierten Tragfähigkeitsnachweis nach DIN 743 (Kapitel 3.1)
- Ableitung von Systematisierungsansätzen zur Durchführung von Spannungsanalysen von Bauteilen mit Mehrfachkerbe (Kapitel 3.2)
- Ermittlung anwendungsbereiter Berechnungsfaktoren zur Erfassung der Kerbwirkung für die Auslegungsrechnung von Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf nach DIN 5480 (Kapitel 4)

Der letzte Punkt betrachtet die örtlichen Beanspruchungszustände einer Zahnwellenverbindung (inklusive Nabeneinfluss) in der Zahnfußausrundung und im freien Zahnauslauf abhängig von Zähnezah/Zahnmodul, Verbindungsbreite sowie Kerbschärfe und -tiefe der Zahnauslaufgeometrie. Nach einer umfangreichen, mehrdimensionalen Parameterstudie erfolgt die Ableitung von Näherungsgleichungen für Biege- und Torsionsformzahlen.

Die Abschnitte 3.3 und 3.4 gehen ergänzend auf typische Kerbspannungsaspekte bei Mehrfachkerben ein. Die Ergebnisse aus Kapitel 3 münden in einer für den Anwender aufbereiteten Berechnungsanleitung »DIN 743 mit Kerbspannungen aus FE-Analyse« in Anhang A. Ein Vergleich mit experimentellen Daten aus der Literatur zur Validierung der entwickelten Rechenvorschrift und der ermittelten Kerbformzahlen in Kapitel 5 rundet die Arbeit ab.

2 Grundlagen

2.1 Kerben und Kerbwirkung

Die elementare Festigkeitslehre beschäftigt sich mit der Berechnung von Beanspruchungen (Spannungen) in idealisierten Bauteilen mit einfacher Geometrie bzw. Grundform. Dazu wird von einem glatten, kerbfreien Grundkörper mit unveränderlichem Querschnitt ausgegangen. In der Technik gibt es jedoch praktisch keine Bauteile ohne Kerben. Erfahrungsgemäß stellen Kerben den Ort der maximalen Beanspruchung eines Bauteils dar und können somit vorrangig zum Bauteilversagen führen. Dies gilt insbesondere für die Ermüdungsrissentwicklung im Dauerfestigkeitsgebiet. Aus diesem Grund erhält die Berechnung der Spannungskonzentration durch die Kerbwirkung eine besondere Bedeutung innerhalb der Festigkeitsberechnung.

2.1.1 Allgemeines zu Kerben und Kerbarten

Kerben im Sinne der Festigkeitslehre werden gelegentlich abstrakt als »Störstellen für den Kraftfluss« [36, S. 212] definiert. Im Allgemeinen sind das die Bereiche, in denen sich Bauteilquerschnitte ändern, starke Umlenkungen im Kraftfluss bestehen, Modifikationen der Werkstoffstruktur/-zusammensetzung auftreten, oder generell die elastischen Eigenschaften eines Werkstoffes variieren [68, S. 165]. Die Klassifizierung der Kerbwirkung ist in der Fachliteratur nicht vollständig einheitlich. Der Autor bevorzugt eine Unterscheidung der Kerbarten in Anlehnung an Radaj u. Vormwald [64, S. 148] entsprechend Abbildung 2.1.

Beispiele für *Gestaltkerben* (alternativ als konstruktive Kerben bezeichnet) sind Absätze, Nuten, Gewinde, Bohrungen und Querschnittsübergänge. Bei *Krafteinleitungskerben* (auch Belastungskerben genannt) tritt anstelle der freien Kerboberfläche ein Gebiet örtlich konzentrierter Krafteinleitung. Hierzu gehören Erscheinungsformen wie Schraub- und Pressverbindungen. Unter *Werkstoffkerben* fallen Bereiche mit veränderter Elastizität oder Fließgrenze im ansonsten homogenen Werkstoff. Dazu gehören

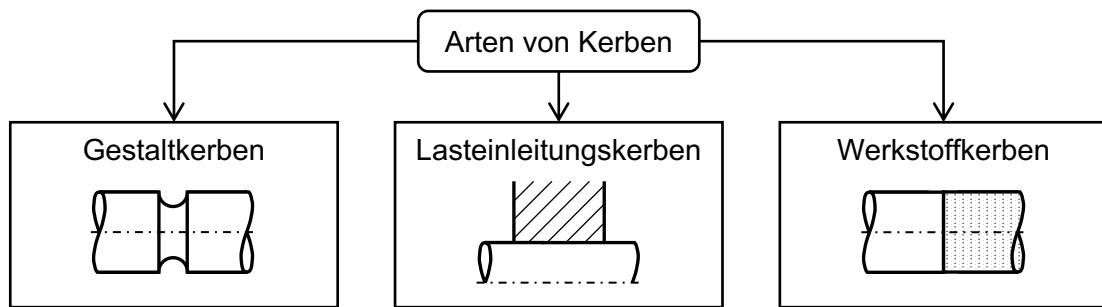


Abb. 2.1: Arten von Kerben

Einschlüsse und Fehlstellen, aber auch Schweißnähte sowie Kleb- und Lötverbindungen. Oberflächenrauheiten können je nach Modellvorstellung als Fehlstellen des Werkstoffes oder Gestaltkerben kleiner Abmessung interpretiert werden. In stetiger Regelmäßigkeit treten diese Kerbarten auch in Kombination auf. Eine Passfederverbindung stellt bspw. eine Verknüpfung aus Gestalt- und Krafteinleitungskerbe dar.

In der Praxis enthält ein Bauteil zur Erfüllung seiner konstruktiven Funktion gewöhnlich mehrere Kerben, die mitunter dicht beieinander oder übereinander liegen. Sind zwei oder mehr Kerben so angeordnet, dass sich die Bereiche lokaler Spannungsüberhöhung (oder allgemein das gestörte Spannungsfeld in der Umgebung der Kerbe) der einzelnen Kerben überschneiden, so spricht man von *Mehrfachkerben* oder *Überlagerungskernen*. Wie bereits eingangs erwähnt, gelten für die Kerbwirkung infolge der gegenseitigen Wechselwirkung andere Gesetzmäßigkeiten als für Einzelkerben [82, S. 80]. Eine gelegentlich in der Literatur (z. B. [68, S. 173 f.] oder [83]) beschriebene multiplikative Verknüpfung der Formzahlen jeder Einzelkerbe gilt nur in wenigen Spezialfällen. Die resultierende Kerbwirkung kann je nach Geometrie und Anordnung größer oder kleiner sein als die der Einzelkerben. Im Fall eines festigkeitssteigernden Effektes von benachbarten Kerben wird von sogenannten Entlastungskernen gesprochen. Sie sind weit häufiger in der Literatur (z. B. [37], [81]) als in der Praxis zu finden. Deren Wirkungsweise steht daher nicht im Fokus dieser Untersuchung.

Thum u. a. [82, S. 81 ff.] ordnen eine Auswahl von Mehrfachkerben unter einachsiger Belastung nach der auftretenden Form in folgende Kategorien:

- In Reihe geschaltete Kerben (in Richtung der einachsigen Beanspruchung)
- Parallel geschaltete Kerben (quer zur Beanspruchung)
- Kerbfelder (Kombination von in Reihe und parallel geschalteten Kerben)
- Überlastungswirkung dünner Stege (parallel geschaltete Kerben mit besonders geringem Abstand)

- Durchdringungskerben (eine Kerbe durchdringt eine andere in Richtung ihres größten Spannungsgefälles)
- Kerben im Zusammenhang mit Kraftangriffsstellen

2.1.2 Mechanismen der Kerbwirkung

Issler, Ruoff, u. Häfele [36] beschreiben vier Phänomene, die im Kerbquerschnitt von gekerbten Bauteilen auftreten (siehe Abbildung 2.2):

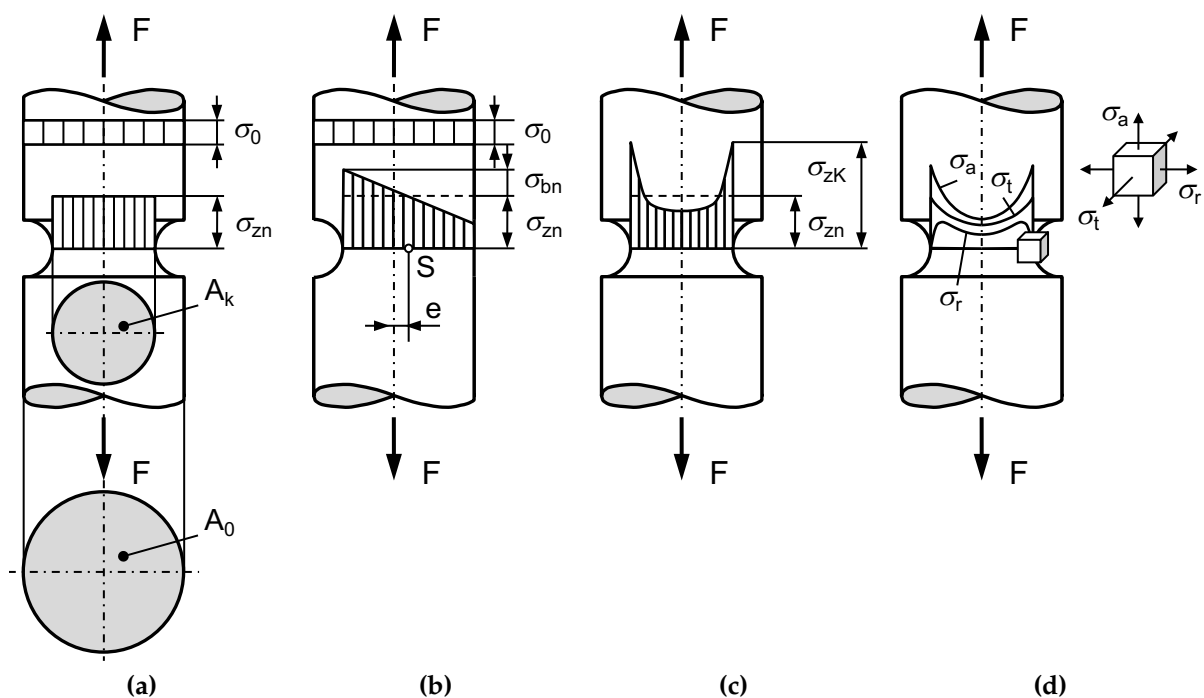


Abb. 2.2: Kerbphänomene am Beispiel eines Zugstabes (nach [36, S. 214]): (a) Nennspannungserhöhung, (b) Überlagerung von Sekundärspannungen, (c) Spannungsspitzen, (d) Mehrachsiger Spannungszustand

Erhöhung der Nennspannung Besonders im Fall von Gestaltkerben verringert sich die Querschnittsfläche im Bereich der Kerbe A_k gegenüber der Querschnittsfläche des ungekerbten Bauteils A_0 . Damit ergibt sich eine höhere Nennspannung im Kerbquerschnitt.

Entstehung von sekundären Nennspannungen Beispielsweise beim einseitig gekerbten Zugstab (Abbildung 2.2b) entsteht durch die geometrische Asymmetrie im Bereich der Kerbe (Asymmetrie des Flächenschwerpunktes) eine *sekundäre* Biegespannung σ_{bn} , die sich mit der Zugnennspannung σ_{zn} überlagert.

Spannungsüberhöhung im Kerbgrund In der Modellbeschreibung der inneren Zustände eines Bauteiles mit Hilfe des Kraftflusses verursachen Kerben eine Zusammendrängung der Kraftlinien. Die hieraus hervorgehende Kraftlinienkonzentration ist ein direktes Maß für die Spannungsüberhöhung im Kerbgrund (Analogie zur Strömungsgeschwindigkeit in der Strömungsmechanik).

Ausbildung eines mehrachsigen Spannungszustands Durch *Querdehnungsbehinderung* kann sich trotz einer einachsigen Bauteilbeanspruchung ein mehrachsiger Spannungszustand im Bereich des Kerbgrundes ausbilden. Die sich bei glatten Proben einstellende Querkontraktion infolge der äußeren Belastung wird bei Kerben aufgrund der Materialanhäufung um den Kerbgrund eingeschränkt. Die behinderte Verformungsfähigkeit führt zu Zwangskräften, die zusätzliche Spannungen quer zur Belastungsrichtung erzeugen.

In der Festigkeitslehre dienen zur Beschreibung der Spannungsüberhöhung an konstruktiven Kerben die Formzahl α und die Kerbwirkungszahl β . Beide Kenngrößen werden in den nächsten Abschnitten vorgestellt und die Möglichkeiten zu ihrer Bestimmung aufgezeigt.

2.1.3 Formzahl

Die *Formzahl* (auch Kerbformzahl genannt) gibt die Spannungsüberhöhung an einer Kerbstelle, bezogen auf die Nennspannung im Kerbquerschnitt, an. Sie ist ein dimensionsloser Faktor, der nur im linear-elastischen Bereich Gültigkeit besitzt [36, S. 216]. In der klassischen Definition wird die Formzahl als skalarer Quotient der maximalen örtlichen Spannung infolge der Kerbwirkung $\sigma_{\max K}$ bzw. $\tau_{\max K}$ zur rechnerischen Nennspannung σ_n bzw. τ_n angegeben (vgl. Abbildung 2.3):

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max K}}{\sigma_n} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_{\max K}}{\tau_n}. \quad (2.1)$$

Im deutschen Schrifttum erhält die Formzahl zumeist die Benennung α , wohingegen in der internationalen Literatur vorwiegend die Bezeichnung K_t anzutreffen ist.

Der Betrag der Formzahl wird maßgeblich von der geometrischen Form der zugehörigen Kerbe, aber auch von der Belastungsart (Zug, Biegung oder Torsion, siehe Abbildung 2.3) bestimmt. Er ändert sich jedoch nicht bei geometrisch ähnlicher Veränderung der Größe des gekerbten Bauteils (kein Größeneinfluss). Des Weiteren ist die Formzahl unabhängig vom Werkstoff und von der Höhe der elastischen Beanspruchung [68, S. 169].

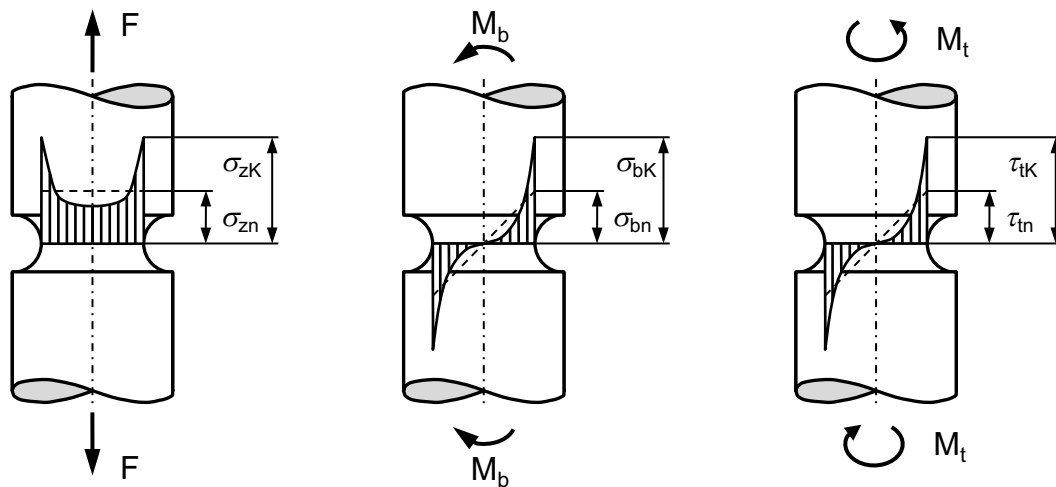


Abb. 2.3: Spannungsverlauf und Definition der Formzahl für Zug/Druck-, Biege- und Torsionsbeanspruchung (nach [36] und [68])

Zur rechnerischen Bestimmung der Formzahl gilt es gemäß Gleichung 2.1, die Spannungsspitze $\sigma_{\max K}$ bzw. $\tau_{\max K}$ zu ermitteln. Für einfache Geometrien kann die örtliche Maximalspannung durch geschlossene theoretische Lösungen gefunden werden. Neuber entwickelt in [59] analytische Gleichungen zur Formzahl für viele Kerbformen auf der Grundlage elementarer Beziehungen der Elastizitätstheorie. Bei komplexen, technisch wichtigen Kerbfällen muss jedoch meist auf numerische Methoden, wie die Finite-Elemente-Methode (FEM), oder auf experimentelle Verfahren (z. B. Spannungsoptik) zurückgegriffen werden. In mehreren Fachbüchern, Richtlinien und ergänzender Literatur ([10], [13], [22], [36], [54], [59], [62], [68], [97]) erfolgt die Bereitstellung von Formzahlen für diverse Kerbgeometrien in tabellarischer Form, als empirische Gleichung und/oder in Formzahldiagrammen.

2.1.4 Formzahldiagramme für Standardkerbfälle (Herkunft)

Die einfachste Form konstruktiver Kerben mit anwendungstechnischer Bedeutung für Wellen und Achsen stellen die *Rundnut* und der *Absatz* dar (bzw. gekerbter und abgesetzter Rundstab, siehe Abbildung 2.4). Ein Großteil der in der Ingenieurpraxis verwendeten Richtlinien zur Tragfähigkeitsberechnung von Wellen (siehe Abschnitt 2.3) nutzt Formzahldiagramme dieser beiden Kerbformen, die auf der Gleichung

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{A \cdot \frac{r}{t} + 2B \cdot \frac{r}{d} \cdot \left(1 + 2\frac{r}{d}\right)^2 + C \cdot \left(\frac{r}{t}\right)^z \cdot \frac{d}{D}}} \quad (2.2)$$

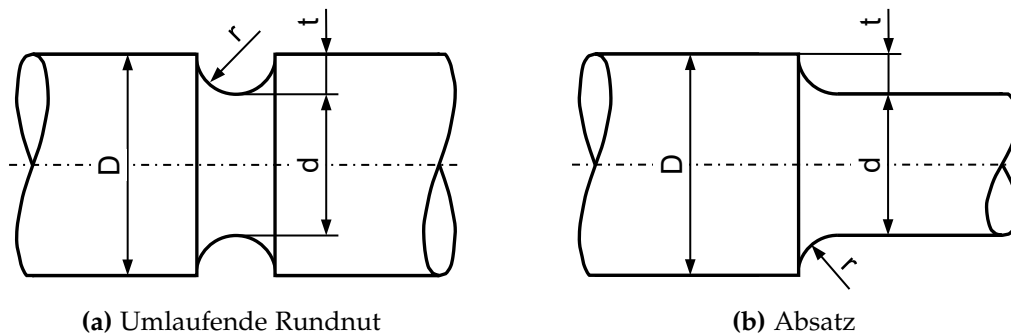


Abb. 2.4: Einfache konstruktive Kerbformen

basieren. Die Formzahlkonstanten gehen aus Tabelle 2.1 und die Bedeutung der Abmessungen r , t , d und D aus Abbildung 2.4 hervor.

Es wird häufig fälschlicherweise angenommen, die Formzahldiagramme würden auf einer geschlossenen analytischen Lösung aus der Neuberschen Kerbspannungslehre [59] beruhen. Tatsächlich ermittelte Neuber elastizitätstheoretisch exakte Lösungen für die Grenzfälle unendlich *flache Kerbe* (Kerbtiefe ist sehr klein relativ zum Restquerschnitt) und unendlich *tiefe Kerbe* (Kerbtiefe ist sehr groß relativ zum Restquerschnitt). Bei flachen Kerben mit endlicher Tiefe aber über allen Grenzen wachsendem Durchmesser wird die Spannungskonzentration nur von den Kenngrößen Tiefe t und Krümmungsradius r charakterisiert bzw. bei der dimensionslos definierten Formzahl α_f vom Verhältnis t/r . Die Formzahl der tiefen Kerbe α_t hingegen hängt nur vom Verhältnis aus endlichem Abmaß des kleinsten Querschnitts d (bzw. a für Flachstäbe) und dem Krümmungsradius r ab. Neuber leitete für das Problem der flachen Kerbe mit elliptischer Krümmung einen Zusammenhang $\alpha_f = f(\sqrt{t/r})$ und für tiefe Kerben hyperbolischer Krümmung eine Funktion $\alpha_t = f(\sqrt{d/r})$ ab. Für beide Grenzfälle wird eine Lösung bei Zug, Biegung, Torsion und auch Schub sowohl für den außen- als auch innengekerbten Rundstab (Hohlwelle) angeboten.

Tab. 2.1: Formzahlkonstanten A , B , C und z zu Gleichung 2.2

Kerbform	umlaufende Rundnut			Absatz		
	Zug/Druck	Biegung	Torsion	Zug/Druck	Biegung	Torsion
A	0,22	0,2	0,7	0,62	0,62	3,4
B	1,37	2,75	10,3	3,5	5,8	19
C	–	–	–	–	0,2	1
z	–	–	–	–	3	2

Für »endliche« Kerben, bei denen weder d/r noch t/r unendlich ist, stellte Neuber die Hypothese auf, dass die Formzahl α durch die Formzahlen beider Grenzfälle vollständig bestimmt ist und über den Mittelungsansatz

$$\frac{1}{(\alpha - 1)^2} = \frac{1}{(\alpha_f - 1)^2} + \frac{1}{(\alpha_t - 1)^2} \quad (2.3)$$

berechnet werden kann. Die Formzahl hängt damit von den Kennwerten $\sqrt{t/r}$ und $\sqrt{d/r}$ gleichermaßen ab. Während sich die analytische Funktion für α_f sehr einfach in der Form

$$\alpha_f = 1 + \tilde{A} \sqrt{\frac{t}{r}} \quad (2.4)$$

mit der von der Belastungsart abhängigen Konstante \tilde{A} darstellt, ist die Funktion für α_t komplexer. Für eine bessere Zugänglichkeit stellte Neuber in der 1. und 2. Auflage seines Buches eine grafische Lösungsmöglichkeit in Form eines Nomogrammes bereit (siehe [34, S. 105] und [61]).

Dieses Berechnungsverfahren nahm sich Petersen [61] (nicht zu verwechseln mit Peterson [62]) an, um daraus eine praxistaugliche Bestimmung von Formzahlen für gekerbte Rundstäbe zu entwickeln und auf abgesetzte Wellen zu übertragen. In einem ersten Schritt vereinfachte er die analytische Darstellung der Funktion für α_t mit grafischen Methoden auf Basis von Neubers Nomogramm und zeigte die gute Übereinstimmung mit Feindehnungsmessungen an flachen Zugstäben mit Außenkerbe. Eingesetzt in (2.3) und verallgemeinert durch die Einführung der Konstanten A und B , die nur von der Belastungsart und Stabform abhängen, ergibt sich die Formzahl der technischen Kerbe zu

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{A}{t/r} + B \frac{(1+a/r)^2}{(a/r)^3}}} \quad \text{mit} \quad a = \frac{d}{2}. \quad (2.5)$$

Dieser Ansatz wurde von Petersen anschließend auf abgesetzte Wellen angewendet und die Formzahlkonstanten mit spannungsoptisch ermittelten Ergebnissen aus der Literatur und Messungen der Materialprüfungsanstalt Darmstadt bestimmt. Kerben mit $t/r > 1$ zeigten so eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung. Im Fall sogenannter »seichter« Kerben, die aufgrund $t/r < 1$ einen stumpfen statt rechten Winkel in der Wellenaußenkontur aufweisen (unvollständiger Viertel- bzw. Halbkreisbogen des Kerbgrundes), fallen die errechneten Formzahlen zu hoch aus. Sie weichen umso weiter von den gemessenen ab, je weiter t/r unter 1 liegt. Dieser begründbaren Abweichung wird durch ein Korrekturglied mit den Konstanten C und n Rechnung getragen, welches für große t/r verschwindet. Gleichung 2.5 erhält

damit die erweiterte Form

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{A}{t/r} + B \frac{(1+a/r)^2}{(a/r)^3} + \frac{C}{(t/r)^n}}} \quad \text{mit} \quad a = \frac{d}{2}. \quad (2.6)$$

Die neuen Formzahlkonstanten sind ebenfalls aus Versuchsergebnissen zu bestimmen und liegen in [61] für abgesetzte Wellen bei Biegung und Torsion vor. Petersen zeigt abschließend die gute Übereinstimmung seiner Formel mit vorhandenen Messergebnissen und die physikalische Berechtigung seines gewählten Ansatzes für das Korrekturglied.

Der vom IfL Dresden entwickelte ehemalige DDR-Standard TGL 19340 »Dauerfestigkeit der Maschinenbauteile« [80] führt erstmals die mit Gleichung 2.2 und Tabelle 2.1 beschriebenen Formzahldiagramme auf, welche sich bis heute in den aktuellen Berechnungsrichtlinien ([13], [22]) wiederfinden. Die Formel entspricht in ihrem formalen Aufbau der Gleichung 2.6 von Petersen [61]. Die Formzahlkonstanten nach Tabelle 2.1 wurden laut [34, S. 93] allerdings so festgelegt, dass im Mittel gute Übereinstimmung mit den Formzahlbildern nach Peterson [62] besteht. Der Formzahlkatalog von Peterson stützt sich neben theoretischen auf viele experimentelle Primärquellen.

Das Leichtbau-Handbuch des IfL Dresden [34, S. 93] weist zusätzlich darauf hin, dass die Formzahlen für gekerbte und abgesetzte Rundstäbe den sekundär mehrachsigen Spannungszustand im Kerbgrund infolge der Querdehnungsbehinderung (siehe Abschnitt 2.1.2) vernachlässigen. Das Vorgehen ist für zähe Werkstoffe vertretbar, da es bei der Vergleichsspannungsberechnung zu einer konservativen Abschätzung führt [36, S. 217]. Nur bei sprödem Werkstoffverhalten und Anwendung der Normalspannungshypothese können gegebenenfalls die resultierenden Beanspruchungen unterschätzt werden.

2.1.5 Kerbwirkungszahl

Entsprechend ihrer Definition kann die Formzahl für Berechnungen unter (statischer) Maximalbelastung herangezogen werden. Bei *schwingender* Belastung ist eine Modifikation der Formzahl notwendig, um Werkstoff- und Bauteilgrößeneinflüsse zu berücksichtigen. Dazu wird als neue Kenngröße die *Kerbwirkungszahl* β eingeführt. In internationalen Schriften erhält sie alternativ vorwiegend die Bezeichnung K_f mit dem Index f für »fatigue« (Ermüdung).

Die Kerbwirkungszahl ist definiert als der Quotient der Wechselfestigkeit des glatten, ungekerbten Probenstabes $\sigma_W(d)$ bzw. $\tau_W(d)$ mit dem Durchmesser d und der

Wechselfestigkeitsnennspannung des gekerbten Stabes σ_{WK} bzw. τ_{WK} [13], [36], [68]:

$$\beta_\sigma = \frac{\sigma_W(d)}{\sigma_{WK}} \quad \text{bzw.} \quad \beta_\tau = \frac{\tau_W(d)}{\tau_{WK}}. \quad (2.7)$$

Sie gilt damit zunächst für das Gebiet der Dauerfestigkeit und bei einer Mittelspannung von Null [64, S. 188].

In der klassischen Vorstellung ergeben sich die Unterschiede zwischen Formzahl und Kerbwirkungszahl aus der unterschiedlichen Berücksichtigung der Werkstoffstruktur. Als reine elastizitätstheoretische Größe nimmt die Formzahl den Werkstoff als ideales strukturloses Kontinuum an. Metallische Werkstoffe bestehen jedoch aus Kristalliten oder Körnern mit umgebenden Korngrenzen. Innerhalb der Kristallite bestehen stärkere Bindungskräfte als zur Umgebung. Die größeren Verformungswiderstände in den Kristalliten bewirken im mikroskopischen Bereich eine blockweise Verformung unter Last, bei der weniger beanspruchte Stoffbereiche hochbeanspruchte Bereiche abstützen (Mikrostützwirkung oder dynamische Stützwirkung genannt). Dadurch entspricht die tatsächlich auftretende Maximalspannung im Kerbgrund nicht mehr der theoretischen Spannung nach der Elastizitätstheorie, sondern einem niedrigeren Mittelwert über eine bestimmte strukturbedingte Länge [59, S. 103 f.], [68, S. 177]. Diese Erklärung setzt eine gradientenbehaftete Spannungsverteilung voraus, wie sie sich typischerweise im Kerbgrund einstellt. Die Stützwirkung ist umso größer, je höher der Spannungsgradient ist.

Aufgrund dieser spannungsmildernden Effekte des Werkstoffes nimmt die Kerbwirkungszahl kleinere Werte gegenüber der Formzahl an:

$$\alpha \geq \beta \geq 1. \quad (2.8)$$

Neben dem Zusammenhang mit Werkstoff und Bauteilgröße werden Kerbwirkungszahlen analog zur Formzahl in Abhängigkeit von der Belastungsart (Zug/Druck, Biegung und Torsion) aufgestellt.

Neuere Überlegungen zur Abminderung der tatsächlichen Kerbwirkung gegenüber der theoretischen Formzahl ziehen Fehlstellenmodelle heran. Bei statistisch verteilten Fehlstellen im Werkstoff sinkt die Wahrscheinlichkeit eine größere Fehlstelle anzutreffen, je kleiner der hochbeanspruchte Bereich ist (statistisch begründete Stützwirkung) [27, S. 178]. Die verschiedenen Rechenansätze werten die höchstbeanspruchte Fläche [7] oder das höchstbeanspruchte Volumen [42] aus.

Infolge ihrer Werkstoff- und Bauteilgrößenabhängigkeit lässt sich die Kerbwirkungszahl nicht wie die Formzahl direkt aus analytischen Lösungen bestimmen. Gemäß ihrer Definition in Gleichung 2.7 ist sie idealerweise aus (aufwendigen) experimentellen

Dauerversuchen an glatten und gekerbten Bauteilen zu ermitteln. Alle vorhandenen Verfahren zur *rechnerischen* Bestimmung der Kerbwirkungszahl β aus der Formzahl α basieren auf empirisch gewonnenen Erkenntnissen und stellen meist nur Näherungslösungen dar. Im Laufe der Zeit wurde eine Vielzahl an Berechnungskonzepten entwickelt, die sich mehr oder weniger stark in ihren Ergebnissen unterscheiden. Eine Zusammenfassung der klassischen Rechenverfahren findet sich beispielsweise in [10]. Hier sei nur das bekannteste Verfahren nach Siebel und Stieler erwähnt, welches mit entsprechenden Modifikationen in den gängigen Richtlinien zur Tragfähigkeitsberechnung von Wellen seinen Weg in die Praxis gefunden hat.

Siebel u. Stieler [75] bezeichnen das Verhältnis der elastizitätstheoretischen Spannungsspitze $\sigma_{\max K}$ zur effektiv wirksamen Spannungsspitze $\sigma_{\max K}^*$ im Kerbgrund (verminderter Spannungswert aufgrund der Stützwirkung des Werkstoffes) als dynamische *Stützziffer* n :

$$n = \frac{\sigma_{\max K}}{\sigma_{\max K}^*} = \frac{\alpha \cdot \sigma_n}{\beta \cdot \sigma_n} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.9)$$

Damit lässt sich die Kerbwirkungszahl β durch

$$\beta = \frac{\alpha}{n} \quad (2.10)$$

berechnen.

Die Stützziffer wurde von Siebel und Stieler als Funktion des bezogenen Spannungsgefälles G' (siehe Kasten auf Seite 15) für die einzelnen Werkstoffarten erkannt und durch Versuche bestimmt. Die Auswertung der Versuchsergebnisse ergab als Näherung für die Stützziffer

$$n = 1 + \sqrt{s_g \cdot G'}, \quad (2.11)$$

wobei die Gleitschichtbreite s_g die Abhängigkeit der Stützwirkung vom Werkstoff widerspiegelt. Grundlage ist die werkstoffmechanische Vorstellung, dass die versagenskritische Spannung über eine bestimmte Gleitschichtbreite erreicht werden muss, die etwa dem mittleren Korndurchmesser entspricht. Stieler entwarf zuvor in [77, S. 49] ein Diagramm zur Bestimmung der Stützziffer in Abhängigkeit des bezogenen Spannungsgefälles G' und des Werkstofftyps (Grauguss, Stahlguss, austenitische Stähle, weiche Stähle, Vergütungsstähle, Federstähle).

Das in der Berechnungsvorschrift DIN 743 [13] verwendete Verfahren zur Bestimmung der Stützziffer greift die Methode von Siebel und Stieler auf. Die dem Anwender selten bekannte Gleitschichtbreite wird durch einen Zusammenhang in Abhängigkeit von der Streckgrenze σ_S ersetzt, basierend auf der Beobachtung, dass Werkstoffe mit steigender Festigkeit ein feineres Gefüge und damit kleinere Korndurchmesser

Bezogenes Spannungsgefälle: Das einfache Spannungsgefälle G ist der maximale Spannungsgradient (an der Kerboberfläche) der örtlichen Spannungsverteilung $\sigma(s)$

$$G = \left. \frac{d\sigma(s)}{ds} \right|_{s=0}, \quad (2.13)$$

wobei s die Ortskoordinate von der Kerboberfläche in Richtung des maximalen Spannungsabfalls darstellt.

Bezieht man G auf die Maximalspannung im Kerbgrund $\sigma_{\max K}$, so erhält man das *bezogene* Spannungsgefälle G' mit der Einheit $1/\text{mm}$:

$$G' = \frac{1}{\sigma_{\max K}} \cdot \left. \left(\frac{d\sigma(s)}{ds} \right) \right|_{s=0}. \quad (2.14)$$

Das bezogene Spannungsgefälle ist wie die Formzahl α eine *linear-elastische* Größe und demnach unabhängig vom Werkstoff. Es hängt hauptsächlich vom Kerbradius, von der Bauteilgröße und von der Beanspruchungsart ab.

aufweisen. Für Werkstoffe *ohne* harte Randschicht gilt somit:

$$n = 1 + \sqrt{G' \text{ mm}} \cdot 10^{-\left(0,33 + \frac{\sigma_S(d)}{712 \text{ N/mm}^2}\right)}. \quad (2.12)$$

Die rechnerische Erfassung der Kerbwirkung von allgemein oder kompliziert gestalteten Kerben erfordert demnach die Bestimmung der Formzahl und des Spannungsgefälles. Beide Größen lassen sich aus der Spannungsverteilung nach der Elastizitätstheorie ableiten. Im Falle von Mehrfachkerben ist diese gewöhnlich nur mit numerischen Methoden wie der FEM zu ermitteln.

In der Praxis treten allerdings auch viele Kerbfälle auf, die am Versagensort rechnerisch eine linear-elastische Spannungssingularität besitzen und damit eine Bestimmung von Formzahl und Spannungsgefälle verhindern. Prominente Beispiele sind die klassischen Welle-Nabe-Verbindungen Querpress- und Passfederverbindung, bei denen die Ermüdungsrissinitiierung in der Kontaktzone nahe der Nabenkante liegt. In diesem Bereich überlagern sich zudem Effekte der Reibdauerermüdung, die in dieser Arbeit nicht weiter thematisiert werden. Für den Tragfähigkeitsnachweis solcher Kerbfälle ist der Anwender größtenteils auf experimentell gewonnene Kerbwirkungszahlen angewiesen. Entsprechende Untersuchungen sind bis heute Gegenstand der Forschung (z. B. in [43], [44], [46]).

Neben der diskutierten dynamischen Stützwirkung im mikroskopischen Bereich werden die Schwingfestigkeitseigenschaften von der Probengröße und vom Oberflächen-

zustand beeinflusst. Kloos [39] unterscheidet entsprechend der Entstehungsursachen zwischen vier Einflussmechanismen:

- *Technologischer Größeneinfluss* – Durchmesserabhängigkeit der Randfestigkeit
- *Spannungsmechanischer (geometrischer) Größeneinfluss* – Stützwirkung bei inhomogener Spannungsverteilung der Nennspannung über den Bauteilquerschnitt
- *Statistischer Größeneinfluss* – Erhöhte Wahrscheinlichkeit von Fehlstellen mit zunehmender Probengröße
- *Oberflächentechnischer Größeneinfluss* – Tiefenwirkung von Oberflächenverfestigungen

Je nach Ermittlungsverfahren sind Teile dieser Einflussgrößen bereits in der Kerbwirkungszahl enthalten oder werden in den verschiedenen Nachweisverfahren durch separate Einflussfaktoren erfasst. Eine Kopplung der vorwiegend empirisch quantifizierten Größeneinflussmechanismen kann nicht immer vermieden werden. Die vorliegende Arbeit geht von der Übertragbarkeit solcher Größeneinflussfaktoren auf Bauteile mit Mehrfachkerben aus.

2.1.6 Rechnerische Bestimmung der Kerbwirkung bei Mehrfachkerben

Vor der Verbreitung von numerischen Methoden zur Strukturanalyse allgemein geformter Körper wurde nach Ansätzen gesucht, die Form- oder Kerbwirkungszahl von Mehrfachkerben durch Kombination der bekannten Kennzahlen bei Einfachkerben zu berechnen.

Herold [30] leitete bereits 1934 anhand von Messergebnissen die Beziehung ab, nach der die Gesamtkerbwirkungszahl der Überlagerungskerbe β_{ges} bei jeder Kombination von Einzelkerben größer als die Einzelkerbwirkungen β_1 und β_2 , aber immer kleiner als deren Produkt ist:

$$\max(\beta_1, \beta_2) \leq \beta_{\text{ges}} \leq \beta_1 \cdot \beta_2. \quad (2.15)$$

In anderen Worten: Das Prinzip der Superposition gilt für die Form- oder Kerbwirkungszahl nicht. Dolan [20, S. 37] formulierte 1937 eine identische Schlussfolgerung auf Basis von Versuchen mit Absätzen und Querbohrungen, wahlweise überlagert mit Korrosion durch Leitungswasser. Die Multiplikation der Formzahlen zweier Einzelkerben zur Gesamtformzahl (beispielsweise in [68, S. 174]) wird nur dann ein zutreffendes Ergebnis liefern, wenn die Spannungsspitze im Kerbgrund der größeren Kerbe noch als Nennspannung für die kleinere Kerbe interpretiert werden kann [63, S. 128].

Dies setzt zwei stark voneinander abweichende Ausrundungsradien der beteiligten Kerben voraus.

Verschiedene Schriften zitieren wiederholt die dem Autor nicht zugängliche Arbeit von Moszyński [55]. Nach [63] schlug Moszyński mittels rein geometrischer Betrachtungen die erste Näherungsformel zur Berechnung der Gesamtkerbwirkungszahl in einfacher Form vor:

$$\beta_{\text{ges}} = 1 + (\beta_1 - 1) + (\beta_2 - 1). \quad (2.16)$$

Anwendung findet die Gleichung in der FKM-Richtlinie [22, S. 45] sowie indirekt in der DIN 743 bei der Berücksichtigung des Oberflächenrauheitsfaktors $K_{F\sigma}$, welcher als reziproke Kerbwirkungszahl der überlagerten Rauheit aufgefasst werden kann.

Der Suche nach einer analytischen Lösung zur Beschreibung der Formzahl einer Zweifachkerbe widmeten sich u. a. Puchner u. Kamenský [63]. Aufbauend auf Arbeiten von Vicentini [86] sowie Paul u. Faucett [60] entwickelten sie nach dem Vorbild der Neuberschen Interpolationsformel für endlich tiefe Kerben (siehe Gleichung 2.3) ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Form- und Kerbwirkungszahlen von »Kerben im Kerbrand«:

$$\frac{1}{(\alpha_{\text{ges}} - 1 + \Delta\alpha_{\text{ges}})^2} = \frac{1}{(\alpha_{\text{tr}} - 1)^2} + \frac{1}{[\alpha_{\text{fR}} + (\alpha_{\text{ftr}} - 1) \cdot \sqrt{1 - r/R} - 1]^2}. \quad (2.17)$$

Darin ist α_{R} die Formzahl der größeren Kerbe mit Rundungsradius R und Tiefe T und α_{r} die Formzahl der kleineren Kerbe mit Parametern r und t . Analog zu Neuber steht jeweils der Index t für die gedachte, unendlich tiefe und der Index f für die unendlich flache Kerbe. Der Einfluss des Restgliedes $\Delta\alpha_{\text{ges}}$ ist gering und kann für praktische Berechnungen zu Null gesetzt werden, zumal die berechneten Werte damit auf der sicheren Seite liegen. Diese theoretischen Lösungen und deren experimentelle Überprüfung beschränken sich allerdings auf das akademische Beispiel einer (Rund-) Nut in (Rund-)Nut.

Die Übertragbarkeit der genannten Berechnungsansätze auf beliebig gestaltete Mehrfachkerben, wie beispielsweise in Abbildung 1.1 dargestellt, ist nicht gegeben. Linke u. a. [49] verweisen bei »nicht einfachen Kerbfällen« auf die Einbeziehung von räumlichen FE-Berechnungen zur Bestimmung der Kerbwirkung. Im Kontext von Wellen und Achsen, für die stets eine Nennspannung elementar berechenbar ist, wird (ohne tiefgreifende Erläuterung) die einfache Formzahlermittlung mit

$$\alpha = \frac{\sigma_{\text{FEM}}}{\sigma_n} \quad (2.18)$$

angegeben. Zudem ist die Stützziffer durch Auswertung des Spannungstiefenverlau-

fes oder durch entsprechende Näherungsverfahren zu bestimmen. Die vorliegende Arbeit baut auf eben diesen Grundgedanken auf, präzisiert aber die Vorgehensweise für mehrachsige Spannungszustände im Kerbgrund, die bei Mehrfachkerben geometriebedingt typischerweise vorliegen.

2.2 Zahnwellenverbindungen (Beispiel einer Mehrfachkerbe)

2.2.1 Einordnung

Maschinenelemente, die den Welle-Nabe-Verbindungen zugeordnet werden, lassen sich nach Kollmann [41] in formschlüssige, reibschlüssige und stoffschlüssige Verbindungen unterteilen. Jüngere Entwicklungen, wie die Press-Presslöt-Verbindungen oder Zahnwellenverbindungen mit Presssitz, können auch Kombinationen der Verbindungsarten darstellen. Die Zahnwelle als Mitglied der *Profilwellen* gehört zu den formschlüssigen Verbindungen, da die Kraftübertragung über die Formgebung (Normalkräfte an den Kontaktflanken) realisiert wird.

Anhand der Form ihrer Mitnehmer differenzieren sich die Profilwellen in:

- Zahnwellen-Verbindungen mit evolventischen Flanken,
- Keilwellen-Verbindungen mit geraden, parallelen Flanken,
- Kerbzahnwellen-Verbindungen mit prismatischem Querschnitt der Zähne und geneigten Flanken (Flanken der Nabe sind ebene Flächen), sowie
- Polygonwellen-Verbindungen mit Polygon-Profil (Unrund-Profil).

Abbildung 2.5 zeigt schematische Darstellungen der verschiedenen Profilwellen.

2.2.2 Geometrische Gestaltung

Zahnwellenverbindungen mit evolventischem Flankenprofil können prinzipiell mit unterschiedlichen Eingriffswinkeln hergestellt werden. Die am häufigsten verwendete Verzahnung nach DIN 5480 [15] beschränkt sich auf einen einheitlichen Eingriffswinkel von 30° . Diese Norm basiert auf gestuften Bezugsdurchmessern, die unabhängig vom verwendeten Zahnmodul sind. Dadurch ist eine Anpassung des Zahnwellendurchmessers auf genormte Wälzlagerdurchmesser möglich. Erreicht wird dies durch

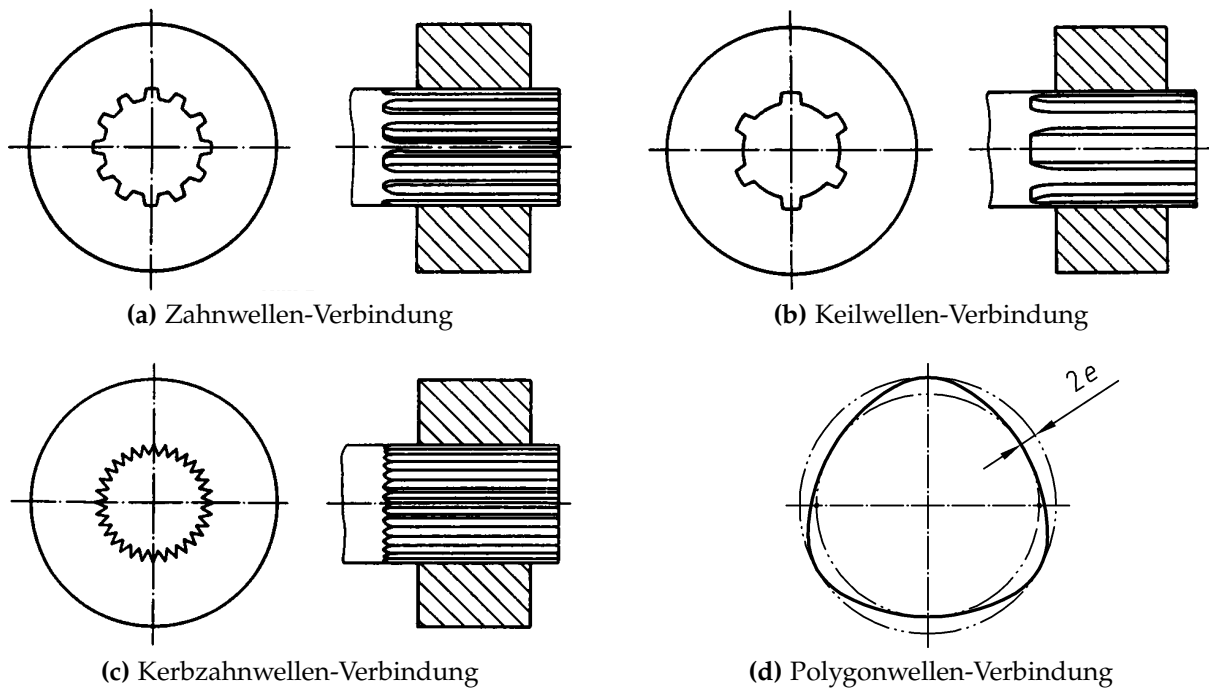


Abb. 2.5: Schematische Darstellung von Profilverbindungen (aus DIN ISO 6413 [18] und DIN 32711-1 [17])

entsprechende Profilverschiebung der Verzahnung von Welle und Nabe. Alternativ zu DIN 5480 sind in ISO 4156 [35] bzw. der amerikanischen ANSI B92.2M [1] auch Zahnwellen mit einem Eingriffswinkel von $37,5^\circ$ und 45° genormt. Sie erhalten in dieser Arbeit jedoch keine Berücksichtigung.

Die Geometriedefinition der Passverzahnung mit Evolventenflanken erfolgt analog zur Laufverzahnung mittels eines einheitlichen, zahnstangenförmigen Bezugsprofils (siehe Abbildung 2.6). Die Verzahnung einer Zahnwellenverbindung nach DIN 5480 ist durch den Bezugsdurchmesser d_B , den Zahnmodul m , die Zähnezah z und die Wahl des Herstellungsverfahrens vollständig bestimmt. Die Profilverschiebung von Welle x_1 und Nabe x_2 für Zahndicken-Nennmaß ergibt sich dann zu

$$x_1 = \frac{d_B - m \cdot z - 1,1 \cdot m}{2 \cdot m} \quad \text{und} \quad x_2 = -x_1. \quad (2.19)$$

Eine Übersicht der weiteren abhängigen oder konstanten Bestimmungsgrößen des Bezugsprofils findet sich in Tabelle 2.2 auf Seite 21.

Die Zahnfußform und damit die Kerbempfindlichkeit der Verzahnung werden mitunter erheblich vom Fertigungsverfahren beeinflusst (siehe ρ_{FP} und h_{FP} in Tabelle 2.2). Beim Kaltwalzen ist eine Fußvollausrundung (Abbildung 2.7) bei allen Verzahnungen

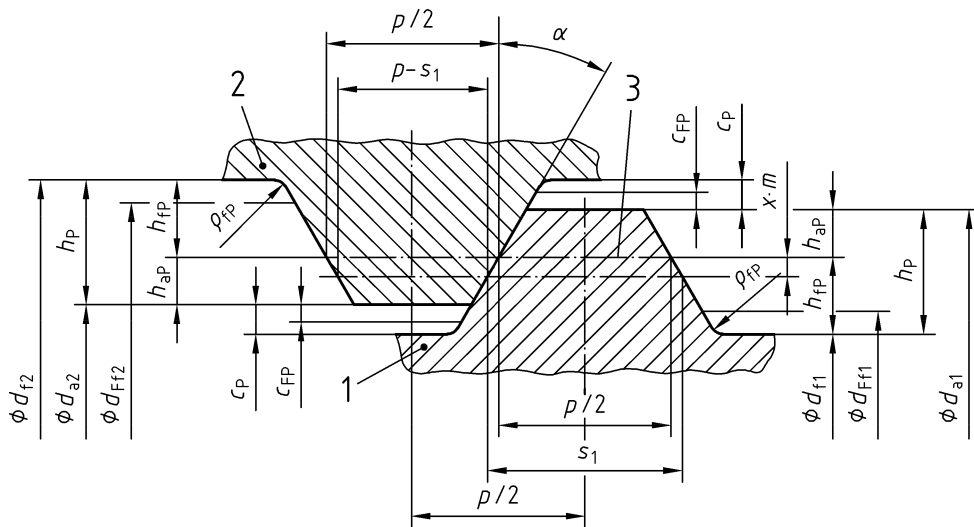


Abb. 2.6: Bezugsprofil (aus DIN 5480 [15])

der Welle möglich [15]. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Untersuchung der, bezüglich der Kerbwirkung kritischeren, zerspanend hergestellten Zahnfußformen (Wälzfräsen, Wälzstoßen, Räumen).

Die Zentrierung der Zahnwellenverbindung erfolgt bevorzugt über die Zahnflanken. In Ausnahmefällen sieht die Norm DIN 5480 eine Durchmesserzentrierung am Innen- oder Außendurchmesser vor.

Wie eingangs in Abbildung 1.2 auf Seite 3 gezeigt, lässt sich beim Übergang der verzahnten zur glatten Welle konstruktiv zwischen zwei Ausführungsformen unterscheiden. Je nach Platzbedarf, Herstellungsverfahren oder Festigkeitsüberlegung wird die Zahnwelle mit einem freien oder gebundenen Zahnauslauf versehen.

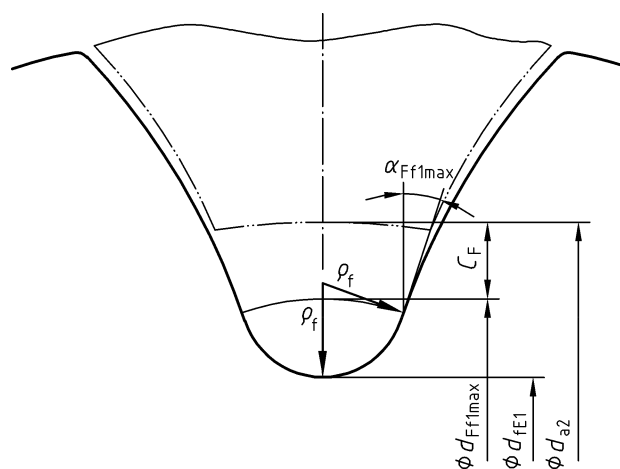


Abb. 2.7: Fußvollausrundung bei Herstellung mit Kaltwalzwerkzeugen (aus DIN 5480 [15])

Tab. 2.2: Bestimmungsgrößen des Bezugsprofils (aus DIN 5480 [15])

Bestimmungsgrößen		Kurzz.	Verzahnungsdaten und Berechnungsgleichungen			
Modul		m	0,5-0,6-0,75-0,8-1,0-1,25-1,5-1,75-2-2,5-3-4-5-6-8-10			
Eingriffswinkel		α	30°			
Teilung		p	$m \cdot \pi$			
Zähnezahl	Welle	z_1	z_1			
	Nabe	z_2	$-z_1$			
Profilverschiebung (Nennwert)	Welle	$x_1 \cdot m$	-0,05 · m bis + 0,45 · m (Ausnahmen bis +0,879 · m)			
	Nabe	$x_2 \cdot m$	$-x_1 \cdot m = +0,05 \cdot m$ bis -0,45 · m (Ausnahmen bis -0,879 · m)			
Kopfhöhe des Bezugsprofils		h_{aP}	0,45 · m			
Fußhöhe des Bezugsprofils = Kopfhöhe des Werkzeug- bezugsprofils		h_{fP} = h_{aP0}	0,55 · m	0,60 · m	0,65 · m	0,84 · m
Zahnhöhe des Bezugsprofils		h_P	$h_{aP} + h_{fP}$			
Kopfspiel des Bezugsprofils		c_P	$h_{fP} - h_{aP}$			
Fußrundungsradius des Bezugsprofils		ρ_{fP}	0,16 · m Zerspanen		0,54 · m Kaltwalzen	
Teilkreisdurchmesser		d	$m \cdot z$			
Grundkreisdurchmesser		d_b	$m \cdot z \cdot \cos \alpha$			
Bezugsdurchmesser		d_B	$m \cdot z_1 + 2 \cdot x_1 \cdot m + 1,1 \cdot m$, Durchmesser mit Normzahlen nach DIN 323-1 und Wälzlager-Bohrungs-Durchmesser, im Bereich $d_B < 40$ mm und $m \leq 1,75$ mm ganzz. mit 1 mm gestuft.			
Naben-Kopfkreisdurchmesser		d_{a2}	$m \cdot z_2 + 2 \cdot x_2 \cdot m + 0,9 \cdot m$			
Naben-Fußkreisdurchmesser		d_{f2}	$m \cdot z_2 + 2 \cdot x_2 \cdot m - 2 \cdot h_{fP}$ (siehe 7.1)			
Naben-Fußformkreisdurchmesser		d_{Ff2}	$\leq - (d_{a1} + 2 \cdot c_{Fmin})$			
Wellen-Kopfkreisdurchmesser		d_{a1}	$m \cdot z_1 + 2 \cdot x_1 \cdot m + 0,9 \cdot m$			
Wellen-Fußkreisdurchmesser		d_{f1}	$m \cdot z_1 + 2 \cdot x_1 \cdot m - 2 \cdot h_{fP}$ (siehe 7.1)			
Wellen-Fußformkreisdurchmesser		d_{Ff1}	$\leq d_{a2} - 2 \cdot c_{Fmin}$			
Formübermaß des Bezugsprofils		c_{FP}	0,02 · m	0,07 · m	0,12 · m	0,12 · m
Mindest-Formübermaß		c_{Fmin}	Räumen Wälzfräsen Wälzstoßen Kaltwalzen siehe Tabelle 4			
Naben-Nenn-Zahnlücke		e_2	$e_2 = s_1$			
Wellen-Nenn-Zahndicke		s_1	$m \cdot \pi/2 + 2 \cdot x_1 \cdot m \cdot \tan \alpha$			

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die vorliegenden Untersuchungen nicht zum Ziel haben, die geometrische Gestaltung von Zahnwellenverbindungen zu optimieren, sondern die rechnerische Erfassung der Kerbwirkung der gegebenen, standardisierten Geometrie zu präzisieren.

2.2.3 Literaturübersicht zu Form- und Kerbwirkungszahlen von Zahnwellen

Typische Schadensfälle

Dietz [12] liefert eine Zusammenstellung der möglichen Versagensarten einer Zahnwellenverbindung mit beispielhaften Schadensbildern. Die möglichen Ausfallkriterien können allgemein in die zwei Kategorien

- Flankenverschleiß und
- Bruchschäden

eingeteilt werden. Letzteres beinhaltet Gewalt- und Ermüdungsbrüche der Welle, Abscheren und Ausbruch der Zähne sowie das Aufplatzen der Zahnnahe.

Flankenverschleiß tritt infolge von Relativbewegungen zwischen Welle und Nabe während des Betriebes und/oder durch das komplexe Phänomen der Reibkorrosion auf. Das Verschleißverhalten von Zahnwellenverbindungen wurde u. a. von Zapf [99], Schäfer [67] und Hua [33] sowohl experimentell als auch theoretisch umfangreich untersucht. Es soll hier nicht weiter betrachtet werden, da es nicht in Zusammenhang mit der Problemstellung der vorliegenden Untersuchung steht.

Die Hauptursache für Gewalt- und insbesondere Ermüdungsbrüche liegt in der konstruktiv unvermeidbaren Kerbwirkung an der Zahnwelle. Abbildung 2.8 zeigt die Orte mit Beanspruchungsüberhöhungen an einer Zahnwellenverbindung mit freiem Auslauf. In dieser Arbeit wird grundsätzlich zwischen den zwei potenziell kritischen Versagensorten (Kerbstellen) Zahnauslauf (e) und Zahnfuß (a-d) unterschieden. Welcher Nachweisort letztlich den Ausgangspunkt von Schwingungsrissen bildet, hängt von deren geometrischer Ausgestaltung ab und muss demnach mit separaten Form- oder Kerbwirkungszahlen beschrieben werden.

Obwohl Zahnwellenverbindungen primär zur Übertragung von Drehmoment eingesetzt werden, müssen diese Welle-Nabe-Verbindungen in der Praxis komplexen Belastungsverhältnissen standhalten. Neben der funktionsbedingten Torsionsbeanspruchung tritt zumeist eine zusätzliche Biegebeanspruchung z. B. infolge von Achsver-

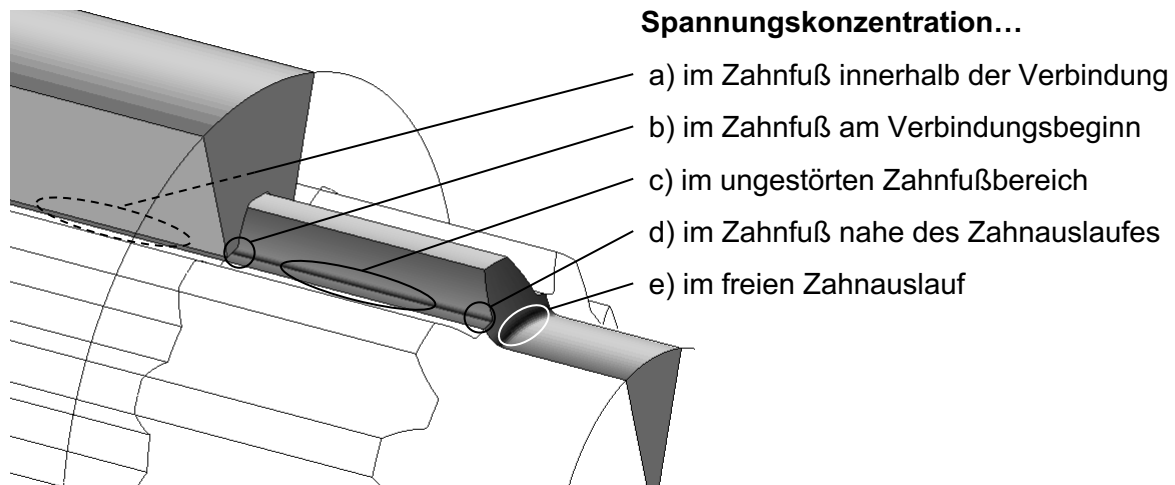


Abb. 2.8: Orte der Spannungsspitzen an einer Zahnwellenverbindung mit freiem Auslauf

satz oder getriebeseitig eingeleiteter Querkraft auf. Die bei Wellenrotation resultierende Umlaufbiegung erweist sich häufig als Ursache für Schwingungsbrüche. Eine praxisgerechte Auslegung erfordert deshalb Berechnungsfaktoren zur Erfassung der Kerbwirkung für Torsions- und für Biegebelastung.

Form- und Kerbwirkungszahlen

Die bereits vielfach genannte Norm DIN 743 »Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen« [13] weist für Zahnwellen eine experimentell bestimmte Kerbwirkungszahl in Abhängigkeit der Werkstoffzugfestigkeit aus. Sie gilt lediglich für die reine Gestaltkerbe Zahnfußausrundung ohne Nabeneinfluss und ohne Berücksichtigung der Auslaufgeometrie (Abbildung 2.9a). Weiterhin finden keinerlei Geometrieparameter Berücksichtigung. Der Formzahlkatalog von Peterson [62] gibt eine Formzahl in Abhängigkeit des Zahnfußausrundungsradiuses an, die auf spannungsoptischen Versuchen von Yoshitake [98] beruhen. Diese ist allerdings ebenfalls auf die reine Gestaltkerbe beschränkt und gilt für Keilwellen unter Torsion.

Die rechnerische Ermittlung der örtlichen Beanspruchung im Zahnfuß sowohl für den ungestörten Wellenbereich als auch für den Rand der Welle-Nabe-Verbindung (Abbildung 2.9b) ermöglicht die Berechnungsrichtlinie DIN 5466 »Tragfähigkeitsberechnung von Zahn- und Keilwellen-Verbindungen« [14]. Die Norm berücksichtigt hierbei verschiedene Betriebszustände, u. a. Biegung und Torsion. Mit den berechneten Kerbspannungen ist die Ableitung einer Formzahl zur Anwendung im Schwingfestigkeitsnachweis nach DIN 743 denkbar. DIN 5466 stellt selbst keine konkreten

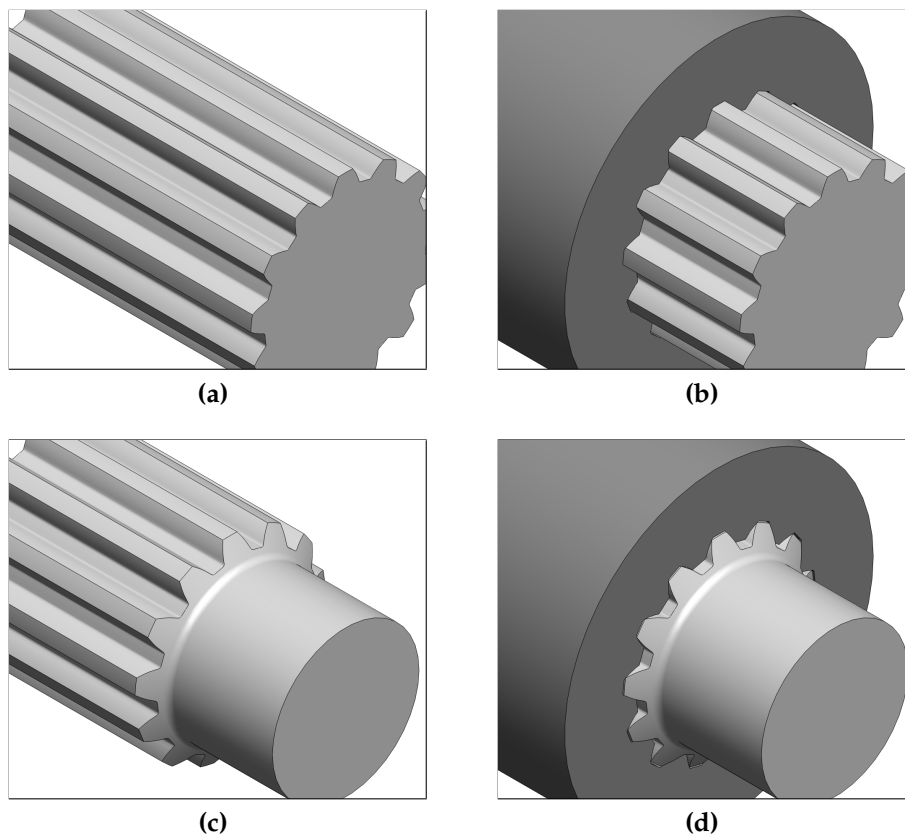


Abb. 2.9: Verschiedene Modelle einer Zahnwelle bzw. Zahnwellenverbindung

Vorschriften zur Berechnung der Ermüdungsfestigkeit bereit. Die letzte Überarbeitung dieser Berechnungsrichtlinie wurde maßgeblich von den Ergebnissen und Berechnungsansätzen von Wesolowski [96] beeinflusst. In seinen Arbeiten ermittelte er mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode die Teilbeanspruchungen in der Zahnfußausrundung für die reine Zahnwellentorsion und für die ebene Zahnscheibe mit Flankenbelastung. Zur Bestimmung der maximalen Zahnfuß-Vergleichsspannung am Übergang von Zahnwelle zur Welle-Nabe-Verbindung (Nachweispoint (b) in Abbildung 2.8) wurden anschließend die Teilbeanspruchungen – gewichtet durch entsprechende Einflussfaktoren – tensoriell addiert. Für drehmomentbelastete Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 quantifizierte er auf numerischem Wege die notwendigen Kenngrößen zur Spannungsberechnung in Abhängigkeit mehrerer geometrischer Parameter wie Zähnezahl, Zahnfußausrundung und Nabenlänge.

DIN 5466 und ein Großteil der bisherigen Veröffentlichungen zur Tragfähigkeit von Zahnwellen (z. B. Burgtorf [8], Dietz [12], Kohl [40], Villmer [87], Volfson [88]) beschränken sich auf die Kerbwirkung im Zahnfuß. Gänzlich unberücksichtigt bleiben hingegen die Beanspruchungsüberhöhungen aufgrund der Zahnauslaufgeometrie. Ei-

ne Ausnahme stellen die Untersuchungen von Schöpf [74] dar, welcher u. a. erstmals auf spannungsoptischem Wege Torsionsformzahlen für Zahnwellen mit freiem Auslauf (aufgesetzter Verzahnung) ermittelte. Umfangreiche numerische Berechnungen der Formzahl für Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf wurden von Daryusi [10] im Zuge des FVA Forschungsvorhabens 467-I [69] durchgeführt. Im Gegensatz zum freien Zahnauslauf unterschieden sich die Ergebnisse für den gebundenen Auslauf kaum von den Zahnfußspannungen ohne Berücksichtigung der Auslaufgeometrie. Die durchgeführte Variantenanalyse beinhaltete die geometrischen Größen Zähnezahl sowie Kerbschärfe und -tiefe des freien Zahnauslaufes. Seine Untersuchungen konzentrierten sich jedoch, bis auf einige Ausnahmen, auf die Bestimmung der Kerbwirkung an der reinen Gestaltkerbe Zahnwelle *ohne* Nabe (Abbildung 2.9c).

Mit dem bereits genannten Forschungsvorhaben FVA 467-I [69] wurde ein wesentlicher Schritt hinsichtlich der genaueren Ermittlung von Torsionsform- und Torsionskerbwirkungszahlen geleistet. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgten neben den theoretischen Untersuchungen von Daryusi mehrere experimentelle Versuche am Institut für Maschinenwesen der TU Clausthal. Es wurden sowohl statische als auch dynamische Dauerfestigkeitsversuche unter reiner Biege- und Torsionsbelastung durchgeführt. Für den Bereich der Torsionsbelastung (schwellend) konnte eine gute Übereinstimmung von theoretisch und experimentell bestimmten Kerbwirkungszahlen erreicht werden. Bezüglich der Biegekerbwirkungszahl gelang jedoch kein zufriedenstellender Abgleich zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen. Insbesondere die genaue Erfassung der Vorspannung der bei den Umlaufbiegeversuchen analysierten Zahnwellenverbindung mit Presssitz bereitete große Schwierigkeiten.

In einer auf den Arbeiten von Daryusi aufbauenden numerischen Untersuchung des Autors [70] erfolgte die Analyse der Beanspruchungsverhältnisse im freien Zahnauslauf bei *kombinierter* Belastung (Überlagerung von schwingender Torsions- und Biegebelastung). Hierbei wurden örtlich voneinander getrennte Spannungsmaxima bei den verschiedenen Einzelbelastungen festgestellt und die daraus resultierende Festigkeitsreserve quantifiziert.

Die internationalen Forschungstätigkeiten jüngeren Datums beschäftigen sich größtenteils mit den Lastverteilungs- und Lastaufteilungseigenschaften (z. B. Barrot u. a. [4], Hong u. a. [32], Tjernberg [84]) sowie mit Reibermüdung (z. B. Sum u. a. [78]) und Verschleiß (z. B. Ding u. a. [19]) von Zahnwellenverbindungen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass neben der in DIN 743 mitgelieferten groben Abschätzung mehrere präzisierende Arbeiten hinsichtlich der Kerbbeanspruchung von Zahnwellen zur Verfügung stehen, aber insbesondere der praxisrelevante Fall einer Zahnwellen-Verbindung mit Nabe nahe dem Zahnauslauf (Abbildung 2.9d) nur für Einzelfälle untersucht wurde.

2.3 Rechnerischer Ermüdungsfestigkeitsnachweis für Wellen und Achsen

2.3.1 Nachweisverfahren

Die verschiedenen allgemeinen Nachweisverfahren werden entsprechend ihrer zentralen Kenngrößen in Nennspannungs-, Strukturspannungs-, Kerbspannungs-, Kerbdehnungs- und Rissfortschrittskonzept unterteilt [64, S. 549 ff.]. Die Bezeichnung örtliches Konzept kann sowohl auf das Kerbspannungs- als auch auf das Kerbdehnungskonzept verweisen.

Der *Nennspannungsnachweis* vergleicht die global linearisierte Beanspruchung (Nennspannungsamplitude) mit einer bauteilabhängigen Nennspannungs-Wöhlerlinie (kurz Bauteilwöhlerlinie). Diese Wöhlerlinie beinhaltet neben den für die Ermüdungsfestigkeit relevanten Werkstoffeigenschaften den Einfluss der Bauteilgeometrie inklusive Kerbwirkung am festgelegten Querschnitt. Die Umrechnung von Werkstoff- auf Bauteildauerfestigkeit erfolgt mit Hilfe einer experimentell bestimmten Kerbwirkungszahl oder theoretisch abgeleiteten Formzahl (siehe Abschnitt 2.1).

Der *Strukturspannungsnachweis* ist für den Problembereich Wellen und Achsen von vernachlässigbarer Bedeutung. Sein Anwendungsgebiet liegt vorwiegend bei Schweißverbindungen. Als kennzeichnende Beanspruchungsgröße wird die Spannung am Nahtübergang (geprägt durch die umgebende Bauteilstruktur) ohne den festigkeitsmindernden Einfluss der Schweißnaht selbst herangezogen. Die Grundidee besteht in der Trennung von Bauteilkerbwirkung und Nahtkerbwirkung, um die gleichbleibenden Festigkeitskennwerte der Schweißnaht auf verschiedenen Bauteile übertragen zu können [64, S. 557].

Beim elastischen *Kerbspannungsnachweis* wandert gegenüber dem Nennspannungskonzept die Erfassung der Spannungsüberhöhung im Kerbgrund von der Beanspruchbarkeit auf die Seite der Beanspruchung. Die örtlich zu bestimmenden Kerbspannungen unter Verwendung eines linear-elastischen Werkstoffmodells werden mit der Dauerfestigkeit einer ungekerbten Werkstoffprobe verglichen. Der spannungsmindernde oder festigkeitssteigernde (zweitragige) Effekt der Mikrostützwirkung kann auf der Beanspruchungs- oder Beanspruchbarkeitsseite Berücksichtigung finden. In Analogie mit dem Nennspannungsnachweis lässt sich zudem aus der Bauteildauerfestigkeit eine Bauteilzeitfestigkeit annähern. Das Vorgehen nach dem Kerbspannungskonzept setzt voraus, dass keine größeren zyklischen plastischen Formänderungen im Kerbgrund auftreten [64, S. 560]. Es eignet sich vor allem zur Anwendung auf Bauteile, für die kein Nennquerschnitt definierbar ist.

Im *Kerbdehnungsnachweis* tritt anstelle der elastischen Kerbspannung die elastisch-plastische Kerbdehnung als kennzeichnende Beanspruchungsgröße. Für den Ermüdungsfestigkeitsnachweis gilt es, die örtlichen Dehnungen mit elastischem und plastischem Anteil auf Basis eines Werkstoffmodells mit *zyklischer* Spannungs-Dehnungs-Kurve zu berechnen und der örtlichen Dehnungs-Wöhlerlinie einer axialbelasteten ungekerbten Vergleichsprobe gegenüberzustellen. Das Verfahren erzwingt eine tiefere Durchdringung der festigkeitsrelevanten Zusammenhänge, erfordert jedoch auch viele Eingabeparameter, die dem Konstrukteur mitunter nicht vorliegen. Des Weiteren ist keine Normierung des Berechnungsganges vorhanden oder abzusehen [64, S. 568].

Das *Rissfortschrittskonzept* berechnet keine Beanspruchungsgrenzwerte, sondern ermittelt das makroskopische Risswachstum aufgrund einer zyklischen Beanspruchung. Es dient vorwiegend zur Dimensionierung schadenstolerant betriebener Konstruktionen, z. B. im Flugzeugbau. Das Konzept soll an dieser Stelle nur der Vollständigkeit halber genannt sein.

Allgemein sind die spannungsbasierten Nachweisverfahren (Nenn-, Struktur-, Kerbspannungskonzept) vor allem für das Gebiet der Dauerfestigkeit geeignet und dadurch weit verbreitet genutzt. Im Zeitfestigkeitsbereich, in dem signifikante plastische Verformungen auftreten können, führen dehnungs- und energiebasierte Verfahren zu einer höheren Treffsicherheit. Sie finden insbesondere Anwendung bei Konstruktionen mit sehr hohen Anforderungen (Flugzeugbau, Turbinen), für die eine dauerfeste Auslegung nicht mehr in Frage kommt [76].

Das Vorgehen nach dem Nennspannungskonzept erweckt im wissenschaftlichen Umfeld oft den Eindruck, als überholt zu gelten. Dabei erzielt es prinzipiell die gleichen Tragfähigkeitsergebnisse wie das Vorgehen mit örtlichen Spannungen. Zudem können mit dem Bezug zu einer Nennspannung Erkenntnisse aus experimentellen Bauteilversuchen unmittelbar eingebunden und auf gleich gelagerte Fälle übertragen werden. Dieser Umstand und die tiefe Verankerung in entsprechenden Regelwerken erhebt das Nennspannungskonzept zum in der Praxis am häufigsten angewendeten Verfahren zur Beurteilung der Ermüdungsfestigkeit.

2.3.2 Regelwerke

Dieser Abschnitt soll keine vollumfängliche Beschreibung der einschlägigen Regelwerke darstellen, sondern nennt für das umrissene Themenfeld relevant erscheinende, ausgewählte Eigenschaften der Berechnungsnorm DIN 743 [13], der FKM-Richtlinie [22] und des amerikanischen Standards ANSI/AGMA 6001 bzw. 6101 [2], [3].

DIN 743

Die in dieser Arbeit zentral im Focus stehende Berechnungsnorm DIN 743 [13] führt den Tragfähigkeitsnachweis gegen Schäden infolge Maximalbelastung und Schäden bei zyklischer Belastung nach dem Nennspannungskonzept durch. Sie ist speziell für das Anwendungsgebiet Wellen und Achsen (stabförmige Bauteile) konzipiert und baut auf den bewährten Grundlagen des ehemaligen DDR-Standards TGL 19340 [80] sowie zahlreichen Forschungsarbeiten auf [65, S. 7].

Sowohl die Bauteilfließgrenze als auch die Bauteildauerfestigkeit werden getrennt für die grundlegenden Belastungsarten Zug/Druck, Biegung und Torsion aufgestellt und die Einzelergebnisse erst im Sicherheitsnachweis zusammengeführt. Die ermittelten Dauerfestigkeiten beschreiben die zulässige Spannungsamplitude¹ bei einer bestimmten Mittelspannung.

Die Norm stellt zur Berücksichtigung der Kerbwirkung für verschiedene einfache Kerbformen Form- oder Kerbwirkungszahlen bereit. DIN 743 erlaubt allerdings auch, Formzahlen und das zur Berechnung der Stützziffer notwendige Spannungsgefälle mit anderen Verfahren (experimentell, numerisch oder analytisch) zu ermitteln. Somit ist prinzipiell die Möglichkeit vorgesehen, Spannungsergebnisse einer FE-Analyse in den Festigkeitsnachweis zu integrieren.

FKM-Richtlinie

Die FKM-Richtlinie »Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile« [22] ermöglicht einen Nachweis der statischen Festigkeit und der Ermüdungsfestigkeit auf Basis des Nennspannungs-, Strukturspannungs- und des Kerbspannungskonzeptes. Letzteres stellt im Kern eine mathematische Umstellung des Nennspannungsnachweises (ohne höherwertigen werkstoffmechanischen Ansatz) dar und sichert zunächst die Erweiterung des Anwendungsbereiches auf nicht stabförmige Bauteile, für die sich kein Nennquerschnitt definieren lässt. Die Richtlinie umfasst gegenüber DIN 743 zusätzlich Leichtmetalle, Gusswerkstoffe und geschweißte Bauteile. Trotz der resultierenden höheren Komplexität aufgrund der Erweiterung auf allgemeine Anwendungen kommt die FKM-Richtlinie in der Praxis auch zunehmend zur Dimensionierung von Wellen aus Stahl zum Einsatz, da der vorhandene Kerbspannungsnachweis eine unmittelbare Festigkeitsbewertung mit FE-Spannungsergebnissen ermöglicht.

¹Die alternativ denkbare Methode, die Dauerfestigkeit als zulässige Mittelspannung für eine bestimmte Spannungsamplitude zu beschreiben, wird beispielsweise zur Berechnung von Schweißnähten in Schienenfahrzeugen nach DVS 1612 verwendet.

Die FKM-Richtlinie greift ebenfalls Daten und das methodische Vorgehen des ehemaligen DDR-Standards TGL 19340 [80] auf. Neben verschiedenen ergänzenden Quellen und Forschungsarbeiten basiert sie zudem auf der früheren Richtlinie VDI 2226 »Empfehlung für die Festigkeitsberechnung metallischer Bauteile« [85].

Vor der letzten, 6. Auflage von 2012 erfolgte der Kerbspannungsnachweis für volumenförmige Bauteile mit den örtlichen Spannungen im Hauptachsensystem. In der aktuellen Auflage ist der Nachweis mit Spannungen sowohl im Hauptachsensystem als auch in einem körperfesten Koordinatensystem möglich. Der Autor bevorzugt bei Achsen und Wellen die Beschreibung der Spannungen im körperfesten Koordinatensystem aufgrund von Superpositionsüberlegungen und um empirisch festgestellte Unterschiede im Festigkeitsverhalten bei Biegenormal- und Torsionsschubbeanspruchung abbilden zu können.

ANSI/AGMA 6001 bzw. 6101

Im nordamerikanischen Raum erfolgt die Tragfähigkeitsberechnung für Wellen in Getrieben nach ANSI/AGMA 6001 »Design and Selection of Components for Enclosed Gear Drives« [2]. Neben der auf dem angloamerikanischen Maßsystem basierenden Version existiert mit ANSI/AGMA 6101 [3] außerdem eine Ausgabe mit metrischen Einheiten. Dieses Regelwerk enthält abgesehen von der Dimensionierung von Wellen auch die Auslegung für Lager, Gehäuse, Passfederverbindungen, Pressverbindungen und Schraubverbindungen eines Getriebes.

Der Tragfähigkeitsnachweis für Wellen sieht ebenfalls die Berechnung einer Ermüdungssicherheit und einer Maximallastsicherheit unter Verwendung des Nennspannungskonzeptes vor. Abweichend zur deutschen DIN 743 findet ergänzend zu Zug/Druck, Biegung und Torsion die Belastungsart Querkraftschub Berücksichtigung. Die Nennspannungen der verschiedenen Belastungsfälle werden zu einer Vergleichsspannungsamplitude und Vergleichsmittelspannung zusammengefasst. Die so ermittelte Amplitude wird einer einzelnen Ermüdungsfestigkeit gegenübergestellt, die auf der Kerbformzahl bei Biegung basiert. Diese soll repräsentativ auch für alle anderen Belastungsarten gelten.

Bilir [6] stellt außerdem folgende Unterschiede im Vergleich zur DIN 743 fest: Die zulässigen Werkstoffkennwerte, wie Streckgrenze und Bauteildauerfestigkeit, werden aus der Kernhärte abgeleitet. Die Erfassung des Einflusses der Oberflächenrauheit folgt einem abweichenden Ansatz. Nach eigenen Vergleichsrechnungen schließt er zudem, dass für die Standardkerbfälle Absatz und Rundnut unter Torsionsbelastung eine teilweise zu optimistische Abschätzung der Bauteildauerfestigkeit erfolgt.

3 Berechnungsmethode für Mehrfachkerben

3.1 Erweiterung des Nennspannungsnachweises nach DIN 743

Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf Kerbstellen mit kraftfreier Bauteiloberfläche. Versagenskritische Stellen innerhalb der Kontaktzone infolge von Reibdauerermüdung (z. B. Press- und Passfederverbindungen) müssen wie bisher mit einer experimentell bestimmten Kerbwirkungszahl erfasst werden. An einer Kerboberfläche ohne äußere Krafteinwirkung reduziert sich der allgemein räumliche Spannungszustand auf einen zweiachsigen Spannungszustand, der sich durch drei Spannungskomponenten vollständig erfassen lässt – beispielsweise in der x-y-Ebene durch die Komponenten σ_x , σ_y und τ_{xy} ($\tau_{yx} = \tau_{xy}$) [36, S. 52].

3.1.1 Herleitung der bestehenden Tragfähigkeitsberechnung gegen Ermüdungsbrüche

Für ein besseres Verständnis des in Abschnitt 3.1.2 beschriebenen Problems mit örtlich mehrachsigen Spannungszuständen und dem daraus resultierenden neuen Berechnungsansatz soll an dieser Stelle ein Blick auf die derzeit umgesetzten, spannungsmechanischen Grundlagen der Norm DIN 743 [13] geworfen werden. Der Festigkeitsnachweis berücksichtigt die Amplituden (und Mittelwerte) der äußeren Belastungen für die Grundlastfälle Zug/Druck (Index: zd), Biegung (Index: b) und Torsion (Index: t). Die spannungsmechanisch begründeten, lokalen Spannungsüberhöhungen an der Kerbe (Index: K) werden durch eine Formzahl für jeden Grundlastfall (vgl. Abbildung 2.3) mit

$$\alpha_{zd} = \frac{\sigma_{zdK}}{\sigma_{zdn}}, \quad \alpha_b = \frac{\sigma_{bK}}{\sigma_{bn}} \quad \text{und} \quad \alpha_t = \frac{\tau_{tK}}{\tau_{tn}} \quad (3.1)$$

erfasst, wobei σ_{zdn} , σ_{bn} und τ_{tn} die Nennspannungen, berechnet nach den Beziehungen der elementaren Festigkeitstheorie, darstellen.

Damit erfolgt indirekt die Annahme/Vereinfachung, dass die externen Lasten nur eine einfache örtliche Beanspruchung im Kerbgrund (einachsig im Fall von Zug/Druck oder Biegung) mit derselben Orientierung wie die zugehörigen Nennspannungen hervorrufen (siehe Abbildung 3.1). Diese Spannungen werden im Folgenden als *Primärspannungen* bezeichnet. Im Fall einer kombinierten Belastung werden die Einzelspannungsamplituden der beteiligten Grundlastfälle linear überlagert [62]. Da das Prinzip der Superposition auf lineare Systeme beschränkt ist, darf die Maximalspannung die Streckgrenze des Werkstoffes nicht überschreiten.

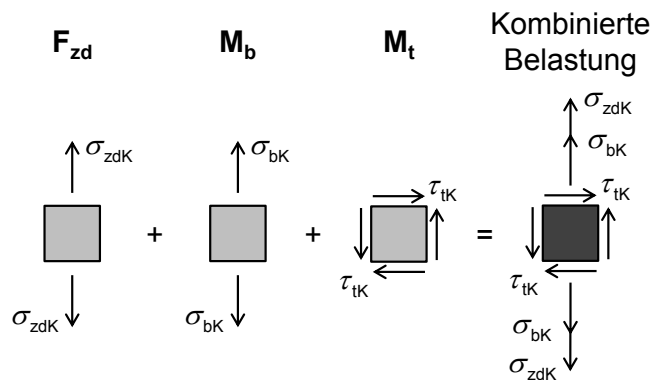


Abb. 3.1: Primärspannungen der Grundlastfälle und deren Superposition

Der Nachweis des Vermeidens von Dauerbrüchen erfolgt mit der Berechnung einer Sicherheit S_D als Quotient aus der Werkstoffwechselfestigkeit σ_W und der vorliegenden Spannungsamplitude im Kerbgrund σ_{aK} . Liegt eine zusammengesetzte Beanspruchung (unter der Annahme von Phasengleichheit) vor, wird eine Vergleichsspannungsamplitude mit der Gestaltänderungsenergiehypothese berechnet:

$$S_D = \frac{\sigma_W}{\sigma_{aK}} = \frac{\sigma_W}{\sqrt{(\sigma_{zdaK} + \sigma_{baK})^2 + 3 \cdot \tau_{taK}^2}}. \quad (3.2)$$

Die zugrunde liegende Vergleichsspannungshypothese wurde ursprünglich für statische Beanspruchungen entwickelt. Im Bereich der Dauerfestigkeit hat sich ihr analoger Einsatz mit Spannungsamplituden bei phasengleicher mehrachsiger Beanspruchung duktiler Werkstoffe bewährt [64, S. 69 f.].

Die in der Norm [13] angegebene, von (3.2) formal abweichende Gleichung zur rechnerischen Sicherheit beinhaltet einige Umformungen. Darin wird unter anderem die Werkstoffwechselfestigkeit auf die einzelnen Spannungskomponenten bezogen und

die Torsionswechselfestigkeit τ_W eingeführt:

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zdaK}}{\sigma_W} + \frac{\sigma_{baK}}{\sigma_W}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{taK}}{\tau_W}\right)^2}}, \quad \tau_W \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_W. \quad (3.3)$$

Da es sich in der Tragfähigkeitsberechnung nach DIN 743 um einen Nennspannungsnachweis handelt, werden die örtlichen Kerbspannungen durch Nennspannungen mit Hilfe der in (3.1) definierten Formzahlen ersetzt:

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_{zd} \cdot \sigma_{zda}}{\sigma_W} + \frac{\alpha_b \cdot \sigma_{ba}}{\sigma_W}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_t \cdot \tau_{ta}}{\tau_W}\right)^2}}. \quad (3.4)$$

Darüber hinaus erfolgt die Zuordnung der Formzahl und weiterer Kerbfaktoren, wie Stützwirkung und Oberflächenrauheit, auf die Seite der Festigkeit. Damit tritt die Bauteilwechselfestigkeit σ_{WK} , τ_{WK} an die Stelle der Werkstoffwechselfestigkeit σ_W , τ_W :

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zda}}{\sigma_{zdWK}} + \frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bWK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ta}}{\tau_{tWK}}\right)^2}}. \quad (3.5)$$

Diese Gleichung steht im Einklang mit der Gough-Ellipse, die auf Basis von Versuchsergebnissen von Gough und Pollard [24], [23] entwickelt wurde.

3.1.2 Problem: Mehrachsiger Spannungszustand und Kerbformzahl

Zusätzlich zur lokalen Spannungsüberhöhung im Vergleich zur Nennspannung weist eine Vielzahl von Kerbformen selbst unter einachsiger Belastung einen mehrachsigen Spannungszustand im Kerbgrund auf (geometrieabhängige Mehrachsigkeit). Dies gilt besonders für Mehrfachkerben. Spannungskomponenten, die nicht der jeweiligen Nennspannungsrichtung zugeordnet werden können, erhalten im Folgenden die Bezeichnung *Sekundärspannung*. Eine in diesem Zusammenhang auftretende Sekundärspannung kann beispielsweise eine bei Biegebelastung zusätzlich auftretende Schubspannung darstellen (Abbildung 3.2).

Diese Sekundärspannungen erschweren die Bildung einer Formzahl, bei der definitionsgemäß nur ein skalarer Spannungswert mit der Nennspannung ins Verhältnis gesetzt wird. In der Literatur lassen sich zwei verschiedene Ansätze zu dieser Problematik finden. In vielen Veröffentlichungen (z. B. in [10], [54]) wird eine Vergleichsspannung σ_v – beispielsweise nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) –

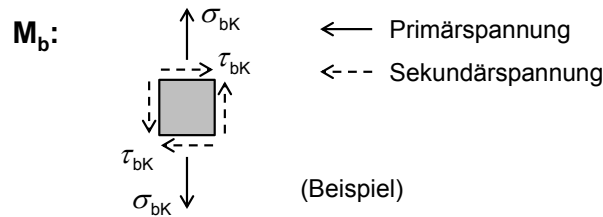


Abb. 3.2: Primär- und Sekundärspannung (Mehrachsigter Spannungszustand) unter Biegebelastung bei einer beispielhaften Mehrfachkerbe

zur Bestimmung einer modifizierten Formzahl

$$\alpha_b^{(GEH)} = \frac{\sigma_v}{\sigma_{bn}} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_t^{(GEH)} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{3} \cdot \tau_{tn}} \quad (3.6)$$

herangezogen. Allerdings muss die Verwendung einer Vergleichsspannung σ_v zur Bestimmung einer Komponente, die selbst wiederum indirekt Teil einer Festigkeitshypothese ist (siehe vorhergehender Abschnitt), als methodisch unzulässig angesehen werden. In diesem Fall wird unter zusammengesetzter Beanspruchung die Gestaltungsenergiehypothese zweifach, auf sich selbst bezogen (ineinander geschachtelt) angewendet.

Die verbalen Angaben in DIN 743 [13] legen die Verwendung der maximalen Hauptspannung σ_I bzw. größten Schubspannung τ_{max} nahe:

$$\alpha_b^{(MaxP)} = \frac{\sigma_I}{\sigma_{bn}} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_t^{(MaxS)} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{tn}} \quad (3.7)$$

Dies führt insbesondere bei zusammengesetzten Beanspruchungen im allgemeinen Fall zur Überlagerung (Superposition) von nicht zueinander kompatiblen Koordinatensystemen (siehe Abbildung 3.3).

Beide Ansätze sind demnach im Sinne der Spannungsmechanik als nicht befriedigend einzustufen.

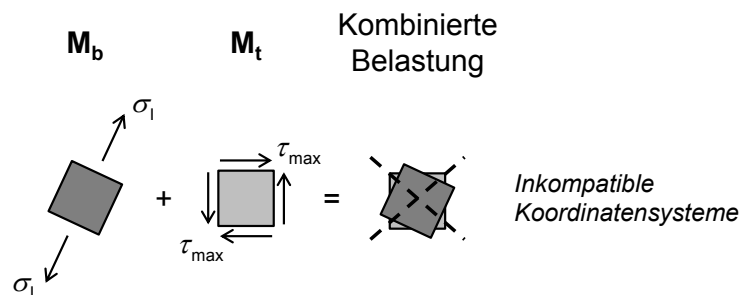


Abb. 3.3: Inkompatible Koordinatensysteme bei der Überlagerung von Hauptachsensystemen

3.1.3 Neue Methode zur Berücksichtigung von mehrachsigen Spannungszuständen

Zur Entwicklung einer spannungsmechanisch einwandfreien Methode bezüglich der durch DIN 743 vorgegebenen Festigkeitshypothese erfolgt eine Herleitung der Gleichung zur rechnerischen Sicherheit gegen Dauerbruch analog zur eingangs beschriebenen Vorgehensweise (Abschnitt 3.1.1). Hierbei werden jedoch die auftretenden Sekundärspannungen in einer einheitlichen Koordinatenausrichtung berücksichtigt. Die Methode setzt die Bestimmung der örtlichen Kerbbeanspruchungen (z. B. via FE-Analyse) im zweiachsigen Spannungszustand an der Bauteiloberfläche in einem körperfesten, an der Wellenachse ausgerichteten Koordinatensystem voraus. Im allgemeinen Fall ergeben sich hierbei pro Grundlastfall die drei Kerbspannungskomponenten σ_z , σ_φ und τ (siehe Abbildung 3.4).

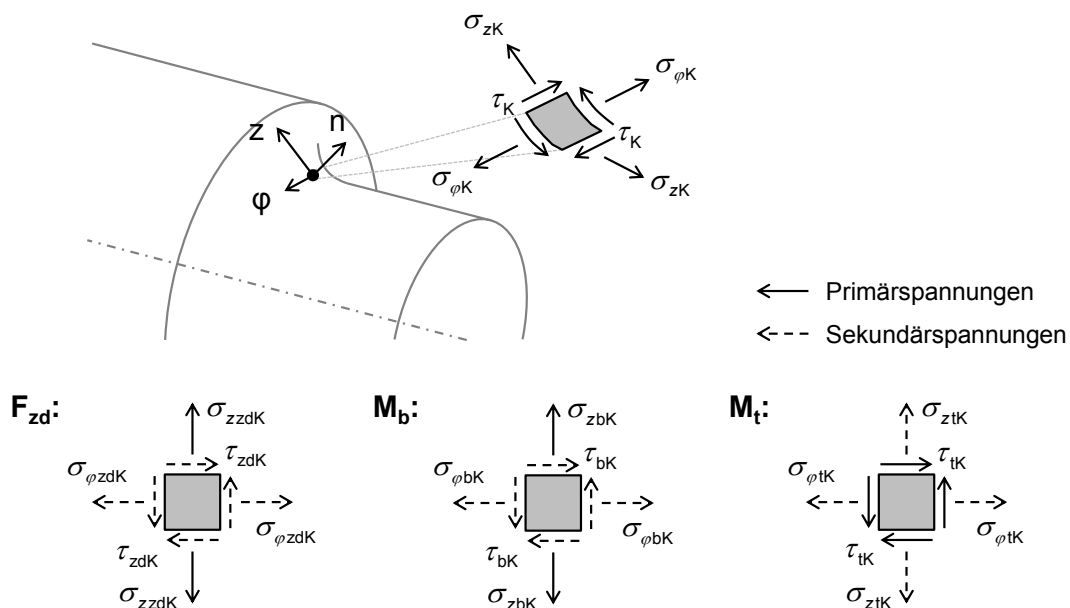


Abb. 3.4: Örtliche Kerbspannungen an der lastfreien Bauteiloberfläche im allgemeinen Fall

An dieser Stelle soll die Herleitung beispielhaft für eine Mehrfachkerbe unter schwingender Biege- und Torsionsbelastung mit den in Abbildung 3.5 ermittelten örtlichen Kerbbeanspruchungen erfolgen.

Die Sicherheit gegen Überschreiten der Dauerfestigkeit berechnet sich in diesem Beispiel nach Anwendung der Gestaltänderungsenergiehypothese und nach analoger

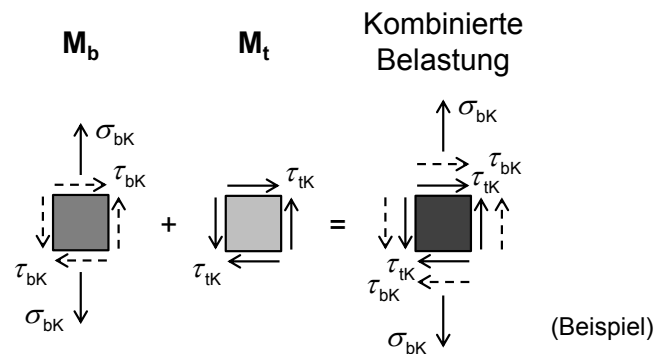


Abb. 3.5: Örtliche Kerbspannungen bei einer beispielhaften Mehrfachkerbe

Umformung zu

$$S_D = \frac{\sigma_W}{\sigma_{aK}} = \frac{\sigma_W}{\sqrt{\sigma_{baK}^2 + 3 \cdot (\tau_{baK} + \tau_{taK})^2}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{bWK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{bav}}{\tau_{bWK}} + \frac{\tau_{ta}}{\tau_{tWK}}\right)^2}}$$

mit der Vergleichs-Schubnennspannung für Biegung $\tau_{bav} = \sigma_{ba} / \sqrt{3}$. Die Berechnung der Bauteilwechselfestigkeiten (σ_{bWK} , τ_{bWK} , τ_{tWK}) erfordert die Bestimmung von separaten Formzahlen für jede örtlich wirkende Kerbspannungskomponente. Im gegebenen Beispiel sind das

$$\alpha_{b\sigma} = \frac{\sigma_{bK}}{\sigma_{bn}}, \quad \alpha_{b\tau} = \frac{\tau_{bK}}{\sigma_{bn} / \sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \alpha_{t\tau} = \frac{\tau_{tK}}{\tau_{tn}}.$$

Im allgemeinen Fall bei gleichzeitiger Wirkung von Zug/Druck, Biegung und Torsion erweitert sich die Anzahl zu bestimmender Kerbformzahlen entsprechend Abbildung 3.4 auf neun (drei Formzahlen pro Grundlastfall), siehe Tabelle 3.1. Entgegen der konventionellen Erwartung sind hierbei Formzahlergebnisse $\alpha < 1$ möglich und stellen keinen Widerspruch dar (insbesondere bei Formzahlen aus Sekundärspannungen). Lediglich die Kombination der drei Formzahlen eines Grundlastfalles, ausdrückbar als Vergleichsformzahl α_v , darf den Wert Eins nicht unterschreiten. Abgeleitet nach der Gestaltänderungsenergiehypothese lässt sie sich mit

$$\alpha_v = \sqrt{\alpha_{\sigma_z}^2 + \alpha_{\sigma_\varphi}^2 - \alpha_{\sigma_z} \cdot \alpha_{\sigma_\varphi} + \alpha_\tau^2} \quad (3.8)$$

bestimmen. Die Vergleichsformzahl entspricht zahlenmäßig der modifizierten Formzahl nach Gleichung 3.6. Sie dient allerdings nur als Kontrollwert für die Plausibilitätsprüfung $\alpha_v \geq 1$ und findet in der entwickelten Methode keine weitere Anwendung.

Tab. 3.1: Formzahl für jede wirkende Kerbspannungskomponente (allgemeiner Fall)

	Bauteilwechselfestigkeit			zugehörige Formzahl		
Zug/Druck	$\sigma_{z\text{zdWK}}$	$\sigma_{\varphi\text{zdWK}}$	τ_{zdWK}	$\alpha_{\text{zd}\sigma_z} = \frac{\sigma_{z\text{zdK}}}{\sigma_{\text{zdn}}}$	$\alpha_{\text{zd}\sigma_\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\text{zdK}}}{\sigma_{\text{zdn}}}$	$\alpha_{\text{zd}\tau} = \frac{\tau_{\text{zdK}}}{\sigma_{\text{zdn}}/\sqrt{3}}$
Biegung	$\sigma_{z\text{bWK}}$	$\sigma_{\varphi\text{bWK}}$	τ_{bWK}	$\alpha_{\text{b}\sigma_z} = \frac{\sigma_{z\text{bK}}}{\sigma_{\text{bn}}}$	$\alpha_{\text{b}\sigma_\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\text{bK}}}{\sigma_{\text{bn}}}$	$\alpha_{\text{b}\tau} = \frac{\tau_{\text{bK}}}{\sigma_{\text{bn}}/\sqrt{3}}$
Torsion	$\sigma_{z\text{tWK}}$	$\sigma_{\varphi\text{tWK}}$	τ_{tWK}	$\alpha_{\text{t}\sigma_z} = \frac{\sigma_{z\text{tK}}}{\sqrt{3}\cdot\tau_{\text{tn}}}$	$\alpha_{\text{t}\sigma_\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\text{tK}}}{\sqrt{3}\cdot\tau_{\text{tn}}}$	$\alpha_{\text{t}\tau} = \frac{\tau_{\text{tK}}}{\tau_{\text{tn}}}$

Die Sicherheit unter Berücksichtigung von Zug/Druck (zd), Biegung (b) und Torsion (t) wird anschließend unter der Annahme von Phasengleichheit und lastfreier Kerboberfläche wie folgt berechnet:

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\sum_i \frac{\sigma_{(i)a}}{\sigma_{z(i)WK}}\right)^2 + \left(\sum_i \frac{\sigma_{(i)a}}{\sigma_{\varphi(i)WK}}\right)^2 - \left(\sum_i \frac{\sigma_{(i)a}}{\sigma_{z(i)WK}} \cdot \sum_i \frac{\sigma_{(i)a}}{\sigma_{\varphi(i)WK}}\right) + \left(\sum_i \frac{\tau_{(i)a}}{\tau_{(i)WK}}\right)^2}},$$

mit $i = \text{zd, b, t.}$ (3.9)

Die Gleichung 3.9 repräsentiert eine Verallgemeinerung der üblichen Sicherheitsgleichung nach DIN 743 [13], erweitert auf den vollständigen zweiachsigen Spannungszustand. Gleich-orientierte Spannungskomponenten werden Lastfallweise addiert. Abschnitt 3.5 betrachtet fortführend die Auswirkungen auf die Stützwirkungsberechnung und auf die Berücksichtigung von Mittelspannungen. Eine ausführliche Beschreibung zur Anwendung der entwickelten Methode liegt in Anhang A in Form einer Berechnungsanleitung bei.

3.2 Numerische Spannungsanalyse (FEM) von Bauteilen mit Mehrfachkerben

Das Berechnungsziel der durchzuführenden FE-Analysen besteht primär in der Bestimmung der örtlichen Kerbspannungen (Amplitude und Mittelspannung) an der Bauteiloberfläche zum Zwecke der Formzahlermittlung. Weiterhin gilt es, den örtlichen Spannungstiefenverlauf zur Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles abzuschätzen. In diesem Abschnitt werden grundlegende und problemspezifische Aspekte zur Durchführung von Spannungsanalysen von Bauteilen mit Mehrfachkerben betrachtet. In Abschnitt 3.3 erfolgt darauf aufbauend die Kerbspannungsermittlung an einer Beispielgeometrie. Die Gedanken zur Modellbildung finden ebenfalls in Kapitel 4 Anwendung.

3.2.1 Modellaufbau

Systemgrenzen

Damit die Ergebnisse der numerischen Untersuchung im Tragfähigkeitsnachweis nach dem Nennspannungskonzept berücksichtigt werden können, muss die Spannungsermittlung getrennt für die definierten Belastungsarten

- Zug/Druck,
- Biegung,
- Torsion

erfolgen. Die tatsächlich wirkenden Bauteilbelastungen sind für den zu untersuchenden Querschnitt auf einen der drei Grundlastfälle oder einer Kombination davon zurückzuführen.

Dementsprechend ist es zweckmäßig, lediglich den betreffenden Wellenabschnitt zu modellieren (nicht die gesamte Welle) und diesen getrennt mit jeweils einer der drei Grundlastarten zu beaufschlagen (siehe Abbildung 3.6). Die Ermittlung der notwendigerweise anzusetzenden Schnittlasten sollte durch separate, analytische oder numerische Analysen erfolgen.

Die Modell- bzw. Systemgrenzen und damit die Kraft- und Verschiebungsrandbedingungen sollten in ausreichendem Abstand zur zu untersuchenden Kerbstelle liegen. Die angestrebte Substitution der realen Schnittlastverteilung durch ein äquivalentes

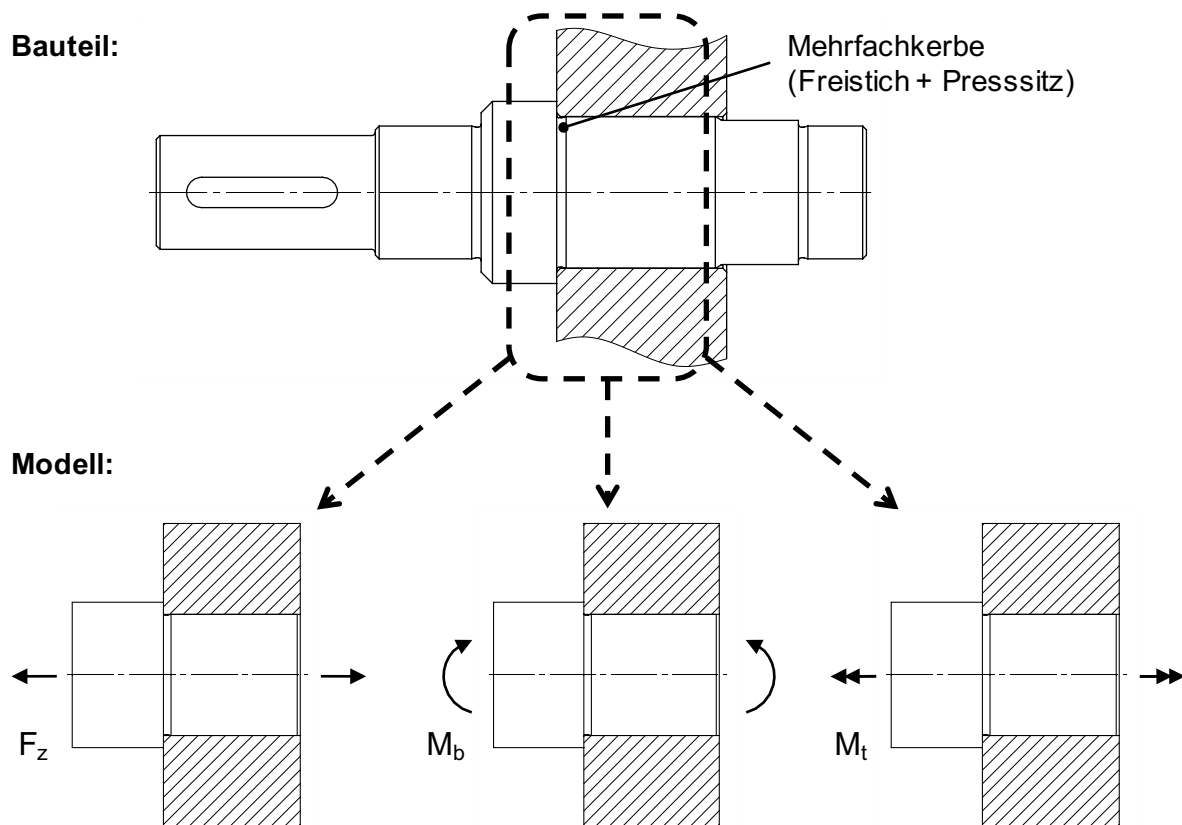


Abb. 3.6: Systemgrenzen zur Beanspruchungsermittlung an einer Mehrfachkerbe

Kräfte-System am Modellrand (unsere idealisierten Randbedingungen) ruft örtlich unregelmäßige Spannungsverteilungen hervor. Nach dem Prinzip von St. Venant klingen diese jedoch nach kurzer Distanz sehr schnell ab.

Da in der anschließenden Auswertung (bedingt durch die Formzahldefinition von DIN 743) keine Spannungs-Dehnungszustände nach plastischer Verformung Anwendung finden können, ist die Modellierung von plastischem Materialverhalten nicht sinnvoll. Die Untersuchungen beschränken sich daher auf Modelle mit linear-elastischem Materialverhalten. Thermische Eigenschaften oder das Schwingverhalten der untersuchten Bauteilgeometrien finden ebenfalls keine Berücksichtigung.

Ausnutzung von Geometrie- und Belastungssymmetrien

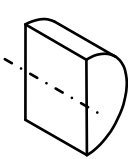


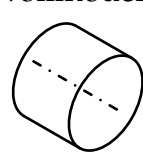
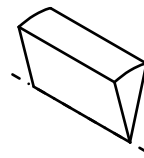
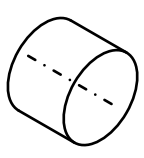
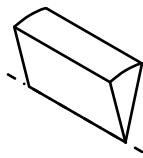
FE-Simulationen, insbesondere zur Spannungsberechnung, weisen häufig einen hohen Bedarf an Rechen- und Speicherkapazität auf. Zur Reduktion des Modellierungs- und Rechenaufwandes ohne Genauigkeitsverlust sollten möglichst vorhandene Bauteilsymmetrien im abzuleitenden Modell ausgenutzt werden. Dazu ist im ersten Schritt

das geometrisch elementare Gebiet [29, S. 265] zu identifizieren und dieses Segment des gesamten Bauteilabschnittes zu vernetzen (siehe Abschnitt 3.2.2 und 3.2.3). Das Vollmodell ergibt sich durch Spiegelung und/oder Rotation dieses Teilmodells.

Durch die Berücksichtigung von Symmetrien in der Kerbgeometrie lässt sich der Aufwand in der Modellerstellung (Vernetzung) reduzieren. Eine echte Rechenzeitersparnis entsteht jedoch erst durch die Anwendung von Symmetrierandbedingungen (entsprechende Verschiebungsrandbedingungen, siehe Abschnitt 3.2.5), mit deren Hilfe das Vollmodell auf ein zu berechnendes Halb- oder Sektormodell reduziert werden kann. Hierdurch verringert sich die Anzahl der zu lösenden Unbekannten im Gleichungssystem erheblich. Dazu müssen jedoch die gleichen Symmetrieeigenschaften (Flächensymmetrie, Achsensymmetrie) für Geometrie *und* Belastung gelten! Torsionsbelastung weist von Natur aus eine Achsensymmetrie um die Wellenachse, Biegebelastung eine Flächensymmetrie in der Biegeebene und Zug-/Druckbelastung sowohl Achsen- als auch Flächensymmetrie auf. Tabelle 3.2 fasst die möglichen Kombinationen aus Bauteilsymmetrie und Belastung zusammen. Im Falle einer rotationsymmetrischen Kerbgeometrie (Spezialfall der Achsensymmetrie) und Zug-/Druck oder Torsionsbelastung kann auf ein ebenes Flächenmodell vereinfacht werden.

Sind die Kerbspannungen für mehrere Belastungsarten zu berechnen (z. B. bei zusammengesetzter Biege- und Torsionsbelastung), kann durch Symmetrienutzung unter Umständen der Aufbau mehrerer FE-Modelle notwendig sein. Bei komplexen Kerbgeometrien mit hohem Rechenaufwand stellt sich zumeist trotzdem eine Zeitersparnis für den Anwender ein.

Tab. 3.2: Kombinationsmöglichkeiten der Symmetrieeigenschaften für Geometrie und Belastung

		Belastungsart		
		Zug/Druck	Biegung	Torsion
Bauteilgeometrie	Flächensymmetrisch	Halbmodell 	Flächensymmetrie in der Biegeebene? - Ja:  Halbmodell - Nein:  Vollmodell	Vollmodell 
	Achsen-symmetrisch	Sektormodell 	Vollmodell 	Sektormodell 

3.2.2 Vernetzungsstrategien

Die Diskretisierung (Vernetzung) der Kerbgeometrie kann nach unterschiedlichen Strategien erfolgen. Jede Methode besitzt Vor- und Nachteile und muss individuell anhand des zu bearbeitenden Problems ausgewählt werden. Eine ungünstige Entscheidung beeinflusst weniger die Ergebnisqualität, sondern den Zeitaufwand bei der Modellerstellung und -berechnung.

Bottom-Up

Bei der *Bottom-Up* Modellierung werden einzelne Teilbereiche (Querschnitte, Teilvolumina) des Gesamtgebildes vernetzt und anschließend zusammengeführt oder aufeinander aufbauend erzeugt (siehe Abbildung 3.7).

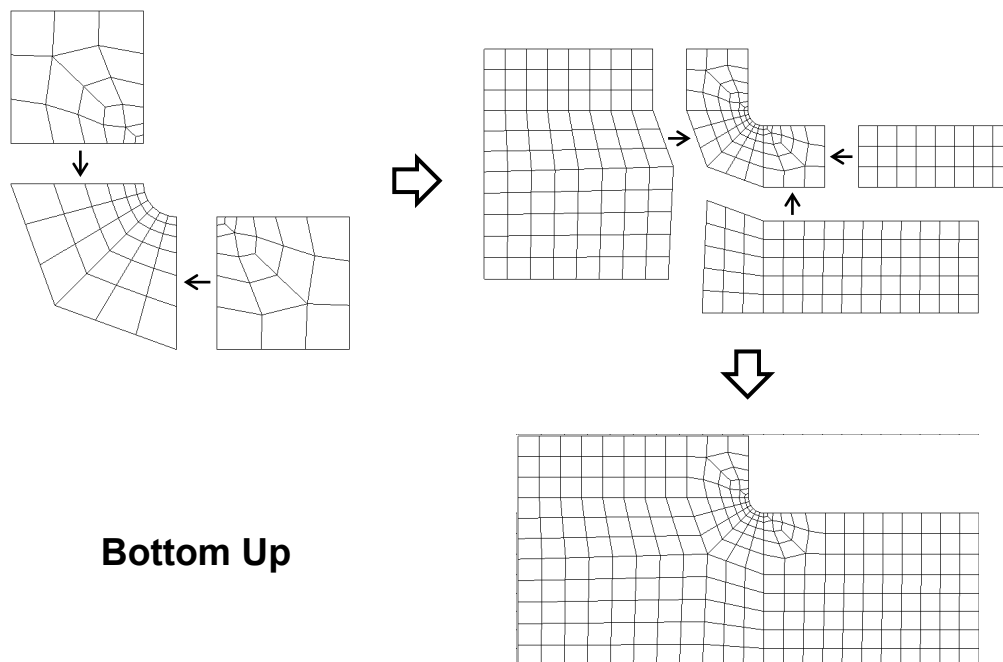


Abb. 3.7: Bottom-Up Vernetzungsaufbau am Beispiel eines Wellenabsatzes

Diese Methode gibt dem Anwender die größtmögliche Kontrolle über das erzeugte Netz, erfordert aber im Gegenzug einen hohen manuellen Modellierungsaufwand. Das Vorgehen erweist sich zudem als unvorteilhaft für nachträgliche Netzänderungen, wie sie beispielsweise im Rahmen einer Spannungs-Konvergenzanalyse (siehe Abschnitt 3.2.4) vorzunehmen sind.

Top-Down

Die *Top-Down* Methode verfolgt die zum Bottom-Up Modellierungsprozess entgegengesetzte Wirkrichtung, indem vom Übergeordneten schrittweise zum Untergeordneten vorgegangen wird.

Im konkreten Fall der FE-Modellierung von Kerbproblemen bedeutet dies, ausgehend von der komplexen Gesamt-Geometrie die Vernetzung durchzuführen. Den praxisüblichen Ausgangspunkt stellt hierbei ein CAD-Import der Bauteilgeometrie dar. Die weitere Vernetzung kann auf zwei Wegen erfolgen (siehe Abbildung 3.8):

1. Automatische Tetraeder-Vernetzung des unter Umständen komplex gestalteten, gesamten Bauteilvolumens
2. Segmentierung des Gesamtvolumens in geeignete, einfach berandete Teilvolumen und anschließende automatisierte Hexaeder-Vernetzung der einzelnen Volumen

Die erste Variante mit Tetraeder-Elementen ist für beliebig komplexe Geometrien durchführbar und stellt die schnellste Modellbildungsmöglichkeit dar. Im Gegensatz dazu steht eine robuste automatisierte Hexaeder-Vernetzung derzeit nicht für beliebige Körper zur Verfügung [29, S. 269]. Daher erfordert Variante zwei eine manuelle Aufteilung des komplex gestalteten Gebietes in vernetzbare Teilkörper. Für die in jedem FE-Programm verfügbare isometrische Vernetzung mit Hexaeder-Elementen muss jeder Teilkörper tri-parametrisch beschreibbar sein, also einem (evtl. verzerrten) Würfel oder dreiseitigem Prisma entsprechen. Die Segmentierung (auch als *Mapped Meshing* bekannt [29], [56]) zieht einen erheblichen Mehraufwand in der Modellbildung nach sich. Der große Vorteil dieser Methode liegt in der präzisen Kontrolle der erzeugten Netze. Der Anwender kann Elementqualität und Elementgröße in unterschiedlichen Gebieten bewusst steuern. Weiterhin sind nachträgliche Änderungen der Netzdichte für eine Spannungs-Konvergenzanalyse sehr gut umsetzbar.

Submodeling

Die Technik des *Submodeling* (Submodelltechnik) ermöglicht zum einen die rechenzeiteffiziente Spannungsanalyse an großen FE-Modellen mit nur lokalem Interesse an den Spannungsergebnissen (dem Kerbgrund) und zum anderen — aus Sicht der Vernetzungsstrategie — die Kombination der beiden erstgenannten Verfahren. Die Methode erfordert zwei Modelle: Ein grob-vernetztes Gesamtmodell zur Bestimmung der Verschiebungen und ein fein-vernetztes Submodell zur Spannungsberechnung im kritischen Bereich, an dessen Schnittflächen die interpolierten Verschiebungen des

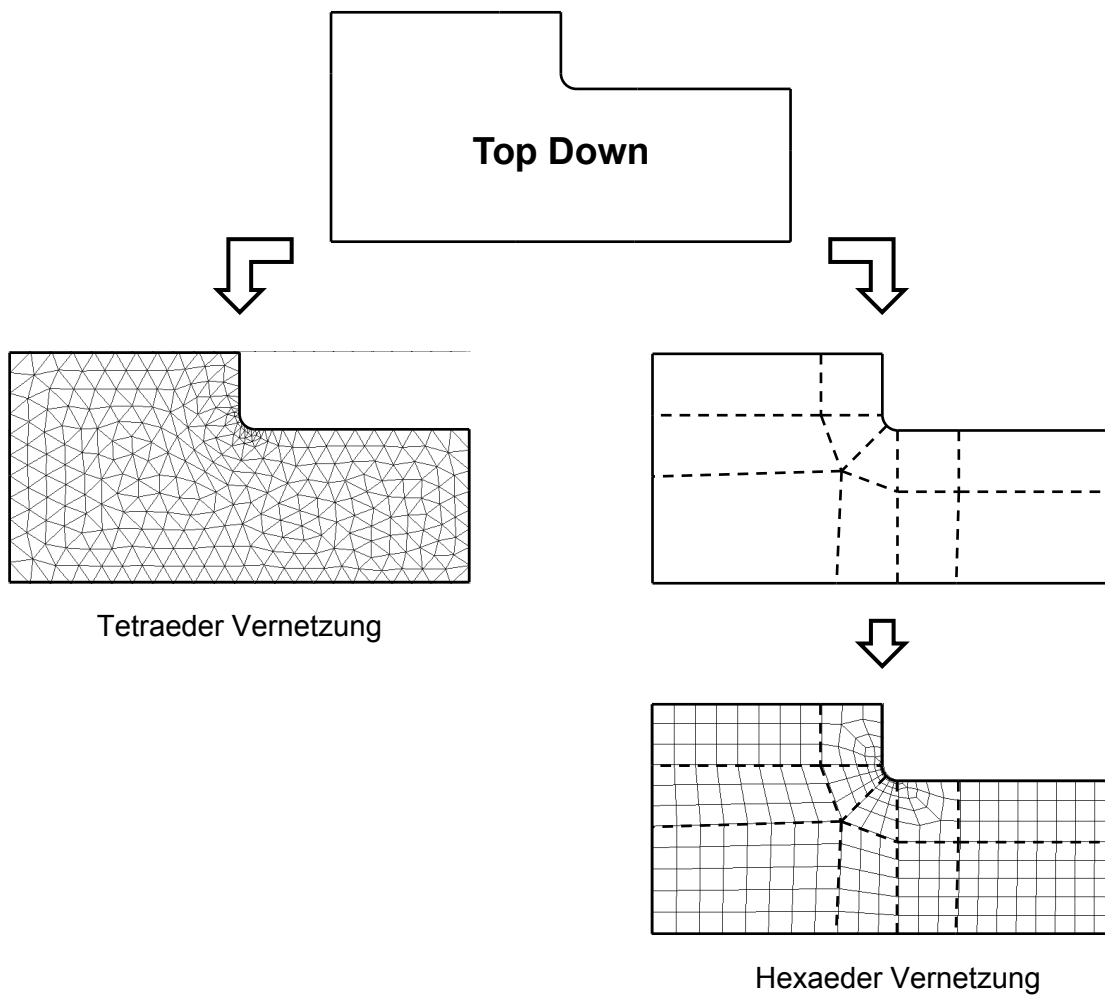


Abb. 3.8: Top-Down Vernetzungsaufbau am Beispiel eines Wellenabsatzes

Submodeling

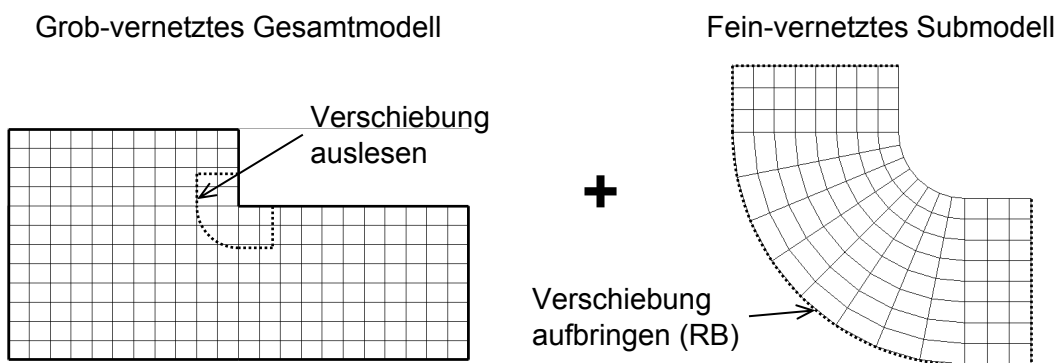


Abb. 3.9: Submodeling am Beispiel eines Wellenabsatzes

Gesamtmodells als Randbedingungen aufgebracht werden [56, S. 214 f.] (siehe Abbildung 3.9).

Mit diesem Verfahren können auch unterschiedliche Elementtypen in den zwei Modellen Verwendung finden. So ist es denkbar, die komplexe Gesamtgeometrie mit einer automatischen Tetraeder-Vernetzung zu versehen und das Submodell unter maximaler Vernetzungskontrolle im Bottom-Up Verfahren zu erstellen. Das Submodeling erweist sich allerdings als ungünstig bei Kontaktproblemen, bei denen sich der Berührungsbereich nahe der zu untersuchenden Kerbstelle befindet. Problematisch sind Kontaktzonen, die sich sowohl über den Nahbereich (Submodell) als auch den Fernbereich (Gesamtmodell) erstrecken. Weiterhin sind in Abhängigkeit des Schnittflächenabstandes vom Kerbgrund dem Verhältnis der unterschiedlichen Netzdichten zwischen Gesamt- und Submodell Grenzen gesetzt.

Nicht konforme Vernetzung

Angelehnt an die Grundidee des Submodelings können Grob- und Feinmodell ohne konforme Vernetzung auch in einem gemeinsamen Modell vereint werden. Nicht konforme Vernetzung beinhaltet hierbei die nicht deckungsgleiche Knotenpositionierung an den Netzgrenzen (siehe Abbildung 3.10). Die Kopplung erfolgt mit Hilfe einer Kontaktformulierung, die weder Durchdringen noch Ablösen der Kontaktflächen erlaubt und Tangentialkräfte in der Fläche direkt koppelt (je nach FE-Programm als *Glued Contact* oder *Bonded Contact* bezeichnet).

Nicht konforme Vernetzung

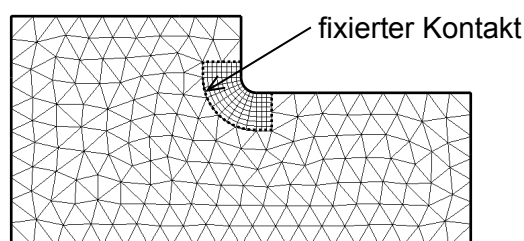


Abb. 3.10: Vernetzung mit nicht konformen Netzen am Beispiel eines Wellenabsatzes

Die Methode ermöglicht neben der Kombination unterschiedlicher Netzdichten auch die Kombination unterschiedlicher Elementtypen (hybride Vernetzung). Weiterhin ist vorteilhafterweise die Modellierung einer Gestalt- und Krafteinleitungskerbe mit Kontaktzone nahe der Gestaltkerbe realisierbar. Analog zum Submodeling kann allerdings auch bei dieser Modellierungstechnik die Knotendichte an der Netzgrenze

nur in bestimmten Grenzen voneinander abweichen. Je weiter die Koppelfläche vom Kerbgrund entfernt ist, desto größer darf der Unterscheidungsgrad ausfallen.

3.2.3 Elementauswahl

Kerbprobleme, insbesondere Mehrfachkerben mit komplexer Kerbgeometrie, erfordern in der Regel räumliche FE-Modelle. Infolge der massiven oder dickwandigen Struktur eines wellenähnlichen Bauteils kommen nahezu ausschließlich Volumen-Elemente zum Einsatz. Innerhalb der FEM bieten sich dafür nur wenige Grundgeometrien an. Die wichtigsten Vertreter sind *Tetraeder*- und *Hexaeder*-Elemente. Diese werden weiterhin nach der Ordnung der Verformungs-Ansatzfunktion in *lineare*, *quadratische* oder höhergradige Elemente unterschieden (siehe Abbildung 3.11).

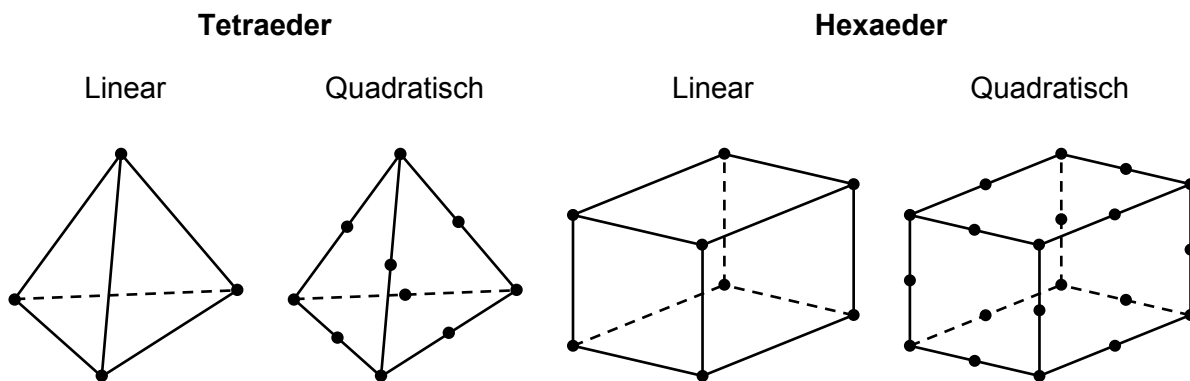


Abb. 3.11: Wichtige Elementtypen zur Volumenvernetzung

Ausgehend von der Elementformulierung und einer strukturierbaren Vernetzung sind Hexaeder-Elemente den Tetraeder-Elementen zu bevorzugen. Der große Vorteil von Tetraedern liegt in den robusten Algorithmen für die automatische freie Vernetzung beliebig geformter Körper.

Quadratische Elemente (Zwischen-Knoten-Elemente) zeigen ein besseres Spannungs-Konvergenzverhalten gegenüber linearen Elementen — insbesondere hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit (Konvergenzanalyse siehe Abschnitt 3.2.4). Des Weiteren sind sie weniger anfällig für Elementfehlverhalten wie *Shear Locking*. Dahingehend sind sie im Anwendungsbereich dieser Arbeit allgemein vorzuziehen. Im Falle von Kontaktproblemen (Kontaktsimulation bei Krafteinleitungskerben oder Realisierung von nicht konformen Netzen) können jedoch die im jeweiligen FE-Programm implementierten Kontakttypen eine lineare Elementformulierung bevorzugen oder verlangen. In Abschnitt 3.2.5 finden sich dazu weitere Erläuterungen.

Von der Verwendung linearer Tetraeder-Elemente zur Spannungsberechnung ist generell abzuraten. Ihre Elementformulierung weist eine versteifende Charakteristik auf, die unabhängig vom Vernetzungsgrad zu einem systematischen Fehler in der Kerbspannungsberechnung führen kann. Bei einer möglicherweise unvermeidbaren Nutzung von Tetraeder-Elementen (komplexe Kerbgeometrie) sollten diese ausschließlich mit quadratischer Ansatzfunktion eingesetzt werden.

In Tabelle 3.3 sind die diskutierten Eigenschaften der unterschiedlichen Elementtypen gegenübergestellt. Abbildung 3.12 zeigt eine Empfehlung zur Auswahl eines geeigneten Elementtyps je nach Problemstellung auf.

Tab. 3.3: Vergleich von Elementtypen zur Volumenvernetzung bzgl. Verwendungseignung

	Tetraeder		Hexaeder	
	Linear	Quadratisch	Linear	Quadratisch
Ergebnisgüte Spannungsberechnung	○○	●●	●●	●●
Konvergenzgeschwindigkeit der Kerbspannung	–	●●	○○	●●
Vollautomatische Vernetzung		●●		○○
Eignung Konvergenzanalyse		○○		●●
Eignung Kontaktsimulation	○○	○○	●●	○○

○○ nicht geeignet, ○● bedingt geeignet, ●● gut geeignet

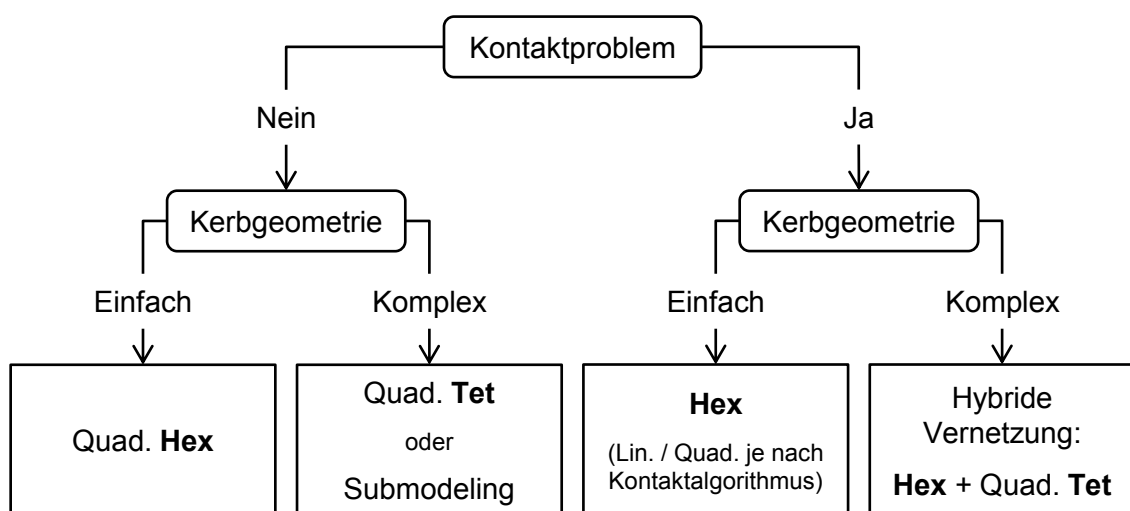


Abb. 3.12: Empfehlung zur Elementauswahl bei Volumenvernetzung

3.2.4 Netzdichte/Netzverfeinerung und Konvergenzanalyse

Die Ergebnisqualität einer FE-Analyse steigt mit der Anzahl der Knoten/Elemente, die zur Diskretisierung des Kontinuums eingesetzt werden. Gleichzeitig steigt der Rechenaufwand zur Lösung des aufgestellten Gleichungssystems. Die zu wählende Netzdichte stellt somit immer einen Kompromiss zwischen notwendiger Genauigkeit und wirtschaftlicher Rechenzeit dar.

Eine recheneffiziente Vernetzung sieht hierbei eine inhomogene Verteilung der Netzdichte vor. Die Bereiche nahe der zu untersuchenden Kerbstelle mit hoher Spannungskonzentration gilt es fein und entfernte Bereiche grob zu vernetzen. Die Netzdichte sollte sich idealerweise nach dem Grad des Spannungsgefälles richten. Eine effiziente Vernetzung weist einen gleichbleibenden Spannungsabfall über alle Elemente auf.

Die Vorgabe einer zu wählenden Mindestanzahl von Elementen z. B. im Kerbradius ist allgemein aufgrund der vielschichtigen Gestaltungsmöglichkeiten von Mehrfachkerben nicht möglich. Zur Absicherung der verwendeten Netzdichte ist eine Spannungs-Konvergenzanalyse unabdingbar.

Spannungs-Konvergenzanalyse

Das wichtigste Element zur Qualitätsbewertung der gewählten Vernetzung stellt die *Konvergenzanalyse* der erzielten Rechenlösung dar. Dazu wird in wiederholenden Spannungsberechnungen die Netzdichte bzw. die Elementanzahl schrittweise erhöht und die maximale Vergleichsspannung (nach der Gestaltänderungsenergiehypothese) am kritischen Kerbort über der lokalen oder globalen Elementanzahl aufgetragen (siehe Abbildung 3.13). Mit steigender Netzdichte konvergiert die Kerbspannung gegen einen Grenzwert – der vermeintlichen »wahren« elastizitätstheoretischen Lösung.

An Unstetigkeitsstellen, wie punktförmigen Lasten und Lagerungen oder Steifigkeitssprüngen (z. B. an scharfen Kontaktgebietsrändern), wird die Lösung der linearen Elastostatik singular bezüglich der Spannung. Eine Auswertung der Kerbspannungen verbietet sich hier. Ohne Konvergenzanalyse sind diese Singularitäten schwer erkennbar, da aufgrund des numerischen Charakters der FEM an diesen Stellen trotzdem ein endlicher Spannungswert ausgegeben wird. Die Ergebnisse bleiben dennoch »falsch«. Typische »Konvergenzkurven« sind dann Geraden oder exponentiell steigende Verläufe (Divergenz gegen Unendlich).

Die Netzverfeinerung im Kerbbereich sollte so erfolgen, dass das feinere Netz alle Knoten des gröbereren Netzes beinhaltet [5, S. 268 f.], ansonsten ist ein Vergleich der berechneten Spannungen untereinander nicht zulässig. Am einfachsten lässt sich

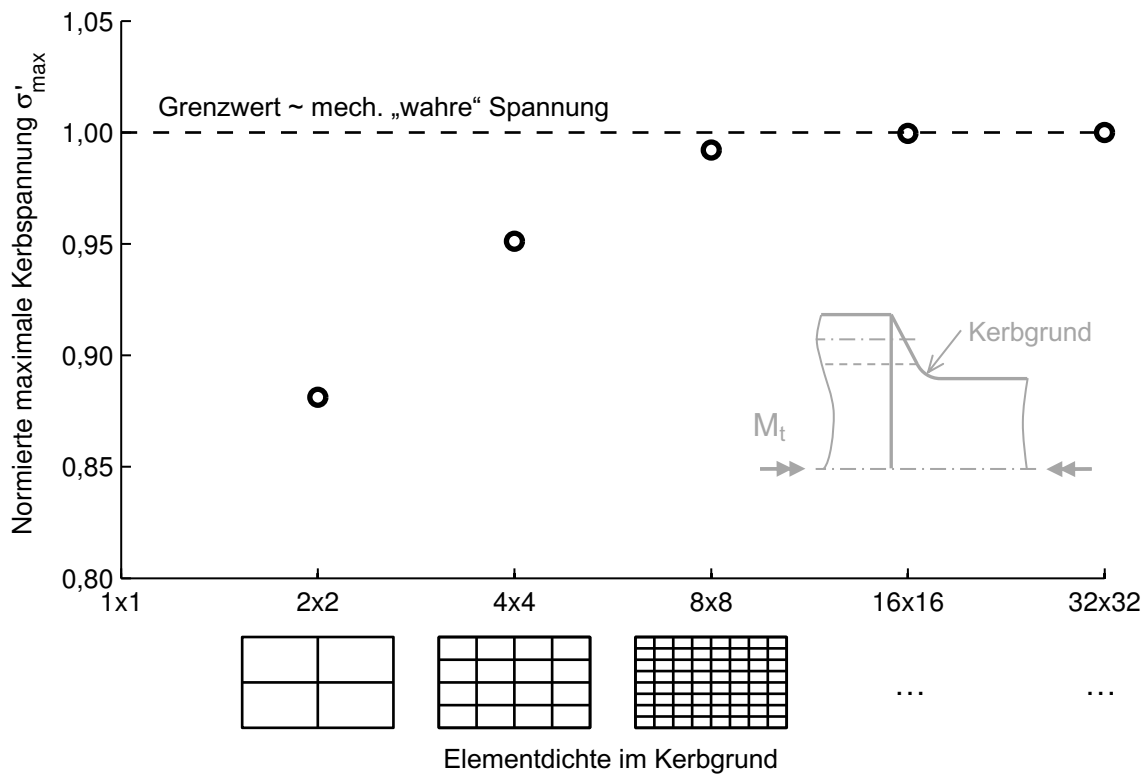


Abb. 3.13: Beispiel einer Konvergenzanalyse der maximalen Kerbspannung

dies durch Unterteilung eines zuvor verwendeten Elementes in zwei oder mehrere Elemente durchführen. Die Konvergenzanalyse erfordert demnach eine Verdopplung der Elementanzahl auf einer Kante je Netzverfeinerungsschritt. Bei Volumenelementen führt dies zur Erhöhung der Elementanzahl um den Faktor $2^3 = 8$ pro Schritt. Die benötigte Rechenzeit für jede weitere Iteration steigt exponentiell. Bei logarithmischer Auftragung der Elementdichte (vgl. Abbildung 3.13) lässt sich ziemlich früh die potenzielle Qualitätssteigerung je Verfeinerungsschritt abschätzen und nach den eigenen Genauigkeitsanforderungen ein Abbruchkriterium aufstellen.

Der tolerierbare Fehler der ermittelten Kerbspannung ist im Verhältnis zur akzeptierten Mindestsicherheit der anschließenden Tragfähigkeitsberechnung abzuwägen. Eine entsprechend hoch gewählte Mindestsicherheit ermöglicht auch grobe Abbruchkriterien der Konvergenzanalyse. Der relative Fehler der berechneten Kerbspannungen wirkt sich in erster Näherung unmittelbar (1:1) auf den relativen Fehler der resultierenden Sicherheit gegen Ermüdungsbrüche aus.

Das oben beschriebene Vorgehen erhält in der Literatur die Bezeichnung h-adaptive Netzverfeinerung oder kurz h-Methode. Daneben existiert die p-Adaptivität, bei der nicht die Elementanzahl sondern die Ordnung der Ansatzfunktion erhöht wird. Sie

erlangt jedoch keine Praxisrelevanz, da nur wenige wirklich robuste Elementformulierungen jenseits des quadratischen Ansatzes verfügbar sind [29, S. 81].

Anmerkung: Unter Verwendung von Elementen mit quadratischer oder höhergradiger Ansatzfunktion ist die Konvergenzkurve nicht zwingend monoton steigend.

Viele FE-Programme bieten Testverfahren zur Prüfung und Optimierung von geometrisch entarteten/verzerrten Elementen im erzeugten Netz, da sie die Ergebnisqualität beeinflussen können. Diese Verfahren erhöhen die Konvergenzgeschwindigkeit. Die Spannungsberechnung mit einem nicht-optimierten Netz konvergiert nichtsdestotrotz unter entsprechend höherer Vernetzungsdichte gegen den gleichen Grenzwert.

Anforderung an die Netzqualität zur Bestimmung des Spannungsgefälles

Im Vergleich zur Ermittlung der maximalen Kerbspannung ist zur Bestimmung des bezogenen Spannungsgefälles (Vorgehen siehe Anhang A) mit ähnlicher Ergebnissenauigkeit eine wesentlich höhere Netzfeinheit erforderlich. Das heißt, die Konvergenzkurve des Spannungsgefälles nähert sich viel später einem Grenzwert an (siehe beispielsweise [25, S. 29 f.]).

Ein unter Umständen mit viel Rechenaufwand genau bestimmtes Spannungsgefälle erhöht allerdings die Ergebnisqualität des Endergebnisses Gestaltfestigkeit nur geringfügig. Die entscheidende Zwischen-Rechnungsgröße Stützziffer, ermittelt nach dem Verfahren von Siebel u. Stieler [75], hängt über eine Wurzelfunktion von dem bezogenen Spannungsgefälle ab. Es ist also durchaus möglich, bezüglich des Spannungsgefälles mit einem groben Abbruchkriterium für die Konvergenzanalyse zu arbeiten. Mit Abbildung 3.14 kann der resultierende Berechnungsfehler der Stützziffer (und damit der Gestaltfestigkeit) in Abhängigkeit des akzeptierten Fehlers für das bezogene Spannungsgefälle abgeschätzt werden. Es ist ersichtlich, dass beispielsweise mit der Streckgrenze eines typischen Wellenwerkstoffs ($42\text{CrMo}4$, $\sigma_S \approx 900 \text{ N/mm}^2$) selbst bei einem hohen erwarteten bezogenen Spannungsgefälle von $G' = 8 \text{ mm}^{-1}$ ein Berechnungsfehler von 20 % zu einer Abweichung deutlich kleiner als 1 % bei der resultierenden Stützziffer n führt.

3.2.5 Randbedingungen

Art und Qualität der Randbedingungen sind ausschlaggebend für die Durchführbarkeit und Aussagefähigkeit einer FE-Simulation. Sie nehmen einen mindestens ebenso wichtigen Stellenwert ein wie die Qualität der Elemente und der Vernetzung.

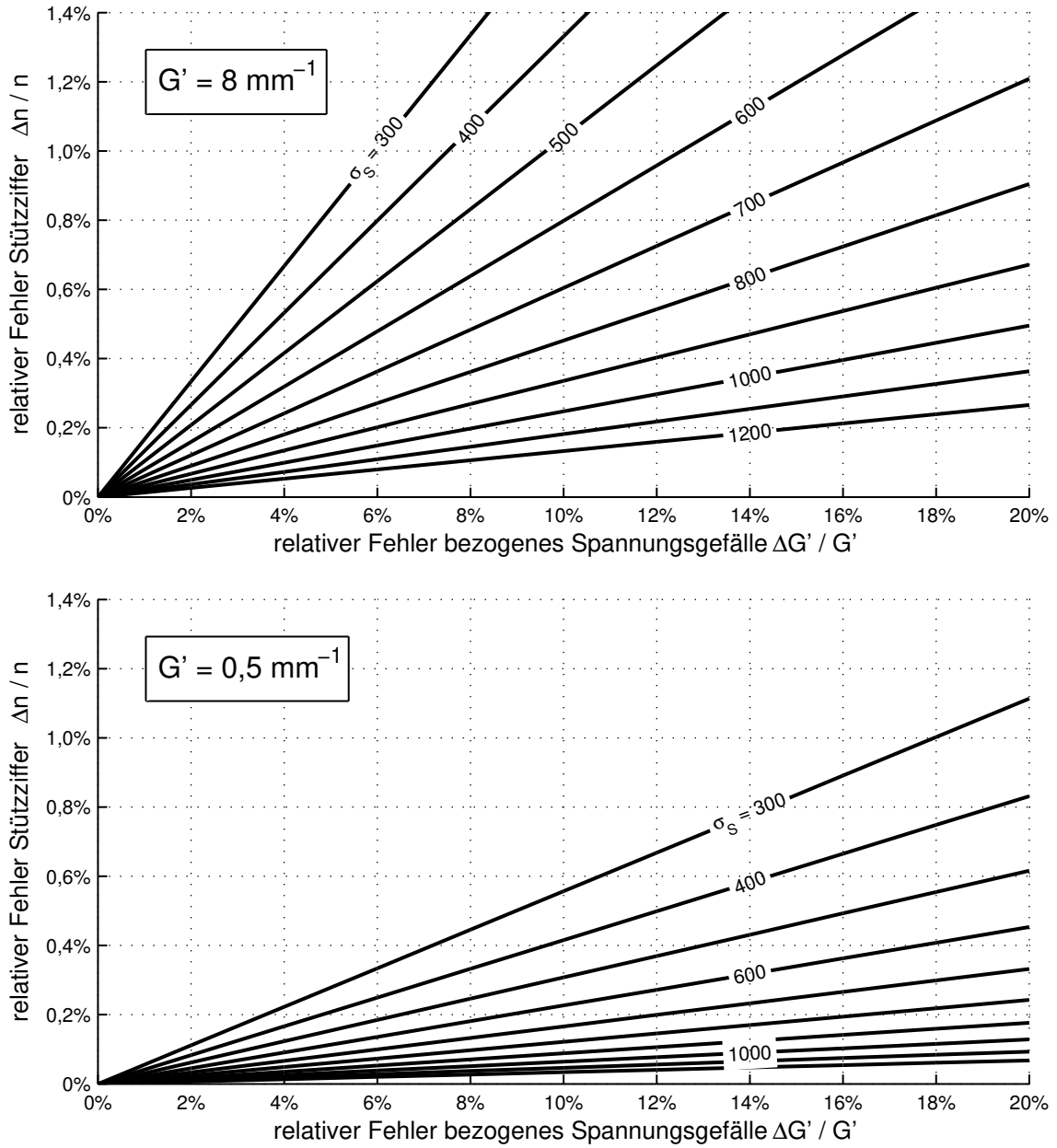


Abb. 3.14: Resultierender Fehler in der Stützzifferberechnung (nach DIN 743) bei ungenauer/grober Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles (oben: Kerbe mit sehr großem Spannungsgefälle, unten: Kerbe mit kleinem Spannungsgefälle)

Symmetrierandbedingungen

Symmetrierandbedingungen (Flächensymmetrie, Achsensymmetrie) dienen zur Reduktion eines Vollmodells auf ein weniger rechenintensives Teilmodell (Halb- oder Sektormodell) des Wellenabschnittes. Zur Auswahl der zulässigen Modellvereinfachung siehe Abschnitt 3.2.1.

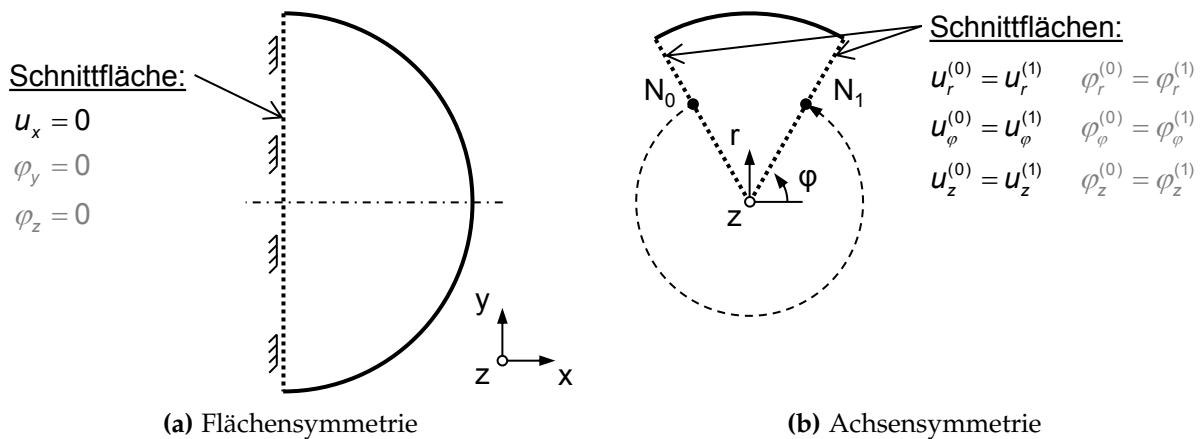


Abb. 3.15: Verschiebungsrandbedingungen bei Bauteilsymmetrie

Flächensymmetrie wird häufig auch als Spiegelsymmetrie zu einer Spiegelebene bezeichnet. Die Umsetzung der zugehörigen Symmetrierandbedingung erfolgt durch Verschiebungsrandbedingungen aller in der Spiegelebene (bzw. Schnittebene des Halbmodells) befindlichen Elementknoten. Hierbei sind (ausschließlich) die Verschiebungen senkrecht zur Schnittebene zu sperren (siehe Abbildung 3.15a).

Achsensymmetrie im dreidimensionalen Raum lässt sich in vielen FE-Programmen auch unter dem Begriff »Zyklische Symmetrie um eine Drehachse« finden. Die Verschiebungen an den zwei Schnittflächen des Teilmodells werden durch Übergangsbedingungen bezüglich eines zylindrischen Koordinatensystems miteinander gekoppelt (siehe Abbildung 3.15b). Die meisten Präprozessoren zur FE-Modellierung bieten bereits fertige Routinen zur Anwendung dieser Symmetrierandbedingung. Das in der Praxis immer wieder anzutreffende Vorgehen, die Verschiebung an den Schnittflächen komplett zu sperren, versteift das System unnötig und sollte vermieden werden.

Krafteinleitung entsprechend der Grundlastfälle

Den Berechnungszielen in Abschnitt 3.2.1 folgend gilt es, je eine Belastungsart (Zug/ Druck, Biegung oder Torsion) mit entsprechenden Kraft- und Verschiebungsrandbedingungen zu simulieren (vgl. Abbildung 3.6 auf Seite 39). Hierzu ist es sinnvoll,

den Wellenabschnitt einseitig einzuspannen (d. h. alle Verschiebungs-Freiheitsgrade der Elementknoten in der Stirnfläche zu sperren) und am gegenüberliegenden Wellenende die Krafteinleitung vorzunehmen. Im Falle von Krafteinleitungskerben, die typischerweise an Welle-Nabe-Verbindungen auftreten, sind die Randbedingungen auf Welle und Nabe aufzuteilen.

Die Simulation einer Biege- oder Torsionsbelastung erfordert eine nicht konstante Lastverteilung in der Schnittfläche. Zur Aufteilung der Belastung auf die einzelnen Knoten erweisen sich kinematische Knotenbeziehungen (meist mit Multi-Point-Constraints zusammenfassend bezeichnet) als hilfreich. Diese ermöglichen mit ihrem häufig eingesetzten, speziellen Vertreter, dem RBE2-Element (Rigid Body Element Type 2), eine starre Verbindung zwischen den Knoten der Stirnfläche und einem zentralen Referenzknoten. Die äußere Last Biegemoment oder Torsionsmoment wird auf den Referenzknoten aufgebracht und mit Hilfe der kinematischen Kopplung auf die Stirnfläche übertragen.

Sollte die Modell- bzw. Systemgrenze, an der die Krafteinleitung erfolgt, entgegen der Empfehlung sehr dicht an der zu untersuchenden Kerbstelle liegen, so empfiehlt sich statt der starren Kopplung mit RBE2-Elementen die Verwendung einer flexiblen Kopplung mit RBE3-Elementen. Unter der Voraussetzung, dass das verwendete FE-Programm diesen Elementtyp unterstützt, wird somit eine zusätzliche Versteifung des kritischen Querschnittes vermieden.

Bei der Verwendung von Teilmodellen (Ausnutzung von Geometrie- und Belastungssymmetrien, siehe Abschnitt 3.2.1) sind die entsprechenden Symmetrierandbedingungen auch auf den zentralen Referenzknoten der Krafteinleitung anzuwenden (siehe Abbildung 3.16). Dies schließt in den meisten FE-Programm-Implementierungen den Einsatz von RBE3-Elementen zur flexiblen Kopplung zwischen Referenzknoten und Stirnfläche aus (Verschiebungsrandbedingung auf abhängigen Knoten nicht erlaubt). Im Falle von Achsensymmetrie (Sektormodell) lässt sich die zugehörige Symmetrierandbedingung nicht auf den Krafteinleitungsknoten, der direkt auf der Rotationsachse liegt, anwenden. Zur realitätsgetreuen Abbildung des Verformungsverhaltens ist daher die radiale Verschiebung des zentralen Referenzknotens zu sperren (siehe Abbildung 3.16b).

Weiterhin ist der Betrag der eingeleiteten Zugkraft \overline{F}_z bzw. des eingeleiteten Biege- oder Torsionsmomentes $\overline{M}_b, \overline{M}_t$ nach folgenden Regeln zu reduzieren:

- Halbmodell: $\overline{F}_z = 1/2 \cdot F_z$ bzw. $\overline{M}_b = 1/2 \cdot M_b$
- Sektormodell: $\overline{F}_z = 1/k \cdot F_z$ bzw. $\overline{M}_t = 1/k \cdot M_t$, wobei k die Anzahl der Sektorelemente zur Bildung eines Vollmodelles ist.

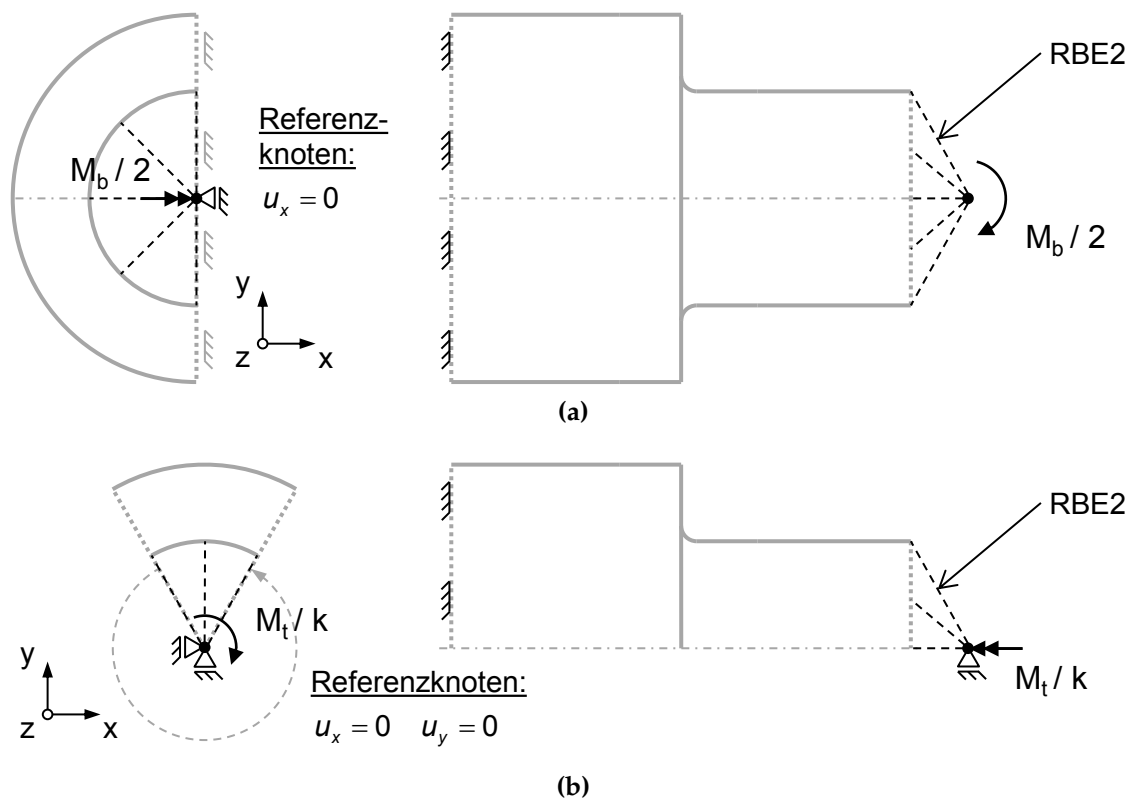


Abb. 3.16: Krafteinleitung bei Halbmodell (a) und Sektormodell (b)

Kontaktmodellierung

Im Rahmen des Problemkreises »Wellen und Achsen« steht der Kontaktfall zweier elastischer Körper, die sich gegenseitig deformieren, im Vordergrund (Modellierung von Krafteinleitungskerben). Eine Kontaktmodellierung ist immer dann notwendig, wenn die Berührzone nicht eindeutig im Vorhinein bekannt oder Schlupf nicht vernachlässigbar ist. Andernfalls sollte die Verbindung durch gemeinsame Knoten oder Koppelgleichungen realisiert werden [66, S. 228]. Einen Sonderfall stellt der Einsatz von Klebekontakt (Bonded Contact) zur Verbindung von nicht konformen Netzen (siehe Abschnitt 3.2.2) dar.

Die Ergebnisqualität der Kontaktfindung und Pressungsverteilung in der Berührzone wird neben den nachfolgend aufgezeigten, allgemeinen Gesichtspunkten von vielen programm- und algorithmusspezifischen Parametern beeinflusst. Zu deren (meist optionalen) Festlegung sei auf die entsprechenden Programmdefinitionen verwiesen.

Da der numerisch basierte Tragfähigkeitsnachweis direkt in der Kontaktfuge laut des Anwendungsbereiches der neu entwickelten Methode (Abschnitt 3.1) ausgegrenzt ist, spielt die erzielte Spannungsgüte im Kontaktgebiet eine untergeordnete Rolle.

Kontaktelemente können in

- Knoten-zu-Knoten-Kontakt,
- Knoten-zu-Oberfläche-Kontakt,
- Punkt-zu-Oberfläche-Kontakt,
- Oberfläche-zu-Oberfläche-Kontakt

eingeteilt werden. *Knoten-zu-Knoten-Kontakt* ist veraltet und sollte keine Anwendung mehr finden. *Knoten-zu-Oberfläche-Kontakt* zwischen verformbaren Körpern (häufig Node-to-Surface oder Node-to-Segment bezeichnet) steht in jedem kommerziellen FE-Programm zur Verfügung. Hierbei werden Knoten einer Slave- oder Contact-Seite auf Durchdringung mit Segmenten einer Master- oder Target-Seite überprüft (vgl. Abbildung 3.17a). Dieser Kontakttyp ist jedoch *nur für Elemente mit linearer Ansatzfunktion* geeignet. Quadratische oder höhergradige Elemente bereiten Probleme bei der Verteilung der äquivalenten Knotenkräfte bei gleichmäßigem Kontaktdruck [66, S. 253 f.].

Die Berechnung eines *Oberfläche-zu-Oberfläche-Kontaktes* ist prinzipiell möglich, aber für deformierbare Körper in allgemeiner Form zu kompliziert [66, S. 231]. In einigen kommerziellen FE-Programmen ist irreführenderweise die Bezeichnung Surface-to-Surface bzw. Segment-to-Segment für die Kontaktdefinition anzutreffen. Diese Kontaktelemente verwenden jedoch intern je nach Programm-Implementierung die angesprochene Kontaktformulierung Knoten-zu-Oberfläche oder einen gewissen *Punkt-zu-Oberfläche-Kontakt*. Der Unterschied zu Erstgenanntem besteht darin, dass nicht Knoten, sondern andere Punkte (vor allem Integrationspunkte) der Slave-Seite zur Kontaktfindung herangezogen werden (vgl. Abbildung 3.17b). Der große Vorteil dieses Konzeptes liegt in der Eignung für Elemente mit Zwischenknoten (quadratischer Ansatz) [66, S. 230, 254].

Zusammenfassend gilt: Insofern das eingesetzte FE-Programm eine Punkt-zu-Oberfläche Kontaktformulierung unterstützt, ist diese zu bevorzugen. Falls nur Knoten-zu-Oberfläche-Kontakt zur Verfügung steht, sollte im Kontaktbereich auf Elemente mit quadratischer oder höherer Ansatzfunktion verzichtet werden. Damit wären Tetraederelemente, die leicht automatisch vernetzbar aber bei linearen Ansätzen viel zu steif sind, von Kontaktberechnungen ausgeschlossen.

Sowohl für Knoten-zu-Oberfläche- als auch Punkt-zu-Oberfläche-Kontakt ist eine je nach FE-Programm unterschiedlich bezeichnete Master- bzw. Target-Seite (Information der Oberflächengeometrie) und eine Slave- bzw. Contact-Seite (Information der Lage einzelner Knoten/Punkte) der Kontaktpartner zu bestimmen. Manche Programme geben an, keine Unterscheidung zu benötigen, aber auch diese verwenden intern Segmente und Knoten/Punkte zur Kontaktbehandlung.

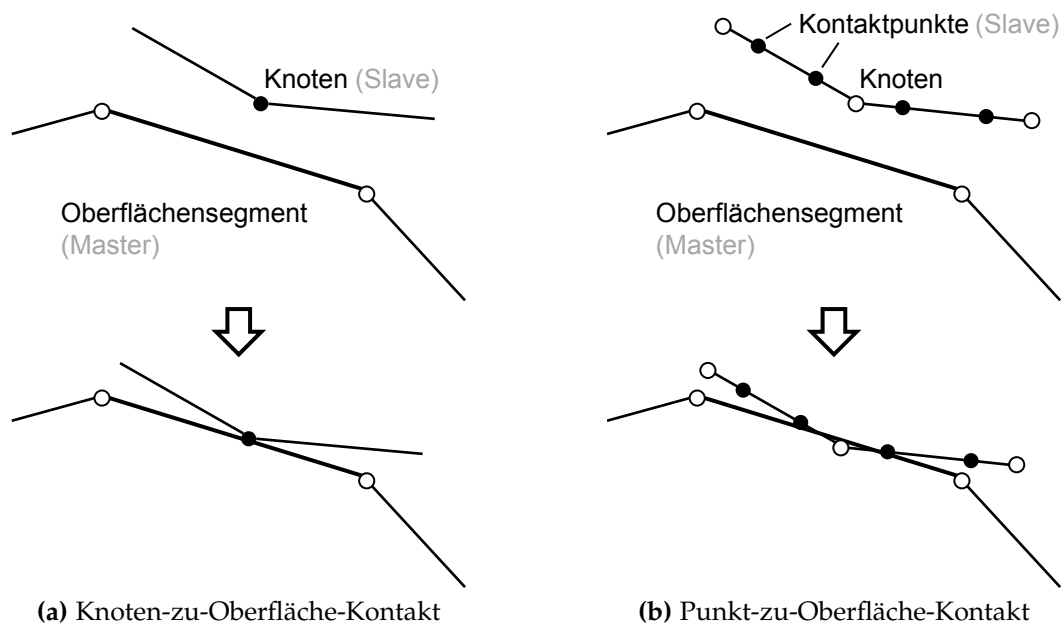


Abb. 3.17: Praxisrelevante Kontakttypen (nach [66, S. 230 f.])

Nach Rust [66, S. 275] sollten folgende Auswahlregeln beachtet werden:

- Die gröber vernetzte Fläche wird Master.
- Die konkave oder schwächer gekrümmte Fläche wird Master.
- Die überstehende Fläche wird Master (z. B. Passfeder in Passfedernut).
- Die Fläche mit höherer Ansatzordnung für die Geometrie wird Master.

Diese erheben allerdings keinen Anspruch auf Widerspruchsfreiheit.

Ergänzende Hinweise: Allgemein sollten die Kontaktpartner auf der Oberfläche möglichst mit gleicher Netzdichte vernetzt werden — idealerweise mit deckungsgleichen Knotenpositionen im Berührungsbereich.

Zur Verhinderung eventuell auftretender Starrkörperbewegungen bzw. zur Konvergenzverbesserung des Solvers bei instabilen Verschiebungszuständen empfiehlt es sich, schwache Federn (d. h. Federelemente mit geringer Steifigkeit) zwischen Körper und Umgebung hinzuzufügen. Damit wird für den Lösungsmechanismus ein stabiler (energetisch günstigster) Gleichgewichtszustand geschaffen.

Für die Modellierung eines Übermaßes (z. B. beim Presssitz) ist die Definition einer initialen Durchdringung der Kontaktflächen (oft »Interference Closure«, »Interference

Fit« oder »Initial Penetration« genannt) als Randbedingung günstiger als die Geometriemodellierung von Welle und Nabe mit den tatsächlichen Abmaßen.

Der Reibwert zwischen den Kontaktpartnern sollte in erster Näherung mit einem technisch üblichen Haftbeiwert festgelegt werden (z.B nach DIN 7190 [16]). Bestimmte Kerbfälle können einen Einfluss des gewählten Reibwertes auf die Kerbspannungsermittlung an der kraftfreien Bauteiloberfläche aufweisen [45]. Bei Ungewissheit ist eine Grenzwertbetrachtung mit reibfreiem Kontakt und tangential fixiertem Kontakt (unendliche Reibung) empfehlenswert.

3.2.6 Simulationsarten

Das Berechnungsziel der numerischen Spannungsanalyse sind die örtlichen Kerbspannungen infolge einer zyklischen Belastung, wie beispielsweise einer Umlaufbiegung oder schwingender Torsion. Von zentralem Interesse sind hierbei Amplitude und Mittelwert des zeitlichen Spannungsverlaufes (siehe Abbildung 3.18).

Zur Bestimmung dieser Kenngrößen (σ_a , σ_m) ist es nicht zwingend erforderlich, den gesamten zeitlichen Spannungsverlauf eines Lastwechsels in einer quasi-statischen oder gar transienten Analyse zu ermitteln. Liegt eine reine Gestaltkerbe vor, lässt sich der im definierten Gültigkeitsbereich lineare und reversible Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung ausnutzen. Infolge der nachgelagerten Spannungsermittlung aus den Elementverzerrungen besteht auch zwischen Krafeinleitung und örtlicher Kerbspannung Proportionalität. Dadurch genügt es, bei reinen Gestaltkerben einen einzelnen Lastschritt in einer *statischen Analyse* zu simulieren und die resultierenden Kerbspannungen als Spannungsamplituden zur gegebenen Belastungsamplitude zu

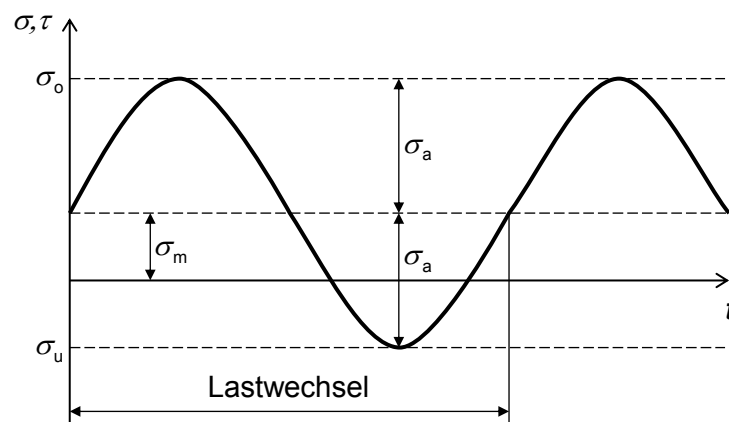


Abb. 3.18: Spannungsverlauf einer Kerbspannungskomponente (Amplitude und Mittelwert)

interpretieren (siehe Abbildung 3.19 Links). Das Vorgehen setzt im Falle einer Umlaufbiegung allerdings die Kenntnis der kritischen Biegeebene (räumliche Lage des Biegemomentes) voraus, die zur größten örtlichen Spannung führt.

Bei Simulationsmodellen, die neben der Gestaltkerbe eine Krafteinleitungskerbe aufweisen (Nichtlinearität durch Kontaktrandbedingung), besteht die Möglichkeit den zeitlichen Spannungsverlauf mit zwei charakteristischen Lastschritten zu erfassen (siehe Abbildung 3.19 Mitte). Für den wellentypischen Fall einer Krafteinleitungskerbe durch eine Querpressverbindung bietet sich beispielsweise die statische Analyse der Kerbspannungen mit initial durchdringenden Kontaktflächen einmal ohne äußere Belastung (Fügestand) und einmal mit statisch aufgebrachter Belastung an. Damit können eventuell auftretende Spannungen im Kerbgrund infolge von Fugenpressung (konstante Mittelspannungen) identifiziert und es kann durch Differenzbildung der Spannungsergebnisse aus den zwei Lastschritten die im Kerbgrund wirkende Spannungsamplitude ermittelt werden.

Für achssymmetrische Bauteile bzw. Bauteilverbindungen (z. B. Zahnwellen) kann bei Umlaufbiegung alternativ die statische Analyse mit einem einzelnen Lastschritt ausgeführt werden (stationäres Biegemoment). Stattdessen erfolgt die Auswertung der örtlichen Kerbspannungen »umlaufend« um die Wellenachse (rotierender Beobachter), womit der Spannungsverlauf eines vollen Lastwechsels ermittelt wird.

Die *quasistatische Analyse* eines gesamten Lastwechsels (siehe Abbildung 3.19 Rechts) benötigt ungleich mehr Rechenzeit. Eventuell vorkommende Veränderungen in der örtlich wirkenden Spannungsamplitude durch reibungsbehaftete Einlauferscheinungen oder Schlupfvorgänge in der Kontaktfuge können allerdings nur auf diese Weise erfasst werden (irreversibler quasistatischer Prozess). Weiterhin ermöglicht diese Simulationsart die Bestimmung des Ortes der kritischen Beanspruchung bei nicht rotationssymmetrischen Bauteilen (z. B. Passfederverbindungen), für die die Lage der kritischen Biegeebene bei Umlaufbiegung im Vorhinein nicht bekannt ist. Die gesuchten Kenngrößen Spannungsamplitude und Mittelspannung werden auf Basis der im ermittelten Spannungsverlauf eines gesamten Lastwechsels bestimmten Ober- und Unterspannung berechnet. Folglich nimmt die inkrementelle Schrittweite zwischen den einzelnen Lastschritten eine zentrale Rolle ein. Eine zu niedrig gewählte Inkrementanzahl (siehe Abbildung 3.20) kann zu einem derart großen Abtastfehler des sinusförmig erwarteten Spannungsverlaufes führen, dass der Genauigkeitsgewinn gegenüber der statischen Analysen hinsichtlich der erfassten Schlupfvorgänge gänzlich verschwindet.

Hinweis: Soll eine Umlaufbiegung als vollständiger Lastwechsel simuliert werden (quasistatische Analyse), ist die Biegebelastung als *nicht* flächensymmetrisch anzu-

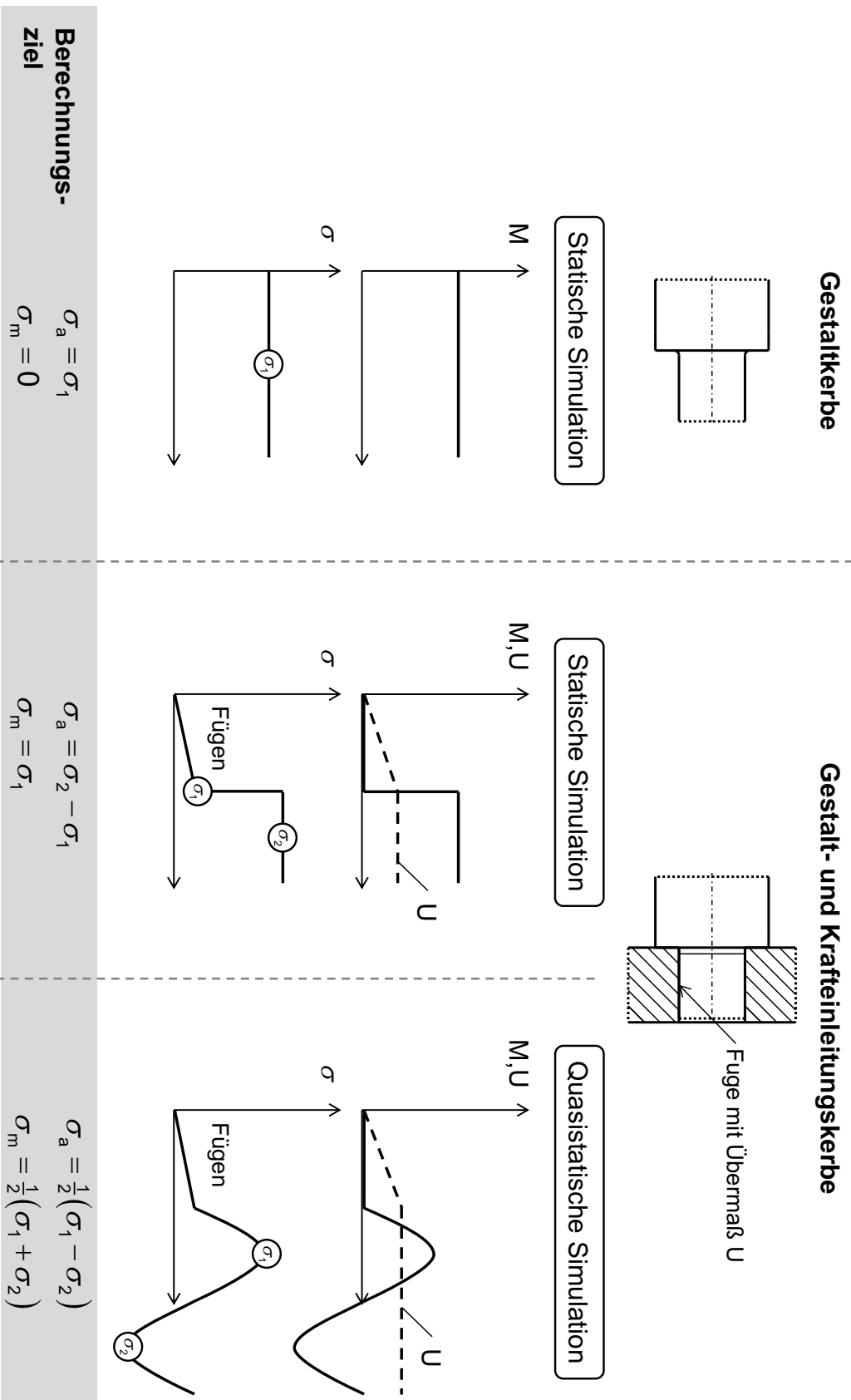


Abb. 3.19: Gegenüberstellung der Simulationsarten

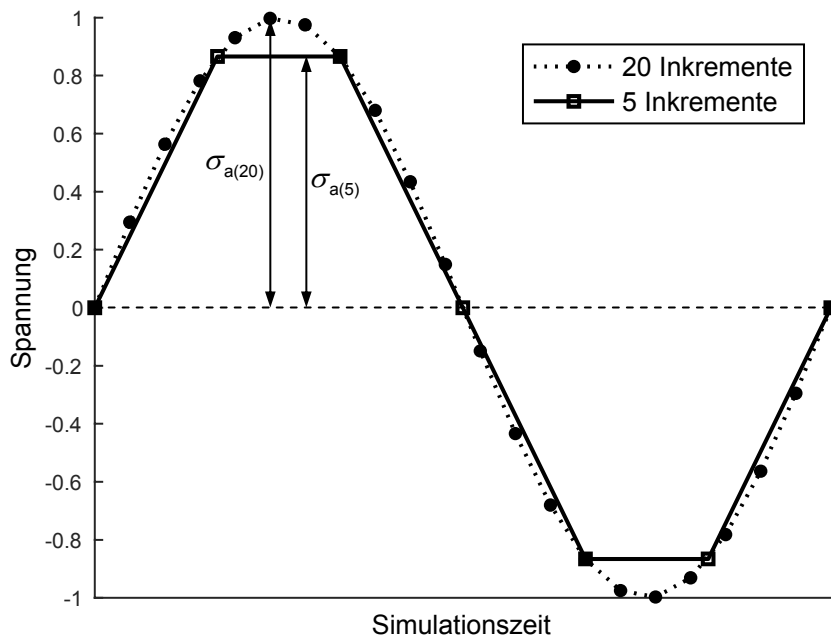


Abb. 3.20: Spannungsverlauf eines Lastwechsels mit unterschiedlicher inkrementeller Schrittweite

sehen. Damit sind die Angaben zur Symmetrienausnutzung bei Biegung in Abschnitt 3.2.1, Tabelle 3.2 nicht mehr anwendbar!

3.3 Kerbspannungsermittlung an einer Beispielgeometrie

Als Voraussetzung für die Untersuchungen zu typischen Kerbspannungsaspekten bei Mehrfachkerben in Abschnitt 3.4 wird im Folgenden die FE-Analyse einer exemplarischen Kerbform mit besonders komplexer Geometrie zusammengefasst. Abbildung 3.21 zeigt eine Getriebezwischenwelle mit einer Mehrfachkerbe als Überlagerung der Einzelkerben Verzahnung (Zahnfußausrundung), Wellenabsatz mit Freistich und Querpresssitz.

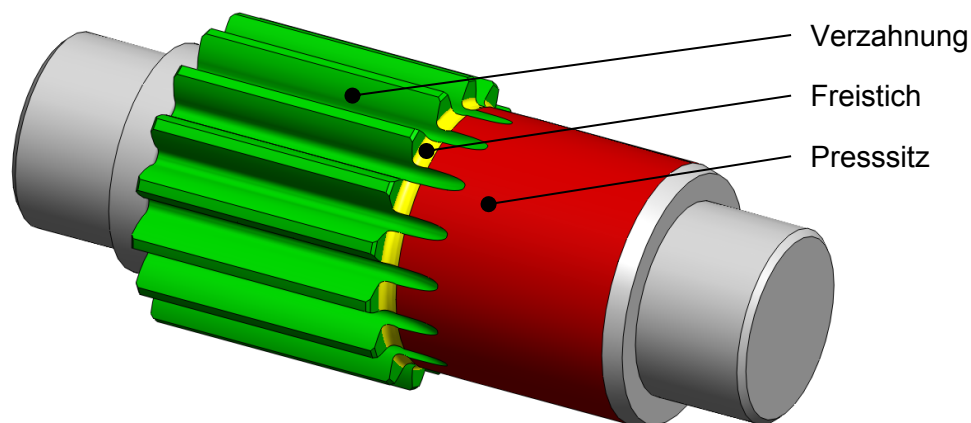


Abb. 3.21: Getriebezwischenwelle mit Mehrfachkerbe (Durchdringungskerben)

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.2.1 (Abbildung 3.6) wird zur Kerbspannungsermittlung an der kritischen Kerbe nur der relevante Wellenabschnitt modelliert und dieser getrennt mit den Belastungsarten Biegung und Torsion beaufschlagt. Zusätzlich erfolgt eine Spannungsberechnung für den kombinierten Lastfall zur Überprüfung des kritischen Nachweisortes bei überlagerter Biege- und Torsionsbelastung. Der Krafteinleitungskerbe Querpresssitz gerecht werdend, findet das in Abbildung 3.22 dargestellte (vom Autor gemeinsam mit Wagner [90] entwickelte) FE-Kontaktmodell Anwendung. Aufgrund der sehr komplexen Geometrie kommt die Modellierungsstrategie der nicht konformen Vernetzung zwischen kernnahen und kernfernen Bereichen (FE-Knoten liegen an Netzgrenze nicht aufeinander) zur vereinfachten Modellerstellung und Durchführung von Spannungs-Konvergenzanalysen zum Einsatz.

Die Spannungsermittlung für Umlaufbiegung erfolgt in diesem Fall für einen vollständigen Lastwechsel mit umlaufend modelliertem Biegemoment in einer quasistatischen Simulation. Aus diesem Grund ist das Modell nicht zur Reduzierung auf ein Halbmodell geeignet. Zur Berechnung der Kerbspannung unter Torsion soll eine statische Simulation mit den zwei Lastschritten »Pressung aus Übermaß« und »Pressung + Torsionsmoment« genügen.

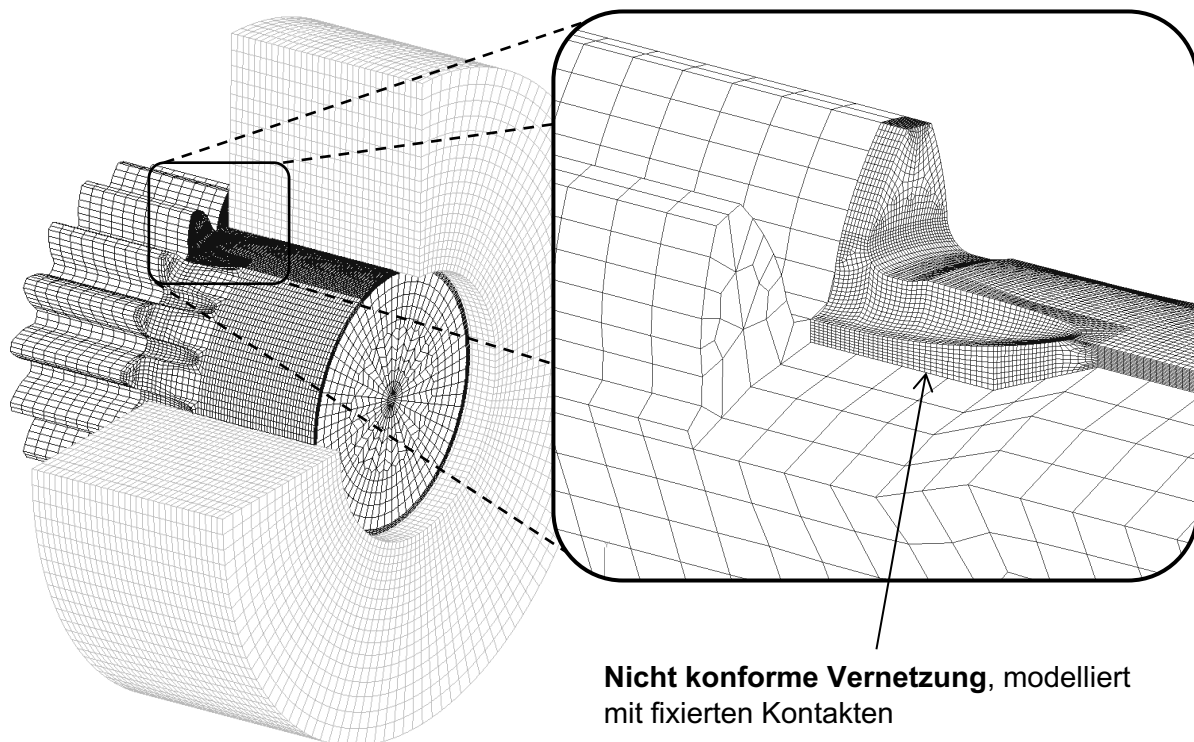


Abb. 3.22: Finite-Elemente-Kontaktmodell für Kerbbeispiel »Wellenabsatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz«

Zum Postprozess der Knotenspannungsberechnung gehört die Bestimmung der Amplituden der einzelnen Spannungskomponenten (Subtraktion der statischen Mittelspannung infolge des Presssitzes) sowie die Transformation des Spannungstensors in ein zur Bauteiloberfläche tangentiales Koordinatensystem (siehe Abbildung 3.4). Aufgrund der getroffenen Einschränkung auf Kerbstellen mit kraftfreier Bauteiloberfläche werden Beanspruchungen in der Kontaktzone nicht betrachtet. In Anhang C sind die so erhaltenen Komponenten der örtlichen Kerbspannungen im lokalen Koordinatensystem für verschiedene kritische Punkte am Bauteil angegeben.

3.4 Einflussanalyse von typischen Kerbspannungsaspekten

3.4.1 Mehrachsigkeit

Kerbformzahl

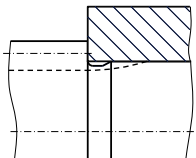
Auf Basis der in Abschnitt 3.1 dargelegten unterschiedlichen Herangehensweisen für die Bestimmung der Kerbformzahlen von Mehrfachkerben (bzw. Kerben mit mehrachsiger Kerbbeanspruchung) werden die örtlich ermittelten Kerbbeanspruchungen analysiert. Anwendung finden hierbei folgende Methoden:

- (I) Berechnung einer Formzahl pro Belastungsart mittels Hauptspannung bzw. größter Schubspannung (Gleichung 3.7, Seite 34)
- (II) Berechnung einer Formzahl pro Belastungsart mittels Vergleichsspannung nach Gestaltänderungsenergiehypothese (Gleichung 3.6, Seite 34)
- (III) Berechnung von bis zu drei Formzahlen pro Belastungsart (komponentenweise) nach neu entwickelter Methode (Tabelle 3.1, Seite 37)

In Tabelle 3.4 sind die für das in Abschnitt 3.3 analysierte Kerbbeispiel »Wellenabsatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz« ermittelten Formzahlen aufgeführt. Aufgrund des Presssitzes liegen in diesem Beispiel auch sogenannte *grundlastfallfreie* Mittelspannungen vor, deren Betrachtung in Abschnitt 3.4.3 erfolgt. Zur Formzahlermittlung gilt es daher zu beachten, dass die größten örtlichen Spannungs-Amplituden herangezogen werden.

Im Gegensatz zu Methode I und II weist Methode III keine offensichtlichen spannungsmechanischen Widersprüche auf und wird daher (unter den vorgestellten) als

Tab. 3.4: Formzahlen nach unterschiedlichen Berechnungsmethoden (I, II, III)

	I (MaxP/MaxS)		II (GEH)		III (Komponenten)	
	M_t	M_b	M_t	M_b	M_t	M_b
	$\alpha_t = 1,03$	$\alpha_b = 2,62$	$\alpha_t = 1,14$	$\alpha_b = 2,50$	$\alpha_{t\sigma_z} = 0,86$	$\alpha_{b\sigma_z} = 2,62$
					$\alpha_{t\sigma_\varphi} = 0,14$	$\alpha_{b\sigma_\varphi} = 0,26$
					$\alpha_{t\tau} = 0,82$	$\alpha_{b\tau} = 0,11$

(Auswertungsort: Maximale Vergleichsspannungsamplitude bei kombinierter Belastung)

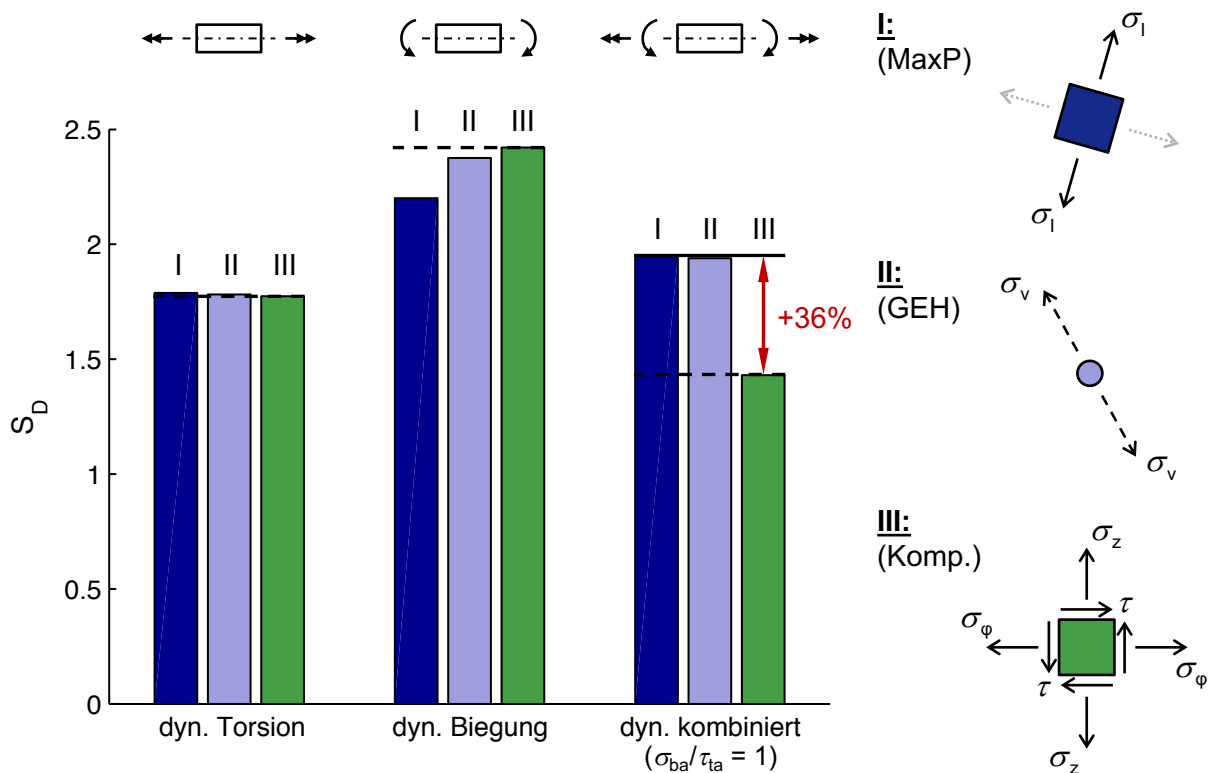


Abb. 3.23: Gegenüberstellung der mit unterschiedlichen Formzahlbestimmungsmethoden ermittelten Sicherheiten gegen Ermüdung am Kerbbeispiel »Wellenabsatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz« (Kerbspannungen s. Anhang C)

zur Tragfähigkeitsberechnung genaueste Methode betrachtet. Abbildung 3.23 vergleicht die resultierenden Sicherheiten gegen Ermüdungsbruch für das gewählte Kerbbeispiel für die drei Lastfälle (fiktive Lastannahmen):

- (a) schwingende Torsion mit statischer Torsionsmittellast,
- (b) Umlaufbiegung,
- (c) kombinierte Biegung und Torsion (Überlagerung von (a) + (b), $\sigma_{ba}/\tau_{ta} = 1$).

Die resultierenden Tragfähigkeiten nach den vereinfachenden Rechenmethoden I und II weichen bei überwiegender Einzelbelastung (reine Biegung, reine Torsion) wenig von der aufwändigen Methode III ab. Vor allem die Formzahlberechnung mittels Vergleichsspannung (GEH) liefert vergleichbare Werte. Rechnerische Unterschiede ergeben sich vor allem bei überlagerter schwingender Belastung. Hier weisen die beschriebenen spannungsmechanischen Ungenauigkeiten der häufig genutzten Methoden I und II einen deutlichen Einfluss auf. Im betrachteten Kerbfall ermittelt die neu entwickelte Methode III bei kombinierter Belastung eine deutlich geringere Tragfähigkeit

als die vereinfachenden Rechenansätze I und II. Diese Tendenz ist repräsentativ für sechs weitere, vom Autor in [72] untersuchte Kerbbeispiele. Die Ausprägung der festgestellten Abweichung hängt stark vom Grad der Mehrachsigkeit bzw. von der Höhe der jeweiligen Sekundärspannungen ab. Signifikante Unterschiede sind vor allem bei Mehrfachkerben mit »komplexer« Geometrie feststellbar.

Spannungsgefälle

Hinsichtlich der entwickelten Methode zur Berücksichtigung eines örtlich mehrachsigen Spannungszustandes im Nennspannungsnachweis mit separaten Formzahlen für jede wirkende Spannungskomponente ($\alpha_{\sigma_z}, \alpha_{\sigma_\varphi}, \alpha_\tau$) müsste konsequenterweise auch die Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles zur Berechnung der Stützwirkung separat für jede wirkende Spannungskomponente erfolgen ($G'_{\sigma_z}, G'_{\sigma_\varphi}, G'_\tau$). Diese Vorgehensweise geht mit einem erhöhten Aufwand zur Auswertung der numerisch gewonnenen Ergebnisse einher, da neben der Koordinatentransformation des Spannungstensors an der Bauteiloberfläche die zugehörigen Verläufe der einzelnen Spannungskomponenten ins Bauteilinnere aufgestellt werden müssen. Aus diesem Grund soll der komponentenweisen Betrachtung des Spannungsgefälles eine vereinfachte Berechnungsmethode gegenübergestellt werden. Bei diesem Verfahren wird das bezogene Spannungsgefälle für den Tiefenverlauf der Vergleichsspannung nach Mises (GEH) berechnet (G'_{σ_v}) und für alle Formzahlen eines Grundlastfalles einheitlich zur Ermittlung der zugehörigen Stützwirkung verwendet (vgl. Abbildung 3.24).

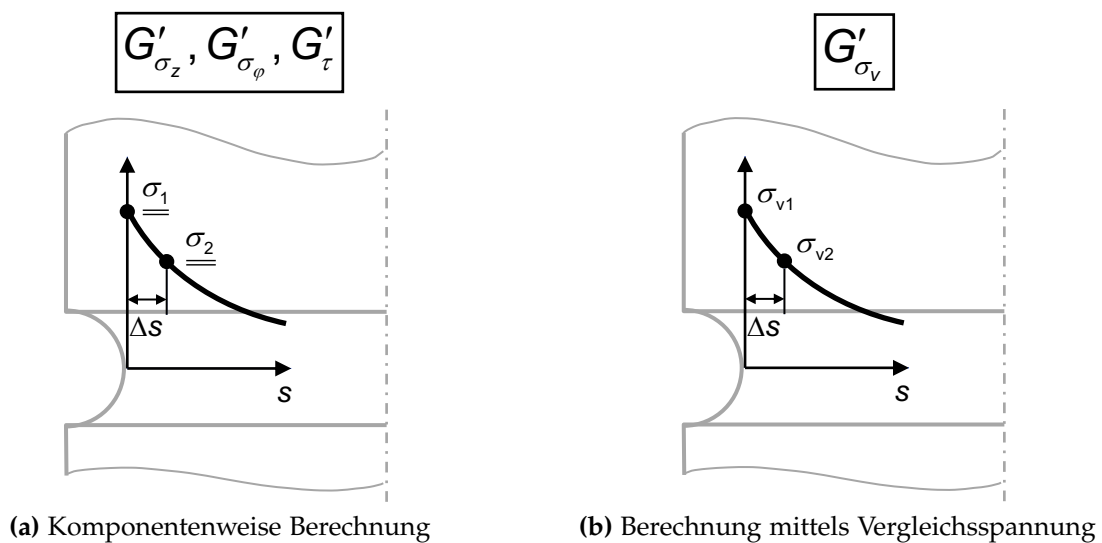


Abb. 3.24: Methoden zur Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles

Anschließend erfolgt ein Vergleich der gewonnenen Tragfähigkeit nach diesem vereinfachten Ansatz zur Berechnung des Spannungsgefälles mit der komponentenweisen Betrachtung des Spannungsgefälles (Formzahlen jeweils nach Methode III, der neu entwickelten Methode). Tabelle 3.5 stellt analog zu Abbildung 3.23 die rechnerisch ermittelten Sicherheiten gegen Ermüdung am Kerbbeispiel »Wellenabsatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz« für die drei Lastfälle dynamische Torsion, dynamische Biegung und kombinierte Belastung (überlagerte schwingende Biegung und schwingende Torsion, $\sigma_{ba}/\tau_{ta} = 1$) gegenüber. Als Wellenwerkstoff wurde in diesem konstruierten Beispiel der Vergütungsstahl 42CrMo4 mit einer Streckgrenze von $\sigma_S = 900 \text{ N/mm}^2$ angenommen.

Die resultierenden Tragfähigkeiten der beiden Methoden weisen für alle untersuchten Lastfälle nur eine minimale Abweichung (kleiner 1 %) voneinander auf. Demnach ist eine vereinfachte Berechnung/Auswertung des bezogenen Spannungsgefälles mittels Vergleichsspannung (GEH) anwendbar und in der Berechnungsanleitung in Anhang A umgesetzt.

Tab. 3.5: Gegenüberstellung der mit unterschiedlichen Berechnungsmethoden zum bezogenen Spannungsgefälle ermittelten Sicherheiten gegen Ermüdung (basierend auf Formzahlberechnungsmethode III; Kerbspannungen s. Anhang C)

	S_D mit ...		ΔS_D
	$G'_{\sigma_z}, G'_{\sigma_\varphi}, G'_\tau$	G'_{σ_v}	
dynamische Torsion	1,7742	1,7741	0,01 %
dynamische Biegung	2,4149	2,4213	0,26 %
kombinierte Belastung	1,4273	1,4308	0,24 %

3.4.2 Ort der Auswertung bei zusammengesetzter Belastung

Bei zusammengesetzter dynamischer Belastung (gleichzeitige Wirkung von Einzelkomponenten wie Biegung und Torsion) wird im Ermüdungsfestigkeitsnachweis nach DIN 743 für die örtliche Überlagerung der Beanspruchungskomponenten angenommen, dass die Einzelspannungsmaxima am gleichen Ort vorliegen. Diese Annahme ist für die meisten Kerbformen zutreffend. Bei bestimmten komplizierten Kerbgeometrien – wie dem untersuchten Wellenabsatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz – fallen jedoch die Orte der maximalen Biegespannungs- und Torsionsspannungsamplitude zu keinem Zeitpunkt übereinander. Werden nun diese Einzelmaxima innerhalb der Sicherheitsberechnung überlagert, so erfolgt die Ermittlung einer resultierenden Spannungsamplitude, wie sie in der Realität in ihrer Höhe so nicht auftritt.

Abbildung 3.26 stellt die Kerbspannungssituation in Verbindung mit den einzelnen Berechnungsschritten schematisch dar. Berechnungsziel sind die im Betrag verminderten örtlichen Spannungen der jeweiligen Einzelbelastung. Mit den so bestimmten Spannungskomponenten am resultierenden Nachweisort erfolgt die Formzahlberechnung für jede wirkende Belastungsart. Die daraus ermittelten Formzahlen besitzen nur für das gewählte *Verhältnis* der Einzelbelastungen Gültigkeit.

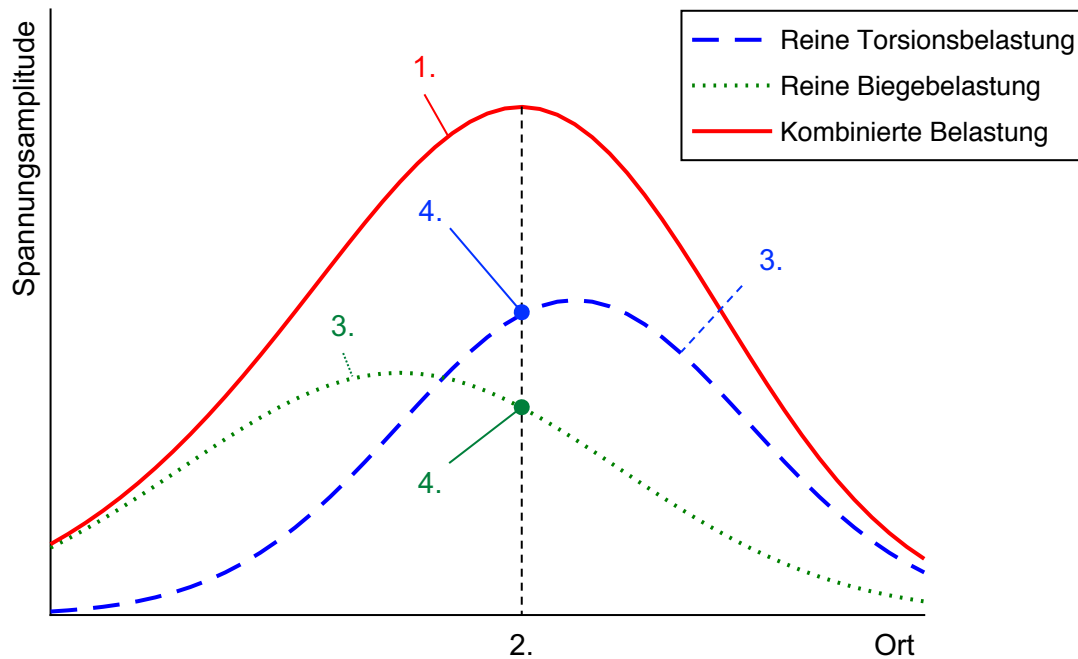


Abb. 3.26: Prinzipskizze der Spannungsverteilung im Kerbgrund

Abbildung 3.27 vergleicht die auf diese Art gewonnene Sicherheit gegen Ermüdung mit der rechnerisch ermittelten Tragfähigkeit bei normgetreuer Vorgehensweise (direkte Überlagerung der Einzelspannungsmaxima ohne Berücksichtigung der unterschiedlichen Auswertungsorte) am gewählten Kerbbeispiel. Die Betrachtung erfolgt für die in Abschnitt 3.4.1 vorgestellten Methoden zur Formzahlberechnung I (MaxP) und II (GEH) und wird ebenfalls der spannungsmechanisch begründeten (und damit nach der Theorie genauesten) Referenzmethode III (Komp.) gegenübergestellt.

Auffällig ist, dass die Ergebnisse bei vereinfachter Formzahlermittlung und direkter Überlagerung der Einzelspannungsmaxima sehr dicht am Referenzwert (komponentenweise Betrachtung inkl. Berücksichtigung des sich tatsächlich einstellenden Spannungsmaximums) liegen – also der Rechenansatz mit zwei Vereinfachungen »genauere« Vorhersagen liefert als die realitätsnähere Vorgehensweise (Berücksichtigung der Spannungsorte). Die Formzahlermittlung mit Vergleichsspannungen (MaxP, GEH) führt zu einer Überbewertung der Tragfähigkeit, während die direkte örtliche Überlagerung der Beanspruchungen bei Einzellast generell die Tragfähigkeit unterschätzt.

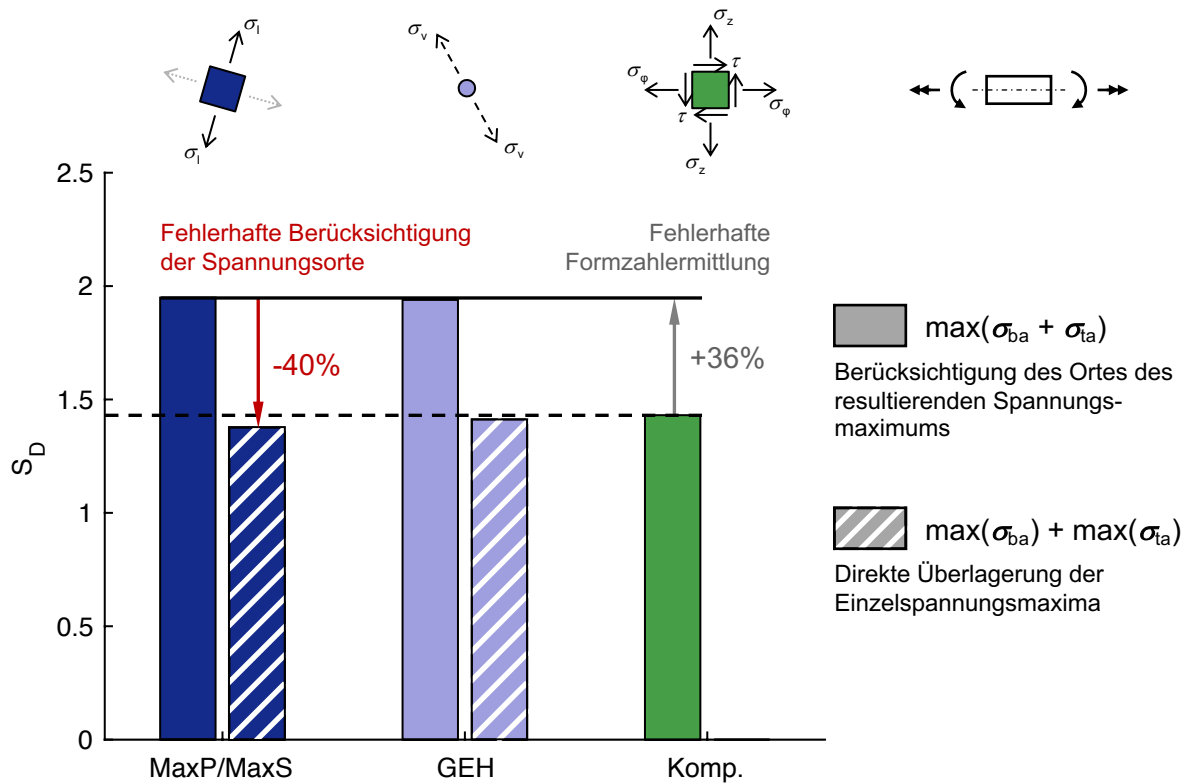


Abb. 3.27: Gegenüberstellung der ermittelten Sicherheiten gegen Ermüdung bei kombinierter Belastung ($\sigma_{ba}/\tau_{ta} = 1$) mit und ohne Berücksichtigung des tatsächlichen Ortes des resultierenden Spannungsmaximums (Kerbspannungen s. Anhang C)

Diese Tendenzen scheinen systematisch gegenläufig zu sein. Dass sie sich allgemein bei beliebigen Kerbformen vom Betrag gegenseitig kompensieren, wird vom Autor allerdings als wenig wahrscheinlich angesehen.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Berücksichtigung des sich tatsächlich einstellenden kritischen Ortes bei zusammengesetzter Belastung einen signifikanten Unterschied in der ermittelten Ermüdungsfestigkeit verursachen kann. Die rechnerische Erfassung erfordert allerdings einen erheblichen Mehraufwand. Bei Vernachlässigung erfolgt eine konservative Abschätzung der Tragfähigkeit.

3.4.3 Grundlastfallfreie Mittelspannung

Auftretende Mittelspannungen aus den definierten Belastungsarten bzw. Grundlastfällen Zug/Druck, Biegung und Torsion können als Nennspannungen in der DIN 743 hinsichtlich erreichbarer Dauerfestigkeit berücksichtigt werden. Anderweitig entstehende statische Vorspannungen in Kerben, wie beispielsweise Eigenspannungen in-

folge einer Wärmebehandlung, werden derzeit nicht im Mittelspannungseinfluss, sondern u. a. in einem Oberflächenverfestigungsfaktor berücksichtigt. Gänzlich unberücksichtigt bleiben Spannungen durch Dehnungsbehinderung in Kerben, beispielsweise infolge einer benachbarten Pressverbindung (Abbildung 3.28). Diese verhalten sich während des Lastverlaufes konstant und werden deshalb nachfolgend wie Mittelspannungen betrachtet. Da sie keinem der definierten Grundlastfälle zugeordnet werden können und unabhängig von der äußeren Last wirken, bleiben sie im derzeitigen Tragfähigkeitsnachweis nach DIN 743 unbeachtet. Im Folgenden erhalten sie die Bezeichnung *grundlastfallfreie* Mittelspannungen σ_{pm} (Index: pm).

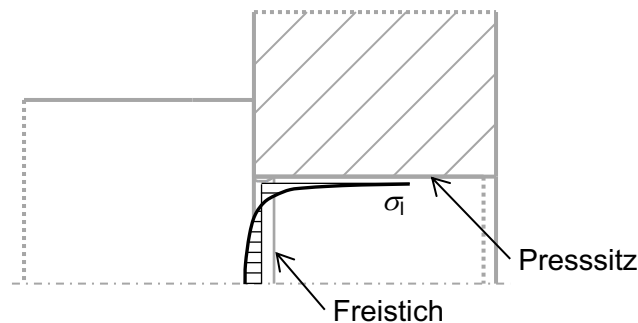


Abb. 3.28: Grundlastfallfreie Mittelspannung infolge einer Pressverbindung

Der Nachweis des Vermeidens von Dauerbrüchen nach DIN 743 erfasst die Wirkung vorhandener Mittelspannungen σ_m, τ_m durch eine Verminderung/Erhöhung der Bauteilwechselfestigkeit σ_{WK}, τ_{WK} auf eine dauerfest ertragbare Beanspruchungsamplitude des Bauteils σ_{ADK}, τ_{ADK} . Im hier relevanten Beanspruchungsfall ($\sigma_m = \text{konst.}$ bei Belastungserhöhung) wird sie nach

$$\sigma_{ADK} = \sigma_{WK} - \psi_{\sigma K} \cdot \sigma_m \quad \text{bzw.} \quad \tau_{ADK} = \tau_{WK} - \psi_{\tau K} \cdot \tau_m \quad (3.10)$$

mit dem Einflussfaktor der Mittelspannungsempfindlichkeit $\psi_{\sigma K}, \psi_{\tau K}$ berechnet. Bei der Einarbeitung der grundlastfallfreien Mittelspannungen in einen erweiterten Tragfähigkeitsnachweis nach DIN 743 ist zu beachten, dass in Analogie zu den nennspannungsbezogenen Größen in Gleichung 3.10 die örtlich berechneten Kerbspannungen infolge des Presssitzes σ_{pmK} konzeptgetreu auf (fiktive) Nennspannungen zurückgeführt werden müssen. Die in Abbildung 3.28 über den Querschnitt aufgetragene Spannung in Wellenlängsrichtung hebt sich im Mittel auf. Sie ist ohne Kerbe nicht existent und besitzt damit keine nach den Beziehungen der elementaren Festigkeitstheorie berechenbare Nennspannung.

Zur Vermeidung tiefgreifender Änderungen der aktuellen Normberechnung erfolgt die Integration der grundlastfallfreien Mittelspannungen in Form eines wirkungskonformen Berechnungsansatzes. Die numerisch bestimmte, örtliche Mittelspannung

wird am selben Ort wie die Spannungsamplitude zur Formzahlermittlung abgelesen. Die einzelnen Spannungskomponenten $\sigma_{z\text{pmK}}$, $\sigma_{\varphi\text{pmK}}$ und τ_{pmK} werden zunächst zu einer (örtlichen) Vergleichsmittelspannung

$$\sigma_{\text{pmvK}} = \sqrt{\sigma_{z\text{pmK}}^2 + \sigma_{\varphi\text{pmK}}^2 - \sigma_{z\text{pmK}} \cdot \sigma_{\varphi\text{pmK}} + 3 \cdot \tau_{\text{pmK}}^2}, \quad \tau_{\text{pmvK}} = \frac{\sigma_{\text{pmvK}}}{\sqrt{3}} \quad (3.11)$$

zusammengefasst. Anschließend ist diese örtliche Vergleichsspannung zur Berechnung der einzelnen Komponenten der Bauteildauerfestigkeit mit der jeweils zugehörigen Formzahl aus Tabelle 3.1 (Seite 37) auf fiktive Nennmittelspannungen

$$\sigma_{\text{pm}} = \frac{\sigma_{\text{pmvK}}}{\alpha_{\sigma}} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{\text{pm}} = \frac{\tau_{\text{pmvK}}}{\alpha_{\tau}} \quad (3.12)$$

umzurechnen. Diese können nachfolgend analog zu den Nennmittelspannungen aus den Grundlastfällen in die Bestimmung der Bauteildauerfestigkeit einfließen. Anhang A beinhaltet eine ausführliche Darstellung des verwendeten Formelapparates.

Der Einfluss der grundlastfallfreien Mittelspannung auf das Ergebnis der rechnerisch ermittelten Tragfähigkeit ist in Tabelle 3.6 erneut für das Musterbeispiel »Wellenabsatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz« aufgeführt. Mit maximal 5 % fällt die Reduzierung der Bauteilsicherheit durch die Mittelspannung aus der nahen Pressverbindung gering aus. Untersuchungen an weiteren Kerbbeispielen [72] bestätigen diese Größenordnung. Der Einfluss der grundlastfallfreien Mittelspannungen wird dennoch als relevant genug eingeschätzt, um die Möglichkeit zu dessen Berücksichtigung in einer Erweiterung des Tragfähigkeitsnachweises nach DIN 743 vorzusehen.

Tab. 3.6: Einfluss der grundlastfallfreien Mittelspannung σ_{pm} auf die ermittelte Sicherheit gegen Ermüdung (basierend auf Formzahlberechnungsmethode III; Anhang C)

	S_D		ΔS_D
	ohne σ_{pm}	mit σ_{pm}	
dynamische Torsion	1,79	1,77	1,1 %
dynamische Biegung	2,48	2,42	2,6 %
kombinierte Belastung	1,51	1,43	5,2 %

3.5 Entwicklung einer Berechnungsanleitung

Ein zentrales Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Entwicklung eines anwendungsbereiten und ganzheitlichen Leitfadens für die Implementierung von mittels FE-Analyse ermittelten Kerbbeanspruchungen in die Ermüdungsfestigkeitsberechnung nach DIN 743. Hierbei soll die Vorgehensweise des Tragfähigkeitsnachweises der Norm im Wesentlichen beibehalten werden. Das beinhaltet vor allem die Beibehaltung des nennspannungsbasierten Nachweises und damit die Erfassung der örtlichen Beanspruchungsüberhöhungen durch Form- und Kerbwirkungszahlen. Ebenso soll die getrennte Betrachtung der Bauteilfestigkeit für die drei Grundlastfälle Zug/Druck, Biegung und Torsion, die bei einer zusammengesetzten Belastung überlagert werden, fortbestehen. Es gilt jedoch darüber hinaus, den aufgezeigten festigkeitsbeeinflussenden Effekten bei Mehrfachkerben, wie Sekundärspannungen (geometriebedingter mehrachsiger Spannungszustand), unterschiedliche Orte der kritischen Beanspruchung und grundlastfallfreie Mittelspannungen, Rechnung zu tragen.

Das Ergebnis dieser Bemühung ist in Anhang A zu finden. Hierbei kommt die in Abschnitt 3.1.3 neu entwickelte Formzahlbestimmungsmethode mit separaten Formzahlen für jede Kerbspannungskomponente (Komponentenweise Formzahlberechnung) zum Einsatz. Entsprechend den Erkenntnissen aus Abschnitt 3.4.1 bis 3.4.3 erfolgt die Auswertung des bezogenen Spannungsgefälles vereinfacht über eine Vergleichsspannung (GEH). Optional können unterschiedliche Orte der kritischen Beanspruchung bei zusammengesetzter Belastung sowie grundlastfallfreie Mittelspannungen berücksichtigt werden. Nachfolgend werden ergänzend einige Detaillösungen erläutert.

Die Berechnung der Gestaltfestigkeit lehnt sich eng an das Berechnungsverfahren der DIN 743 an. Der Algorithmus wird an den notwendigen Stellen auf die komponentenweise Betrachtung (infolge der komponentenweisen Berechnung der Formzahl) erweitert (siehe Abbildung 3.29). Bei der Bestimmung der Bauteilwechselfestigkeitskomponenten σ_{zWK} , $\sigma_{\varphi WK}$, τ_{WK} aus der Werkstoffwechselfestigkeit ist allerdings ein Kompromiss für die Belastungsart Zug/Druck notwendig. Die Schubfestigkeitskomponente τ_{zdWK} wird mangels Alternativen aus der Werkstoff-Torsionswechselfestigkeit τ_{tW} berechnet, obwohl diese Werkstofffestigkeit einen Spannungsgradienten in der Nennspannung berücksichtigt, der bei Zug/Druck nicht vorliegt. Dies wird hier als vertretbar angesehen, da bei zusammengesetzten Belastungen der festigkeitsrelevante Einfluss des Zug/Druck Anteils zumeist eine untergeordnete Rolle spielt.

Aufgrund der erwähnten Möglichkeit, dass für eine Formzahlkomponente $\alpha < 1$ gelten kann, können einzelne Komponenten der Wechselfestigkeit des gekerbten Bauteils σ_{WK} rechnerisch größere Werte als die zugehörige Werkstoffwechselfestigkeit σ_W annehmen. Für die nennspannungsbasierte Berechnung der Bauteilsicherheit bei örtlich

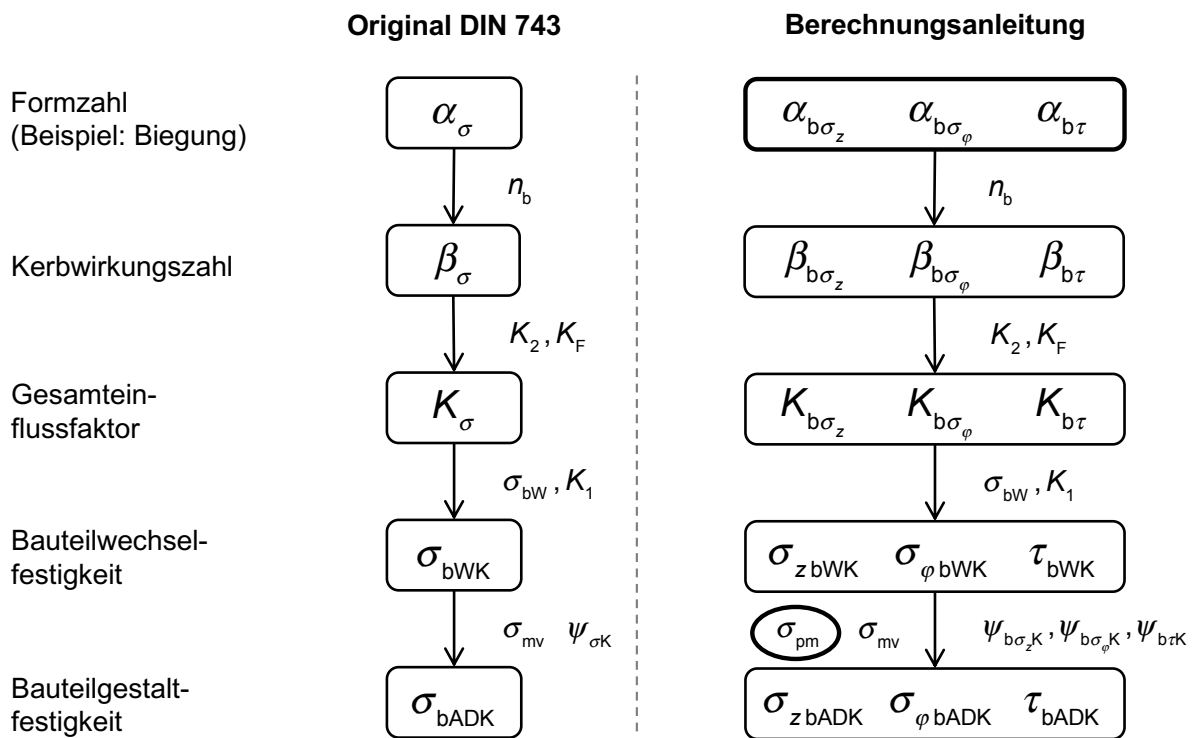


Abb. 3.29: Übersicht über die Erweiterung im Ablauf der Normberechnung für den Grundlastfall Biegung (Neue Eingabegrößen dick umrandet)

mehrschiger Beanspruchung ist dies ein erwartetes und notwendiges Zwischenergebnis. Der in DIN 743 hinterlegte funktionale Zusammenhang mit dem Mittelspannungsempfindlichkeitsfaktor

$$\psi_K = \frac{\sigma_{WK}}{2 \cdot K_1(d_{eff}) \cdot \sigma_B(d_B) - \sigma_{WK}} \quad (3.13)$$

ist dafür jedoch nicht vorgesehen. Wie Abbildung 3.30 für den Belastungsfall Biegung mit $\sigma_{bW} = 0,5 \cdot \sigma_B$ zeigt, läuft er für $\sigma_{bWK} > \sigma_{bW}$ in eine Polstelle. Daher wird der Mittelspannungsempfindlichkeitsfaktor auf seinen bisher bekannten Wertebereich beschränkt, indem für Bauteilwechselfestigkeiten jenseits der Werkstoffwechselfestigkeit die Grenzempefindlichkeit $\psi_{K,max}$ gelten soll. Der Maximalwert der Mittelspannungsempfindlichkeit ergibt sich bei $\sigma_{bWK} = \sigma_{bW}$ (ungekerbtes Bauteil) je nach Belastungsart zu

$$\psi_{z\sigma K,max} = 0,25, \quad \psi_{\phi\sigma K,max} = 0,333 \quad \text{und} \quad \psi_{\tau K,max} = 0,176. \quad (3.14)$$

Die Einbindung der grundlastfallfreien Mittelspannung erfolgt über eine örtliche Vergleichsspannung σ_{pmvK} (siehe Abschnitt 3.4.3), statt die einzelnen örtlichen Span-

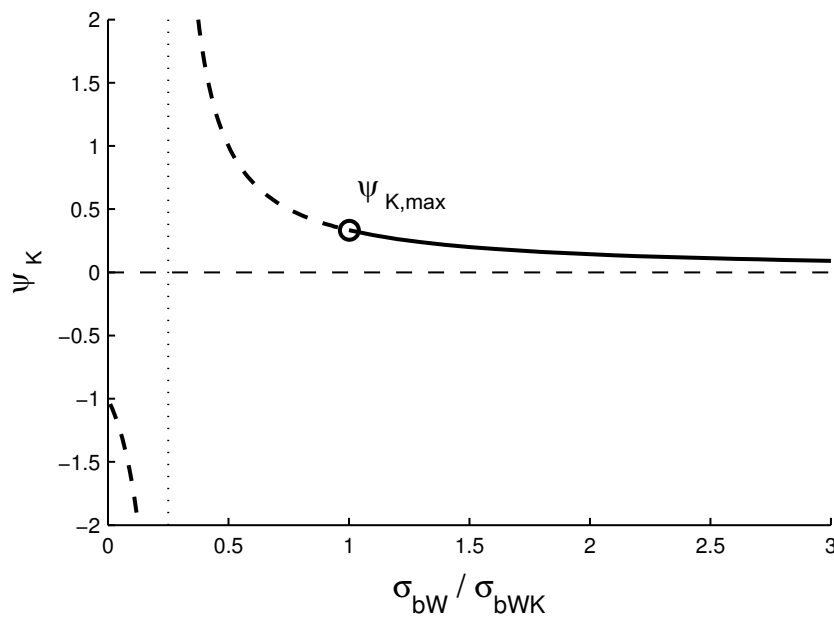


Abb. 3.30: Polstelle in der Funktion des Mittelspannungsempfindlichkeitsfaktors

nungskomponenten separat zu berücksichtigen. Dies erscheint inkonsequent, werden doch die Spannungsamplituden (indirekt über die separaten Formzahlen) komponentenweise betrachtet. Der Berechnungsweg besitzt jedoch praktische Notwendigkeit, da sonst die Mittelspannung in den Szenarien rechnerisch keinen Einfluss auf die Ermüdungsfestigkeit hätte, in denen zu einer Mittelspannungskomponente keine zugehörige Amplitudenspannung existiert. Diese Problematik betrifft allgemein alle Mittelspannungsanteile, auch jene aus den Grundlastfällen. Ein klassisches Beispiel ist eine Getriebewelle mit statischer Torsionsbelastung und zahnkraftbedingter Umlaufbiegung. Bei einfachen Umlaufkerben oder an der glatten Welle wird die Biegespannungsamplitude in Wellenachsrichtung wirken, während die Torsionsmittelspannung als reine Schubspannungskomponente in Erscheinung tritt. Da in diesem Fall die Schubspannungs-Amplitude Null ist, geht der Mittelspannungseinfluss rechnerisch unter.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass sich der erweiterte Formelapparat der entwickelten Berechnungsanleitung in einer Grenzwertbetrachtung erwartungsgemäß wieder auf die originale Normberechnung zurückführen lässt, wenn alle Sekundärspannungen zu Null gesetzt werden.

4 Kerbwirkungsfaktoren für Zahnwellenverbindungen

4.1 Automatisierte Erstellung, Berechnung und Auswertung von Finite-Elemente-Modellen

Die rechnerische Bestimmung der örtlichen Spannungskonzentration erfordert aufgrund der komplexen Kerbgeometrie den Einsatz numerischer Berechnungsmethoden, wie der Finiten-Elemente-Methode. Bestehende FE-Programmsysteme stellen viele Funktionen zur komfortablen Geometrie- und Netzerstellung zur Verfügung. Jede Einzelkombination (Variante) der in Kapitel 1 genannten Parameter ruft allerdings eine Änderung der Geometrie und infolgedessen eine neue Vernetzung hervor. Bei einer entsprechend hohen Anzahl an Parametervarianten ist an eine Lösung der Problemstellung ohne entsprechende Automatisierung aller Bearbeitungsschritte nicht zu denken.

4.1.1 Entwicklung eines Präprozessors

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein problemspezifischer Präprozessor zur automatisierten Erstellung von dreidimensionalen FE-Modellen von Zahnwellen und Zahnwellenverbindungen mit freiem Zahnauslauf entwickelt. Die Funktionen des erstellten Programmes umfassen Geometriemodellierung, Vernetzung und Definition der Modellrandbedingungen für Welle und Nabe mit evolventischem Zahnflankenprofil nach DIN 5480 [15]. Die Einstellmöglichkeiten des Präprozessors erlauben die Variation der unterschiedlichen Verzahnungs- und Kerbparameter.

Der Präprozessor ist in Form eines selbstständig ausführbaren MATLAB-Programmes realisiert. Der Programmentwurf folgt hierbei streng dem fortschrittlichen Konzept der *Objektorientierten Programmierung*. Dieser Ansatz bringt erhebliche Vorteile in der Erweiterbarkeit sowie Wart- und Handhabbarkeit des Programmcodes gegenüber der klassischen prozeduralen Programmierung mit sich. Nachträgliche Änderungen und

Erweiterungen des Präprozessors waren im angestrebten Nutzungsrahmen innerhalb der Forschungsarbeit immer wieder notwendig und konnten dank dieser Methode leicht umgesetzt werden, ohne die Stabilität des Programmes zu gefährden.

Die Wahl des Solvers zur anschließenden Analyse der Modelle fiel auf den Finite-Elemente-Rechnungslöser NASTRAN. Dementsprechend erfolgt die Ausgabe der generierten Modelle im bdf-Dateiformat¹ (Nastran-Eingabedatei).

Zahnprofilkontur

Zur Berechnung von Stützpunkten der Zahnprofilkurve wurde bewusst auf die Verwendung externer Software verzichtet, um flexibel auf die bestimmenden Parameter der Kurve Einfluss nehmen zu können. Die Profilkontur eines Halbzahnes setzt sich aus der evolventischen Flankenkurve und der vom Herstellverfahren abhängigen Fußübergangskurve zusammen (siehe Abbildung 4.1).

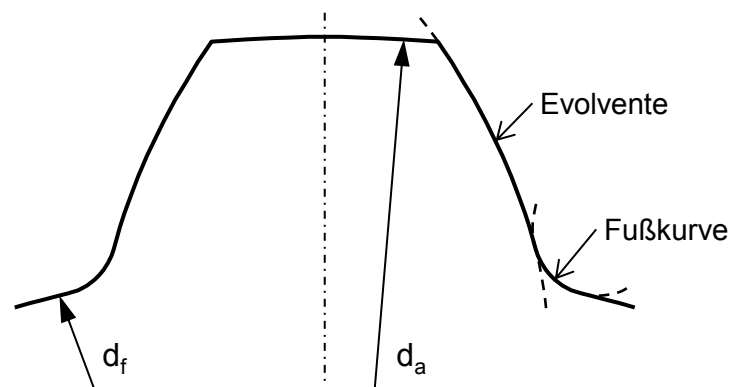


Abb. 4.1: Zahnprofilkontur der Welle

Anhang D gibt einen ausführlichen Überblick der im Präprozessor implementierten Berechnungsgleichungen für die Zahnprofilkontur. Berücksichtigung fanden hierbei Verzahnungen nach den Fertigungsverfahren Wälzfräsen, Wälzstoßen sowie Räumen und Walzen. Wichtige geometrische Größen der Werkzeuge sind den genormten Angaben in DIN 5480 [15] entnommen.

Geometriemodellierung und Vernetzung

Die Geometriemodellierung der erzeugten FE-Modelle umfasst lediglich die Erstellung eines Volumenmodells für ein halbes Zahnsegment (siehe Abbildung 4.2). Das

¹Bulk-Data-File; reine ASCII-Textdatei

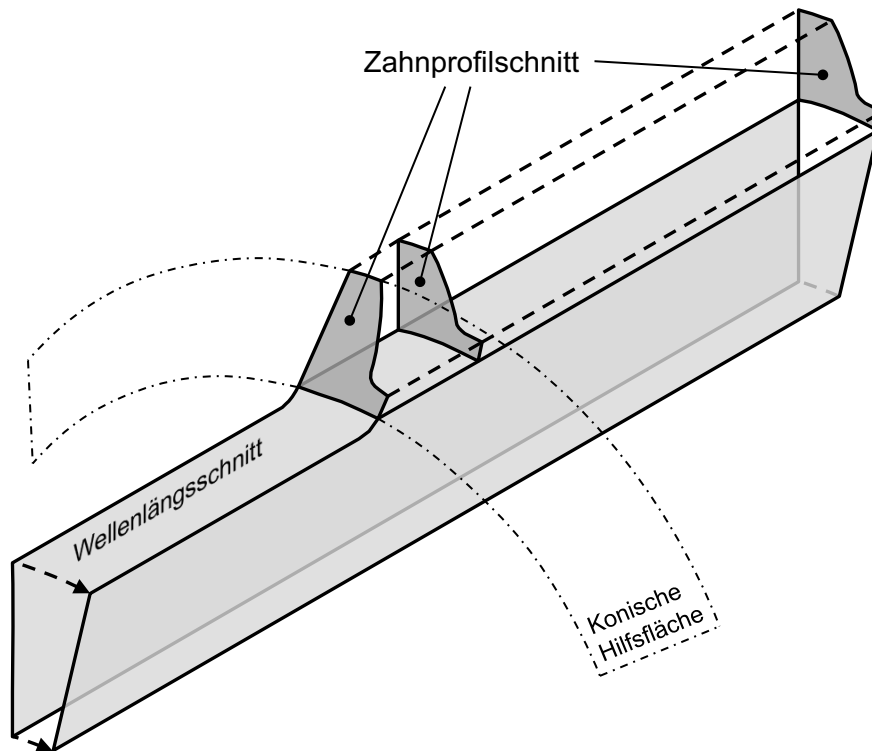
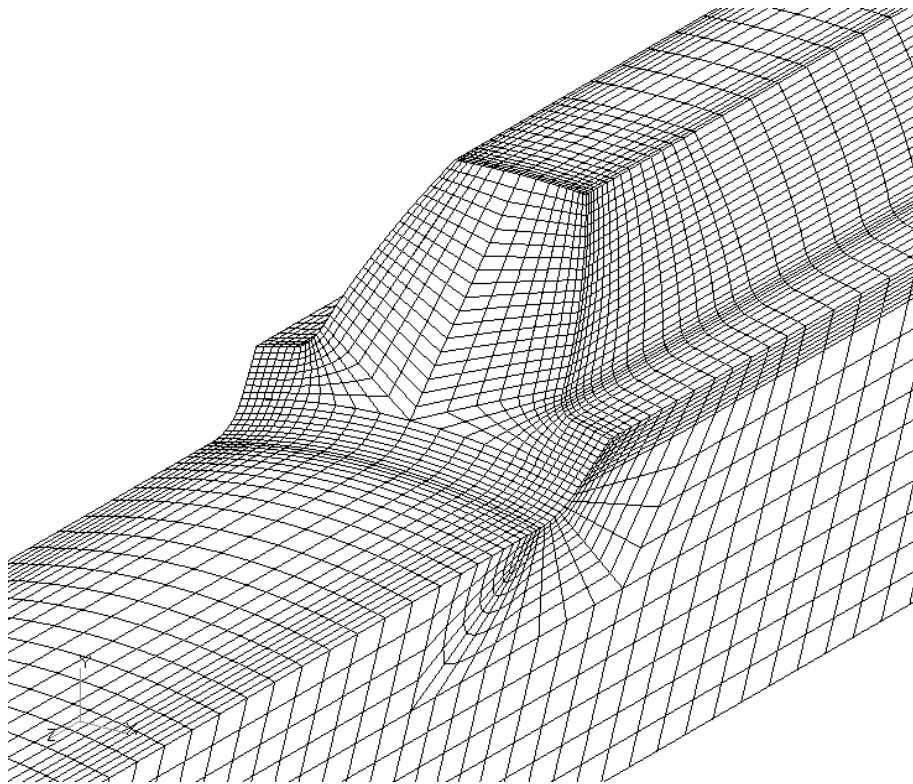


Abb. 4.2: Modellaufbau eines halben Zahnsegmentes mit konischem Zahnauslauf

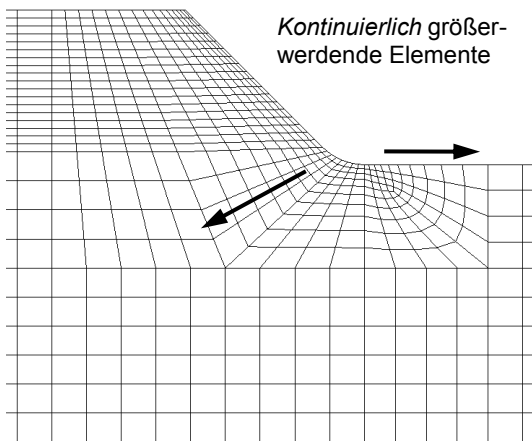
Gesamtmodell lässt sich anschließend durch Spiegelung und rotatorische Vervielfältigung des vernetzten Halb Zahnsegmentes erzeugen.

Wie in Abbildung 4.2 zu erkennen ist, basiert das Volumenmodell auf Zahnprofil- und Wellenlängsschnittflächen, welche zu Teilkörpern verbunden werden. Die Vernetzung des Gesamtvolumens wird von der Netzstruktur der segmentierten Schnittflächen bestimmt. Zur isometrischen Vernetzung der Teilvolumina mit Hexaeder-Elementen erfolgt programmintern der Aufruf vorhandener Bibliotheksfunktionen des kommerziell verfügbaren Programmes PATRAN.

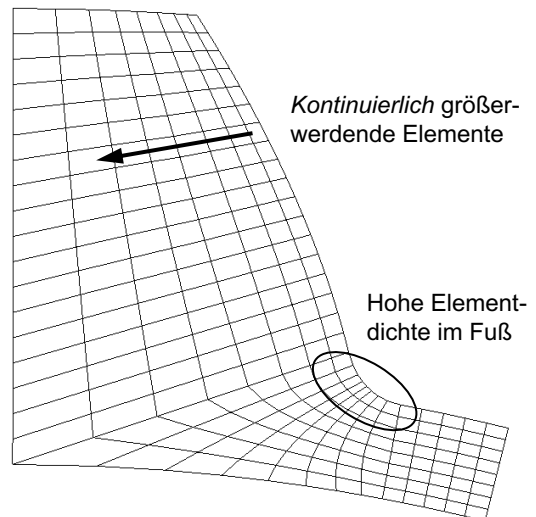
Die spannungskritischen Bereiche der Zahnwelle liegen erfahrungsgemäß in den Kerbereichen Zahnfuß und Zahnauslauf. Dementsprechend erfolgt zur Steigerung der Ergebnisqualität eine Netzverfeinerung an diesen Stellen. Abbildung 4.3 zeigt die vom Präprozessor erzeugte Vernetzung eines Sektormodells der Zahnwelle. Besonderes Augenmerk wurde auf einen kontinuierlichen Übergang der Vernetzungsdichte von fein zu grob vernetzten Gebieten gelegt. Sprungartige Änderungen der Elementgröße können zu unstetigen Verformungs- und Spannungsverläufen führen. Die vorliegende Vernetzungsstrategie stellt damit eine Erweiterung/Optimierung der FE-Diskretisierung von Daryusi [10] dar.



(a) Zahnsegment



(b) Wellenlängsschnitt

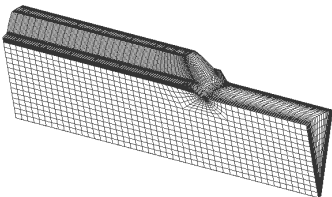
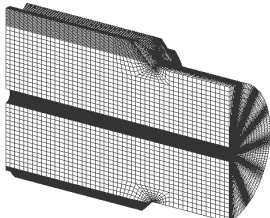
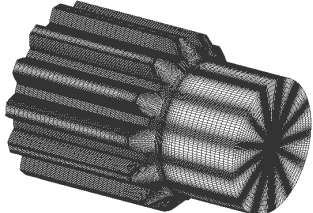
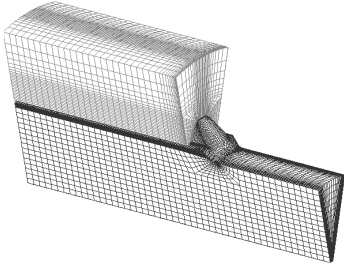
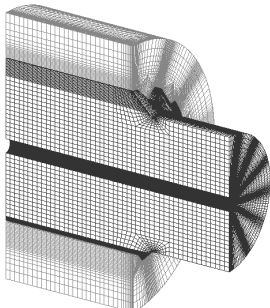
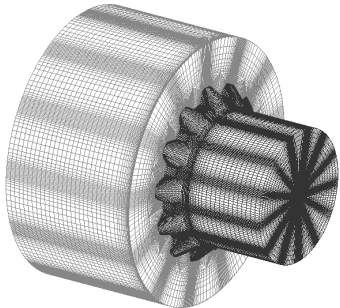


(c) Zahnprofilschnitt

Abb. 4.3: Vernetzungsergebnis des erstellten Präprozessors

In Abhängigkeit der aufgetragenen Belastung (Torsion, Biegung, kombinierte Belastung) generiert der Präprozessor ein Sektor-, Halb- oder Vollmodell der Welle bzw. der Welle-Nabe-Verbindung inklusive aller benötigten Symmetrierandbedingungen (siehe Tabelle 4.1). Im Falle einer durchzuführenden FE-Kontaktsimulation des Gesamtsystems Welle-Nabe übernimmt das entwickelte Programm die Definition der Kontakt-Randbedingung zwischen Welle und Nabe sowie die Kontaktparameterbestimmung für den implizit nichtlinearen FE-Solver MSC.Marc (integriert in MD.Nastran). Die Kontaktformulierung zwischen Welle und Nabe basiert auf einer Knoten-zu-Oberfläche Diskretisierung (vgl. Abschnitt 3.2.5).

Tab. 4.1: Implementierte Modell-Varianten des Präprozessors

	Sektormodell	Halbmodell	Vollmodell
Zahnwelle			
Verbindung			

Überprüfung der erzeugten FE-Modelle

Die Vernetzungsqualität der erzeugten FE-Netze wurde durch Spannungs-Konvergenzanalysen an mehreren ausgewählten Beispielverzahnungen überprüft. Die Konvergenzuntersuchungen erfolgten zum einen durch Erhöhung der Vernetzungsdichte (h-Konvergenz) im globalen sowie im lokalen Bereich, und zum anderen durch Erhöhung der Ordnung der Element-Ansatzfunktion (p-Konvergenz). Ein Auszug der Konvergenzbetrachtung zu den Spannungsformzahlen im Zahnauslauf- und Zahnfußbereich für eine Beispiel-Zahnwelle ist Abbildung 4.4 zu entnehmen. Die Knoten-

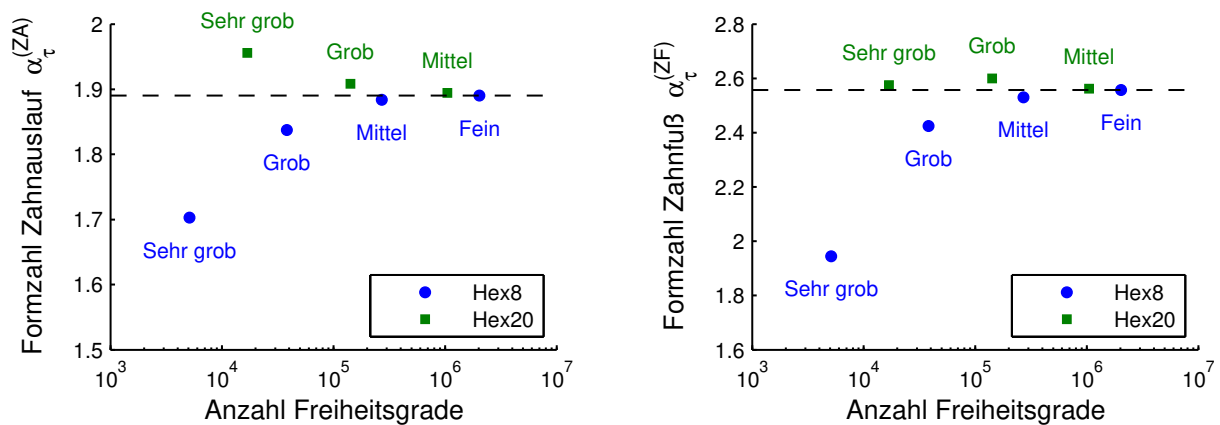


Abb. 4.4: Konvergenzanalyse der Torsionsformzahlen an einer Beispiel-Zahnwelle

dichte wurde den Vorgaben in Abschnitt 3.2.4 folgend jeweils linear um den Faktor 2 erhöht. Damit ist sichergestellt, dass der neue (mathematische) Raum von FE-Knoten den zuvor verwendeten Raum enthält. Die Elementanzahl des Modells steigt pro Stufe um das $2^3 = 8$ -fache der Ausgangsmenge an. Als guter Kompromiss zwischen Ergebnisgenauigkeit und effizienter Rechenzeit wurde die als »Mittel« bezeichnete sowie in Abbildung 4.3 gezeigte Vernetzungsdichte bei Verwendung von Elementen mit *linearer* Formfunktion (Hex8) gewählt.

4.1.2 Entwicklung eines Postprozessors

In Anbetracht der voll-automatisierten Erstellung und Berechnung einer Vielzahl an FE-Modellen zeigte sich die Notwendigkeit, die Aufbereitung und Auswertung der numerischen Ergebnisse ebenfalls *automatisiert* durchführen zu können. Der programmierte, fragestellungsbezogene Postprozessor extrahiert die berechneten Knotenspannungen der Bauteiloberfläche im Zahnfuß und im Zahnauslauf. Weiterhin ist er in der Lage, die im globalen Koordinatensystem angegebenen Spannungstensoren in ein jeweils tangential zur Bauteiloberfläche befindliches Koordinatensystem zu transformieren (vgl. Anhang A.2.1). Es ergeben sich Spannungskomponenten (vgl. Abbildung 4.6), die nicht direkt als Berechnungsergebnis im Postprozessor des FE-Systems Patran/Nastran verfügbar sind. Damit ist ferner eine Auswertung der örtlichen Beanspruchung nach der in Kapitel 3 entwickelten Methode gewährleistet.

Letztlich stellt der Postprozessor die in den folgenden Abschnitten beleuchteten Ergebnisgrößen ohne Nutzerinteraktion für die einzelnen FE-Modelle bereit. Diese können anschließend parametervariantenübergreifend analysiert werden.

4.1.3 Umsetzung einer Server-Client-Architektur für die verteilte Berechnung

Die geschaffenen Werkzeuge Präprozessor und Postprozessor ermöglichen die schnelle und automatisierte Berechnung einer einzelnen Parametervariante der Zahnwellenverbindung. Die wiederholte Anwendung der Programme auf eine Vielzahl von Varianten in einer großen statischen Serienberechnung erwies sich allerdings als wenig praktikabel. Probleme ergeben sich unter anderem bei der Verwaltung der Ergebnisdateien von weit mehr als 1000 zu berechnenden FE-Modellen, sowie bei der Flexibilität und »Prozesssicherheit« der statischen Abarbeitung. Aus diesem Grund wurde zusätzlich eine Server-Client-Architektur zur systematischen Berechnung der einzelnen Parameterkombinationen aufgebaut. Eine zentrale Projektdatenbank beinhaltet die Modellparameter aller zu berechnenden Zahnwellen und übernimmt die Verwaltung bzw. Zuordnung der zugehörigen Ergebnis-Dateien in einem Daten-Archiv. Die eigentliche Berechnung der einzelnen Parametervarianten (Projekte) erfolgt mit einer speziell entwickelten Client-Software. Diese bezieht ein zu bearbeitendes Projekt von der zentralen SQL-Datenbank, berechnet es lokal unter Verwendung des Prä- und des Postprozessors, und sendet anschließend die relevanten Ergebnisse (z. B. die Spannungstensorfelder im Zahnfuß und im Zahnauslauf) an den Server zurück (siehe Abbildung 4.5). Die Datenbank speichert zudem, welche Projekte bereits berechnet wurden, welche noch ausstehen und welche Einzelrechnungen sich gerade in Bearbeitung befinden oder fehlerhaft verliefen. Mit diesem Aufbau ist es möglich, die Gesamtmenge der notwendigen FE-Modelle auf mehrere Einzelplatzrechner *verteilt* (parallel) zu berechnen und infolgedessen die Bearbeitungsgeschwindigkeit erheblich zu erhöhen. Sowohl die Anzahl der eingesetzten Einzelrechner, als auch die Liste der zu berechnenden Modelle kann hierbei dynamisch verändert werden.

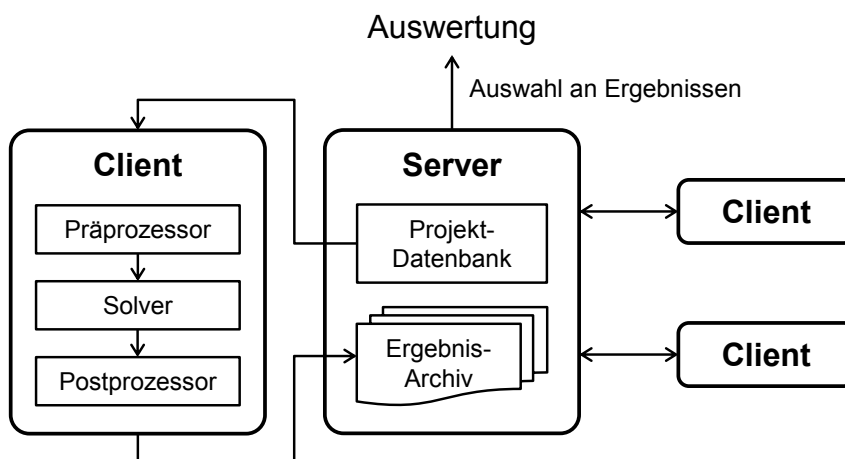


Abb. 4.5: Server-Client-Architektur zur verteilten Berechnung

4.2 Grundlegende theoretische Untersuchungen zur Kerbbeanspruchung

Die Spannungsberechnungen erfolgen vorwiegend unter Torsionsbelastung an Sektormodellen bzw. unter Biegebelastung an symmetrischen Halbmodellen (siehe Abbildung 4.7 und 4.8). Die anschließende Bestimmung von Kerbwirkungsfaktoren erfordert die Betrachtung der Sonderfälle reine Torsion bzw. reine (Umlauf-) Biegung als Grundlastfall der nennspannungsbasierten Berechnungsvorschrift. Die Spannungsauswertung konzentriert sich auf die zwei Kerbbereiche Zahnfuß und freier Zahnauslauf. Zur Charakterisierung der Kerbwirkung an den jeweiligen Stellen wird der Spannungstensor an der Bauteiloberfläche betrachtet. Da keine Krafteinleitung im Zahnauslauf stattfindet, liegt im Allgemeinen ein zweiachsiger Spannungszustand mit den Normalspannungskomponenten σ_a, σ_φ und der Schubspannungskomponente τ vor (Abbildung 4.6, rechts). Die Zahnfußausrundung tritt im Gegensatz zur Zahnflanke nicht in Kontakt mit der Verzahnung der Nabe, sodass hier ebenfalls ein ebener Spannungszustand (kraftfreie Oberfläche) vorliegt (Abbildung 4.6, links).

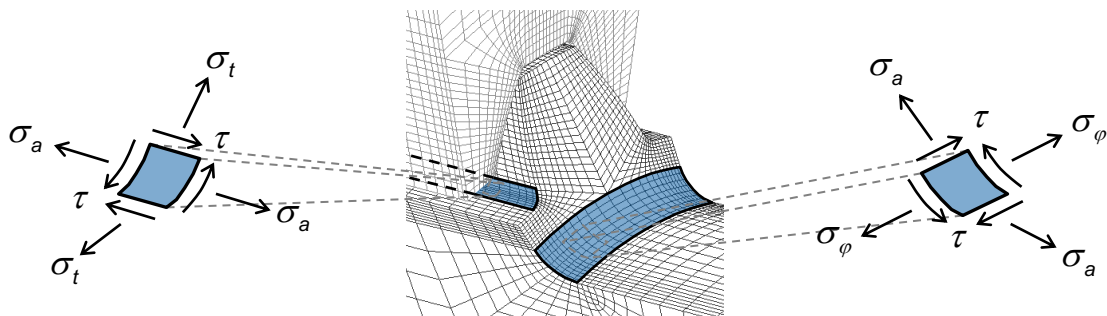


Abb. 4.6: Allgemeiner zweiachsiger Spannungszustand im Zahnfuß (links) und Zahnauslauf (rechts)

4.2.1 Beanspruchungssituation im freien Zahnauslauf

Die Ergebnisse der numerischen Spannungsanalyse weisen im Falle einer Biegebelastung eine dominierende Biege-Normalspannung in axialer Richtung σ_a auf, welche zur Bestimmung der Kerbformzahl bei Biegung herangezogen werden kann. Unter Torsionsbelastung bildet sich neben der erwarteten Schubspannung τ zusätzlich eine signifikante Normalspannungskomponente σ_a aus, deren Betrag von der relativen Zahnhöhe h/t_a abhängt. Das Vorhandensein dieser zusätzlichen Spannungskomponente (Sekundärspannung) ist bei der Bestimmung einer Torsionsformzahl zu berücksichtigen. Weitere Betrachtungen dazu finden sich in Abschnitt 4.3.2. Tabelle 4.2

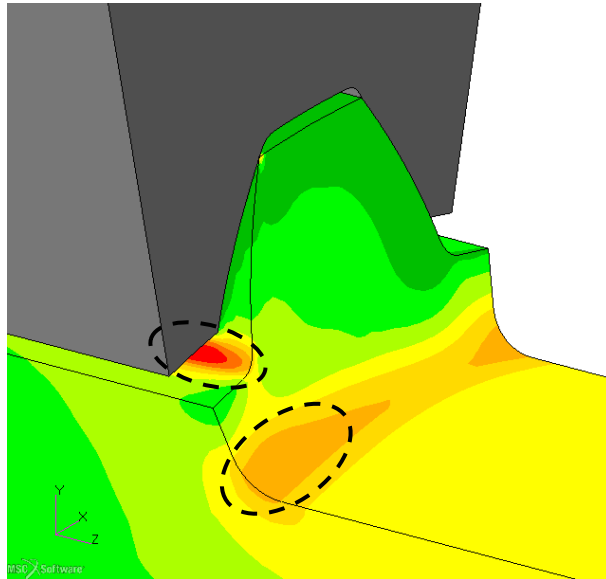


Abb. 4.7: Spannungsüberhöhung (größte Hauptspannung) im freien Zahnauslauf und im Zahnfuß der Zahnwellenverbindung unter **Torsionsbelastung**

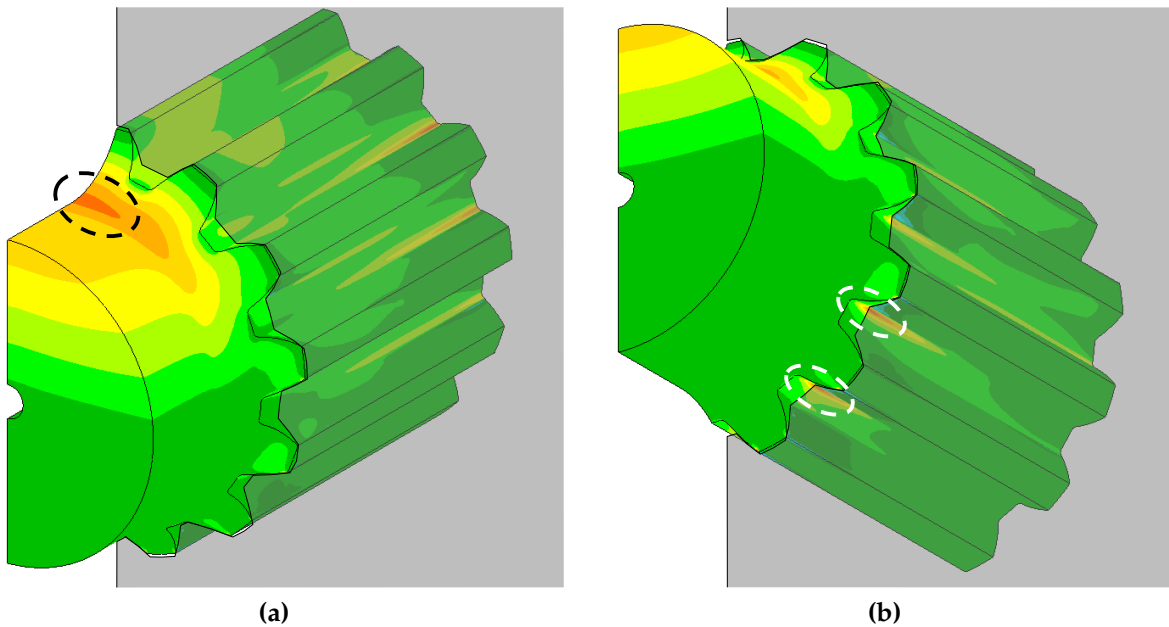
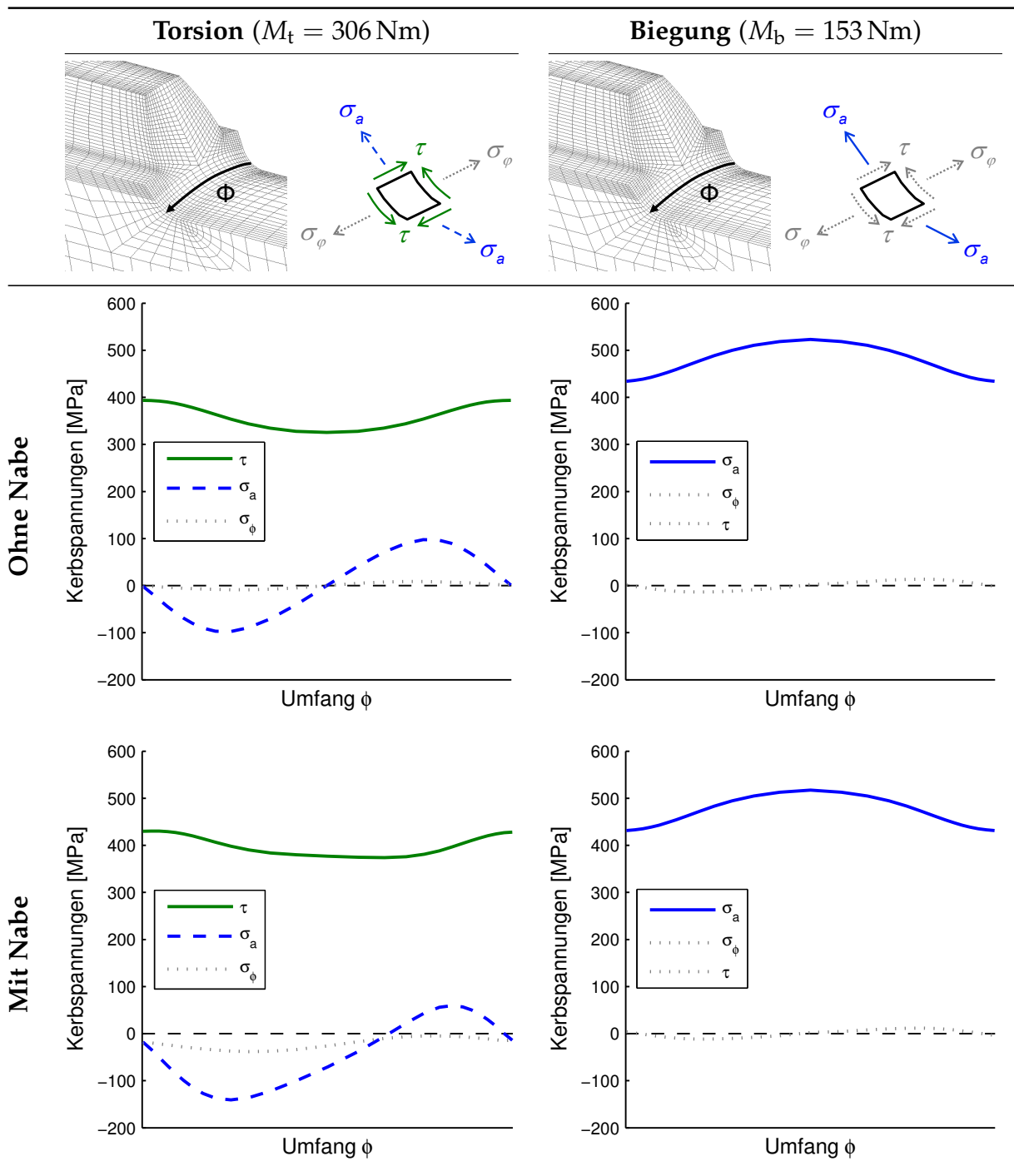


Abb. 4.8: Spannungsüberhöhung (größte Hauptspannung) im freien Zahnauslauf (a) und im Zahnfuß (b) der Zahnwellenverbindung unter **Biegebelastung**

Tab. 4.2: Spannungskomponenten im freien Zahnauslauf, mit und ohne mechanischem Einfluss der Nabe, über den Umfang eines Zahnsegmentes



(Zahnwelle DIN 5480 – 25x1,75x13, $d_w = 19 \text{ mm}$, $r_w = 0,55 \text{ mm}$, $\varphi = 15^\circ$)

zeigt den Verlauf der einzelnen Spannungskomponenten im freien Zahnauslauf über den Umfang eines Zahnsegmentes. Die grundlegende Charakteristik der Kerbbeanspruchung im Zahnauslauf ändert sich unter Nabeneinfluss nicht. Unter Torsionsbelastung erhöht sie sich aber im Betrag abhängig von der Kerbgeometrie. Bei Biegung nimmt die Nabe so gut wie keinen Einfluss auf die Kerbspannungen des freien Zahnauslaufes im höchstbeanspruchten Zahnsegment.

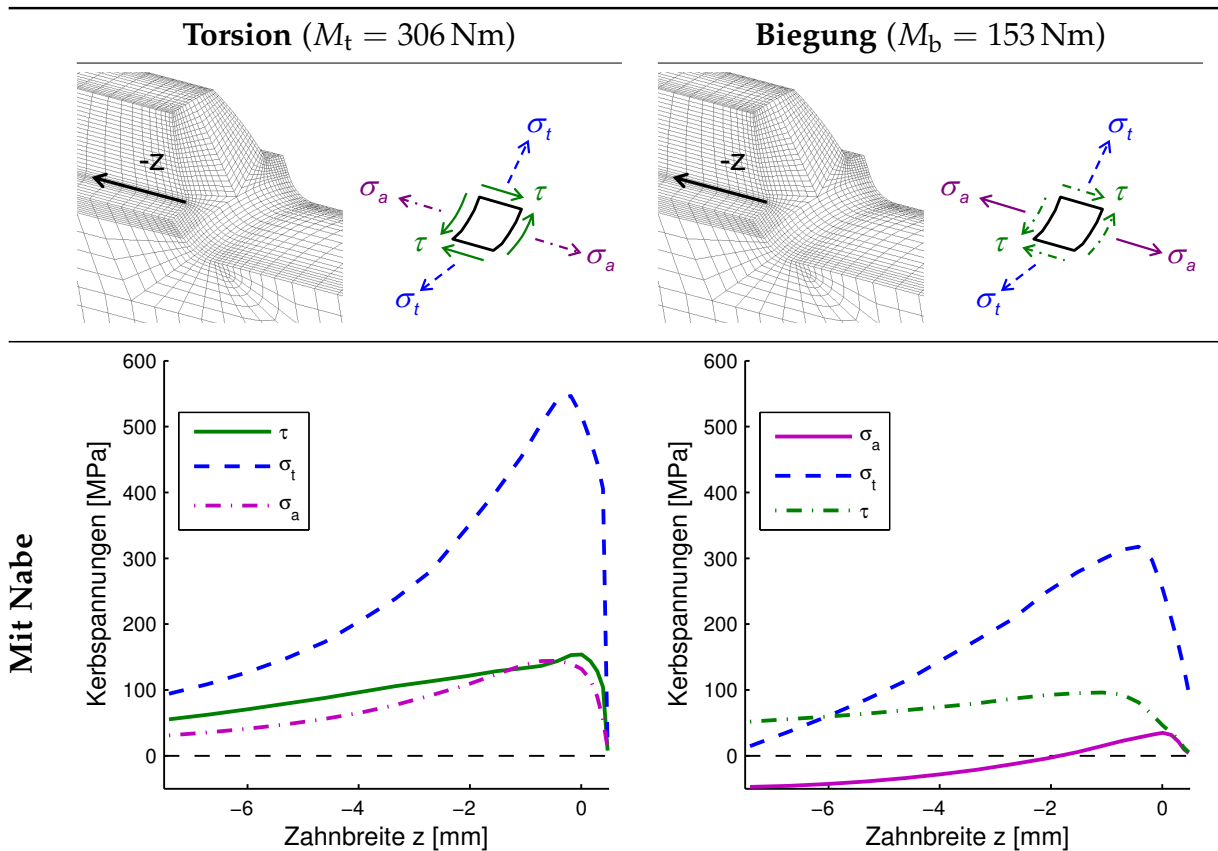
4.2.2 Beanspruchungssituation im Zahnfuß

Tabelle 4.3 zeigt den Verlauf der einzelnen Kerbspannungskomponenten in der Zahnfußausrundung entlang der Zahnwellenlängsachse. Unter Torsions- wie auch unter Biegebelastung tritt infolge der Kerbüberlagerung von *Zahnfußausrundung*, *Wellenabsatz* und *Nabe* (Lasteinleitungskerbe) ein mehrachsiger Spannungszustand auf. In beiden Fällen dominiert die Normalspannungskomponente σ_t tangential zur Zahnfußausrundung, welche aus den Kontaktkräften an der Zahnflanke hervorgeht. Die zur Torsions- bzw. Biegenennspannung zugehörigen örtlichen Spannungskomponenten τ bzw. σ_a (Primärspannungen; jeweils durchgezogene Linien) treten deutlich in den Hintergrund. Der Ort der maximalen Spannungsbeträge liegt erwartungsgemäß am Verbindungsrand ($z = 0$).

Im praxisrelevanten Fall einer *umlaufenden* Biegebelastung ist der zeitliche Verlauf der Kerbspannungskomponenten zu beachten. Für die Zahnfußausrundung zeigt Abbildung 4.9, dass die örtlichen Spannungen σ_a , σ_t und τ mit gleicher Frequenz aber mit unterschiedlicher Phasenlage zueinander schwingen. Das ist eine wichtige Feststellung, deren Bedeutung in Abschnitt 4.3.2 diskutiert wird. Die maximale Biegespannung in axialer Richtung σ_a tritt am Zahn mit der größten Entfernung zur neutralen Faser der Welle auf (Zahn 1 in Abbildung 4.9), wohingegen die durch Kontaktkräfte an den Zahnflanken entstehende Spannungskomponente σ_t ihr Maximum an einer Zahnposition nahe der neutralen Faser besitzt (Zahn 5). Diese Beobachtung steht im Einklang mit den Voraussagen von Volfson [88].

Weiterhin ist in Abbildung 4.9 zu beachten, dass die dominierende Spannungskomponente σ_t trotz Umlaufbiegung um eine bestimmte Mittelspannung ($\sigma_{tm} \neq 0$) schwingt. Aus diesem Punkt ergibt sich die Notwendigkeit, zur Formzahlbestimmung (Spannungsamplitude gesucht) den Beanspruchungsverlauf eines kompletten Lastwechsels der Umlaufbiegung auszuwerten. Um die Simulationszeit zu reduzieren, werden die Spannungen in einer statischen Simulation für nur eine Laststellung berechnet, jedoch die Kerbbeanspruchung an *jedem* Zahn betrachtet (rotierender Beobachter).

Tab. 4.3: Spannungskomponenten in der Zahnfußausrundung (Zugseite), mit mechanischem Einfluss der Nabe, über der Zahnbreite, im höchstbeanspruchten Zahn



(Zahnwelle DIN 5480 – 25x1,75x13, $d_w = 19$ mm, $r_w = 0,55$ mm, $\varphi = 15^\circ$)

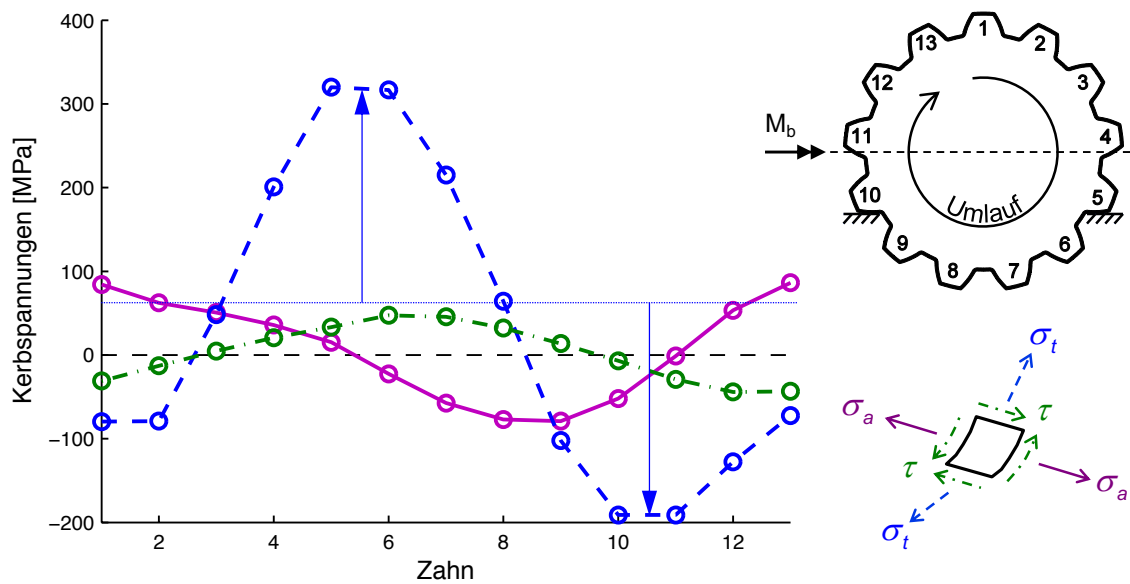


Abb. 4.9: Zeitverlauf der Kerbspannungen im Zahnfuß bei Umlaufbiegung ($M_b = 153$ Nm)

4.2.3 Beanspruchungsverteilung unter zusammengesetzter Torsions- und Biegebelastung

Kerbbeanspruchung im Zahnfuß

Im vorausgegangenen Abschnitt wurden diverse FE-Kontaktsimulationen zur Bestimmung der Kerbbeanspruchung im Zahnfuß einer Zahnwellenverbindung durchgeführt. Diese erfolgten für *reine* Torsions- und *reine* Biegebelastung. Bei Torsion ergibt sich – infolge der nicht konstanten Lastverteilung über der Zahnbreite – ein axialer Beanspruchungsverlauf in der Zahnfußausrundung mit dem Spannungsmaximum im Bereich des Nabenanfangs (siehe Abbildung 4.10). Alle Zähne erfahren hierbei, unter Annahme einer abweichungsfreien Verzahnung, aufgrund der Geometrie- und Belastungssymmetrie über dem Umfang verteilt die gleiche Beanspruchung.

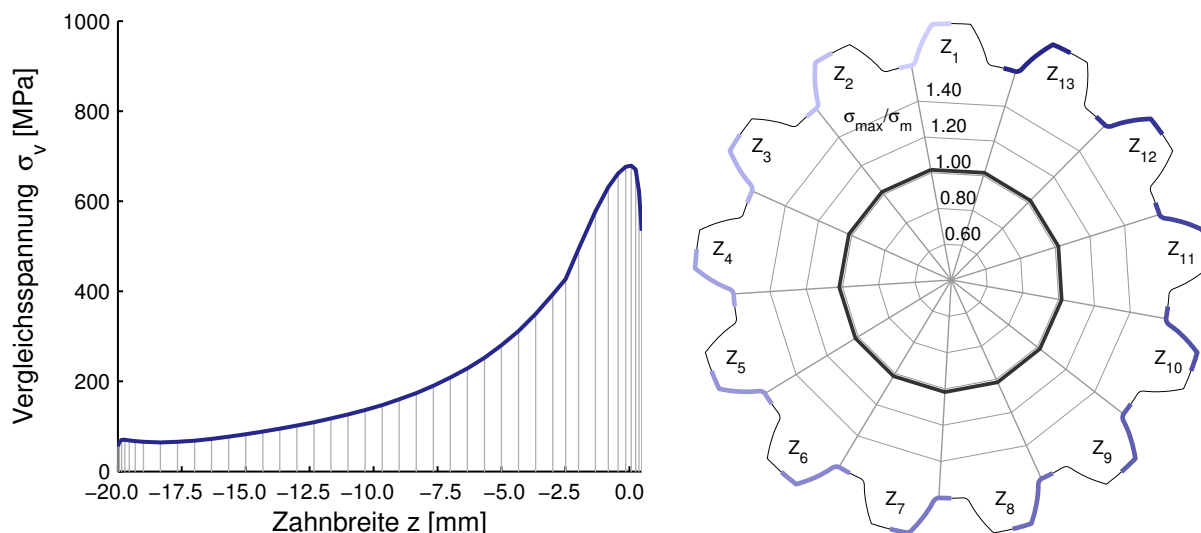


Abb. 4.10: Spannungsverteilung (GEH) im Zahnfuß über Zahnbreite (links) und über Umfang (rechts) bei **Torsionsbelastung**, $M_t = 400 \text{ Nm}$, Zahnwelle DIN 5480 – 25x1,75x13

Unter Biegebelastung ist infolge der geänderten Symmetriebedingungen die Last- und Beanspruchungsverteilung über den einzelnen Zähnen der Zahnwelle nicht mehr konstant. Abbildung 4.11 zeigt die Beanspruchungsverteilung im Zahnfuß der einzelnen Zähne über der Zahnbreite (links) sowie über dem Umfang (rechts) bei reiner Biegebelastung für eine am freien Wellenende positionierte Beispielverzahnung. Die Darstellung erfolgt für die (torsionsbezogene) Zugseite des Zahnfußes. Die axiale Lage des Spannungsmaximums im Zahnfuß wechselt hierbei innerhalb einer Umdrehung vom rechten zum linken Zahnrand und wieder zurück.

An die vorausgegangenen Untersuchungen anknüpfend wurde zusammen mit Wagner [89] die Kerbbeanspruchung bei gleichzeitig wirkender Biege- und Torsionsbe-

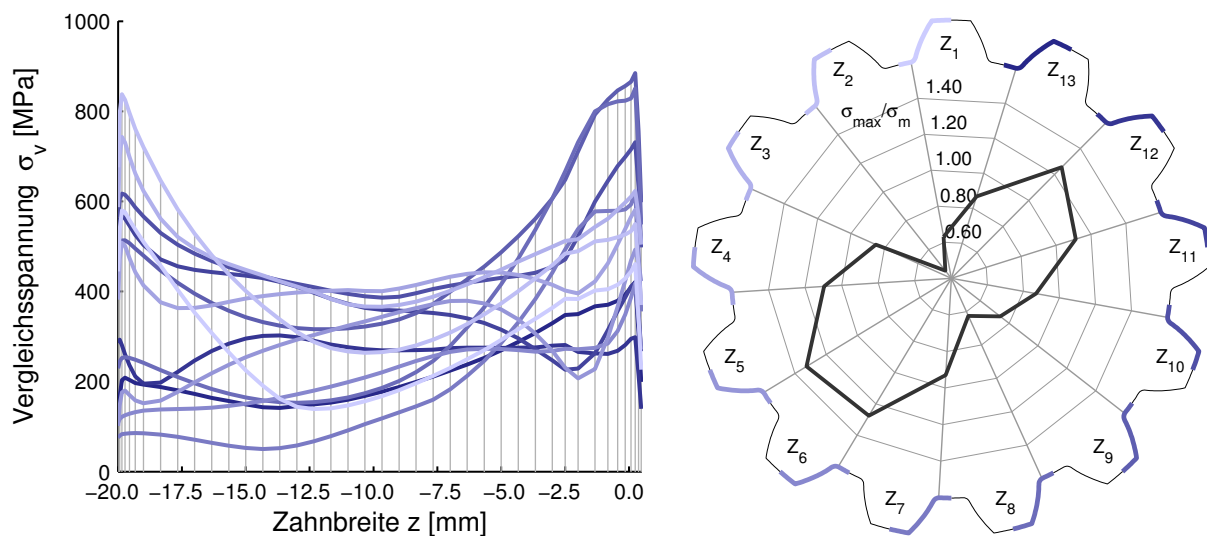


Abb. 4.11: Spannungsverteilung (GEH) im Zahnfuß über Zahnbreite (links) und über Umfang (rechts) bei **Biegebelastung**, $M_b = 350 \text{ Nm}$, Zahnwelle DIN 5480 – 25x1,75x13

lastung für verschiedene Momenten-Verhältnisse M_b/M_t numerisch berechnet. Die resultierende Spannungsverteilung im Zahnfuß ist beispielhaft für den Belastungsfall $M_b/M_t = 0,5$ in Abbildung 4.12 dargestellt. Abbildung 4.13 zeigt die (relative) Spannungsüberhöhung an den einzelnen Zähnen der Zahnwelle für unterschiedliche Verhältnisse von Biegung und Torsion.

»Ablösen« von Zahnflanken

Die Verkippung der Nabe zur Welle infolge der Biegebelastung kann zum »Ablösen« einzelner Zahnflankenbereiche im Inneren der Welle-Nabe-Verbindung führen. Für die Bestimmung der Betriebszustände (Verhältnis von Torsion und Biegung), ab denen solch ein Ablösen auftritt, bietet es sich an, den Kontaktstatus der FE-Knoten auf der Zahnflanke der einzelnen Zähne auszuwerten (siehe Abbildung 4.14).

Zur kompakten Ergebnisdarstellung ist in Abbildung 4.15 ein über die Zähne der Zahnwelle gemitteltetes Tragbild als Grauwertbild dargestellt. Rein weiße Gebiete charakterisieren Bereiche der Zahnflanke, die sich über alle Zähne durchgängig in Kontakt befinden. In grau gefärbten Gebieten lösen sich in bestimmten Umdrehungspositionen die Zahnflanken von Welle und Nabe voneinander. Die Zahnflankenbereiche, die zu keinem Zeitpunkt in Kontakt mit der Gegenflanke stehen, sind rein schwarz dargestellt.

Die Grafiken zeigen, dass bei der untersuchten Verbindung bereits bei einer geringen Biegebelastung von 10 % des Torsionsmomentes ein Ablösen der Flanken auf der

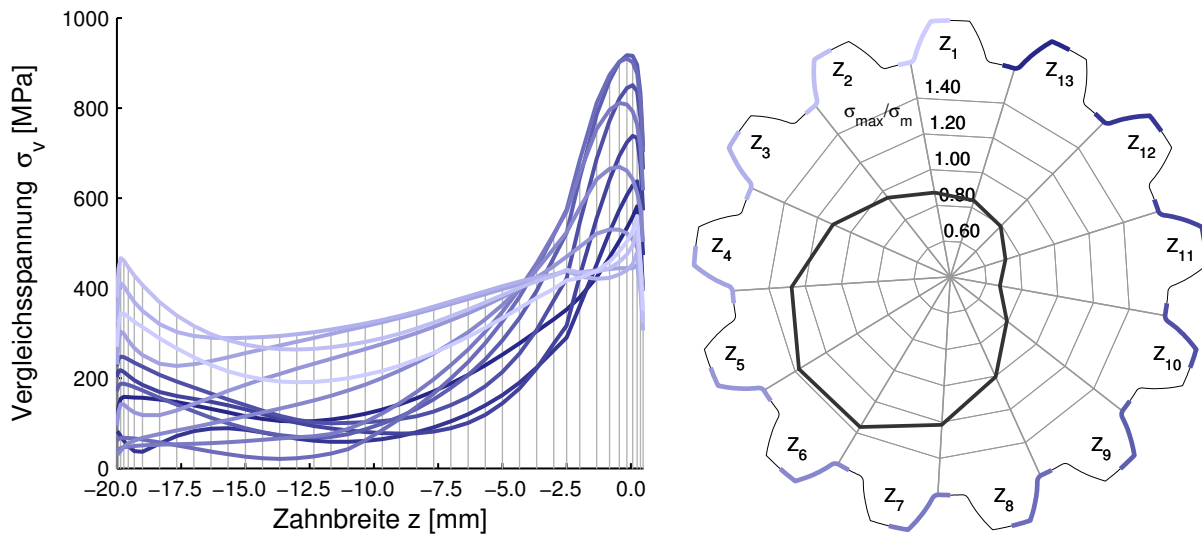


Abb. 4.12: Spannungsverteilung (GEH) im Zahnfuß über Zahnbreite (links) und über Umfang (rechts) bei kombinierter **Biege- und Torsionsbelastung** $M_b/M_t = 173\text{Nm}/346\text{Nm} = 0,5$, Zahnwelle DIN 5480 – 25x1,75x13

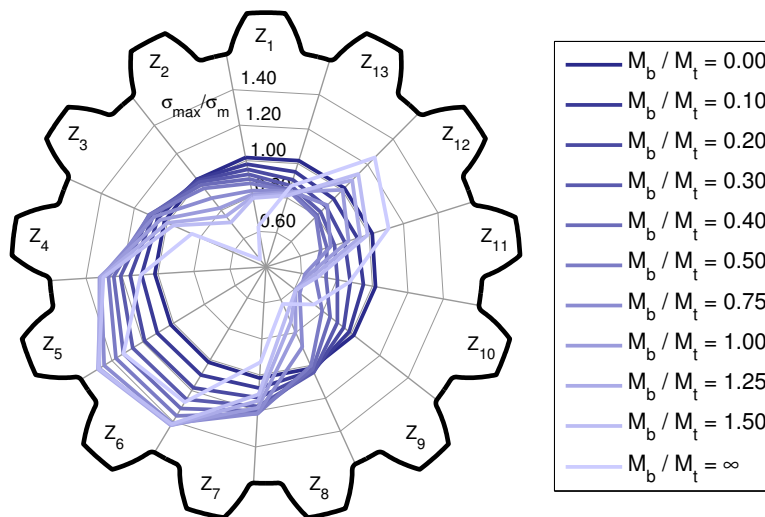


Abb. 4.13: Spannungsmaximum (GEH) im Zahnfuß der Zugseite der einzelnen Zähne bei verschiedenen Belastungsverhältnissen, Zahnwelle DIN 5480 – 25x1,75x13

4 Kerbwirkungsfaktoren für Zahnwellenverbindungen

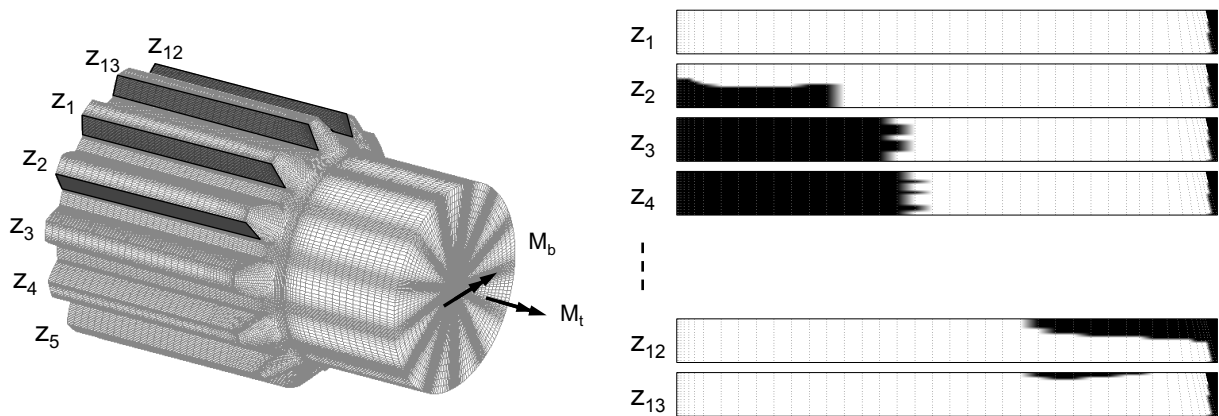


Abb. 4.14: Kontaktstatus der (torsionsbezogen) belasteten Zahnflanken für ein Belastungsverhältnis ($M_b/M_t = 0,5$), Zahnwelle DIN 5480 – 25x1,75x13, Nabenbreite 20 mm

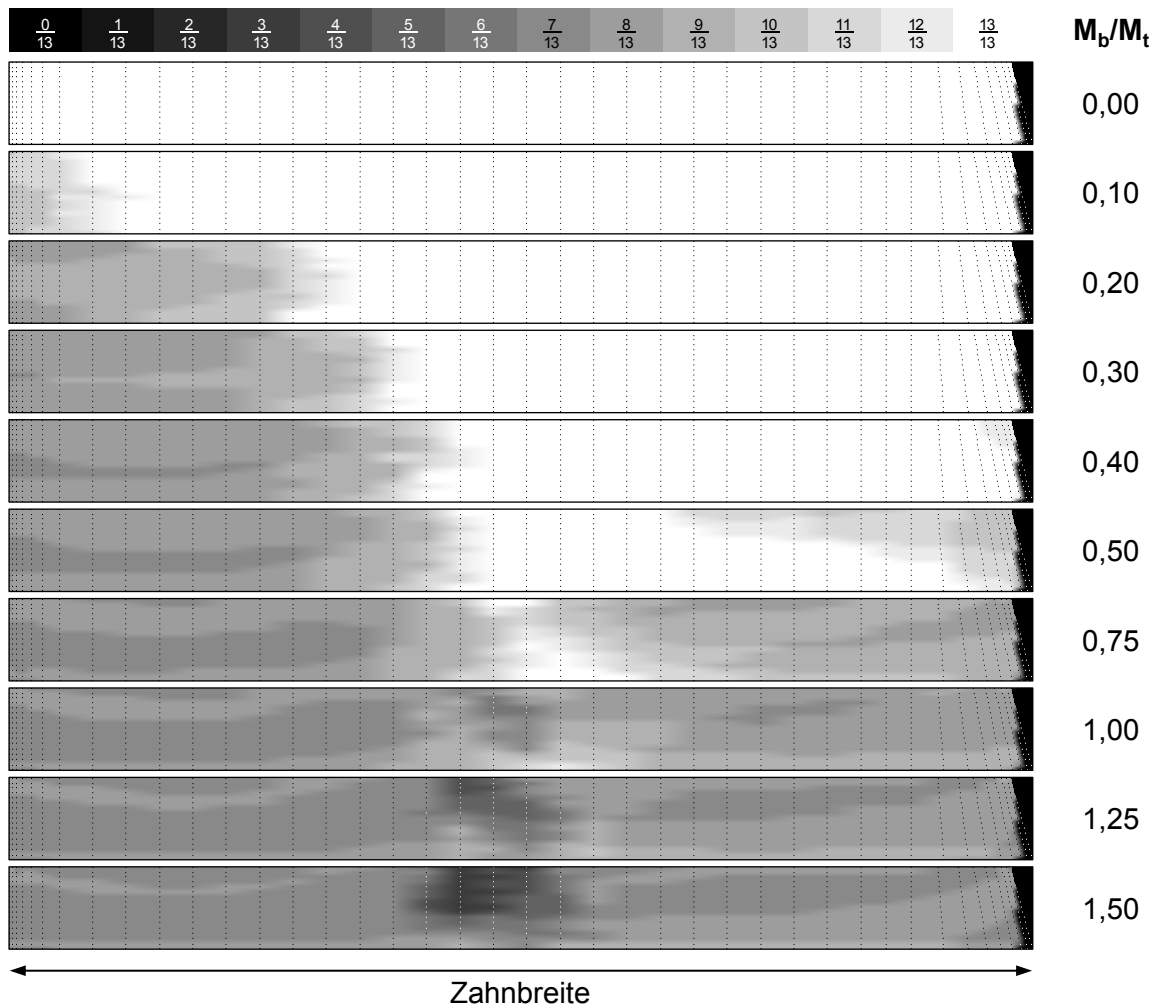


Abb. 4.15: Gemittelter Kontaktstatus der (torsionsbezogen) belasteten Zahnflanken für verschiedene Lastverhältnisse, Zahnwelle DIN 5480 – 25x1,75x13, Nabenbreite 20 mm

linken (vom Zahnauslauf abgewandten) Seite eintritt. Dieser Bereich dehnt sich mit zunehmendem Biegemoment bis zur Mitte der Zahnflanke aus. Ab einem Verhältnis von $M_b/M_t = 0,4$ lösen sich die Flanken ebenfalls auf der Seite des Zahnauslaufes (dem Ort mit der größten Zahnfußbeanspruchung) voneinander ab.

Superponierbarkeit der Kerbbeanspruchungen bei Einzelbelastung

Die alleinige Erkenntnis, »dass« und »ab wann« ein Ablösen der Zahnflanken in der Verbindung auftritt, ist für sich betrachtet nicht besonders aussagekräftig im Hinblick auf die Tragfähigkeitseinschätzung der Zahnwelle. Aus diesem Grund erfolgte anschließend eine Analyse der Spannungsüberhöhungen am erwarteten Schadensort infolge der veränderten Lastverteilung. Im Tragfähigkeitsnachweis nach DIN 743 werden, wie bereits erwähnt, bei kombinierter Belastung die Kerbbeanspruchungen der Einzelbelastungen linear überlagert. Dieses Superpositionsprinzip besitzt bei linearen Problemen uneingeschränkt Gültigkeit. Das Ablösen einzelner Zahnflankenbereiche stellt allerdings eine Nichtlinearität im betrachteten System dar, die zu erhöhten Beanspruchungen gegenüber dem superponierten Ergebnis führen könnte.

Tabelle 4.4 zeigt die relative Abweichung zwischen den in der Kontaktsimulation direkt berechneten Vergleichsspannungsmaxima (nach GEH) bei kombinierter Belastung und der Überlagerung aus reiner Torsions- und reiner Biegebeanspruchung (unter Nabeneinfluss). Die Unterschiede zwischen den ermittelten Kerbbeanspruchungen im Zahnfuß liegen bei der untersuchten Beispielgeometrie auf der (meist festigkeitsrelevanten) Zugseite unter 2,4 % und auf der Druckseite nicht über 6,1 %. Es ist also ein »quasilinear« Zusammenhang zu beobachten. Demzufolge ist die Einbeziehung der veränderten Lastverteilung bei kombinierter Belastung in der Beanspruchungsermittlung am erwarteten Schadensort *nicht* notwendig und das Vorgehen der linearen Überlagerung nach DIN 743 zulässig. Voraussetzung für eine zuverlässige Berechnung der Kerbbeanspruchung ist allerdings die treffsichere Beschreibung der Bauteilbeanspruchung unter Einzelbelastung inklusive Nabeneinfluss.

Tab. 4.4: Relative Abweichung der Vergleichsspannungsmaxima (GEH) in der Zahnfußausrundung zwischen direkter FE-Spannungsberechnung unter kombinierter Belastung und (tensorieller) Superpositionierung der Beanspruchungen bei Einzelbelastung

M_b/M_t	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
Zugseite	-0,9 %	-1,3 %	-1,3 %	-2,0 %	-1,8 %	-2,4 %	-2,2 %	-2,4 %	-2,3 %
Druckseite	-4,1 %	-5,2 %	-5,5 %	-6,1 %	-5,9 %	-5,5 %	-5,1 %	-5,0 %	-3,9 %

Die dargestellten Untersuchungen beschränken sich auf die Analyse einer *flanken-zentrierten* Verbindung mit abweichungsfreier Verzahnung ohne Flankenspiel. Für Betriebszustände mit überwiegendem Drehmoment (Torsion schließt Flankenspiel) kann die Aussage verallgemeinert werden. Eine stichprobenartige Untersuchung mit *durchmesserzentrierter* Verbindung deutet hingegen darauf hin, dass hierfür die lineare Überlagerung der Beanspruchungen bei Einzelbelastung nicht anwendbar ist.

4.3 Formzahlbestimmung und Spannungsgefälle

4.3.1 Theoretische Untersuchungen zum Nennquerschnitt

Ausgangssituation

Wie eingangs beschrieben, sind Formzahlen allgemein definiert als das Verhältnis

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max K}}{\sigma_n} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max K}}{\tau_n} \quad (4.1)$$

der örtlichen Spannungsüberhöhung im Kerbgrund $\sigma_{\max K}, \tau_{\max K}$ zur Nennspannung σ_n, τ_n . Zur Berechnung der Nennspannungen mit den Beziehungen der elementaren Festigkeitstheorie gehört zwingend die Definition eines zur Formzahl zugehörigen *Nennquerschnittes*. Dieser dient der Bestimmung der Formzahlen aus den numerisch gewonnenen Ergebnissen und ist in gleicher Weise vom Anwender bei der späteren Verwendung der bereitgestellten Formzahlen heranzuziehen.

Für die Kerbstelle im *freien Zahnauslauf* gestaltet sich die Festlegung und Berechnung eines Nennquerschnittes als recht unproblematisch. Es soll der Kreisquerschnitt der von der Verzahnung ungestörten Welle mit dem Durchmesser d_w gelten. Die Nennspannungen berechnen sich dann nach Tabelle 4.5 mit dem Nenndurchmesser $d_n = d_w$.

Zur Beschreibung der Nennspannung für den nicht kreisförmigen Wellenquerschnitt in der Verzahnung führte Nakazawa [57] einen Nennquerschnitt mit dem später als *Ersatzdurchmesser* bezeichneten Durchmesser d_h ein. Er stellt den Außendurchmesser einer ungekerbten glatten Welle mit gleichem Torsions-Trägheitsmoment I_t wie der Zahnwelle dar. Der imaginäre Ersatzdurchmesser liegt zwischen Kopf- und Fußkreis der Verzahnung und wird mit Hilfe eines von der Zahnform abhängigen Geometriefaktors c_h bestimmt:

$$d_h = d_f + c_h \cdot \frac{d_f}{d_a} \cdot (d_a - d_f). \quad (4.2)$$

Tab. 4.5: Ermittlung der Nennspannungen zur Formzahlberechnung

Belastungsart	Nennspannung	Querschnittsfläche bzw. Widerstandsmoment
Zug/Druck	$\sigma_{zdn} = \frac{F_{zd}}{A}$	$A = \frac{\pi}{4} \cdot (d_n^2 - d_i^2)$
Biegung	$\sigma_{bn} = \frac{M_b}{W_b}$	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_n^4 - d_i^4}{d_n}$
Torsion	$\tau_{tn} = \frac{M_t}{W_t}$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_n^4 - d_i^4}{d_n}$

Diese Definition erhielt Einzug in die DIN 5466 »Tragfähigkeitsberechnung von Zahn- und Keilwellen-Verbindungen« [14]. Für Zahnwellen mit evolventischem Zahnprofil nach DIN 5480 stellt Wesolowski [96] eine Näherungsgleichung zur Bestimmung des Geometriefaktors

$$c_h = 1,3 \cdot z^{(-1,2)} + 0,06 \cdot (\rho_f / m) + 0,23 \quad (4.3)$$

für z. B. zerspanend hergestellte Verzahnungen ($\rho_f = 0,16 \cdot m$) bereit. Diese Gleichung beruht auf strukturmechanischen 3D-FE-Analysen von tordierten Zahnwellen, mit denen der Verdrehwinkel ausgewertet und damit auf das Torsionsträgheitsmoment geschlossen wurde. Die in [96, S. 153] dargestellten Diagramme lassen allerdings eine entsprechend geringe Datenbasis zur Bestimmung der Näherungsfunktion für verschiedene Zähnezahlen vermuten.

Weil Zahnwellen keine wölbfreien Querschnitte darstellen, sind in diesem Fall polares Flächenträgheitsmoment I_p und Torsionsträgheitsmoment I_t nicht identisch!

$$I_t \neq I_p \quad (4.4)$$

Gegenteiliges gilt nur für Kreis- und Kreisringquerschnitte [9, S. 362]. Eine noch recht einfach ausführbare, geometrische Berechnung des polaren Flächenträgheitsmomentes führt damit zu keiner brauchbaren Bestimmung des Ersatzdurchmessers. Von Daryusi in [11] durchgeführte Untersuchungen sind daher wenig ertragreich.

Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes mit Hilfe der Wölbfunktion

Eine Ausweitung der strukturmechanischen Analysen von Wesolowski zur Bestimmung des Torsionsträgheitsmomentes und damit des Geometriefaktors für den Ersatzdurchmesser wird in rechentechnischer Hinsicht als sehr aufwendig eingeschätzt. Stattdessen wurde für die vorliegende Untersuchung in Zusammenarbeit mit Hilbich

[31] die Wölbfunktion, welche die Verwölbung des Zahnwellenquerschnittes durch eine reine Drehmomentenbelastung beschreibt, mit numerischen Methoden gelöst. Mit deren Kenntnis ist die Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes möglich.

Unter der Annahme von reinem Schub ohne Verwölbungsbehinderung (de-Saint-Venantsche Torsion) kann die Wölbfunktion $w(x, y)$ für allgemeine Querschnitte mit der partiellen Differentialgleichung (Laplace-Gleichung)

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \Delta w(x, y) = 0 \quad (4.5)$$

berechnet werden. Aus der Forderung nach lastfreien Rändern (Schubspannungen werden randparallel) ergibt sich eine (Neumannsche) Randbedingung

$$n_x \cdot \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + n_y \cdot \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = n_x \cdot y - n_y \cdot x \quad (4.6)$$

mit dem Normalenvektor $\vec{n} = (n_x, n_y)^T$ der Zahnwellenkontur. Damit ist die starke Form des Randwertproblems definiert [26]:

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 && \text{in } \Omega \\ n_x \cdot w_{,x} + n_y \cdot w_{,y} &= n_x \cdot y - n_y \cdot x && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Das Torsionsträgheitsmoment ergibt sich aus

$$I_t = \underbrace{\int_{(\Omega)} (x^2 + y^2)}_{I_p} + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \cdot x - \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \cdot y \, d\Omega. \quad (4.8)$$

Hierbei ist nochmals ersichtlich, dass $I_t = I_p$ nur für wölbfreie Querschnitte mit $w(x, y) = 0$ gilt.

Die Lösung der Differentialgleichung erfolgt numerisch für einen Polygonzug der Zahnwellenkontur mit MATLAB und der »Partial Differential Equation« Toolbox (Details zur Durchführung siehe [31]). Abbildung 4.16 zeigt die ermittelte Verwölbung für eine Beispielverzahnung. Aufgrund der Überführung zum zweidimensionalen Problem, welches gegenüber den dreidimensionalen Untersuchungen von Wesolowski numerisch deutlich effizienter lösbar ist, konnte der Ersatzdurchmesser $d_h = \sqrt[4]{\pi/32 \cdot I_t}$ für jede in DIN 5480 definierte Zahnwelle (Zähnezahl/Durchmesser-Kombination) berechnet werden. Die Analysen beschränken sich jedoch auf die Geometrie spanend hergestellter Verzahnungen ($\rho_{FP} = 0,16 \cdot m$).

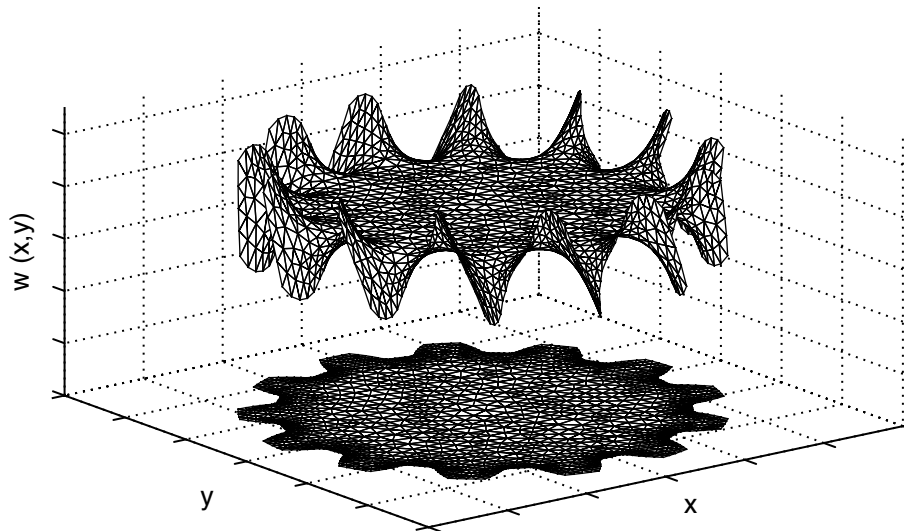


Abb. 4.16: Verwölbung des Zahnwellenquerschnittes DIN 5480 – 25x1,75x13 bei Torsion

Ergebnis und Schlussfolgerung

Abbildung 4.17 zeigt in Anlehnung an Wesolowskis Untersuchungen den ermittelten Geometriefaktor c_h aufgetragen über der Zähnezahl z . Die Varianz des Ergebnisses für gleiche Zähnezahlen folgt aus einer nach Norm unterschiedlich angewandten Profilverschiebung² für verschieden große Zahnwellen. Die geringe Streuung rechtfertigt den bestehenden Ansatz, den Geometriefaktor primär als Funktion der Zähnezahl aufzustellen. Es ist erkennbar, dass die Näherungsgleichung nach Wesolowski für größere Zähnezahlen von den numerischen Ergebnissen leicht abweicht. Die hohen Werte des Geometriefaktors für sehr kleine Zähnezahlen werden ebenfalls nicht erreicht. Aus den Berechnungsdaten abgeleitete Koeffizienten einer an Wesolowski angelehnten Regressionsfunktion

$$c_h = A \cdot z^B + C \quad (4.9)$$

sind in Tabelle 4.6 zu finden.

²dient zur Anpassung des Bezugsdurchmessers an typische Wälzlager-Bohrungsdurchmesser

Tab. 4.6: Koeffizienten zur Näherungsfunktion des Geometriefaktors c_h

Parameter	Wälzfräsen	Räumen	Wesolowski
A	1,5939	1,4485	1,3
B	-1,2669	-1,2463	-1,2
C	0,2345	0,2317	0,24

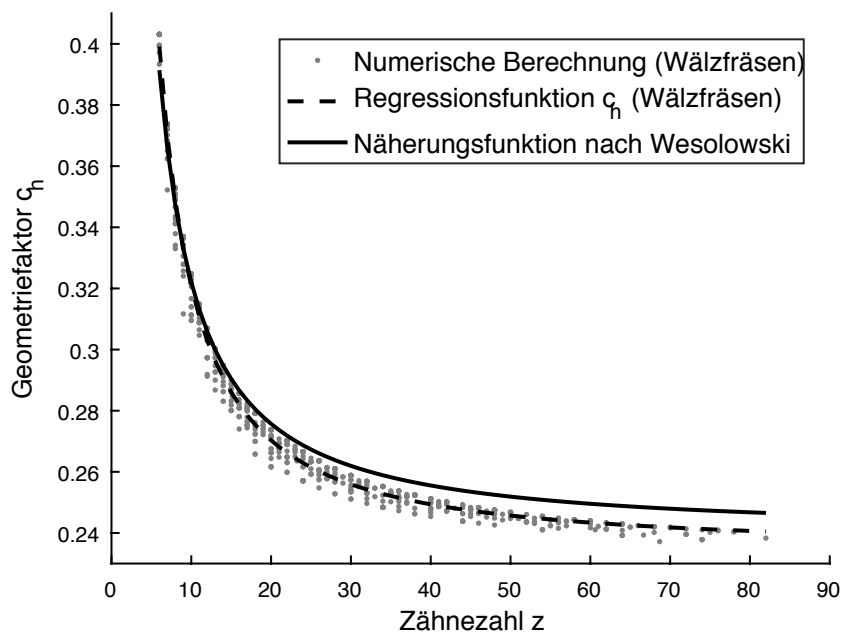


Abb. 4.17: Vergleich Geometriefaktor c_h nach numerischer Berechnung, Näherungsfunktion Wesolowski, eigene Regressionsfunktion (Fertigungsverfahren: Wälzfräsen)

Die Abweichungen zwischen der Näherung von Wesolowski und den abgeleiteten Ergebnissen aus der erweiterten Datenbasis sind überraschend gering (siehe Tabelle 4.7). Der rechnerische Einfluss des Geometriefaktors c_h auf das für die Nennspannungsbeurteilung letztendlich relevante Torsionswiderstandsmoment W_t ist zudem so klein, dass sich an dieser Stelle maximal ein Fehler von 0,61 % einstellt. Es besteht daher kein Handlungsbedarf zur Änderung des in DIN 5480 aufgenommenen Ansatzes von Wesolowski. Er soll aus Gründen der Vergleichbarkeit mit anderen Quellen auch in dieser Arbeit für die folgenden Berechnungen Verwendung finden.

Tab. 4.7: Abweichungen zwischen Kennwerten aus der Regressionsfunktion und Wesolowski

Fertigungsverfahren	Wälzfräsen		Räumen	
	maximal	mittel	maximal	mittel
Abweichung c_h	2,53 %	1,92 %	3,75 %	3,34 %
Abweichung d_h	0,20 %	0,04 %	0,15 %	0,08 %
Abweichung W_t	0,61 %	0,12 %	0,44 %	0,23 %

Die nachfolgend bereitgestellten Formzahlen für die Kerbstelle *Zahnfußausrundung* basieren demnach auf einem Nennquerschnitt mit dem Kreisdurchmesser $d_n = d_h$ nach Gleichung 4.2 und 4.3. Der auf Torsionsbetrachtungen beruhende Ersatzkreis d_h soll mangels Alternativen auch für Biegeformzahlen gelten.

4.3.2 Formzahlbestimmung zur Anwendung im Nennspannungskonzept

Zweiachsige Kerbbeanspruchung

Nach Abschnitt 4.2 liegt sowohl für die Kerbstelle Zahnauslauf (ZA) als auch in der Zahnfußausrundung (ZF) ein mehrachsiger Spannungszustand vor. Daher soll die Berechnungsmethode aus Kapitel 3 Anwendung finden und eine separate Formzahl für jede wirkende Spannungskomponente des zweiachsigen Spannungszustandes in der Kerbe aufgestellt werden. Für den Zahnauslauf sind das bei Torsion

$$\alpha_{t\sigma_z}^{(ZA)} = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3} \cdot \tau_{tn}} \quad \text{und} \quad \alpha_{t\tau}^{(ZA)} = \frac{\tau}{\tau_{tn}}. \quad (4.10)$$

Lediglich unter Biegebelastung im freien Zahnauslauf vereinfacht sich das Problem aufgrund des zu vernachlässigenden Anteils der Sekundärspannungen σ_φ, τ auf die bekannte skalare Definition

$$\alpha_{b\sigma}^{(ZA)} = \frac{\sigma_a}{\sigma_{bn}}. \quad (4.11)$$

Die Auswertung der einzelnen Spannungskomponenten richtet sich nicht nach deren individuellem Maximum, sondern nach dem Ort der größten Vergleichsspannung nach GEH. Diese Position kommt dem Ort der geringsten Sicherheit am nächsten, der sich bei Tragfähigkeitsbestimmung für jeden Knoten herausstellen würde. Im freien Zahnauslauf unter Torsion liegt diese Position leicht versetzt zur Zahnlückenmitte (vgl. Abbildungen links in Tabelle 4.2).

Für die Zahnfußausrundung ergeben sich die Torsionsformzahlen

$$\alpha_{t\sigma_z}^{(ZF)} = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3} \cdot \tau_{tn}}, \quad \alpha_{t\sigma_\varphi}^{(ZF)} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{3} \cdot \tau_{tn}} \quad \text{und} \quad \alpha_{t\tau}^{(ZF)} = \frac{\tau}{\tau_{tn}}. \quad (4.12)$$

Alle drei Spannungskomponenten besitzen ihr Maximum am Verbindungsanfang im Bereich unterhalb der Nabenkante.

Der Tragfähigkeitsnachweis mit den Formzahlkomponenten ist nach der Anleitung in Anhang A zu führen. Kapitel 5.1 ermöglicht eine Einschätzung zur Treffsicherheit der ermittelten Formzahlen. Eine vereinfachte Festigkeitsberechnung mit den unveränderten Gleichungen aus DIN 743 kann mit der Vergleichsformzahl α_v erfolgen. Sie berechnet sich aus den einzelnen Formzahlkomponenten nach Gleichung 3.8 auf Seite 36. Diese Herangehensweise ist jedoch beim Vorliegen einer zusammengesetzten dynamischen Belastung fehlerbehaftet (siehe Abschnitt 3.4.1).

Zweiachsige, phasenverschobene Kerbbeanspruchung bei Umlaufbiegung

Wie Abbildung 4.9 auf Seite 86 zeigt, liegt in der Zahnfußausrundung bei Umlaufbiegung nicht nur ein mehrachsiger Spannungszustand mit den drei Biegeformzahlen

$$\alpha_{b\sigma_z}^{(ZF)} = \frac{\sigma_a}{\sigma_{bn}}, \quad \alpha_{b\sigma_\varphi}^{(ZF)} = \frac{\sigma_t}{\sigma_{bn}} \quad \text{und} \quad \alpha_{b\tau}^{(ZF)} = \frac{\tau}{\sigma_{bn}/\sqrt{3}} \quad (4.13)$$

vor. Es ist zusätzlich ein Beanspruchungsverlauf mit *phasenverschobenen* Spannungs-Zeit-Verläufen (asynchrone Beanspruchung) zu beobachten. Die beiden Normalspannungen σ_t (tangential) und σ_a (axial) schwingen hierbei gleichfrequent mit einer Phasenverschiebung von ca. 90° . Beim Null-Durchgang einer der beiden Spannungskomponenten liegt daher näherungsweise ein einachsiger Spannungszustand vor.

Die zugrunde liegende Festigkeitshypothese der Berechnungsnorm DIN 743 und der meisten Richtlinien zur Ermüdungsfestigkeitsberechnung gilt nur für synchrone Beanspruchung [76, S. 132]. Aus diesem Grund werden im Folgenden (unter Verwendung der Berechnungsmethode mit separaten Formzahlen für jede wirkende Spannungskomponente) drei Grenzfälle der Nachweisführung untersucht. Als Näherungsansatz erfolgt konform zur Festigkeitshypothese die Tragfähigkeitsberechnung unter der Annahme von (vgl. Abbildung 4.18):

- (A) einachsiger Beanspruchung mit der betragsmäßig größten Formzahl $\alpha_{b\sigma_\varphi}$;
- (B) mehrachsiger, *gleichphasig* schwingender Beanspruchung mit den Formzahlen $\alpha_{b\sigma_z}$, $\alpha_{b\sigma_\varphi}$ und $\alpha_{b\tau}$ (siehe Gleichung 4.13);
- (C) mehrachsiger, *gegenphasig* schwingender Beanspruchung (Phasenverschiebung von 180°) mit den Formzahlen $-\alpha_{b\sigma_z}$, $\alpha_{b\sigma_\varphi}$ und $\alpha_{b\tau}$ (Vorzeichen beachten!).

Zur Bewertung der Ansätze werden Versuchsergebnisse von Dauerfestigkeitsuntersuchungen bei Umlaufbiegung mit gleichzeitiger statischer Torsion aus [53] herangezogen. Details zu Werkstoff, Prüfgeometrie und der ermittelten dauerfest ertragbaren Lastamplitude sind in Kapitel 5, Tabelle 5.1 zu finden. Abbildung 4.18 stellt die nach den Ansätzen A–C unterschiedlichen, rechnerisch ermittelten Sicherheiten gegen Ermüdung (auf Basis der numerisch berechneten Formzahlen und eines experimentell bestimmten, ertragbaren Lastmomentes) der im Dauerfestigkeitsversuch definitionsgemäß erreichten Sicherheit $S_D = 1$ gegenüber. Zur groben Abschätzung des Vertrauensbereiches der experimentellen Ergebnisse wurde zusätzlich die Abweichung des höchsten und des niedrigsten Lashorizontes des Treppenstufenversuches zum verwendeten Mittelwert eingetragen. Eine explizite Angabe der Standardabweichung ist aufgrund der geringen Probenanzahl nicht zulässig.

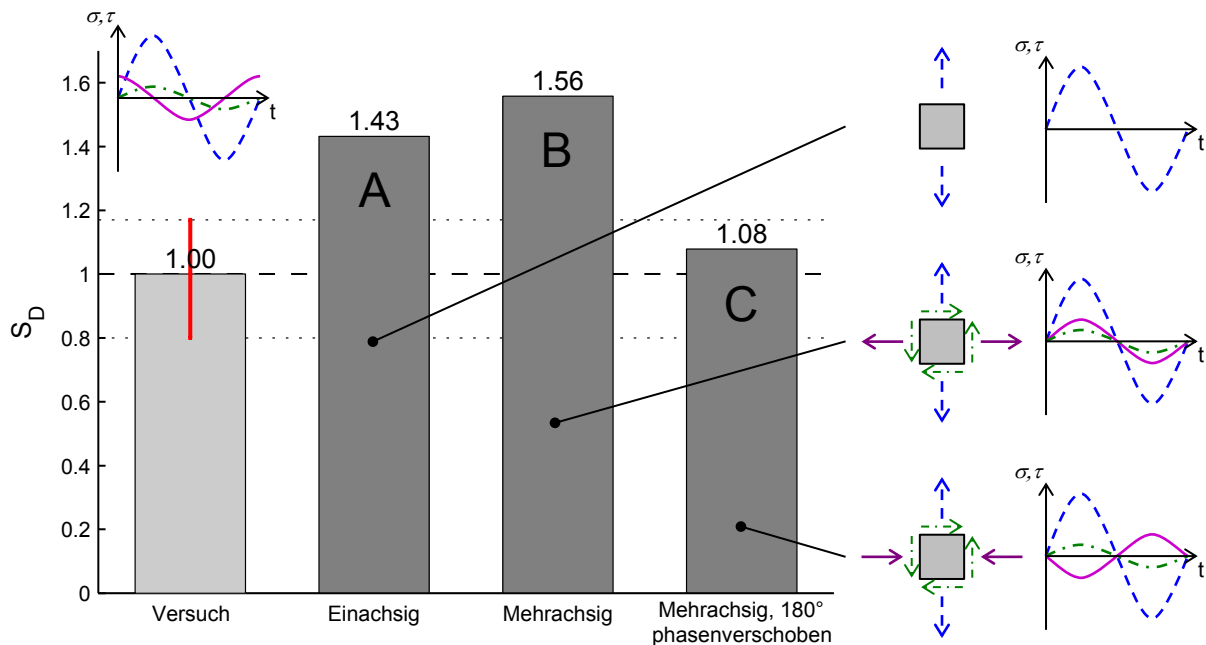


Abb. 4.18: Gegenüberstellung der experimentellen und rechnerischen Biegeschwingfestigkeit für die Prüfverbindung DIN 5480 – 25x1,75x13 (42CrMo4, $M_{ba}/M_{tm} = 0,2$)

Nach den vorliegenden Ergebnissen erweist sich die Nachweisführung mit gegenphasig angenommenen Beanspruchungsverläufen (Fall C) als am treffsichersten. Die alternativ betrachteten Grenzfälle A und B weichen deutlich von der experimentell bestimmten Tragfähigkeit ab und liegen zudem auf der »unsicheren« Seite.

Bei Umlaufbiegung ohne überlagerte dynamische Zug/Druck- oder Torsionsbelastung kann die Tragfähigkeitsberechnung auch hier vereinfacht mit der nach GEH abgeleiteten Vergleichsformzahl

$$\alpha_{bv}^{(ZF)} = \sqrt{\alpha_{b\sigma_z}^2 + \alpha_{b\sigma_\varphi}^2 - (-\alpha_{b\sigma_z}) \cdot \alpha_{b\sigma_\varphi} + \alpha_{b\tau}^2} \quad (4.14)$$

erfolgen. Unter kombinierter dynamischer Belastung ist jedoch nur die Vorgehensweise mit separaten Formzahlen je Spannungskomponente und Belastungsart entsprechend Anhang A zu empfehlen.

4.3.3 Überprüfung der Beanspruchungsannahme mit höherwertiger Festigkeitshypothese

Die getroffene Annahme, den Festigkeitsnachweis näherungsweise mit gegenphasig schwingenden Beanspruchungskomponenten (180° Phasenverschiebung) führen zu

können, obwohl die im Kerbgrund tatsächlich vorliegende Phasenverschiebung zwischen den Normalspannungen ca. 90° beträgt, soll neben der experimentellen Validierung auch theoretisch mit einer höherwertigen Festigkeitshypothese bewertet werden. Im Gegensatz zu der in Normen und Richtlinien weit verbreiteten Vergleichsspannungsberechnung nach der klassischen Gestaltänderungsenergiehypothese ermöglichen einige in der Literatur verfügbare Festigkeitshypothesen die Berücksichtigung von asynchron schwingenden Beanspruchungen. Nach einer Literaturrecherche von Härtel [28] über Hypothesen der kritischen Schnittebene und der integralen Anstrengung sowie Erweiterungen zu den klassischen Hypothesen erscheint die Schubspannungsintensitätshypothese (SIH) mit ihrer Weiterentwicklung nach Liu u. Zenner [50], [51], [52] als am besten geeignet für den Anwendungsfall Zahnwellenverbindung. Diese spannungsbasierte Hypothese berücksichtigt zusätzlich Mittelspannungen und ein variables Verhältnis der Werkstoffwechselfestigkeiten. Sie ist den Festigkeitshypothesen der integralen Anstrengung zuzuordnen, bei denen nicht nur Beanspruchungen in einer einzelnen Schnittebene, sondern die Spannungen sämtlicher Schnittebenen betrachtet werden. Wie die Gestaltänderungsenergiehypothese stellt die SIH eine Interpretation der Fließbedingung nach Richard von Mises dar und geht im Fall von proportionalen Beanspruchungen (ohne Mittelspannungen) in die GEH über.

Ausgehend von einer mathematischen Beschreibung der Amplituden $\sigma_{\gamma\varphi a}$, $\tau_{\gamma\varphi a}$ und Mittelwerte $\sigma_{\gamma\varphi m}$, $\tau_{\gamma\varphi m}$ der örtlichen Spannung für alle Schnittebenen in Abhängigkeit von zwei Schnittwinkeln γ , φ (jedoch unabhängig von der Zeit!) formulieren Liu u. Zenner [50] den Ansatz

$$\sigma_{va} = \sqrt{\frac{15}{8\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} [a \tau_{\gamma\varphi a}^2 (1 + m \tau_{\gamma\varphi m}^2) + b \sigma_{\gamma\varphi a}^2 (1 + n \sigma_{\gamma\varphi m}^2)] \sin \gamma \, d\varphi d\gamma} \quad (4.15)$$

mit der Versagensbedingung

$$\sigma_{va} = \sigma_W \quad \text{bzw.} \quad S_D = \frac{\sigma_W}{\sigma_{va}}. \quad (4.16)$$

Durch die Koeffizienten a und b werden ein variables Wechselfestigkeitsverhältnis σ_W/τ_W und durch m und n die Mittelspannungsempfindlichkeit berücksichtigt.

Die Anwendung der in [50] bereitgestellten Gleichungen für $\sigma_{\gamma\varphi a}$ und $\tau_{\gamma\varphi a}$ zur testweisen Rückführung auf die GEH (Phasenverschiebung zu Null gesetzt) offenbarte einen Herleitungsfehler, der von Härtel in [28] korrigiert wurde. Mit diesen korrigierten Beziehungen erfolgt nun in Zusammenarbeit mit Härtel die Anwendung der Hypothese auf die Beanspruchungssituation im Zahnfuß der Zahnwellenverbindung bei Umlaufbiegung. Die Berechnungen beruhen auf der selben, für Abbildung 4.18

zugrunde gelegten Datenbasis von Streckgrenze, Zugfestigkeit und den örtlichen Beanspruchungen. Tabelle 4.8 zeigt zum Ersten, dass die Schubspannungsintensitätshypothese bei einer mit der DIN 743 Normberechnung abbildbaren Phasenverschiebung von 180° vergleichbare Ergebnisse liefert. Zum Zweiten ist ersichtlich, dass bei der tatsächlich vorhandenen Phasenverschiebung von 90° unter den Gegebenheiten des untersuchten Anwendungsbeispiels (z. B. hohe Torsionsmittelspannungen) die berechnete Tragfähigkeit nur wenig steigt. Die konservative Näherung auf eine gegenphasig schwingende Beanspruchung führt damit rechnerisch zu einer geringen Abweichung von den tatsächlichen Festigkeitsverhältnissen und keineswegs zu einer unverhältnismäßigen Überschätzung der Tragfähigkeit.

Tab. 4.8: Gegenüberstellung der rechnerischen Biegeschwingfestigkeit für die Prüfverbindung DIN 5480 – 25x1,75x13 (42CrMo4, $M_{ba}/M_{tm} = 0,2$)

	Phasenverschiebung zwischen σ_a und σ_t	
	180° (Annahme)	90° (Vorhanden)
DIN 743 (Erweitert) komponentenweise Formzahlen, vorzeichenbehaftet	$S_D = 1,08$	–
SIH Werkstoffkennwerte und Mittelspannungsempfindlichkeit nach [52]	$S_D = 1,02$	$S_D = 1,05$

Eine (hier nicht dargestellte) Modifikation der Festigkeitsberechnung nach der SIH mit an DIN 743 angelehnten Werkstoffkennwerten ($\sigma_W, \tau_W = f(R_m, K_1, K_2)$) ändert das Ergebnis nur unwesentlich. Trotz konservativer Annahme liefert die rechnerisch ermittelte Tragfähigkeit bei 180° Phasenverschiebung keine Sicherheitswerte $S_D < 1$. Dies kann in einer Unterschätzung der Mittelspannungsempfindlichkeit begründet sein. Aufgrund der im gegenübergestellten Dauerfestigkeitsversuch gleichzeitig vorliegenden, hohen statischen Torsion ($M_{tm} = 5 \cdot M_{ba}$) ist das Ergebnis verstärkt vom gewählten Mittelspannungsempfindlichkeitsfaktor abhängig.

Abbildung 4.19 stellt einen allgemeinen Verlauf der nach SIH berechneten Vergleichsspannungsamplitude σ_{va} in Abhängigkeit von der Phasenverschiebung δ_y zwischen zwei wechselnden Normalspannungen bei gleichzeitig mit $\delta_{xy} = 90^\circ$ schwingender Schubspannung dar. Das Diagramm unterstreicht die rechnerisch geringere Festigkeitsveränderung zwischen vorliegender Phasenverschiebung $\delta_y = 90^\circ$ und angenommener Phasenverschiebung $\delta_y = 180^\circ$ und deutet eine größere Überschätzung der Tragfähigkeit bei Vernachlässigung der Phasenverschiebung ($\delta_y = 0$) an.

Die Untersuchung der asynchron schwingenden Beanspruchung in der Zahnfußausrundung bei Umlaufbiegung mit der Schubspannungsintensitätshypothese liefert

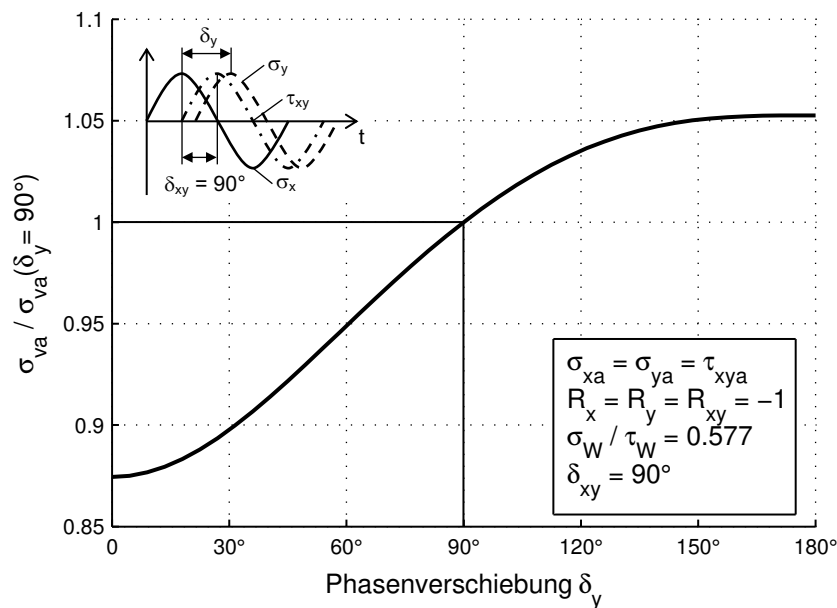


Abb. 4.19: Einfluss der Phasenverschiebung zwischen zwei wechselnden Normalspannungen bei gleichzeitig wechselnder Schubspannung nach der Schubspannungsintensitätshypothese

bzgl. der Festigkeitsbewertung keine bedeutenden Einwände gegen die Anwendung der formulierten vereinfachenden Beanspruchungsannahme. Die Normalspannungskomponenten σ_a und σ_t als gegenphasig schwingend anzunehmen weist den Vorteil auf, die Tragfähigkeitsberechnung unverändert mit der in vorhandenen Berechnungsnormen (DIN 743, FKM-Richtlinie) hinterlegten Festigkeitshypothese durchführen zu können. Es ist lediglich für die Spannungs- bzw. Formzahlkomponente in Wellenlängsrichtung $\alpha_{b\sigma_z}$ eine Vorzeichenänderung vorzunehmen.

4.3.4 Abschätzung des bezogenen Spannungsgefälles

Für die Berechnung der Kerbwirkungszahl β_σ, β_τ werden neben den Formzahlen Aussagen zum bezogenen Spannungsgefälle G' benötigt. Es dient zur Beurteilung der Stützwirkung nach dem Verfahren von Siebel u. Stieler [75], welches im Tragfähigkeitsnachweis nach DIN 743 Anwendung findet (vgl. Abschnitt 2.1.5). Die Untersuchungsergebnisse von Wesolowski [96, S. 124] sowie DIN 5466 [14] weisen Näherungswerte zum bezogenen Spannungsgefälle in der Zahnfußausrundung einer Zahnwellenverbindung (ohne Berücksichtigung der Auslaufgeometrie) aus. Daryusi [10, S. 162] leitete zudem Näherungsgleichungen für den freien Zahnauslauf aus numerischen Berechnungen von Zahnwellen (vorwiegend ohne Nabe) ab. Zur Anwendung in der entwickelten Berechnungsmethode für Mehrfachkerben (Kapitel 3)

sind die nach GEH berechneten Kennzahlen relevant. Die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit für Zahnwellenverbindungen mit freiem Zahnauslauf geben keinen dringenden Anlass, die getroffenen Empfehlungen für die jeweiligen Kerbbereiche zu ändern (Überprüfung an Stichproben). Abweichungen der Näherungsgleichungen zum tatsächlichen Spannungsgefälle führen zudem laut Abbildung 3.14 auf Seite 50 zu nur sehr geringen Fehlern in der berechneten Stützwirkung. Tabelle 4.9 fasst die Angaben zur Abschätzung des bezogenen Spannungsgefälles zusammen.

Tab. 4.9: Abschätzung des bezogenen Spannungsgefälles G' für gefräste Verzahnungen ($\rho_f = 0,16 \cdot m$)

	Zahnauslauf	Zahnfuß
Torsion	$G' = \frac{1,2}{r_w^{0,85}}$	$G' = \frac{4}{m} \dots \frac{8}{m}$
Biegung	$G' = \frac{2,6 \cdot (1 + \varphi_f)}{r_w^{0,6}}$ mit $\varphi_f = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{t_f/r_w} + 2}$	

4.4 Mehrdimensionale Parameterstudie

Die getroffene Auswahl der untersuchten geometrischen Parameter ist Tabelle 4.10 zu entnehmen. Die angegebenen Faktorstufen definieren den Umfang der vollfaktoriellen Parametervariationsrechnung. Die einzelnen Geometrievarianten wurden einmal mit und einmal ohne Nabeneinfluss berechnet. Zu jeder Parameterkombination erfolgte die Beanspruchungsermittlung unter Torsions- (Sektormodell) und unter Biegebelastung (Halbmodell). Der Außendurchmesser der Nabe D_a ist für alle Modellvarianten gleichbleibend mit $D_a = 2 \cdot d_B$ festgelegt. Die abgeleiteten Formzahlen gelten demnach für *dickwandige* Naben und stellen für alternative Verbindungsarten die konservative Abschätzung dar. Weitere konstant gehaltene Parameter betreffen das Fertigungsverfahren von Zahnwelle und Nabe. Die Zahnfußausrundung der Welle basiert auf der Fertigungskontur beim Wälzfräsen und die der Nabe auf jener beim Räumen. Alle Untersuchungen wurden zudem für flankenzentrierte Verbindungen mit abweichungsfreier Verzahnung ohne Flankenspiel durchgeführt.

Die Gesamtanzahl der berechneten FE-Modelle beläuft sich auf 1954. Die Kontaktsimulationen unter Biegebelastung stellen hierbei die rechenintensivsten Modellvarianten dar. Mit den Standardparametern des Nastran-Solvers (Version 2010) benötigt ein aktueller, leistungsfähiger Desktop-Rechner zwischen 80 und 90 Stunden für eine Parameterkombination (min. 8 GB Arbeitsspeicher). Im Laufe der Arbeit konnte

Tab. 4.10: Wertebereich der Parametervariationsrechnung

	Parameter	Wertebereich
	Zähnezahl	z 7; 13; 21; (48)
	Kerbschärfe	r_w/t_f 0,4; 0,6; 0,75; 0,9
	Kerbtiefe	d_w/d_f (0,850); 0,900; 0,925; 0,950; (0,975)
	Fasenwinkel	φ 0°; 15°; 30°; (45°)
	Nabellänge	L/d_B 0,4; 0,8; 1,2

durch diverse Optimierungen an Inkrement-Schrittweite, Gleichungslösungsalgorithmus³ und Speicherverwaltung die Rechenzeit auf 4,5 Stunden reduziert werden. Trotz dieser Maßnahmen erfordert das große Parameterfeld einen sehr hohen Zeitaufwand. Die akkumulierte Simulationszeit über alle berechneten Modellvarianten und alle eingesetzten Einzelplatzrechner beträgt 3435 Stunden (ca. 143 Tage).

Die ermittelten Kenngrößen der Kerbwirkung spannen jeweils ein mehrdimensionales Ergebnis-Kennfeld auf (Abbildung 4.20). Die grafische Darstellung kann demnach immer nur einen kleinen Auszug der Ergebnismenge wiedergeben. Tabelle 4.11 zeigt die Abhängigkeit der Biege- und Torsionsformzahl von den Kerbparametern (Kerbschärfe, Kerbtiefe) des freien Auslaufes für eine beispielhafte Zahnwellenverbindung mit konstanten Verzahnungsparametern und einheitlicher Nabengeometrie. Zur kompakteren Ergebnisdarstellung erfolgt die Angabe der Vergleichsformzahl (Gleichung 3.8) anstatt der jeweiligen Formzahlen für die Einzelkomponenten der Kerbspannung. In der rechten Spalte wird deutlich, dass die Geometrie des Zahnauslaufes auch signifikanten Einfluss auf die Kerbwirkung in der Zahnfußausrundung nimmt. Die Biege-

³Die schnellsten Rechenzeiten liefert der iterative, elementbasierte CASI Gleichungslöser

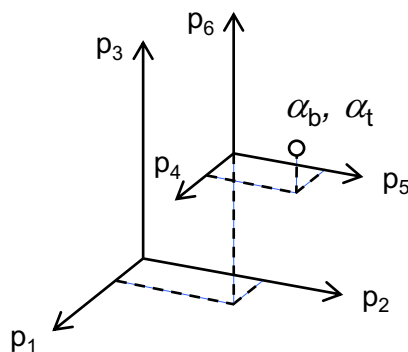
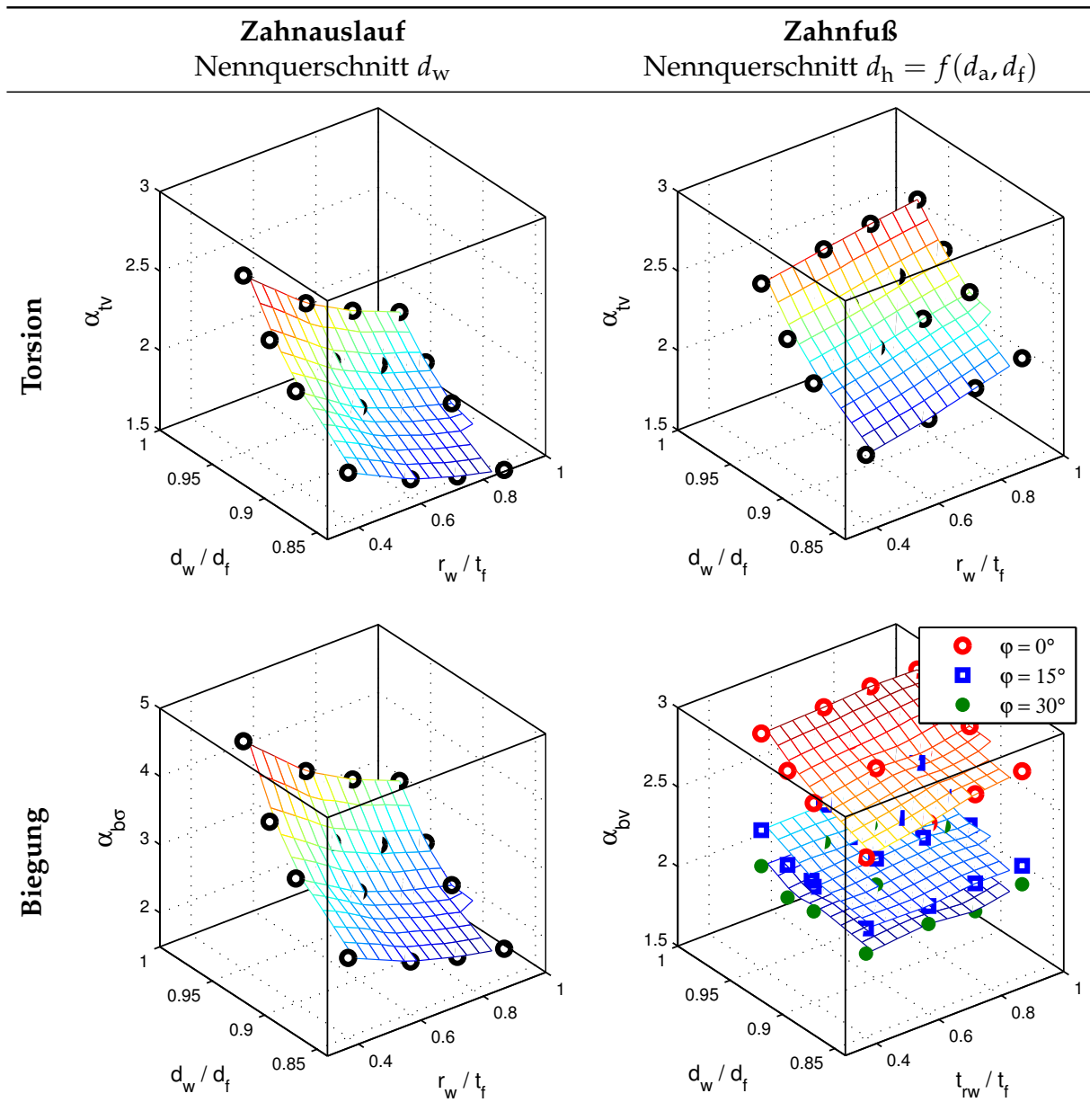


Abb. 4.20: Mehrdimensionales Ergebniskennfeld

Tab. 4.11: Ergebnisauszug – Formzahlen für eine Beispiel-Zahnwellenverbindung



(Zahnwelle DIN 5480 – 25x1,75x13, $d_w = 19$ mm, $r_w = 0,55$ mm)

formzahl (im Zahnfuß) zeigt zwar keine praxisrelevante Abhängigkeit von der Kerbschärfe und Kerbtiefe des Wellenabsatzes, sie wird allerdings vom Fasenwinkel φ des Zahnauslaufes bestimmt.

Weitere Abhängigkeiten lassen sich mit den Abbildungen 4.21 (Torsion) und 4.22 (Biegung) grob abschätzen. Die Streudiagramme bilden den kompletten Datensatz der jeweiligen Vergleichsformzahl im Zahnauslauf und im Zahnfuß über die unabhängigen

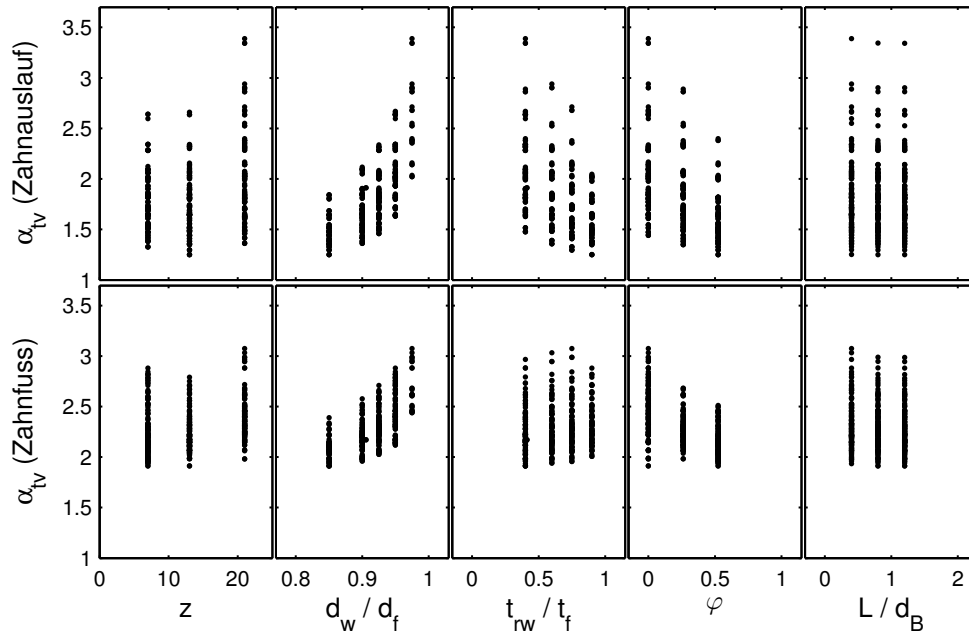


Abb. 4.21: Streudiagramm der ermittelten **Torsions**-Formzahlen für Zahnwellenverbindungen der Parameterstudie

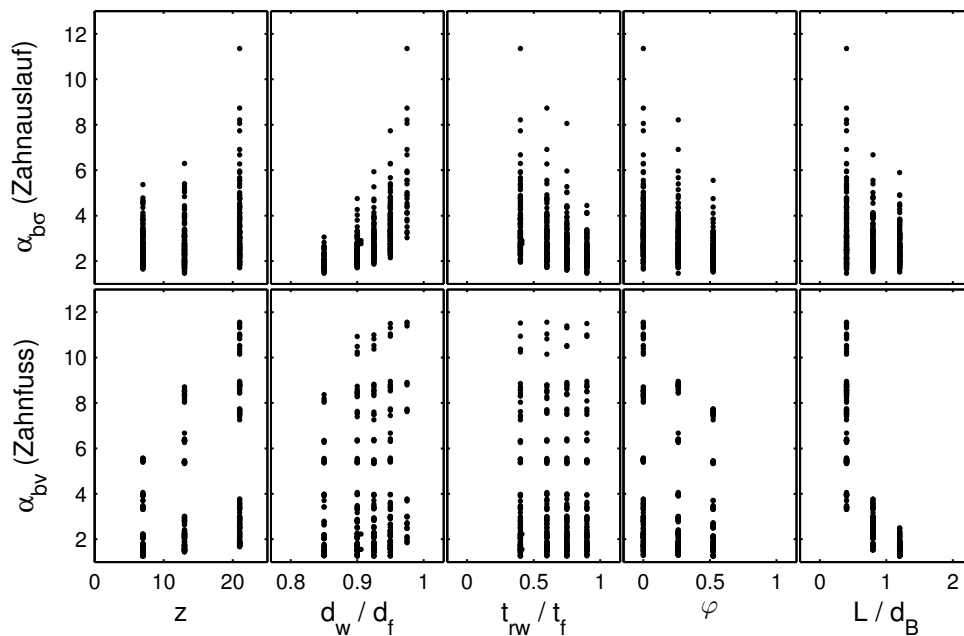


Abb. 4.22: Streudiagramm der ermittelten **Biege**-Formzahlen für Zahnwellenverbindungen der Parameterstudie

Variablen der Parameterstudie ab. So zeigt beispielsweise die Auftragung der Punktwolke zur Biegeformzahl im Zahnfuß über der relativen Nabenbreite L/d_B (Feld rechts unten in Abbildung 4.22) eine markante Form. Eine längere Nabe führt demnach zu deutlich kleineren Spannungskonzentrationen im Zahnfuß – unabhängig von den restlichen Geometrieparametern. Demgegenüber lässt sich auch in dieser Darstellung für den Parameter Kerbschärfe t_{rw}/t_f kein signifikanter Einfluss auf die Biegeformzahl im Zahnfuß vermuten, da er der Punktwolke wenig Form gibt. Aus den Diagrammen ist weiterhin der allgemeine Wertebereich der ermittelten Formzahlen erkennbar.

Die dargestellten Ergebnisse legen nahe, dass die Berücksichtigung der Auslaufgeometrie Einzug in die konventionelle Tragfähigkeitsberechnung von Zahnwellenverbindungen halten sollte. In Anhang B sind umfangreiche Tabellen der numerisch bestimmten Kerbformzahlen für die verschiedenen untersuchten Kerbparameter angegeben.

4.5 Ableitung von Näherungsgleichungen zur Formzahlberechnung

Um dem Anwender einen einfachen Zugang zu den Ergebnissen zu ermöglichen, empfiehlt sich die Ableitung von entsprechenden Näherungsfunktionen für die Berechnung der Formzahlen. Dazu wird mit den fünf kontinuierlichen Einflussgrößen Zähnezahl (z), Kerbschärfe (r_w/t_f), Kerbtiefe (d_w/d_f), Fasenwinkel (φ) und Nabenlänge (L/d_B), vergleiche Tabelle 4.10, ein multiples lineares Regressionsmodell der Form

$$\alpha = c_0 + c_1 \cdot f_1(\mathbf{x}) + \dots + c_p \cdot f_p(\mathbf{x}) + \epsilon \quad \mathbf{x} = (x_1 \dots x_5)^T \quad (4.17)$$

mit linearen Termen (z. B. $f_1(\mathbf{x}) = x_1$) sowie paarweisen Interaktionstermen (z. B. $f_2(\mathbf{x}) = x_1 \cdot x_2$) aufgestellt. Zusätzlich erhält das Modell Teilterme, die nach grafischer Analyse des Datensatzes als antwortbeschreibend anzunehmen sind (z. B. $f_3(\mathbf{x}) = 1 - \ln x_1$). In Summe ergibt sich damit die etwas unhandliche Anzahl von $p = 20$ Termen für die abgeleitete Näherungsgleichung mit potenziell redundanten oder insignifikanten Termen.

Zur Reduktion der Gleichungslänge auf ein sinnvolles Maß erfolgt im Anschluss eine schrittweise Regressionsanalyse (Stepwise Regression), bei der systematisch Terme auf Basis ihrer statistischen Signifikanz hinzugefügt oder herausgestrichen werden. Letztlich verringert sich die Gesamtzahl auf ein handhabbares Maß von durchschnittlich $p = 12$ Termen.

Mit den Abbildungen in Tabelle 4.12 lässt sich die Güte der Näherungsfunktion zu den numerisch bestimmten Formzahlen einschätzen. Die Darstellung erfolgt wieder jeweils für die Vergleichsformzahl von Biegung und Torsion bezogen auf den Zahnauslauf sowie die Zahnfußausrundung einer Zahnwellenverbindung (inkl. Nabeneinfluss) mit freiem Auslauf.

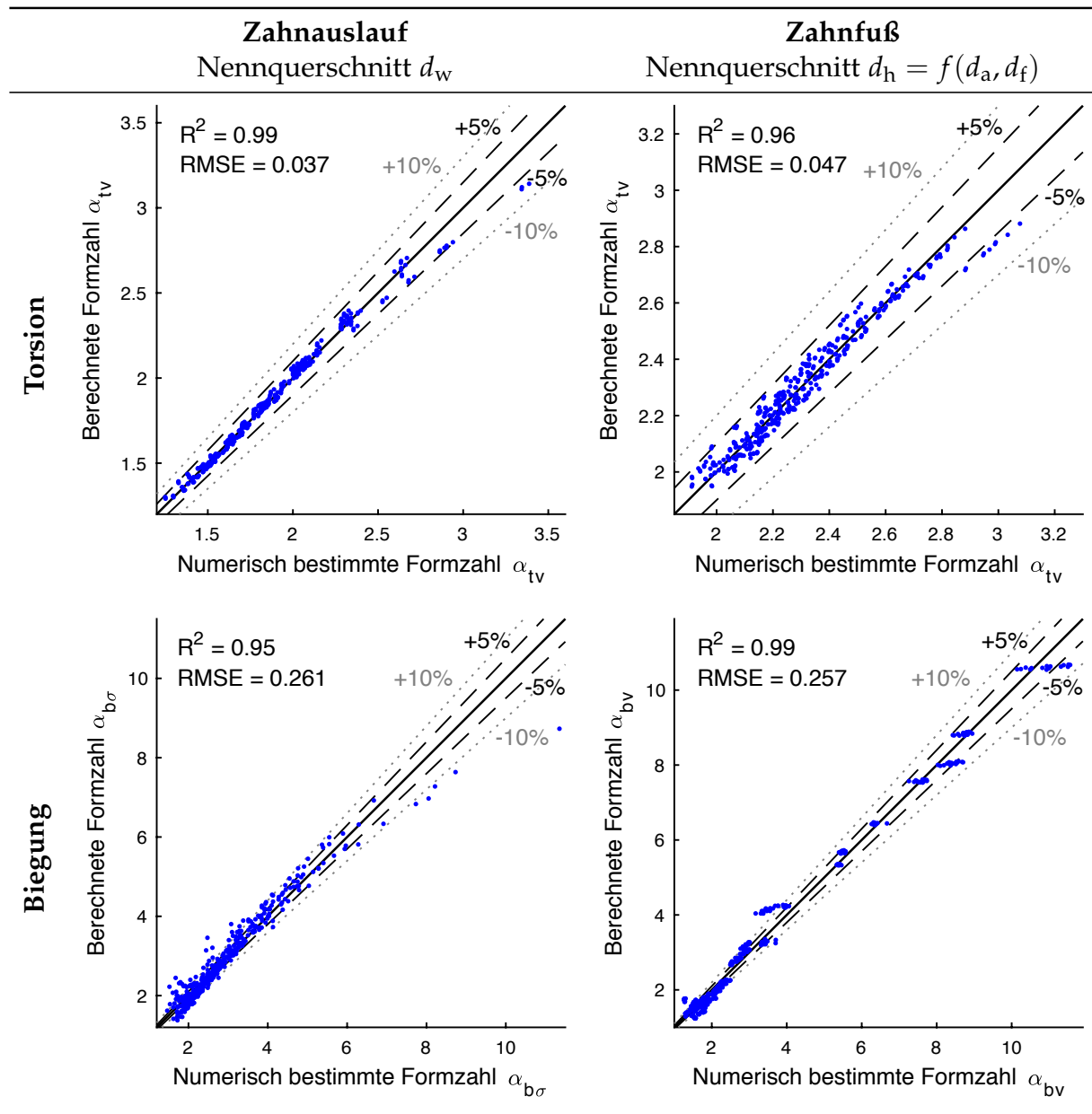
Erwartungsgemäß kann eine stark generische, analytische Näherungsfunktion das Systemverhalten in Abhängigkeit von fünf Einflussgrößen nicht abweichungsfrei beschreiben. Für den Belastungsfall Torsion liegen die Funktionswerte gegenüber allen vorliegenden FE-Ergebnissen dennoch in einem relativ engen Streuband von maximal $\pm 10\%$. Der *durchschnittliche* Prognosefehler (Wurzel der mittleren Fehlerquadratsumme, RSME) für die Torsionsformzahlen ist kleiner 0,05. Bei Biegung erreicht die Anpassung der Regression einen gleichermaßen hohen Bestimmtheitsgrad (R^2) wie bei Torsion. Aufgrund des größeren abzudeckenden Funktionsbereiches weichen die Biegeformzahlen der Näherungsfunktion absolut jedoch stärker, im Mittel um $\Delta\alpha = 0,26$, von den numerisch berechneten Ergebnissen ab. Sie besitzen damit im Bereich von kleinen Formzahlen einen hohen relativen Anpassungsfehler. In diesem Bereich lässt sich das Ergebnis der Formzahl durch eine Interpolation mit Hilfe der Tabellenwerte in Anhang B gegenüber der Näherungslösung verbessern.

Die Formzahlen für den Zahnauslauf und für die Zahnfußausrundung einer Zahnwellenverbindung (inkl. Nabeneinfluss) mit freiem Zahnauslauf bei Biegung oder Torsion können näherungsweise mit

$$\begin{aligned}
 \alpha_{b,t} = & c_0 + c_1 \cdot \sqrt{z} + c_2 \cdot \frac{d_w}{d_f} + c_3 \cdot \frac{t_{rw}}{t_f} + c_4 \cdot \frac{\pi - \varphi}{\pi} + c_5 \cdot \left(1 - \ln \frac{L}{d_B}\right) \\
 & + \sqrt{z} \cdot \left[c_6 \cdot \frac{d_w}{d_f} + c_7 \cdot \frac{t_{rw}}{t_f} + c_8 \cdot \frac{\pi - \varphi}{\pi} + c_9 \cdot \left(1 - \ln \frac{L}{d_B}\right) \right] \\
 & + \frac{d_w}{d_f} \cdot \left[c_{10} \cdot \frac{t_{rw}}{t_f} + c_{11} \cdot \frac{\pi - \varphi}{\pi} + c_{12} \cdot \left(1 - \ln \frac{L}{d_B}\right) \right] \\
 & + \frac{t_{rw}}{t_f} \cdot \left[c_{13} \cdot \frac{\pi - \varphi}{\pi} + c_{14} \cdot \left(1 - \ln \frac{L}{d_B}\right) \right] \\
 & + c_{15} \cdot \frac{\pi - \varphi}{\pi} \cdot \left(1 - \ln \frac{L}{d_B}\right) \\
 & + c_{16} \cdot \left(\frac{d_w}{d_f}\right)^{c_{20}} + c_{17} \cdot \left(1 - \ln \frac{t_{rw}}{t_f}\right) + c_{18} \cdot e^{\frac{\pi - \varphi}{\pi}} + c_{19} \cdot \frac{d_B}{L}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

berechnet werden. Die Formzahlkonstanten $c_0 \dots c_{20}$ sind Tabelle 4.13 zu entnehmen. Aus Tabelle 4.10 geht die Bedeutung der Abmessungen d_w , d_f , t_f , r_w , L und φ (einsetzen im Bogenmaß) sowie ihr abgesicherter Wertebereich hervor. Das Maß t_{rw} berechnet sich nach $t_{rw} = r_w \cdot (1 - \sin \varphi)$.

Tab. 4.12: Gegenüberstellung von nach Näherungsfunktionen berechneter und numerisch bestimmter (Vergleichs-) Formzahl, ausgewertet über alle Daten der Parameterstudie



Tab. 4.13: Formzahlkonstanten zu Näherungsgleichung 4.18

	Zahnauslauf			Zahnfuß					
	Nennquerschnitt d_w			Nennquerschnitt $d_h = f(d_a, d_f)$					
	Torsion		Bieg.	Torsion			Biegung		
	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
c_0	86,1	237	60,1	17,7	3,6	66,6	8,51	11,9	19,2
c_1	-1,08	–	-2,85	-0,583	-1,1	0,779	-2,52	-2,8	–
c_2	195	376	-68,8	-5,92	–	86,7	–	–	-20,5
c_3	5,82	8,4	25,5	–	–	–	–	–	–
c_4	-8,74	-14,2	-65,2	71,5	19,8	-34,4	–	-92,6	-34,6
c_5	-0,254	–	-15,4	–	–	-0,304	-2,87	-21,1	-4,06
c_6	1,07	-0,549	1,38	1,11	0,618	0,582	1,15	–	0,535
c_7	-0,0476	0,15	-0,244	0,0288	–	0,0504	–	–	–
c_8	0,141	0,4	1,33	-0,538	0,665	-1,41	1,12	1,58	-0,527
c_9	–	–	0,432	–	0,0033	–	0,435	1,9	-0,089
c_{10}	-3,53	-7,96	-15	–	0,792	-1,36	–	–	–
c_{11}	12,9	16,7	73,2	4,35	-2,47	33,9	–	–	23,2
c_{12}	0,199	–	10,9	0,187	–	–	-1,93	–	-1,07
c_{13}	-2,26	-2,17	-9,08	–	-0,765	1,35	–	–	0,345
c_{14}	–	–	-1,18	–	–	–	–	–	-0,278
c_{15}	0,0923	–	4,6	-0,189	–	0,214	2,19	12,4	4,72
c_{16}	-284	-612	5,19	0,587	–	-163	–	–	–
c_{17}	0,7	–	1,91	–	–	–	–	–	–
c_{18}	–	–	–	-32,1	-7,77	4,96	-2,62	30,9	4,89
c_{19}	–	–	0,707	–	–	0,109	1,16	4,59	1,36
c_{20}	0,693	0,594	36,8	52,4	–	0,689	–	–	–

Die angegebenen Formzahlen besitzen für dicke Naben mit $D_a \geq 2 \cdot d_B$ Gültigkeit (ungünstigster Fall) und beschreiben die Kerbwirkung am Verbindungsanfang. Die Anwendung bei zusammengesetzter Belastung setzt eine flankenzentrierte Verbindung mit ausreichend hohem Drehmomentanteil zum Schließen des Flankenspiels voraus. Zur praktischen Durchführung eines Tragfähigkeitsnachweises siehe auch die in Kapitel 6 gegebenen Anwendungshinweise.

5 Diskussion und Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

5.1 Zahnwellenverbindungen

In den bereits angesprochenen Forschungsvorhaben [69] und [53] sind experimentelle Untersuchungen zur Gestaltfestigkeit von Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf zu finden. Tabelle 5.1 stellt daraus entnommene Ergebnisse der Treppenstufenversuche zur Bestimmung der dauerhaft ertragbaren Lastamplitude für unterschiedliche Belastungsarten zusammen. Es stehen Erkenntnisse für schwingende Torsion, schwingende Biegung und überlagert schwingende Torsions- und Biegebelastung zu Verfügung. Zur Vermeidung von Verschleißerscheinungen in den Gestaltfestigkeitsuntersuchungen wurde jeweils ein zusätzliches statisches Torsionsmoment aufgebracht. Dies bildet einen insgesamt praxisnahen Einsatzfall der Zahnwellenverbindung als vorwiegend Drehmoment übertragende Verbindung ab, führt allerdings gleichzeitig zu einer Vermischung von Kerbwirkungs- und Mittelspannungseinflüssen. Dadurch erfolgt eine Überprüfung der nach Kapitel 4 bestimmten Kerbwirkungsfaktoren nur indirekt, indem ein Tragfähigkeitsnachweis für die Probengeometrie nach DIN 743 mit der Erweiterung aus Kapitel 3 durchgeführt wird. Evaluiert wird also das Gesamtbild aus neuer Rechenvorschrift, neuen Kerbformzahlen und vorhandenen Festigkeitsfaktoren, wie der Mittelspannungsempfindlichkeit.

Die in Tabelle 5.1 angegebenen Formzahlen stammen aus direkten FE-Analysen. Sie gelten für die Geometrie der speziellen Probenkörper. So erfolgte für die Torsionsuntersuchung der Modellaufbau mit nicht genormter Zahnfußkontur nach dem Schleifvorgang (abweichender Fußkreisdurchmesser). Die Probenkörper sind außerdem mit einem in der Praxis unüblichen, vollverrundeten Zahnauslauf mit großem Radius ausgeführt (siehe Abbildung 5.1b im Vergleich mit Abbildung 5.1a). Diese Maßnahme diente der Vermeidung von Anrissen im Zahnauslauf, um so die Kerbwirkung im Zahnfußbereich gezielt untersuchen zu können. Der in Abschnitt 4.1.1 beschriebene Netzgenerator stellt Modelle für diese Sondergeometrie bereit, sie sind jedoch nicht Bestandteil der durchgeführten Parameterstudie.

Tab. 5.1: Gegenüberstellung der experimentell und rechnerisch ermittelten Tragfähigkeit (Sicherheit gegen Dauerbruch) von Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf bei unterschiedlichen Belastungen

Belastungsart	Torsion	Biegung	Torsion + Biegung
Quelle experim. Daten	[69]	[53]	[53]
Zahnwelle	DIN 5480 – 25x1,75x13		
Absatzradius r_w	5 mm	5 mm	5 mm
Wellendurchmesser d_w	19 mm	19 mm	19 mm
Nabenlänge L	20 mm	20 mm	20 mm
Werkstoff	42CrMo4	42CrMo4	42CrMo4
Fertigungsverfahren:			
Welle	Schleifen	Wälzfräsen	Wälzfräsen
Nabe	Räumen	Räumen	Räumen
Fußkreisdurchmesser d_f	20,0 mm	20,975 mm	20,975 mm
Zugfestigkeit σ_B	969 MPa	1007,4 MPa	1007,4 MPa
Streckgrenze σ_S	795 MPa	755,5 MPa	755,5 MPa
Ort des Anrisses	Zahnfuß	Zahnfuß	Zahnfuß
Dauerfest ertragbare Belastung:			
M_{ba}	–	120,9 Nm	29,3 Nm
M_{ta}	200,0 Nm	–	195,3 Nm
M_{tm}	300,0 Nm	604,4 Nm	292,8 Nm
Formzahl (Zahnfuß):			
$\alpha_{b\sigma_z}$	–	-0,57	-0,57
$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	–	1,76	1,76
$\alpha_{b\tau}$	–	0,55	0,55
$\alpha_{t\sigma_z}$	0,19	–	0,46
$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	1,56	–	1,73
$\alpha_{t\tau}$	2,29	–	1,57
Bezogenes Spannungsgefälle:			
G'_b	–	4,16 1/mm	4,16 1/mm
G'_t	4,12 1/mm	–	3,38 1/mm
Experim. Sicherheit S_D	1,00	$1,00^{+0,17}_{-0,20}$	$1,00^{+0,10}_{-0,09}$
Rechn. Sicherheit S_D	0,94	1,08	1,03

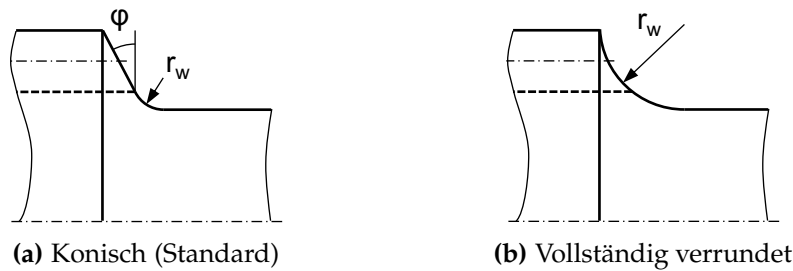


Abb. 5.1: Absatzformen des freien Zahnauslaufes

Basierend auf der im Versuch ermittelten dauerhaft ertragbaren Belastung und einer aus den jeweiligen Zugversuchen abgeleiteten mittleren Werkstoffwechselfestigkeit (Überlebenswahrscheinlichkeit $P_{\bar{U}} = 50\%$) wird abschließend die rechnerisch ermittelte Sicherheit an der kritischen Stelle mit dem erwarteten Ergebnis ($S_D = 1$) verglichen. Die Gegenüberstellung zeigt, dass die eingesetzten FE-Modelle und die gewählte Berechnungsmethode zur numerischen Ermittlung der Tragfähigkeit im Zahnfuß verlässliche Vorhersagen liefern. Die theoretischen Ergebnisse liegen, soweit bekannt, innerhalb des abgeschätzten Vertrauensbereiches der experimentellen Untersuchungen. Grundvoraussetzung für eine derart gute Übereinstimmung ist eine ausreichend hohe drehmomentabhängige Zentrierwirkung der Welle in der Nabe. Eine Bewertung der Treffsicherheit für den Zahnauslauf ist aufgrund der im Versuch auftretenden Brüche im Zahnfuß nicht möglich und wäre im Hinblick auf die eingesetzte besondere Zahnauslaufgeometrie auch wenig aussagekräftig.

5.2 Bewertung der neuen Berechnungsmethode

Gegenüberstellung

Zur Einschätzung der neu entwickelten Berechnungsmethode nach Kapitel 3 bzw. Anhang A werden neben der Mehrfachkerbe Zahnwellenverbindung (»Absatz mit Passverzahnung und Nabensitz«) weitere Beispiele von Mehrfachkerben mit Daten aus der Literatur betrachtet. Für die in Abschnitt 3.3 untersuchte Kerbform »Absatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz« stehen dank des kürzlich erschienenen Forschungsberichtes [73] experimentelle Schwingfestigkeitsergebnisse bei überlagerter schwingender Biege- und Torsionsbelastung zur Verfügung. Die am Institut für Konstruktions- und Antriebstechnik der TU Chemnitz durchgeführten Versuche bieten aufgrund der unter Laborbedingungen eingehaltenen Frequenz- und

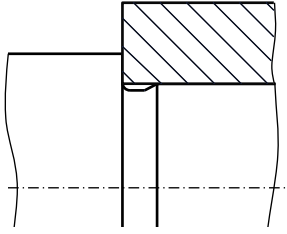
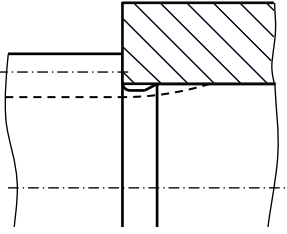
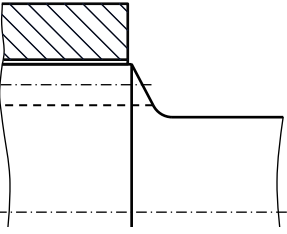
Phasengleichheit der Biege- und Torsionsanteile sowie der rein wechselnden Belastungscharakteristik eine hervorragende Vergleichsbasis (proportionale, synchrone Beanspruchungen) zur Validierung der neuen Berechnungsmethode. Aufgrund einer leicht abweichenden Geometrie der Probenkörper zu der in Abschnitt 3.3 betrachteten Beispielwelle (Schrägungswinkel, Bezugsprofil der Verzahnung, Freistichgröße) werden zur Ermittlung der zugehörigen rechnerischen Tragfähigkeit die notwendigen FE-Spannungsergebnisse aus den Analysen in [73] herangezogen. Weiterhin steht der geometrisch weniger komplexe Kerbfall »Absatz mit Freistich und Presssitz« mit experimenteller Referenz für Umlaufbiegung von Leidich u. a. [44] und zugehörigen FE-Kerbspannungen aus [72] auf der Untersuchungsliste. Bei allen Versuchen geht der Ermüdungsbruch von der freien Bauteiloberfläche im Freistich oder in der Zahnfußausrundung aus.

In Tabelle 5.2 erfolgt zum einen der qualitative Vergleich mit, sofern vorhanden, experimentell ermittelten Gestaltfestigkeiten analog zu Abschnitt 5.1 sowie mit rechnerisch ermittelten Tragfähigkeiten nach der alternativ verfügbaren FKM-Richtlinie [22], die einen Nachweis nach dem Kerbspannungskonzept anbietet. Zum anderen wird innerhalb des Rahmens der DIN 743 (Nennspannungskonzept) der Mehrwert der neuen, aufwendigeren Methode evaluiert. Insgesamt werden die ermittelten Sicherheiten nach fünf verschiedenen Auslegungsvorschriften gegenübergestellt:

S_{exp}	Experimentelle Referenz (Sicherheit = 1)
S_{FKM}	Berechnung nach FKM-Richtlinie (mit örtlichen Spannungen), basierend auf mehrachsigen Spannungen aus FE-Analyse
S_{Komp}	Berechnung nach DIN 743 mit <i>komponentenweise</i> bestimmten Formzahlen (neue Berechnungsmethode), basierend auf mehrachsigen Spannungen aus FE-Analyse
S_{GEH}	Berechnung nach DIN 743 mit modifizierter Formzahl nach <i>Gestaltänderungsenergiehypothese</i> (GEH), basierend auf einachsiger Vergleichsspannung aus FE-Analyse
S_{orig}	Normberechnung nach originaler DIN 743 mit einer dokumentierten, der Mehrfachkerbe <i>ähnlichen</i> Kerbform <i>ohne</i> FE-Analyse

Die in Tabelle 5.2 dargestellten Ergebnisse zeigen allgemein eine gute Treffsicherheit der neu entwickelten Berechnungsmethode (S_{Komp}) gegenüber den experimentell ermittelten Ermüdungsfestigkeiten. Weiterhin unterscheiden sich die berechneten Sicherheiten nur gering von den Sicherheiten nach FKM-Richtlinie mit örtlichen Spannungen. Beide Ansätze verwenden spannungsmechanisch identische Grundlagen, so dass die Unterschiede hauptsächlich aus verschiedenen festgelegten Einflussfaktoren

Tab. 5.2: Gegenüberstellung der ermittelten Sicherheiten gegen Dauerbruch (Überlebenswahrscheinlichkeit $P_U = 50\%$) nach unterschiedlichen Auslegungsvorschriften

Kerbform	Belastungsart	S_{exp}	S_{FKM}	DIN 743		
				S_{Komp}	S_{GEH}	S_{orig}
 Absatz mit Freistich und Presssitz	M_{ba}	1,0 [44]	0,99	1,08	1,07	1,20 ¹
	M_{ta}	–	1,01	1,00	1,00	1,10 ¹
	$M_{ba} + M_{ta}$ ($\sigma_{ba}/\tau_{ta}=1$)	–	0,98	1,00	0,99	1,10 ¹
 Absatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz	M_{ba}	–	1,02	1,00	0,98	1,05 ¹
	M_{ta}	–	1,12	1,00	1,00	1,17 ¹
	$M_{ba} + M_{ta}$ ($\sigma_{ba}/\tau_{ta}=1$)	1,0 [73]	0,92	0,98	1,38	1,56 ¹
 Absatz mit Passverzahnung und Nabensitz	M_{ba}	1,0 [53]	1,03	1,08	1,27	1,37 ²
	M_{ta}	1,0 [69]	0,97	0,94	1,03	1,57 ²
	$M_{ba} + M_{ta}$ ($\sigma_{ba}/\tau_{ta}=0,3$)	1,0 [53]	1,06	1,03	1,29	1,48 ²

1) gültig für Freistich; 2) gültig für Zahnwelle

resultieren, beispielsweise jener für die Mittelspannungsempfindlichkeit, für die Umrechnung von Zugfestigkeit in Wechselfestigkeit oder für die Berechnung der Stützwirkung aus dem ermittelten Spannungsgefälle. Die Qualität beider Auslegungsvorschriften hinsichtlich der berechneten Dauerfestigkeit ist damit erwartungsgemäß als vergleichbar einzuschätzen. Die Motivation zur Nutzung eines auf DIN 743 bezogenen Ansatzes bzw. des Nennspannungskonzeptes speist sich aus anderen Gründen (siehe Abschlussbemerkungen).

Verglichen mit der nicht FE-basierten Tragfähigkeitsberechnung nach der originalen

DIN 743 (Verwendung von Kerbfaktoren für eine zur Mehrfachkerbe ähnlichen, einfachen Kerbform) kann die Anwendung der neuen Berechnungsmethode und demnach auch einer FE-Simulation überaus vorteilhaft sein. Besonders bei komplexeren Kerbgeometrien, die stärker von den in der DIN 743 hinterlegten Kerbfällen abweichen, überschätzt eine reine Normberechnung die Tragfähigkeit um bis zu 57 %.

Die Berechnung der Ermüdungsfestigkeit nach DIN 743 mit einer modifizierten Formzahl, basierend auf der numerisch ermittelten Vergleichsspannung im Kerbgrund (S_{GEH}), erweist sich in vielen Anwendungsfällen als brauchbar. Der zusätzliche Rechenaufwand mit dem komponentenweisen Vorgehen (S_{Komp}) erscheint, bezogen auf den Erkenntnisgewinn, bei *einfachen* Kerben oder bei *einfachen* Lastfällen (überwiegende Einzelbelastungsamplitude) zu hoch. Bei *komplexeren* Kerbgeometrien mit ausgeprägten Sekundärspannungen und *zusammengesetzter* schwingender Belastung gewinnt die neue Berechnungsmethode (S_{Komp}) aufgrund der höheren Treffsicherheit jedoch an Bedeutung. Die vereinfachte Formzahlbestimmung mittels Vergleichsspannung (S_{GEH}) führt in diesen Fällen zu einer deutlichen Überschätzung (kursive Werte in Tabelle 5.2) der experimentell bestimmten Ermüdungsfestigkeit. Hier wirkt sich der in Abschnitt 3.1.2 beschriebene spannungsmechanische Fehler durch die ineinander geschachtelte Doppelanwendung der Vergleichsspannungshypothese verstärkt aus.

Abschlussbemerkungen

Die Nutzung einer nennspannungsbasierten Auslegungsvorschrift (DIN 743) mit örtlich ermittelten Kerbspannungen erscheint zunächst als unnötig kompliziert. Die alternative FKM-Richtlinie bietet die Möglichkeit, einen Tragfähigkeitsnachweis unmittelbar mit den numerisch gewonnenen Beanspruchungen (FE-Spannungen) durchzuführen. Der Umweg über Formzahlen erlaubt jedoch die schnelle und unmittelbare Wiederverwendung der aufwendig gewonnenen Ergebnisse bei geänderten Belastungsannahmen (Betrag oder Zusammensetzung von Zug/Druck, Biegung, Torsion). Weiterhin stellen sie ein geeignetes Austauschformat zwischen verschiedenen Bearbeitern im Unternehmensumfeld dar. Während für die Durchführung einer FE-Analyse häufig gesonderte Experten beauftragt werden, obliegt der Tragfähigkeitsnachweis der unterschiedlichen Wellenquerschnitte zumeist dem Konstrukteur des entsprechenden Bauteils. Damit sind Formzahlen z. B. auch zur Erstellung eines Kenngrößenkataloges (Formzahlkatalog) für wiederkehrende Kerbformen geeignet und dienen als »einmalige Lösung einer sich ständig wiederholenden Aufgabe« [49].

Eine mehrfach genannte, wichtige Grenze der FE-basierten Berechnungsmethode stellt die Beschränkung auf Kerben mit Rissentstehung an der freien Bauteiloberfläche dar.

Neben den nicht erfassten Reibverschleißeinflüssen innerhalb der Kontaktzone verhindern linear-elastische Spannungssingularitäten im FE-Modell eine Anwendung am Kontaktrand. Fällt der Versagensort mit so einer Stelle zusammen, sind experimentelle Nachweisverfahren zu bevorzugen.

Die in DIN 743 bzw. FKM-Richtlinie hinterlegte Festigkeitshypothese besitzt nur unter synchronen Beanspruchungsamplituden (zusammengesetzte Belastung) Gültigkeit. Eine alternative Theorie zur Dauerfestigkeitsberechnung bei allgemein nichtproportionalen und nicht synchronen Beanspruchungen hat sich in der Ingenieurpraxis bisher nicht durchsetzen können. Verschiedene Ansätze sind in [64], [76] und [79] zu finden. Für Nennspannungen stellt die aktuelle FKM-Richtlinie [22] eine modifizierte Festigkeitshypothese zur Verfügung, die gegenwärtig z. B. im Forschungsvorhaben [47] auf dem Prüfstand steht.

6 Ergebnisübersicht / Anwendungshinweise

Beliebig gestaltete Mehrfachkerben

Die Formzahlen und das Spannungsgefälle an Kerbstellen mit kraftfreier Bauteiloberfläche sind für die vorhandene Kerbgeometrie mit Hilfe einer Finite-Elemente-Analyse zu bestimmen. Zur Ermittlung der örtlichen, elastischen Kerbspannungsamplituden in einer für das Nennspannungskonzept der DIN 743 anwendbaren Form dienen dem Anwender die Hilfestellungen in Abschnitt 3.2. Das Kapitel beschreibt die problemspezifischen Schritte zur Modellbildung und Simulation.

Die Auswertung der gewonnenen Spannungsergebnisse und die Integration in die Tragfähigkeitsberechnung nach DIN 743 sollte anschließend nach der Berechnungsanleitung in Anhang A erfolgen.

Zahnwellenverbindungen mit freiem Zahnauslauf

Die Zahnwellenverbindung mit freiem Zahnauslauf besitzt zwei potenzielle Versagensorte, die Zahnfußausrundung und den Zahnauslauf. Für diese beiden Kerbstellen ist ein getrennter Nachweis mit jeweils zugehörigen Formzahlen und Spannungsgefällen zu führen.

Die Formzahlen für Zahnfuß und Zahnauslauf können nach der Näherungsgleichung 4.18 auf Seite 108 und den Formzahlkonstanten in Tabelle 4.13 berechnet werden. Alternativ erlauben die Formzahltabellen in Anhang B eine Interpolationsrechnung mit den Primärdaten. Entsprechend der Untersuchungsergebnisse zur Charakterisierung der Kerbbeanspruchung werden separate (Teil-)Formzahlen für jede wirkende Einzelspannungskomponente angegeben. Die Anwendung dieser Formzahlen im Tragfähigkeitsnachweis nach DIN 743 erfolgt nach dem in Kapitel 3 entwickelten Verfahren (Anleitung in Anhang A). Tabelle 6.1 fasst die jeweils notwendigen Formzahlkomponenten zusammen. Für einen vereinfachten Tragfähigkeitsnachweis kann auch mit Hilfe einer Vergleichsformzahl (siehe Tabelle 6.1) direkt nach den Gleichungen der

Tab. 6.1: Benötigte Formzahlkomponenten nach Gleichung 4.18 für den Tragfähigkeitsnachweis von Zahnwellenverbindungen

		Vollständige Berechnung	Vereinfachte Berechnung
Zahnauslauf	Torsion	$\left. \begin{matrix} \alpha_{t\tau} \\ \alpha_{t\sigma_z} \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{Anhang A}$	$\alpha_{tv} = \sqrt{\alpha_{t\sigma_z}^2 + \alpha_{t\tau}^2} \rightarrow \text{DIN 743}$
	Biegung	$\alpha_{b\sigma} \rightarrow \text{DIN 743}$	$\alpha_{b\sigma} \rightarrow \text{DIN 743}$
Zahnfuß	Torsion	$\left. \begin{matrix} \alpha_{t\tau} \\ \alpha_{t\sigma_z} \\ \alpha_{t\sigma_\varphi} \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{Anhang A}$	$\alpha_{tv} = \sqrt{\begin{matrix} \alpha_{t\sigma_z}^2 + \alpha_{t\sigma_\varphi}^2 \\ -\alpha_{t\sigma_z} \cdot \alpha_{t\sigma_\varphi} + \alpha_{t\tau}^2 \end{matrix}}$ $\rightarrow \text{DIN 743}$
	Biegung	$\left. \begin{matrix} -\alpha_{b\sigma_z} \\ \alpha_{b\sigma_\varphi} \\ \alpha_{b\tau} \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{Anhang A}$	$\alpha_{bv} = \sqrt{\begin{matrix} \alpha_{b\sigma_z}^2 + \alpha_{b\sigma_\varphi}^2 \\ -(-\alpha_{b\sigma_z}) \cdot \alpha_{b\sigma_\varphi} + \alpha_{b\tau}^2 \end{matrix}}$ $\rightarrow \text{DIN 743 (Vorzeichen beachten!)}$

DIN 743 gerechnet werden. Diese Herangehensweise ist jedoch beim Vorliegen einer zusammengesetzten schwingenden Belastung nicht zulässig.

Die Formzahlen des Zahnauslaufes gelten für Nennspannungen, die sich am Kreisquerschnitt der von der Verzahnung ungestörten Welle ergeben. Im Zahnfuß hingegen basieren die Formzahlen auf einem Nennkreisquerschnitt mit einem imaginären Außendurchmesser, dem Ersatzkreisdurchmesser d_h der Verzahnung nach DIN 5466 [14] bzw. Gleichungen 4.2 und 4.3 auf Seite 92.

Die Angaben zur Abschätzung des bezogenen Spannungsgefälles für Zahnfuß und Zahnauslauf sind in Tabelle 4.9 auf Seite 103 zusammengefasst. Sie werden neben den Formzahlen zur Berechnung der Kerbwirkungszahl benötigt und gelten sowohl für die vollständige als auch für die vereinfachte Berechnung.

7 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur Berechnung der Ermüdungsfestigkeit von Wellen und Achsen, welche eine von den normativen Berechnungsmethoden nicht erfasste, komplex gestaltete oder überlagerte Kerbform (Mehrfachkerbe) aufweisen. Das Hauptanliegen liegt hierbei in der Nutzung moderner numerischer Rechenmethoden (FEM) ohne den Rahmen des genormten Tragfähigkeitsnachweises nach DIN 743 [13] zu verlassen.

Dies erforderte im ersten Teil der Arbeit die Zusammenführung von örtlichen Kerbspannungsergebnissen einer Finite-Elemente-Analyse mit dem Nennspannungskonzept der DIN 743. Hierbei wurden spannungsmechanische Unstimmigkeiten in den bisher eingesetzten Methoden zur Formzahlbestimmung aufgezeigt. Besonders bei mehrachsigen Spannungszuständen im Kerbgrund und zusammengesetzter Belastung können diese Relevanz erlangen. Daher erfolgte die Ableitung einer neuen, spannungsmechanisch begründeten Berechnungsmethode zur Integration von örtlich mehrachsigen Spannungszuständen in den nennspannungsbasierten Tragfähigkeitsnachweis. Die grundlegende Vorgehensweise der Norm und damit die rechnerische Erfassung von Spannungsüberhöhungen mittels Formzahl erfährt dadurch keine Veränderung. Die normtypische Unterscheidung der Bauteilfestigkeit nach den drei Grundlastfällen (Zug/Druck, Biegung, Torsion) bleibt ebenfalls erhalten. Die bisherige Definition einer einzelnen schädigungsmaßgebenden Formzahl je Belastungsart wird jedoch auf eine komponentenweise Betrachtung mit separaten Formzahlen für jede örtlich wirkende Spannungskomponente erweitert.

Eine Sensitivitätsanalyse, basierend auf FE-Berechnungen eines beispielhaften Anwendungsfalls mit besonders komplexer Kerbgeometrie, lieferte zentrale Aussagen zur Relevanz verschiedener festigkeitsbeeinflussender Effekte bei Mehrfachkerben. Untersucht wurde der Einfluss von mehrachsigen Spannungszuständen, von unterschiedlichen Orten der kritischen Beanspruchung und von grundlastfallfreien Mittelspannungen auf die rechnerisch ermittelte Ermüdungsfestigkeit.

Die Ergebnisse münden in einer anwendungsbereiten und ganzheitlichen Berechnungsanleitung für die Ermüdungsfestigkeitsberechnung von Bauteilen mit Mehrfachkerben in Anlehnung an DIN 743. Voraussetzung der FE-basierten Berechnungs-

methode sind Kerben mit Rissentstehung an der kraftfreien Bauteiloberfläche. Darüber hinaus erfolgte die Ableitung von Systematisierungsansätzen als Hilfestellung zur Durchführung der notwendigen Finite-Elemente-Analysen.

Der zweite Teil der Arbeit wendet die für beliebige Kerbgeometrien erarbeitete Methode auf eine in der Konstruktionspraxis immer wiederkehrende Mehrfachkerbe, die Zahnwellenverbindung mit freiem Zahnauslauf und evolventischem Zahnflankenprofil, an. Die Überlagerung der Einzelkerben Zahnfußausrundung, Wellenabsatz (freier Zahnauslauf) und Belastungskerbe »Nabe« führt bereits bei einachsiger Belastung zu mehrachsigen Spannungszuständen im Kerbgrund. Bei Umlaufbiegung ist zudem im Zahnfußbereich ein örtlich zweiachsiger Spannungszustand mit phasenverschobenen Zeit-Verläufen der einzelnen Spannungskomponenten (asynchrone Beanspruchung) zu beobachten. In Abhängigkeit der geometrischen Gestaltung der Zahnwellenverbindung erweisen sich zwei unterschiedliche Nachweisorde (Zahnauslauf und Zahnfuß im Bereich der Nabenkante) abwechselnd als versagenskritisch.

Die zur Ermüdungsfestigkeitsberechnung notwendigen Kenngrößen der Kerbe (Formzahlen und Spannungsgefälle) wurden numerisch mittels FE-Kontaktsimulationen der Zahnwellenverbindung vorab berechnet. Durch eine umfangreiche, automatisiert durchgeführte Parameterstudie und Ausnutzung des Ähnlichkeitsprinzips konnten die – aufgrund der großen Variationsvielfalt von Auslaufgeometrie- und Verzahnungsparametern – komplexen Zusammenhänge im Kerbbereich für ein weites Parameterspektrum erfasst werden. Als Ergebnis liegen anwendungsbereite Formzahlen für Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 [15] an den Kerbstellen Zahnfuß und Zahnauslauf für Biegung und Torsion in Abhängigkeit von zahlreichen geometrischen Einflussparametern vor. Für den praxisgerechten Einsatz sind entsprechende Näherungsgleichungen der ermittelten Berechnungsfaktoren angegeben. Dadurch kann der Anwender für diese Mehrfachkerbe auf die eigenständige Durchführung einer aufwendigen FE-Simulation verzichten.

Ergänzend zur Formzahlberechnung erfolgte eine theoretische Untersuchung zum Nennquerschnitt des nicht kreisförmigen Wellenquerschnitts in der Verzahnung. Hierzu wurde das Torsionsträgheitsmoment mit Hilfe einer numerischen Lösung der partiellen Differentialgleichung zur Wölbfunktion des Verzahnungsquerschnittes ermittelt. Der bisher auf wenige Stützstellen beruhende Geometriefaktor-Verlauf des Ersatzkreisdurchmessers nach DIN 5466 [14] ließ sich damit weitgehend bestätigen.

Weiterhin wurde die Gültigkeit des Superpositionsprinzips bei zusammengesetzter Belastung des theoretisch nicht-linearen Systems Zahnwellenverbindung überprüft. Die Kerbspannungsuntersuchungen zeigen, dass bei flankenzentrierten Verbindungen für Betriebszustände mit überwiegendem Drehmomentanteil die lineare Überlagerung von Bauteilbeanspruchungen aus Einzelbelastungen dennoch zulässig ist.

Eine vereinfachende Beanspruchungsannahme der im Zahnfußbereich festgestellten asynchronen Beanspruchung bei Umlaufbiegung stellt die Zugänglichkeit zur hinterlegten Festigkeitshypothese der DIN 743 her. Experimentelle Beobachtungen und Vergleichsrechnungen mit einer höherwertigen Festigkeitshypothese (Schubspannungsintensitätshypothese) unterstützen die getroffene Annahme.

Im abschließenden Teil der Arbeit findet ein Vergleich der entwickelten Berechnungsmethode im Allgemeinen und der ermittelten Formzahlen für Zahnwellenverbindungen im Speziellen mit vorhandenen experimentellen Stichversuchen aus der Literatur statt. Es werden verschiedene Kerbformen bei Biege-, Torsions- und überlagerter Belastung betrachtet. Die theoretischen Ergebnisse liegen allesamt innerhalb des abgeschätzten Vertrauensbereiches der experimentellen Untersuchungen. Die neu entwickelte Berechnungsmethode stellt insbesondere bei zusammengesetzter schwingender Belastung eine Verbesserung der rechnerischen Vorhersagequalität gegenüber den bisherigen Formzahlbestimmungsmethoden dar. In diesen Fällen wurde zuvor die tatsächliche Tragfähigkeit um bis zu 38 % überschätzt.

Die bereitgestellte Berechnungsrichtlinie zusammen mit den gegebenen Hilfestellungen zur FE-Modellierung befähigen den Anwender, individuell gestaltete Mehrfachkerben selbstständig zu berechnen und einem genormten Tragfähigkeitsnachweis zuzuführen. Für die spezielle Kerbform »Zahnwellenverbindung mit freiem Zahnauslauf« gelingt dies unter Verwendung der angegebenen Näherungsgleichungen für Formzahl und bezogenes Spannungsgefälle auch ohne eigene FE-Analyse.

A Anleitung: DIN 743 mit Kerbspannungen aus FE-Analyse

A.1 Allgemeines

A.1.1 Anwendungsbereich

Diese Berechnungsanleitung gilt für den nennspannungsbasierten Sicherheitsnachweis von Wellen und Achsen nach DIN 743 [13]. Die Anwendungsgrenzen der Norm gelten somit in gleicher Weise.

Die Anleitung konkretisiert die Vorgehensweise zur Implementierung von mittels FE-Analyse ermittelten Kerbbeanspruchungen in den Tragfähigkeitsnachweis gegen Ermüdungsbrüche. Speziell beinhaltet dies die Aufbereitung der FE-Ergebnisse für die Bildung geeigneter Formzahlen, die Wahl des Nennquerschnittes sowie die Methodik zur Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles. Darüber hinaus finden insbesondere mehrachsige Spannungszustände bei Mehrfachkerben und grundlastfallfreie Mittelspannungen durch einen Querpresssitz Berücksichtigung.

Die Gültigkeit der angegebenen Methoden zur rechnerischen Tragfähigkeitsermittlung beschränkt sich auf Kerbstellen mit kraftfreier Bauteiloberfläche. Versagenskritische Stellen innerhalb der Kontaktzone infolge von Reibdauerermüdung (z. B. Press- und Passfederverbindungen) müssen wie bisher mit einer experimentell bestimmten Kerbwirkungszahl erfasst werden. Die Anwendung der DIN 743 und der beschriebenen Verfahren setzen weiterhin die hinreichend genaue Erfüllung des Prinzips der Superposition von Einzelbeanspruchungen bei zusammengesetzter Belastung voraus.

A.1.2 Spannungen und Belastungsarten

Amplitude und Mittelspannung

Die maßgebenden Größen bei der Schädigung eines Bauteils infolge einer zyklischen Belastung sind die Spannungsamplitude σ_a bzw. τ_a und die Mittelspannung σ_m bzw. τ_m aus den jeweiligen Schwingspielen (siehe Abbildung A.1).

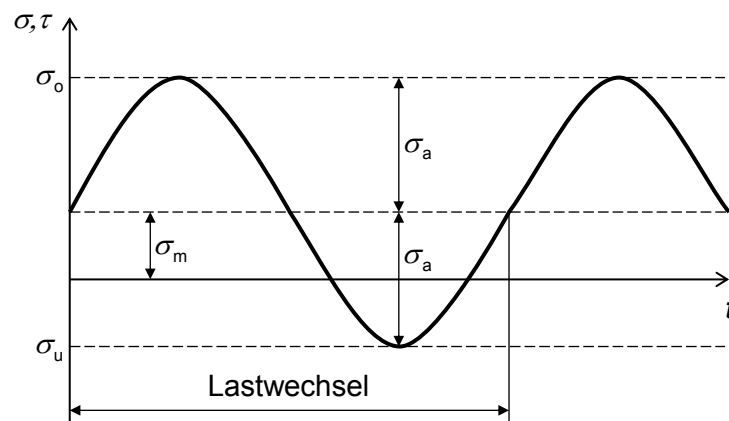


Abb. A.1: Spannungsverlauf einer Kerbspannungskomponente

Sie lassen sich aus der Ober- und Unterspannung eines Lastwechsels berechnen:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} \quad \text{und} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}. \quad (\text{A.1})$$

Die örtlichen elastizitätstheoretischen Spannungen sind hierbei tensoriell bzw. für jede Komponente separat zu betrachten, damit die Vorzeicheninformation der einzelnen Komponenten nicht verloren geht. Die Spannungsamplitude kann im Allgemeinen nicht aus der Differenz zweier Vergleichsspannungen bestimmt werden.

Unterscheidung von Belastungsarten

DIN 743 sieht eine *getrennte* Betrachtung der Bauteilbeanspruchungen resultierend aus den drei Grundlastfällen Zug/Druck, Biegung und Torsion vor. Dementsprechend sind gesonderte FE-Analysen zur Ermittlung der örtlichen Kerbspannungen bei einer oder mehrerer dieser Belastungsarten durchzuführen (siehe Abschnitt 3.2.1 auf Seite 38).

A.2 Berechnungsmethode für Mehrfachkerben unter zusammengesetzter dynamischer Belastung

A.2.1 Örtliche Spannungen und Koordinatenausrichtung

Eine wichtige Grundlage zur Formzahlermittlung aus den FE-Ergebnissen ist die fragestellungsbezogene Aufbereitung der erhaltenen örtlichen Kerbspannungen.

Nachweispunkt

Es wird vorausgesetzt, dass sich der maßgebliche, kritische Nachweispunkt auf der Bauteiloberfläche am Ort der größten Vergleichsspannungs-Amplitude σ_{va} befindet. Diese berechnet sich nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) aus dem Tensor der örtlichen Spannungsamplituden

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \tau_{12} = \tau_{21} \\ \tau_{23} = \tau_{32} \\ \tau_{13} = \tau_{31} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

wie folgt:

$$\sigma_{va} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2)}. \quad (\text{A.3})$$

Komponenten der örtlichen Kerbspannungen

Entscheidend für die Formzahlberechnung ist allerdings nicht der Betrag der Vergleichsspannung, sondern die einzelnen Spannungskomponenten im lokalen Koordinatensystem am Nachweispunkt. Entsprechend der Anwendungsbegrenzung der Berechnungsmethode auf lastfreie Oberflächen liegt dort ein ebener Spannungszustand vor, bei dem die Spannungen in Richtung der Oberflächennormalen verschwinden bzw. im numerischen Sinne vernachlässigbar klein werden.

Die Angabe der Spannungskomponenten σ_z , σ_φ und τ erfolgt im lokalen, körperfesten, an der Wellenachse ausgerichteten (kartesischen) Koordinatensystem (siehe Abbildung A.2), für das gilt:

- z- und φ -Achse liegen in der Oberfläche (tangential zur Bauteiloberfläche),
- die dritte Koordinatenachse n steht senkrecht zur Oberfläche,

- z-Achse und Richtungsvektor der Wellenachse e_3 befinden sich in einer Ebene. Im Spezialfall liegt die z-Achse parallel zur Wellenachse.

Dieses lokale Koordinatensystem stimmt im Allgemeinen nicht mit dem unter Umständen rotierenden Hauptachsensystem überein.

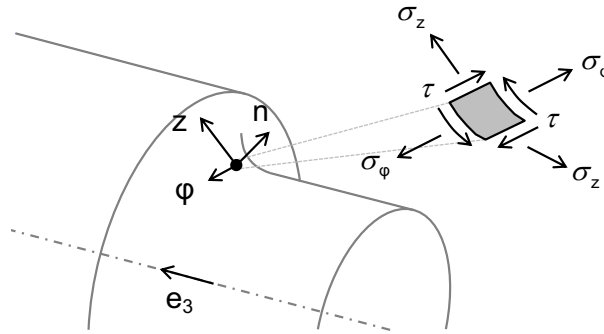


Abb. A.2: Komponenten der örtlichen Kerbspannung

Koordinatentransformation

Im Allgemeinen liefert eine FE-Analyse die örtlichen Kerbspannungen als räumlichen Spannungstensor σ im globalen Koordinatensystem (entsprechend Gleichung A.2). Die Transformation zum ebenen Spannungstensor im lokalen Koordinatensystem

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_z & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_z & \tau \\ \tau & \sigma_\phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

erfolgt mit der Beziehung

$$\bar{\sigma} = T^T \cdot \sigma \cdot T. \quad (\text{A.5})$$

Für die Transformationsmatrix gilt:

$$T = [\vec{z} \quad \vec{\phi} \quad \vec{n}], \quad \vec{z} = \vec{\phi} \times \vec{n}, \quad \vec{\phi} = \frac{\vec{n} \times \vec{e}_3}{|\vec{n} \times \vec{e}_3|}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Dabei sind:

- σ Räumlicher Spannungstensor im globalen Koordinatensystem

- $\bar{\sigma}$ Ebener Spannungstensor im lokalen Koordinatensystem am Nachweispunkt
- T Transformationsmatrix (Orthonormalbasis)
- \vec{z} 1. Basisvektor des lokalen Koordinatensystems (tangential zur Oberfläche, an Wellenachse ausgerichtet)
- $\vec{\varphi}$ 2. Basisvektor des lokalen Koordinatensystems (tangential zur Oberfläche, in Umfangsrichtung)
- \vec{n} Einheitsvektor der Oberflächennormalen und gleichzeitig 3. Basisvektor des lokalen Koordinatensystems
- \vec{e}_3 Basisvektor des globalen Koordinatensystems (Wellenachse)

Der Vektor der Oberflächennormalen \vec{n} ist im normierten Zustand mit der Länge $|\vec{n}| = 1$ einzusetzen.

A.2.2 Formzahl

Die Formzahl ist allgemein definiert als Quotient der örtlichen Spannungsspitze im Kerbgrund $\sigma_{\max K}$ bzw. $\tau_{\max K}$ und der Nennspannung im Kerbquerschnitt σ_n bzw. τ_n ,

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max K}}{\sigma_n} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_{\max K}}{\tau_n}. \quad (\text{A.7})$$

Sie ist in erster Linie getrennt für die Grundlastfälle Zug/Druck, Biegung und Torsion zu bestimmen und erhält zweckmäßigerweise einen entsprechenden Index (zd , b oder t), vergleiche Abbildung 2.3 auf Seite 9.

Die Bestimmung der örtlichen Kerbspannungen erfolgt mittels FE-Analyse für die Grundlastfälle bei einer jeweils frei wählbaren Nennbelastung. Die Höhe der im Modell aufgebrachten Last ist bei reinen Gestaltkerben aufgrund des linear-elastisch angesetzten Materialverhaltens und der Quotientenbildung bei der Formzahlermittlung unbedeutend und kann stark von der tatsächlichen Betriebslast abweichen, für die der Tragfähigkeitsnachweis durchgeführt werden soll. Im Falle einer überlagerten Gestalt- und Krafteinleitungskerbe sollte die simulierte Last in der Größenordnung der erwarteten Bauteilbelastung liegen, sofern die Kerbbeanspruchungen mit Hilfe einer FE-Kontaktsimulation (nichtlineares Modell) bestimmt werden.

Nennspannung

Die Nennspannungen im Kerbquerschnitt berechnen sich nach den Gleichungen in Tabelle A.1.

Tab. A.1: Ermittlung der Nennspannungen zur Formzahlberechnung

Belastungsart	Nennspannung	Querschnittsfläche bzw. Widerstandsmoment
Zug/Druck	$\sigma_{zdn} = \frac{F_{zdn}}{A}$	$A = \frac{\pi}{4} \cdot (d_n^2 - d_i^2)$
Biegung	$\sigma_{bn} = \frac{M_{bn}}{W_b}$	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d_n^4 - d_i^4}{d_n}$
Torsion	$\tau_{tn} = \frac{M_{tn}}{W_t}$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_n^4 - d_i^4}{d_n}$

Dabei sind:

F_{zdn}, M_{bn}, M_{tn} Im FE-Modell aufgebrachte äußere (Nenn-) Belastungen

d_n (Außen-) Durchmesser des Nennquerschnittes

d_i Innendurchmesser

Für nicht kreisringförmige Kerbquerschnitte ist ein beliebiger Ersatz-Kreisquerschnitt mit in etwa identischer Steifigkeit zu wählen. Die Abschätzung kann sehr grob erfolgen, da sich die Wahl des Nenndurchmessers bei der Formzahlberechnung (Tabelle A.3) und bei der Bestimmung der vorhandenen Nennspannungsamplitude für den Tragfähigkeitsnachweis (Gleichung A.33) näherungsweise aufheben. Der festgelegte Durchmesser des Nennquerschnittes muss jedoch bei jeder folgenden Sicherheitsberechnung mit den so bestimmten Formzahlen beibehalten werden.

Formzahlberechnung

Die Komponenten der örtlichen Kerbspannung $\sigma_z, \sigma_\varphi, \tau$ können in Primär- und Sekundärspannungen unterteilt werden. Die Primärspannung einer Belastungsart ist diejenige örtliche Spannungskomponente, die der zum Grundlastfall zugehörigen Nennspannungsrichtung zugeordnet werden kann (siehe Tabelle A.2).

Die Formzahl ist getrennt für jede Belastungsart und separat für jede vorhandene *Komponente* der örtlichen Spannungs-Amplitude nach den Gleichungen in Tabelle A.3

Tab. A.2: Unterscheidung der örtlichen Spannung in Primär- und Sekundärkomponenten

Belastungsart	Nennspannung	Örtliche Spannung	
		Primärspannung	Sekundärspannung
Zug/Druck	σ_{zdn}	σ_z	σ_φ, τ
Biegung	σ_{bn}	σ_z	σ_φ, τ
Torsion	τ_{tn}	τ	σ_z, σ_φ

zu berechnen.¹ Entgegen der konventionellen Erwartung sind hierbei Formzahlergebnisse $\alpha < 1$ möglich und stellen keinen Widerspruch dar (insbesondere bei Formzahlen aus Sekundärspannungen).

Tab. A.3: Komponentenweise Formzahlberechnung

Belastungsart	Formzahlen		
Zug/Druck	$\alpha_{zd\sigma_z} = \frac{\sigma_{zaK}}{\sigma_{zdn}}$	$\alpha_{zd\sigma_\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi aK}}{\sigma_{zdn}}$	$\alpha_{zd\tau} = \frac{\tau_{aK}}{\sigma_{zdn}/\sqrt{3}}$
Biegung	$\alpha_{b\sigma_z} = \frac{\sigma_{zaK}}{\sigma_{bn}}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi aK}}{\sigma_{bn}}$	$\alpha_{b\tau} = \frac{\tau_{aK}}{\sigma_{bn}/\sqrt{3}}$
Torsion	$\alpha_{t\tau} = \frac{\tau_{aK}}{\tau_{tn}}$	$\alpha_{t\sigma_z} = \frac{\sigma_{zaK}}{\sqrt{3} \cdot \tau_{tn}}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi aK}}{\sqrt{3} \cdot \tau_{tn}}$

Dabei sind:

$\sigma_{zd, bn}, \tau_{tn}$ Nennspannung im Kerbquerschnitt entsprechend der Belastung im FE-Modell nach Tabelle A.1

$\sigma_{zaK}, \sigma_{\varphi aK}, \tau_{aK}$ Örtliche Kerbspannungs-Amplitude

Berücksichtigung unterschiedlicher Orte der kritischen Beanspruchung

Bei bestimmten, komplizierten Kerbgeometrien bzw. Mehrfachkerben – wie beispielsweise dem Wellenabsatz mit Verzahnung in Abbildung A.3 – fallen die Orte der maximalen Biegespannungs- und Torsionsspannungsamplitude zu keinem Zeitpunkt übereinander. Werden nun diese Einzelmaxima innerhalb der Sicherheitsberechnung überlagert, so erfolgt die Ermittlung einer resultierenden Spannungsamplitude, wie sie in der Realität in ihrer Höhe so nicht auftritt.

¹Bei einfachen Kerbgeometrien werden traditionell die Sekundärspannungen vernachlässigt und lediglich Formzahlen für die Primärspannungen berechnet und verwendet.

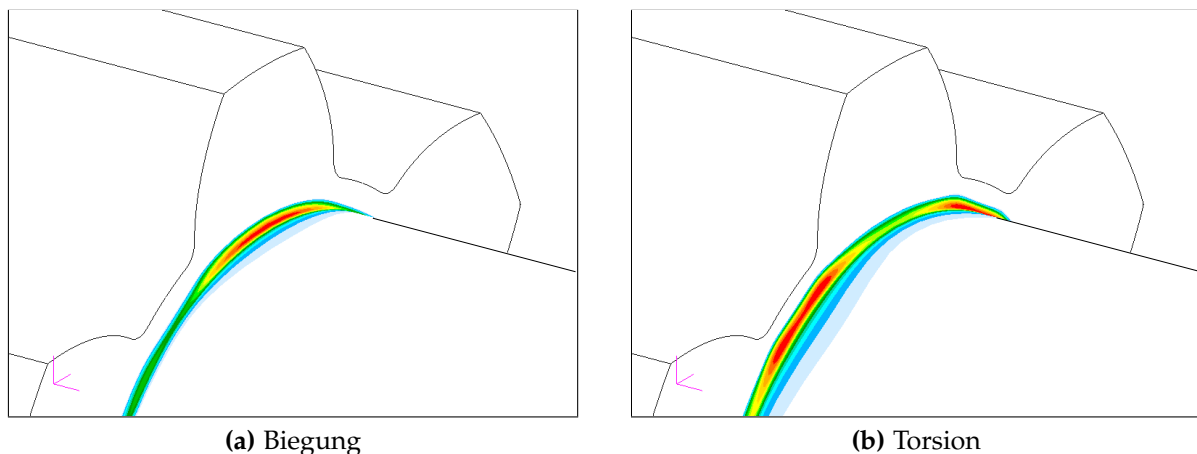


Abb. A.3: Unterschiedliche Orte der kritischen Beanspruchung bei reiner Biegeamplitude (a) und reiner Torsionsamplitude (b) am Beispiel einer Mehrfachkerbe

Sollten in den FE-Analysen voneinander abweichende Nachweisorte bei den wirkenden Einzelbelastungen festgestellt worden sein, sind folgende Arbeitsschritte abzuarbeiten:

1. FE-Spannungsanalyse an der Kerbgeometrie mit *zusammengesetzter* Belastung (Last-*Verhältnis* der Einzelbelastung entspricht tatsächlichem Betriebslastverhältnis (Amplituden), für die der Tragfähigkeitsnachweis durchgeführt werden soll.)
2. Ermittlung des *Ortes* der größten Vergleichsspannungsamplitude σ_{va} auf der Bauteiloberfläche
3. Separate FE-Spannungsanalysen an der Kerbgeometrie mit je einer wirkenden *Einzelbelastung*
4. Bestimmung der jeweils vorhandenen örtlichen Spannungs-Amplitude $\sigma_z, \sigma_\varphi, \tau$ entsprechend Abschnitt A.2.1 für die in Schritt 3 berechneten Modelle am in Schritt 2 ermittelten Nachweisort

Mit den so bestimmten Spannungsponenten am resultierenden Nachweisort erfolgt die Formzahlberechnung für jede wirkende Belastungsart. Die daraus ermittelten Formzahlen besitzen nur für das gewählte *Verhältnis* der Einzelbelastungen Gültigkeit.

Die Berücksichtigung unterschiedlicher Orte der kritischen Beanspruchung kann vom Anwender bei Bedarf unterbleiben, da dies zu einer konservativen Auslegung führt.

A.2.3 Stützwirkung und Kerbwirkungszahl

Die Kerbwirkungszahl β kann nach DIN 743 bei bekannter Formzahl mit Hilfe des bezogenen Spannungsgefälles G' ermittelt werden. Infolge der komponentenweisen Berechnung der Formzahl (Abschnitt A.2.2) wird für jede Belastungsart i (Zug/Druck, Biegung, Torsion) und für jede vorhandene Komponente der örtlichen Spannungsamplitude j eine separate Kerbwirkungszahl nach Gleichung (A.8) ermittelt:

$$\beta_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j}}{n_i = f(G'_i)} \quad \text{mit } i = \text{zd, b, t} \quad j = \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau. \quad (\text{A.8})$$

Dabei sind:

$\alpha_{i,j}$ Formzahl nach Tabelle A.3

n_i Stützzahl, siehe Gleichungen in DIN 743 [13]

G'_i bezogenes Spannungsgefälle

Das einfache Spannungsgefälle G ist der maximale Spannungsgradient (an der Kerboberfläche) der örtlichen Spannungsverteilung $\sigma(s)$

$$G = \left. \frac{d\sigma(s)}{ds} \right|_{s=0},$$

wobei s die Ortskoordinate von der Kerboberfläche ins Bauteilinnere in Richtung des maximalen Spannungsabfalles darstellt (vgl. Abbildung A.4). Mit den diskret bestimmten Knotenspannungen aus der FE-Analyse kann das Spannungsgefälle näherungsweise durch Differenzenbildung der Spannungen vom Randknoten σ_1 zum Nachbarknoten σ_2 im Bauteilinneren bestimmt werden:

$$G = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\Delta s}.$$

Im Gegensatz zur Formzahl erfolgt die Ermittlung des Spannungsgefälles nicht separat für jede wirkende Komponente der örtlichen Spannungsamplitude ($\sigma_z, \sigma_\varphi, \tau$), sondern einheitlich mit der Vergleichsspannungsamplitude σ_{va} .² Bezogen auf die jeweils maximale Vergleichsspannungsamplitude $\sigma_{va,max}$ im Kerbgrund wird das *bezogene* Spannungsgefälle G' (Einheit 1/mm) für jede Belastungsart i berechnet nach

$$G'_i = \frac{1}{\sigma_{(i)va,max}} \cdot \left(\left. \frac{d\sigma_{(i)va}(s)}{ds} \right) \right|_{s=0} \quad \text{mit } i = \text{zd, b, t} \quad (\text{A.9})$$

²Der Genauigkeitsverlust in der resultierenden rechnerischen Sicherheit durch diese Vereinfachung ist für wellentypische Werkstoffe vernachlässigbar klein (siehe Abschnitt 3.2.4).

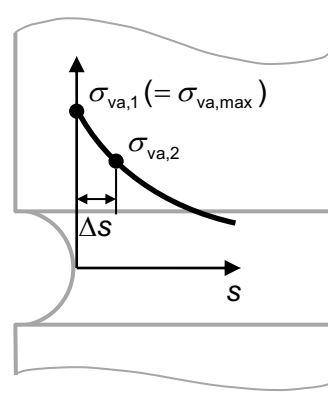


Abb. A.4: Spannungsgefälle

bzw. mit diskreten Knotenspannungen nach

$$G'_i = \frac{1}{\sigma_{(i)va,1}} \cdot \frac{\sigma_{(i)va,1} - \sigma_{(i)va,2}}{\Delta s} \quad \text{mit } i = \text{zd, b, t.} \quad (\text{A.10})$$

Dabei sind:

- σ_{va} Örtliche Vergleichsspannungsamplitude nach Gleichung A.3
- s Ortskoordinate von der Kerboberfläche ins Bauteilinnere in Richtung des maximalen Spannungsabfalles (in den meisten Fällen senkrecht zur Bauteiloberfläche)

A.2.4 Grundlastfallfreie Mittelspannungen (Presssitz)

Durch Krafteinleitungskerben, Anschläge usw. treten Spannungen auf, die ingenieurtechnisch plausibel sind, aber keinem der Grundlastfälle (Zug/Druck, Biegung, Torsion) zugeordnet werden können. So verursacht beispielsweise ein Presssitz eine Belastung in einer nahen Gestaltkerbe, die zu einer höheren Beanspruchung des Bauteils führt. Diese Lasten können optional im Festigkeitsnachweis berücksichtigt werden. Aufgrund des annähernd konstanten Verlaufes über der Lebensdauer, werden die auftretenden Spannungen nachfolgend wie *Mittelspannungen* betrachtet. Da sie unabhängig von der äußeren Last wirken, erhalten sie die Bezeichnung *grundlastfallfreie Mittelspannungen* (Index: pm).

Die grundlastfallfreie Mittelspannung wird am selben Ort wie die Spannungsamplituden zur Formzahlermittlung abgelesen. Die Spannungskomponenten des Tensors der örtlichen Mittelspannung σ_{pm} werden zunächst zu einer örtlichen Vergleichsspannung σ_{pmvK} nach der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) analog Gleichung A.3

zusammengefasst. Anschließend erfolgt zur Berechnung der einzelnen Komponenten der Bauteildauerfestigkeit die Umrechnung zu (fiktiven) Nennmittelspannungen mit Hilfe der zugehörigen Formzahlen aus Tabelle A.3 für jede Belastungsart i :

$$\sigma_{z\text{pm},(i)} = \frac{\sigma_{\text{pmvK}}}{\alpha_{(i)\sigma_z}}, \quad \sigma_{\varphi\text{pm},(i)} = \frac{\sigma_{\text{pmvK}}}{\alpha_{(i)\sigma_\varphi}}, \quad \tau_{\text{pm},(i)} = \frac{\sigma_{\text{pmvK}}}{\sqrt{3} \cdot \alpha_{(i)\tau}} \quad \text{mit } i = \text{zd, b, t.} \quad (\text{A.11})$$

Der Berechnungsweg über die örtliche Vergleichsspannung (anstatt über die einzelnen örtlichen Spannungskomponenten) besitzt praktische Notwendigkeit. Ansonsten würde rechnerisch die Mittelspannung, falls zu einer Komponente keine zugehörige Amplitudenspannung existiert, keinen Einfluss auf die Ermüdungsfestigkeit haben.

A.2.5 Sicherheitsnachweis des Vermeidens von Dauerbrüchen

Aufbauend auf den ermittelten Kerbfaktoren aus der FE-Analyse wird die Bauteilsicherheit bestimmt. Die Vorgehensweise lehnt sich eng an das Berechnungsverfahren der DIN 743 [13] an. Der Algorithmus wird an den notwendigen Stellen auf die komponentenweise Betrachtung (infolge der komponentenweisen Berechnung der Formzahl) erweitert.

Bauteilwechselfestigkeit

Die Berechnung der Wechselfestigkeit des (gekerbten) Bauteils $\sigma_{\text{WK}}, \tau_{\text{WK}}$ erfolgt getrennt für jede Belastungsart mit Hilfe von Tabelle A.4. Es wird zusätzlich analog zur Formzahl nach den vorhandenen Komponenten der örtlichen Spannungsamplitude $\sigma_z, \sigma_\varphi, \tau$ unterschieden.

Tab. A.4: Berechnung der Bauteilwechselfestigkeit

Zug/Druck	Biegung	Torsion
$\sigma_{z\text{zdWK}} = \frac{\sigma_{\text{zdW}}(d_B) \cdot K_1(d_{\text{eff}})}{K_{\text{zd}\sigma_z}}$	$\sigma_{z\text{bWK}} = \frac{\sigma_{\text{bW}}(d_B) \cdot K_1(d_{\text{eff}})}{K_{\text{b}\sigma_z}}$	$\sigma_{z\text{tWK}} = \frac{\sigma_{\text{bW}}(d_B) \cdot K_1(d_{\text{eff}})}{K_{\text{t}\sigma_z}}$
$\sigma_{\varphi\text{zdWK}} = \frac{\sigma_{\text{zdW}}(d_B) \cdot K_1(d_{\text{eff}})}{K_{\text{zd}\sigma_\varphi}}$	$\sigma_{\varphi\text{bWK}} = \frac{\sigma_{\text{bW}}(d_B) \cdot K_1(d_{\text{eff}})}{K_{\text{b}\sigma_\varphi}}$	$\sigma_{\varphi\text{tWK}} = \frac{\sigma_{\text{bW}}(d_B) \cdot K_1(d_{\text{eff}})}{K_{\text{t}\sigma_\varphi}}$
$\tau_{\text{zdWK}} = \frac{\tau_{\text{tW}}(d_B) \cdot K_1(d_{\text{eff}})}{K_{\text{zd}\tau}}$	$\tau_{\text{bWK}} = \frac{\tau_{\text{tW}}(d_B) \cdot K_1(d_{\text{eff}})}{K_{\text{b}\tau}}$	$\tau_{\text{tWK}} = \frac{\tau_{\text{tW}}(d_B) \cdot K_1(d_{\text{eff}})}{K_{\text{t}\tau}}$

Dabei sind:

$K_1(d_{\text{eff}})$ Technologischer Größeneinflussfaktor nach DIN 743-2

$\sigma_{zd,bW}(d_B), \tau_{tW}(d_B)$ Wechselfestigkeit des glatten Probenstabes nach DIN 743-3

Die Gesamteinflussfaktoren K berechnen sich für Normalspannungen nach

$$K_{(i)\sigma_z} = \left(\frac{\beta^{(i)}\sigma_z}{K_2(d)} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} \quad \text{und} \quad K_{(i)\sigma_\varphi} = \left(\frac{\beta^{(i)}\sigma_\varphi}{K_2(d)} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} \quad (\text{A.12})$$

sowie für Schubspannungen nach

$$K_{(i)\tau} = \left(\frac{\beta^{(i)}\tau}{K_2(d)} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V} \quad (\text{A.13})$$

mit $i = zd, b, t$ für die jeweilige Belastungsart.

Weiterhin sind zu bestimmen:

$\beta_{i,j}$ Kerbwirkungszahl nach Abschnitt A.2.3

$K_2(d)$ Geometrischer Größeneinflussfaktor nach DIN 743-2

$K_{F\sigma}$ bzw. $K_{F\tau}$ Einflussfaktor der Oberflächenrauheit für Normalspannungskomponenten σ_z und σ_φ bzw. für Schubspannungskomponenten τ nach DIN 743-2 (Hinweis: $K_{F\sigma}$ und $K_{F\tau}$ sind abhängig von der Koordinatenorientierung und nicht von der Belastungsart)

K_V Einflussfaktor der Oberflächenverfestigung nach DIN 743-2

Mittelspannungsempfindlichkeit

Die Einflussfaktoren der Mittelspannungsempfindlichkeit ψ_K sind für die jeweils wirkenden Belastungsarten $i = zd, b, t$ zu berechnen nach

$$\psi_{(i)\sigma_z K} = \begin{cases} \frac{\sigma_{z(i)WK}}{2 \cdot K_1(d_{\text{eff}}) \cdot \sigma_B(d_B) - \sigma_{z(i)WK}} & \text{für } \sigma_{z(i)WK} \leq \sigma_{(i)W} \\ 0,333 & \text{für } \sigma_{z(i)WK} > \sigma_{(i)W} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$\psi_{(i)\sigma_\varphi K} = \begin{cases} \frac{\sigma_{\varphi(i)WK}}{2 \cdot K_1(d_{\text{eff}}) \cdot \sigma_B(d_B) - \sigma_{\varphi(i)WK}} & \text{für } \sigma_{\varphi(i)WK} \leq \sigma_{(i)W} \\ 0,333 & \text{für } \sigma_{\varphi(i)WK} > \sigma_{(i)W} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$\psi_{(i)\tau K} = \begin{cases} \frac{\tau_{(i)WK}}{2 \cdot K_1(d_{\text{eff}}) \cdot \sigma_B(d_B) - \tau_{(i)WK}} & \text{für } \tau_{(i)WK} \leq \tau_{tW} \\ 0,176 & \text{für } \tau_{(i)WK} > \tau_{tW} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

wobei gilt

$$\text{Substitution: } \sigma_{tW} \rightarrow \sigma_{bW} \quad \text{und} \quad \sigma_W = K_1(d_{\text{eff}}) \cdot \sigma_W(d_B). \quad (\text{A.17})$$

Dabei sind:

$K_1(d_{\text{eff}})$ Technologischer Größeneinflussfaktor nach DIN 743-2

$\sigma_B(d_B)$ Zugfestigkeit für den Probendurchmesser d_B nach DIN 743-3

$\sigma_{z(i)WK}, \sigma_{\varphi(i)WK}, \tau_{(i)WK}$ Bauteilwechselfestigkeit nach Tabelle A.4

Aufgrund der erwähnten Möglichkeit, dass eine Formzahlkomponente $\alpha < 1$ sein kann, können einzelne Komponenten der Wechselfestigkeit des gekerbten Bauteils σ_{WK} rechnerisch größere Werte als die zugehörige Werkstoffwechselfestigkeit σ_W annehmen. Für die nennspannungsbasierte Berechnung der Bauteilsicherheit bei örtlich mehrachsiger Beanspruchung ist dies ein erwartetes und notwendiges Zwischenergebnis. Der in DIN 743 hinterlegte funktionale Zusammenhang mit dem Mittelspannungsempfindlichkeitsfaktor ψ ist allerdings auf seinen bisher bekannten Wertebereich zu beschränken (vgl. Abschnitt 3.5).

Gestaltfestigkeit

Aus der Bauteilwechselfestigkeit wird unter Berücksichtigung der Mittelspannung die Bauteil-Gestaltfestigkeit für die einzelnen Belastungsarten $i = z, d, b, t$ berechnet. Analog zur DIN 743 erfolgt hierbei die Unterscheidung von zwei Beanspruchungsfällen, abhängig davon, in welchem Verhältnis sich die maßgebenden Spannungen bei einer Belastungserhöhung ändern:

- Fall 1 ($\sigma_{mv} \approx$ konstant bzw. $\tau_{mv} \approx$ konstant):

$$\sigma_{z(i)ADK} = \sigma_{z(i)WK} - \psi_{(i)\sigma_z K} \cdot \sigma_{mv} \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_{\varphi(i)ADK} = \sigma_{\varphi(i)WK} - \psi_{(i)\sigma_\varphi K} \cdot \sigma_{mv} \quad (\text{A.19})$$

$$\tau_{(i)ADK} = \tau_{(i)WK} - \psi_{(i)\tau K} \cdot \tau_{mv} \quad (\text{A.20})$$

- Fall 2 ($\sigma_{mv}/\sigma_{zd,ba} \approx$ konstant bzw. $\tau_{mv}/\tau_{ta} \approx$ konstant):

$$\sigma_{z(i)ADK} = \frac{\sigma_{z(i)WK}}{1 + \psi_{(i)\sigma_zK} \cdot \frac{\sigma_{mv}}{\sigma_{(i)a}}} \quad (A.21)$$

$$\sigma_{\varphi(i)ADK} = \frac{\sigma_{\varphi(i)WK}}{1 + \psi_{(i)\sigma_\varphi K} \cdot \frac{\sigma_{mv}}{\sigma_{(i)a}}} \quad (A.22)$$

$$\tau_{(i)ADK} = \frac{\tau_{(i)WK}}{1 + \psi_{(i)\tau K} \cdot \frac{\tau_{mv}}{\tau_{(i)a}}} \quad (A.23)$$

Dabei sind:

$\sigma_{z(i)WK}, \sigma_{\varphi(i)WK}, \tau_{(i)WK}$	Bauteilwechselfestigkeit nach Tabelle A.4
$\psi_{(i)\sigma_zK}, \psi_{(i)\sigma_\varphi K}, \psi_{(i)\tau K}$	Einflussfaktor der Mittelspannungsempfindlichkeit nach Gleichungen A.14 bis A.17
σ_{mv}, τ_{mv}	(Nenn-) Vergleichsmittelspannung entsprechend der wirkenden äußeren Belastung nach DIN 743-1
$\sigma_{zd,ba}, \tau_{ta}$	(Nenn-) Spannungsamplitude entsprechend der wirkenden äußeren Belastung nach DIN 743-1

Liegen neben den von den äußeren Belastungen abhängigen Mittelspannungen $\sigma_{zdm}, \sigma_{bm}, \tau_{tm}$ zusätzlich grundlastfallfreie Mittelspannungen σ_{pm} (siehe Abschnitt A.2.4) vor, sind modifizierte Vergleichsmittelspannungen

$$\sigma_{zmv,(i)} = \sqrt{(\sigma_{zdm} + \sigma_{bm} + \sigma_{zpm,(i)})^2 + 3 \cdot \tau_{tm}^2} \quad (A.24)$$

$$\sigma_{\varphi mv,(i)} = \sqrt{(\sigma_{zdm} + \sigma_{bm} + \sigma_{\varphi pm,(i)})^2 + 3 \cdot \tau_{tm}^2} \quad (A.25)$$

$$\tau_{mv,(i)} = \sqrt{1/3 \cdot (\sigma_{zdm} + \sigma_{bm})^2 + (\tau_{tm} + \tau_{pm,(i)})^2} \quad (A.26)$$

für die Belastungsarten $i = zd, b, t$ in die jeweilige Gestaltfestigkeitsberechnung einzusetzen:

- Fall 1 ($\sigma_{mv} \approx$ konstant bzw. $\tau_{mv} \approx$ konstant):

$$\sigma_{z(i)ADK} = \sigma_{z(i)WK} - \psi_{(i)\sigma_zK} \cdot \sigma_{zmv,(i)} \quad (A.27)$$

$$\sigma_{\varphi(i)ADK} = \sigma_{\varphi(i)WK} - \psi_{(i)\sigma_\varphi K} \cdot \sigma_{\varphi mv,(i)} \quad (A.28)$$

$$\tau_{(i)ADK} = \tau_{(i)WK} - \psi_{(i)\tau K} \cdot \tau_{mv,(i)} \quad (A.29)$$

- Fall 2 ($\sigma_{mv}/\sigma_{zd,ba} \approx$ konstant bzw. $\tau_{mv}/\tau_{ta} \approx$ konstant):

$$\sigma_{z(i)ADK} = \frac{\sigma_{z(i)WK}}{1 + \psi_{(i)\sigma_zK} \cdot \frac{\sigma_{zmv,(i)}}{\sigma_{(i)a}}} \quad (A.30)$$

$$\sigma_{\varphi(i)ADK} = \frac{\sigma_{\varphi(i)WK}}{1 + \psi_{(i)\sigma_{\varphi}K} \cdot \frac{\sigma_{\varphi mv,(i)}}{\sigma_{(i)a}}} \quad (A.31)$$

$$\tau_{(i)ADK} = \frac{\tau_{(i)WK}}{1 + \psi_{(i)\tau K} \cdot \frac{\tau_{mv,(i)}}{\tau_{(i)a}}} \quad (A.32)$$

Sicherheit

Es gelten die in DIN 743-1 dargelegten Aussagen zur Mindestsicherheit.

Für die rechnerische Sicherheit bei zusammengesetzter Belastung gilt unter der Annahme von Phasengleichheit und kraftfreier Kerboberfläche:

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\sum_i \frac{\sigma_{(i)a}}{\sigma_{z(i)ADK}}\right)^2 + \left(\sum_i \frac{\sigma_{(i)a}}{\sigma_{\varphi(i)ADK}}\right)^2 - \left(\sum_i \frac{\sigma_{(i)a}}{\sigma_{z(i)ADK}} \cdot \sum_i \frac{\sigma_{(i)a}}{\sigma_{\varphi(i)ADK}}\right) + \left(\sum_i \frac{\tau_{(i)a}}{\tau_{(i)ADK}}\right)^2}}, \quad \text{mit } i = zd, b, t \quad (A.33)$$

Dabei sind:

- $\sigma_{zd,ba}, \tau_{ta}$ (Nenn-) Spannungsamplitude entsprechend der wirkenden äußeren Belastung nach DIN 743-1
- σ_{ADK}, τ_{ADK} Ertragbare Spannungsamplitude der Bauteil-Dauerfestigkeit für bestimmte Mittelspannung nach Abschnitt A.2.5

Abhängig vom Belastungs-Index i sind zudem entsprechende Substitutionen vorzunehmen. Für Torsion (Index: t) gilt

$$\sigma_{ta} \rightarrow \sigma_{tav} = \sqrt{3} \cdot \tau_{ta} \quad (A.34)$$

und für Zug/Druck (Index: zd) bzw. Biegung (Index: b) gilt

$$\tau_{zda} \rightarrow \tau_{zdav} = \sigma_{zda}/\sqrt{3} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{ba} \rightarrow \tau_{bav} = \sigma_{ba}/\sqrt{3}. \quad (A.35)$$

In Tabelle A.5 ist die allgemeingültige Gleichung A.33 für verschiedene Beispiellastfälle ausformuliert.

Tab. A.5: Gleichungen zu rechnerischen Sicherheit für verschiedene Lastfälle (Beispiele)

Belastung	Rechnerische Sicherheit
Nur Biegung	$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{zbADK}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{\phi bADK}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{zbADK}} \cdot \frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{\phi bADK}}\right) + \left(\frac{\tau_{baV}}{\tau_{bADK}}\right)^2}}$
Nur Torsion	$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{rav}}{\sigma_{zIADK}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{rav}}{\sigma_{\phi IADK}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{rav}}{\sigma_{zIADK}} \cdot \frac{\sigma_{rav}}{\sigma_{\phi IADK}}\right) + \left(\frac{\tau_{ra}}{\tau_{IADK}}\right)^2}}$
Biegung und Torsion	$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{zbADK}} + \frac{\sigma_{rav}}{\sigma_{zIADK}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{\phi bADK}} + \frac{\sigma_{rav}}{\sigma_{\phi IADK}}\right)^2 - \left[\left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{zbADK}} + \frac{\sigma_{rav}}{\sigma_{zIADK}}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_{ba}}{\sigma_{\phi bADK}} + \frac{\sigma_{rav}}{\sigma_{\phi IADK}}\right)\right] + \left(\frac{\tau_{baV}}{\tau_{bADK}} + \frac{\tau_{ra}}{\tau_{IADK}}\right)^2}}$

A.3 Beispiel

A.3.1 Aufgabenstellung

Wellenabsatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz nach Abbildung A.5

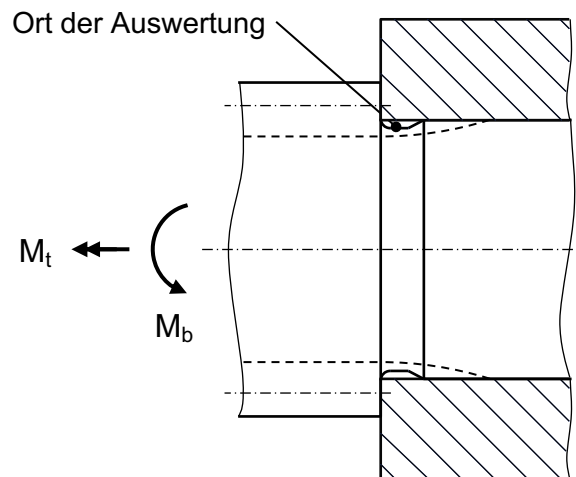


Abb. A.5: Wellenabsatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz

Abmessungen

Fugendurchmesser:	$D_F = 40 \text{ mm}$
Mittleres Übermaß:	$U_m = 38 \mu\text{m}$
Freistich:	DIN 509 – E1x0,2
Zahnmodul:	$m = 2,6 \text{ mm}$
Zähnezahl:	$z = 16$
Fußkreisdurchmesser:	$d_f = 36,763 \text{ mm}$
Rauheit:	$R_Z = 2,5 \mu\text{m}$

Werkstoff

42CrMo4 Vergütungsstahl im vergüteten Zustand ($\sigma_B = 1100 \text{ MPa}$; $\sigma_S = 900 \text{ MPa}$; $\sigma_{bW} = 550 \text{ MPa}$; $\tau_{tW} = 330 \text{ MPa}$; $K_1^{(\sigma_B)} = 0,871$; $K_1^{(\sigma_S)} = 0,832$)

Belastung

Zusammengesetzte dynamische Belastung (Umlaufbiegung + schwellende Torsion)

Biegemoment: $M_{ba} = 324 \text{ Nm}$

Torsionsamplitude: $M_{ta} = 648 \text{ Nm}$

Konstantes, mittleres Torsionsmoment: $M_{tm} = 864 \text{ Nm}$

A.3.2 Auswertung der FE-Analyse

Die Spannungsermittlung erfolgt getrennt für jede Belastungsart. Es sind demnach zwei FE-Simulationen, einmal mit Biegebelastung und einmal mit Torsionsbelastung, durchzuführen (jeweils inklusive Querpressverband). Die Analyse der jeweils maximalen Vergleichsspannungsamplituden beider Modelle weist voneinander abweichende kritische *Orte* bei Biege- und Torsionsbelastung auf. Dieser Umstand kann nach Abschnitt A.2.2 mit einer dritten FE-Simulation an der gleichen Kerbgeometrie bei zusammengesetzter Belastung berücksichtigt werden. Sie dient zur Ermittlung des resultierenden Nachweispunktes. An dieser Position werden in den eingangs durchgeführten FE-Simulationen bei Biegung und Torsion die jeweiligen Ober- und Unterspannungen bzw. Amplituden- und Mittelspannungen abgelesen. In Tabelle A.6 sind die so erhaltenen Komponenten der örtlichen Kerbspannungen im lokalen Koordinatensystem am Nachweispunkt angegeben.

Hinweis: Die Höhe der aufgebrachten Last im FE-Modell muss nicht zwingend mit der Bauteilbelastung übereinstimmen, für die der Tragfähigkeitsnachweis durchgeführt werden soll. Zur Veranschaulichung erfolgt in Tabelle A.6 und Tabelle A.7 die Spannungsermittlung für eine abweichend gewählte Nennbelastung von $M_b = 432 \text{ Nm}$ und $M_t = 864 \text{ Nm}$.

Tab. A.6: Örtliche Spannungen im lokalen Koordinatensystem am Nachweispunkt (Beispiel)

	Biegung (Amplitude)	Torsion (Amplitude)	Presssitz (Mittelsp.)
Belastung	$M_b = 432 \text{ Nm}$	$M_t = 864 \text{ Nm}$	(grundlastfallfrei)
Örtliche Spannungen	$\sigma_{zaK} = 179,9 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{zaK} = 102,5 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{zpmK} = 161,6 \text{ N/mm}^2$
	$\sigma_{\varphi aK} = 17,8 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{\varphi aK} = 17,1 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{\varphi pmK} = 22,7 \text{ N/mm}^2$
	$\tau_{aK} = 4,5 \text{ N/mm}^2$	$\tau_{aK} = 56,1 \text{ N/mm}^2$	$\tau_{pmK} = 10,1 \text{ N/mm}^2$

Tab. A.7: Örtliche Vergleichsspannungen am Nachweispunkt (Beispiel)

	Abstand zur Bauteiloberfläche	Biegung (Maximalspannung)	Torsion (Maximalspannung)
Knoten 1	$s = 0 \text{ mm}$	$\sigma_{\text{voK},1} = 332,2 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{\text{voK},1} = 267,6 \text{ N/mm}^2$
Knoten 2	$s = 0,02 \text{ mm}$	$\sigma_{\text{voK},2} = 315,9 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{\text{voK},2} = 255,0 \text{ N/mm}^2$

Zur Bestimmung des Spannungsgefälles werden außerdem die Spannungen unmittelbar unter der Bauteiloberfläche (senkrecht nach innen) benötigt. Entsprechend Abschnitt A.2.3 reicht hierbei die Erfassung der Vergleichsspannung an den entsprechenden Knoten aus (Tabelle A.7).

A.3.3 Ermüdungsfestigkeitsnachweis

Formzahl

Der Durchmesser des Nennquerschnittes wird auf den Fugendurchmesser $D_F = 40 \text{ mm}$ festgelegt. Daraus folgen die Biege- und Torsionsnennspannung (der im FE-Modell aufgebrachten Last) für die Formzahlermittlung

$$\sigma_{\text{bn}} = 68,8 \text{ N/mm}^2 \quad \text{und} \quad \tau_{\text{tn}} = 68,8 \text{ N/mm}^2 .$$

Die Formzahlen berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{b}\sigma_z} &= \frac{179,9}{68,8} = 2,61 & \alpha_{\text{t}\sigma_z} &= \frac{102,5}{\sqrt{3} \cdot 68,8} = 0,86 \\ \alpha_{\text{b}\sigma_\varphi} &= \frac{17,8}{68,8} = 0,26 & \alpha_{\text{t}\sigma_\varphi} &= \frac{17,1}{\sqrt{3} \cdot 68,8} = 0,14 \\ \alpha_{\text{b}\tau} &= \frac{4,5}{68,8/\sqrt{3}} = 0,11 & \alpha_{\text{t}\tau} &= \frac{56,1}{68,8} = 0,82 \end{aligned}$$

Kerbwirkungszahl

Bezogenes Spannungsgefälle:

$$G'_b = \frac{1}{332,2} \cdot \frac{332,2 - 315,9}{0,02} = 2,45 \text{ 1/mm} \quad G'_t = \frac{1}{267,6} \cdot \frac{267,6 - 255,0}{0,02} = 2,35 \text{ 1/mm}$$

Stützwirkung:

$$n_b = 1 + \sqrt{2,45} \cdot 10^{-(0,33 + \frac{0,83 \cdot 900}{712})} = 1,065 \quad n_t = 1 + \sqrt{2,35} \cdot 10^{-(0,33 + \frac{0,83 \cdot 900}{712})} = 1,064$$

Kerbwirkungszahlen:

$$\begin{aligned} \beta_{b\sigma_z} &= \frac{2,61}{1,065} = 2,45 & \beta_{t\sigma_z} &= \frac{0,86}{1,064} = 0,81 \\ \beta_{b\sigma_\varphi} &= \frac{0,26}{1,065} = 0,24 & \beta_{t\sigma_\varphi} &= \frac{0,14}{1,064} = 0,13 \\ \beta_{b\tau} &= \frac{0,11}{1,065} = 0,10 & \beta_{t\tau} &= \frac{0,82}{1,064} = 0,77 \end{aligned}$$

Bauteilwechselfestigkeit

Geometrischer Einflussfaktor:

$$K_2 = 1 - 0,2 \cdot \frac{\lg(40/7,5)}{\lg 20} = 0,89$$

Einfluss der Oberflächenrauheit:

$$\begin{aligned} K_{F\sigma} &= 1 - 0,22 \cdot \lg 2,5 \cdot \left(\lg \frac{0,87 \cdot 1100}{20} - 1 \right) = 0,94 \\ K_{F\tau} &= 0,575 \cdot K_{F\sigma} + 0,425 = 0,97 \end{aligned}$$

Gesamteinflussfaktor:

$$\begin{aligned} K_{b\sigma_z} &= \frac{2,45}{0,89} + \frac{1}{0,94} - 1 = 2,82 & K_{t\sigma_z} &= \frac{0,81}{0,89} + \frac{1}{0,94} - 1 = 0,97 \\ K_{b\sigma_\varphi} &= \frac{0,24}{0,89} + \frac{1}{0,94} - 1 = 0,33 & K_{t\sigma_\varphi} &= \frac{0,13}{0,89} + \frac{1}{0,94} - 1 = 0,21 \\ K_{b\tau} &= \frac{0,10}{0,89} + \frac{1}{0,97} - 1 = 0,14 & K_{t\tau} &= \frac{0,77}{0,89} + \frac{1}{0,97} - 1 = 0,90 \end{aligned}$$

Bauteilwechselfestigkeit (ohne gerundete Zwischenergebnisse):

$$\begin{aligned} \sigma_{zbWK} &= 169 \text{ N/mm}^2 & \sigma_{ztWK} &= 492 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{\varphi bWK} &= 1421 \text{ N/mm}^2 & \sigma_{\varphi tWK} &= 2226 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{bWK} &= 1850 \text{ N/mm}^2 & \tau_{tWK} &= 320 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Grundlastfallfreie Mittelspannung

Örtliche Vergleichsmittelspannung:

$$\sigma_{\text{pmvK}} = \sqrt{161,6^2 + 22,7^2 - 161,6 \cdot 22,7 + 3 \cdot 10,1^2} = 152,5 \text{ N/mm}^2$$

Nennmittelspannung:

$$\begin{aligned} \sigma_{z \text{ pm,b}} &= \frac{152,5}{2,61} = 58 \text{ N/mm}^2 & \sigma_{z \text{ pm,t}} &= \frac{152,5}{0,86} = 177 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{\varphi \text{ pm,b}} &= \frac{152,5}{0,26} = 587 \text{ N/mm}^2 & \sigma_{\varphi \text{ pm,t}} &= \frac{152,5}{0,14} = 1089 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{\text{pm,b}} &= \frac{152,5}{\sqrt{3} \cdot 0,11} = 800 \text{ N/mm}^2 & \tau_{\text{pm,t}} &= \frac{152,5}{\sqrt{3} \cdot 0,82} = 107 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Berücksichtigung der Mittelspannungsempfindlichkeit

Mittelspannungsempfindlichkeit:

$$\begin{aligned} \psi_{b\sigma_z K} &= 0,096 & \psi_{t\sigma_z K} &= 0,333 \quad (\sigma_{ztWK} \geq \sigma_{bW}) \\ \psi_{b\sigma_{\varphi} K} &= 0,333 \quad (\sigma_{\varphi bWK} \geq \sigma_{bW}) & \psi_{t\sigma_{\varphi} K} &= 0,333 \quad (\sigma_{\varphi tWK} \geq \sigma_{bW}) \\ \psi_{b\tau K} &= 0,176 \quad (\tau_{bWK} \geq \tau_{tW}) & \psi_{t\tau K} &= 0,176 \quad (\tau_{tWK} \geq \tau_{tW}) \end{aligned}$$

Mittelspannung aufgrund des konstanten Anteils des Torsionsmomentes:

$$\tau_{\text{tm}} = 68,8 \text{ N/mm}^2$$

Vergleichsmittelspannung:

$$\begin{aligned} \sigma_{z \text{ mv,b}} &= \sqrt{58^2 + 3 \cdot 69^2} = 133 \text{ N/mm}^2 & \sigma_{z \text{ mv,t}} &= \sqrt{177^2 + 3 \cdot 69^2} = 214 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{\varphi \text{ mv,b}} &= \sqrt{587^2 + 3 \cdot 69^2} = 599 \text{ N/mm}^2 & \sigma_{\varphi \text{ mv,t}} &= \sqrt{1089^2 + 3 \cdot 69^2} = 1096 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{\text{mv,b}} &= 800 + 69 = 869 \text{ N/mm}^2 & \tau_{\text{mv,t}} &= 107 + 69 = 176 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Bauteildauerfestigkeit für bestimmte Mittelspannung (Beanspruchungsfall 1):

$$\begin{aligned} \sigma_{z \text{ bADK}} &= 157 \text{ N/mm}^2 & \sigma_{z \text{ tADK}} &= 421 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{\varphi \text{ bADK}} &= 1221 \text{ N/mm}^2 & \sigma_{\varphi \text{ tADK}} &= 1869 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{\text{bADK}} &= 1701 \text{ N/mm}^2 & \tau_{\text{tADK}} &= 288 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Nachweis

Vorhandene Nennspannungsamplituden entsprechend der Bauteilbelastung:

$$\sigma_{ba} = 51,6 \text{ N/mm}^2 \quad \tau_{ta} = 51,6 \text{ N/mm}^2$$

Zugehörige Vergleichsnennspannungsamplituden:

$$\tau_{bav} = \sigma_{ba} / \sqrt{3} = 29,8 \text{ N/mm}^2 \quad \tau_{ta} = \sqrt{3} \cdot \tau_{ta} = 89,4 \text{ N/mm}^2$$

Sicherheit:

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{51,6}{157} + \frac{89,4}{421}\right)^2 + \left(\frac{51,6}{1221} + \frac{89,4}{1869}\right)^2 - \left[\left(\frac{51,6}{157} + \frac{89,4}{421}\right) \cdot \left(\frac{51,6}{1221} + \frac{89,4}{1869}\right)\right] + \left(\frac{29,8}{1701} + \frac{51,6}{288}\right)^2}}$$

$S_D = 1,85$

B Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf

Nachfolgend sind umfangreiche Tabellen der numerisch ermittelten Formzahlen für den Zahnauslauf und für die Zahnfußausrundung einer Zahnwellenverbindung (inklusive Nabeneinfluss) mit freiem Zahnauslauf bei Biegung oder Torsion aufgeführt. Die Definition der Abmessungen d_w , d_f , t_f , r_w , φ und L geht aus Abbildung B.1 hervor. Das Maß t_{rw} berechnet sich nach

$$t_{rw} = r_w \cdot (1 - \sin \varphi) . \quad (\text{B.1})$$

Die angegebenen Formzahlen wurden an Zahnwellenverbindungen nach DIN 5480 mit wälzgefräster ($h_{fp} = 0,60 \cdot m$) Wellenverzahnung und geräumter ($h_{fp} = 0,55 \cdot m$) Nabenninnenkontour bestimmt. Beide spannenden Fertigungsverfahren besitzen einen Fußrundungsradius am Bezugsprofil von $\rho_{fp} = 0,16 \cdot m$.

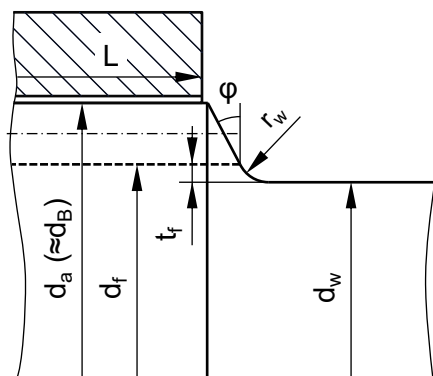


Abb. B.1: Geometrische Größen der Zahnwellenverbindung mit freiem Auslauf

B.1 Torsion

Torsion – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 7$										Nabenlänge $L/d_B = 0,4$			
φ	d_w/d_f	0,850			0,900			0,925			0,950		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	0,19	0,36	2,36	0,34	0,46	2,61	0,40	0,41	2,74	0,50	0,36	2,91
	0,60	0,26	0,43	2,45	0,36	0,43	2,65	0,41	0,35	2,76	0,51	0,31	2,92
	0,75	0,25	0,34	2,47	0,43	0,46	2,69	0,50	0,44	2,81	0,40	0,40	3,00
	0,90	0,20	0,41	2,56	0,27	0,39	2,73	0,31	0,32	2,84	0,39	0,29	2,99
15°	0,40	1,05	0,50	2,02	1,17	0,52	2,06	1,26	0,53	2,06	1,28	0,47	2,11
	0,60	1,11	0,50	2,01	1,21	0,53	2,04	1,29	0,54	2,06	1,33	0,52	2,11
	0,75	1,11	0,51	2,02	1,22	0,53	2,03	1,30	0,55	2,06	1,34	0,52	2,11
	0,90	1,16	0,52	2,01	1,25	0,54	2,04	1,29	0,57	2,08			
30°	0,40	1,35	0,41	1,55	1,36	0,48	1,61	1,42	0,49	1,66	1,47	0,50	1,74
	0,60	1,41	0,44	1,53	1,38	0,48	1,63	1,43	0,50	1,67	1,51	0,53	1,73
	0,75	1,42	0,44	1,54	1,38	0,49	1,64	1,43	0,50	1,68	1,50	0,52	1,75
	0,90				1,41	0,50	1,64	1,45	0,52	1,68	1,53	0,54	1,73

Torsion – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 7$										Nabenlänge $L/d_B = 0,4$			
φ	d_w/d_f	0,850			0,900			0,925			0,950		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	1,84	0,02	–	2,08	0,28	–	2,23	0,51	–	2,59	0,17	–
	0,60	1,64	0,02	–	1,84	0,13	–	1,96	0,42	–	2,28	0,14	–
	0,75	1,55	0,01	–	1,74	0,07	–	1,84	0,28	–	2,12	0,12	–
	0,90	1,47	0,01	–	1,65	0,06	–	1,75	0,26	–	2,00	0,11	–
15°	0,40	1,69	0,01	–	1,90	0,16	–	2,02	0,40	–	2,18	0,85	–
	0,60	1,52	0,00	–	1,70	0,06	–	1,80	0,33	–	1,97	0,63	–
	0,75	1,44	0,00	–	1,61	0,05	–	1,71	0,18	–	1,85	0,57	–
	0,90	1,38	0,00	–	1,54	0,01	–	1,64	0,11	–			–
30°	0,40	1,52	0,01	–	1,70	0,07	–	1,81	0,22	–	1,92	0,61	–
	0,60	1,39	0,01	–	1,54	0,02	–	1,64	0,19	–	1,76	0,46	–
	0,75	1,33	0,01	–	1,47	0,01	–	1,56	0,05	–	1,68	0,33	–
	0,90			–	1,42	0,01	–	1,51	0,05	–	1,61	0,31	–

Torsion – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 7$												Nabenlänge $L/d_B = 0,8$	
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$
0°	0,40	0,28	0,47	2,33	0,36	0,44	2,54	0,42	0,40	2,67	0,51	0,35	2,84
	0,60	0,28	0,42	2,38	0,38	0,41	2,58	0,42	0,35	2,69	0,52	0,31	2,85
	0,75	0,27	0,33	2,40	0,44	0,45	2,62	0,52	0,43	2,74	0,42	0,40	2,93
	0,90	0,22	0,40	2,49	0,29	0,38	2,67	0,32	0,32	2,77	0,40	0,28	2,92
15°	0,40	1,05	0,49	1,97	1,17	0,51	2,02	1,26	0,52	2,02	1,28	0,47	2,08
	0,60	1,11	0,49	1,96	1,21	0,52	2,00	1,29	0,53	2,02	1,33	0,51	2,08
	0,75	1,11	0,50	1,98	1,22	0,52	1,99	1,30	0,54	2,02	1,33	0,51	2,08
	0,90	1,16	0,51	1,96	1,25	0,53	2,00	1,29	0,56	2,04			
30°	0,40	1,35	0,40	1,51	1,36	0,47	1,59	1,41	0,49	1,64	1,46	0,50	1,72
	0,60	1,41	0,43	1,50	1,37	0,48	1,61	1,42	0,50	1,65	1,50	0,52	1,71
	0,75	1,42	0,43	1,51	1,37	0,48	1,63	1,43	0,50	1,67	1,49	0,52	1,73
	0,90				1,40	0,50	1,62	1,45	0,51	1,66	1,52	0,54	1,71

Torsion – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 7$												Nabenlänge $L/d_B = 0,8$	
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$
0°	0,40	1,84	0,03	–	2,07	0,29	–	2,22	0,51	–	2,41	1,08	–
	0,60	1,64	0,02	–	1,84	0,13	–	1,96	0,42	–	2,15	0,79	–
	0,75	1,54	0,02	–	1,73	0,07	–	1,84	0,29	–	2,09	0,11	–
	0,90	1,47	0,01	–	1,65	0,07	–	1,75	0,26	–	1,98	0,10	–
15°	0,40	1,68	0,01	–	1,89	0,16	–	2,02	0,40	–	2,18	0,86	–
	0,60	1,52	0,01	–	1,70	0,06	–	1,80	0,33	–	1,96	0,63	–
	0,75	1,44	0,01	–	1,61	0,05	–	1,71	0,18	–	1,84	0,57	–
	0,90	1,38	0,00	–	1,54	0,02	–	1,64	0,12	–			–
30°	0,40	1,52	0,01	–	1,70	0,07	–	1,80	0,23	–	1,92	0,62	–
	0,60	1,39	0,01	–	1,54	0,01	–	1,64	0,19	–	1,75	0,46	–
	0,75	1,33	0,01	–	1,47	0,01	–	1,56	0,06	–	1,66	0,42	–
	0,90			–	1,42	0,01	–	1,50	0,05	–	1,61	0,31	–

B Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf

Torsion – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 7$											Nabenlänge $L/d_B = 1,2$		
φ	d_w/d_f	0,850			0,900			0,925			0,950		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	0,28	0,47	2,33	0,36	0,44	2,54	0,42	0,40	2,67	0,51	0,35	2,84
	0,60	0,28	0,42	2,38	0,38	0,41	2,58	0,42	0,34	2,69	0,52	0,31	2,85
	0,75	0,27	0,33	2,40	0,44	0,45	2,62	0,52	0,43	2,73	0,42	0,40	2,92
	0,90	0,22	0,40	2,49	0,29	0,38	2,66	0,32	0,32	2,77	0,40	0,28	2,92
15°	0,40	1,05	0,49	1,97	1,17	0,51	2,02	1,26	0,52	2,01	1,27	0,47	2,08
	0,60	1,11	0,49	1,96	1,21	0,52	2,00	1,28	0,53	2,02	1,33	0,51	2,08
	0,75	1,11	0,50	1,98	1,22	0,52	1,98	1,30	0,54	2,02	1,33	0,51	2,08
	0,90	1,16	0,51	1,96	1,25	0,53	2,00	1,29	0,56	2,04			
30°	0,40	1,35	0,40	1,51	1,36	0,47	1,59	1,41	0,49	1,64	1,46	0,50	1,72
	0,60	1,41	0,43	1,50	1,37	0,48	1,61	1,42	0,49	1,65	1,50	0,52	1,71
	0,75	1,42	0,43	1,51	1,37	0,48	1,63	1,43	0,50	1,67	1,49	0,52	1,73
	0,90				1,40	0,50	1,62	1,45	0,51	1,66	1,52	0,54	1,71

Torsion – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 7$											Nabenlänge $L/d_B = 1,2$		
φ	d_w/d_f	0,850			0,900			0,925			0,950		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	1,84	0,03	–	2,07	0,29	–	2,22	0,51	–	2,41	1,08	–
	0,60	1,64	0,02	–	1,84	0,13	–	1,96	0,42	–	2,15	0,79	–
	0,75	1,54	0,02	–	1,73	0,07	–	1,84	0,29	–	2,09	0,11	–
	0,90	1,47	0,01	–	1,65	0,07	–	1,75	0,26	–	1,97	0,10	–
15°	0,40	1,68	0,01	–	1,89	0,16	–	2,02	0,40	–	2,18	0,86	–
	0,60	1,52	0,01	–	1,70	0,06	–	1,80	0,33	–	1,96	0,63	–
	0,75	1,44	0,01	–	1,61	0,05	–	1,71	0,18	–	1,84	0,57	–
	0,90	1,38	0,00	–	1,54	0,02	–	1,64	0,12	–			–
30°	0,40	1,52	0,01	–	1,70	0,07	–	1,80	0,23	–	1,92	0,62	–
	0,60	1,39	0,01	–	1,54	0,01	–	1,64	0,19	–	1,75	0,46	–
	0,75	1,33	0,01	–	1,47	0,01	–	1,56	0,06	–	1,66	0,42	–
	0,90			–	1,42	0,01	–	1,50	0,05	–	1,61	0,31	–

Torsion – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 13$							Nabenlänge $L/d_B = 0,4$						
φ	d_w/d_f	0,850			0,900			0,925			0,950		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	0,14	0,58	2,21	0,13	0,53	2,44	0,16	0,49	2,60	0,24	0,44	2,82
	0,60	0,08	0,47	2,26	0,13	0,47	2,49	0,18	0,44	2,65	0,34	0,55	2,91
	0,75	0,13	0,54	2,36	0,19	0,51	2,58	0,24	0,50	2,73	0,34	0,46	2,93
	0,90	0,12	0,38	2,39	0,29	0,61	2,65	0,33	0,56	2,80	0,44	0,54	2,99
15°	0,40	0,85	0,56	2,07	1,02	0,56	2,17	1,10	0,58	2,23	1,24	0,60	2,26
	0,60	0,92	0,55	2,13	1,06	0,56	2,16	1,13	0,59	2,24	1,22	0,61	2,26
	0,75	0,92	0,57	2,13	1,06	0,58	2,22	1,15	0,60	2,25	1,27	0,62	2,27
	0,90	0,99	0,57	2,16	1,10	0,59	2,22	1,19	0,61	2,24	1,27	0,65	2,35
30°	0,40	1,34	0,50	1,76	1,45	0,50	1,73	1,51	0,50	1,72	1,56	0,50	1,76
	0,60	1,37	0,50	1,75	1,37	0,49	1,85	1,44	0,50	1,84	1,57	0,51	1,75
	0,75	1,32	0,49	1,81	1,40	0,49	1,82	1,49	0,51	1,81	1,55	0,51	1,78
	0,90	1,33	0,50	1,82	1,48	0,51	1,74	1,50	0,51	1,82	1,60	0,52	1,72

Torsion – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 13$							Nabenlänge $L/d_B = 0,4$						
φ	d_w/d_f	0,850			0,900			0,925			0,950		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	1,81	0,06	–	2,11	0,15	–	2,32	0,27	–	2,55	0,76	–
	0,60	1,62	0,04	–	1,85	0,12	–	2,04	0,22	–	2,26	0,53	–
	0,75	1,52	0,04	–	1,74	0,07	–	1,90	0,19	–	2,10	0,48	–
	0,90	1,45	0,03	–	1,65	0,06	–	1,81	0,09	–	1,98	0,44	–
15°	0,40	1,65	0,03	–	1,90	0,09	–	2,08	0,13	–	2,27	0,57	–
	0,60	1,49	0,02	–	1,69	0,07	–	1,85	0,10	–	2,05	0,32	–
	0,75	1,41	0,02	–	1,59	0,04	–	1,74	0,09	–	1,92	0,29	–
	0,90	1,35	0,01	–	1,53	0,03	–	1,65	0,08	–	1,82	0,26	–
30°	0,40	1,48	0,01	–	1,67	0,03	–	1,82	0,07	–	2,00	0,19	–
	0,60	1,36	0,00	–	1,52	0,02	–	1,65	0,03	–	1,81	0,16	–
	0,75	1,30	0,00	–	1,44	0,01	–	1,56	0,03	–	1,72	0,14	–
	0,90	1,25	0,00	–	1,39	0,00	–	1,49	0,02	–	1,65	0,13	–

B Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf

Torsion – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 13$										Nabenlänge $L/d_B = 0,8$			
φ	d_w/d_f	0,850			0,900			0,925			0,950		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	0,16	0,56	2,12	0,15	0,51	2,35	0,18	0,47	2,51	0,25	0,43	2,74
	0,60	0,20	0,59	2,21	0,15	0,45	2,41	0,19	0,42	2,56	0,35	0,53	2,83
	0,75	0,15	0,52	2,27	0,20	0,50	2,49	0,25	0,48	2,64	0,35	0,45	2,85
	0,90	0,13	0,37	2,30	0,31	0,59	2,56	0,35	0,55	2,71	0,45	0,53	2,90
15°	0,40	0,85	0,54	2,00	1,01	0,54	2,11	1,09	0,56	2,16	1,23	0,58	2,20
	0,60	0,91	0,53	2,06	1,05	0,54	2,10	1,12	0,57	2,18	1,27	0,59	2,16
	0,75	0,92	0,55	2,06	1,06	0,56	2,15	1,14	0,58	2,18	1,26	0,61	2,21
	0,90	0,98	0,55	2,09	1,09	0,58	2,16	1,18	0,59	2,18	1,26	0,63	2,29
30°	0,40	1,33	0,48	1,71	1,44	0,49	1,68	1,50	0,49	1,68	1,54	0,49	1,71
	0,60	1,36	0,48	1,70	1,37	0,48	1,79	1,43	0,48	1,78	1,56	0,49	1,70
	0,75	1,31	0,48	1,76	1,39	0,48	1,76	1,48	0,49	1,76	1,54	0,49	1,73
	0,90	1,33	0,48	1,76	1,47	0,49	1,69	1,49	0,49	1,77	1,59	0,50	1,67

Torsion – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 13$										Nabenlänge $L/d_B = 0,8$			
φ	d_w/d_f	0,850			0,900			0,925			0,950		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	1,80	0,07	–	2,09	0,15	–	2,30	0,27	–	2,53	0,76	–
	0,60	1,61	0,05	–	1,84	0,12	–	2,02	0,22	–	2,24	0,54	–
	0,75	1,51	0,04	–	1,73	0,07	–	1,88	0,20	–	2,08	0,48	–
	0,90	1,44	0,04	–	1,65	0,07	–	1,79	0,09	–	1,97	0,44	–
15°	0,40	1,64	0,04	–	1,89	0,10	–	2,07	0,14	–	2,26	0,57	–
	0,60	1,49	0,03	–	1,68	0,08	–	1,84	0,11	–	2,03	0,33	–
	0,75	1,41	0,02	–	1,59	0,04	–	1,73	0,10	–	1,91	0,29	–
	0,90	1,35	0,02	–	1,52	0,04	–	1,65	0,06	–	1,81	0,27	–
30°	0,40	1,48	0,01	–	1,67	0,03	–	1,81	0,08	–	1,99	0,20	–
	0,60	1,36	0,01	–	1,51	0,03	–	1,64	0,04	–	1,81	0,17	–
	0,75	1,30	0,00	–	1,44	0,01	–	1,55	0,03	–	1,71	0,15	–
	0,90	1,25	0,00	–	1,38	0,01	–	1,49	0,03	–	1,64	0,14	–

Torsion – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 13$							Nabenlänge $L/d_B = 1,2$						
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$
0°	0,40	0,16	0,56	2,12	0,15	0,51	2,35	0,18	0,47	2,51	0,25	0,43	2,73
	0,60	0,20	0,59	2,20	0,15	0,45	2,40	0,19	0,42	2,56	0,35	0,53	2,83
	0,75	0,15	0,52	2,27	0,20	0,50	2,49	0,26	0,48	2,64	0,35	0,45	2,84
	0,90	0,13	0,37	2,30	0,31	0,59	2,56	0,35	0,55	2,71	0,45	0,53	2,90
15°	0,40	0,85	0,54	2,00	1,01	0,54	2,11	1,09	0,56	2,16	1,23	0,58	2,19
	0,60	0,91	0,53	2,06	1,05	0,54	2,10	1,12	0,57	2,17	1,27	0,59	2,16
	0,75	0,92	0,55	2,06	1,06	0,56	2,15	1,14	0,58	2,18	1,26	0,60	2,21
	0,90	0,98	0,55	2,09	1,09	0,58	2,16	1,18	0,59	2,18	1,26	0,63	2,29
30°	0,40	1,33	0,48	1,71	1,44	0,49	1,68	1,50	0,49	1,68	1,54	0,49	1,71
	0,60	1,36	0,48	1,70	1,37	0,48	1,79	1,43	0,48	1,78	1,56	0,49	1,70
	0,75	1,31	0,48	1,76	1,39	0,48	1,76	1,48	0,49	1,76	1,54	0,49	1,73
	0,90	1,33	0,48	1,76	1,47	0,49	1,69	1,49	0,49	1,77	1,58	0,50	1,67

Torsion – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 13$							Nabenlänge $L/d_B = 1,2$						
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$
0°	0,40	1,80	0,07	–	2,09	0,15	–	2,30	0,27	–	2,52	0,76	–
	0,60	1,61	0,05	–	1,84	0,12	–	2,02	0,22	–	2,24	0,54	–
	0,75	1,51	0,04	–	1,73	0,08	–	1,88	0,20	–	2,08	0,48	–
	0,90	1,44	0,04	–	1,65	0,07	–	1,79	0,09	–	1,97	0,44	–
15°	0,40	1,64	0,04	–	1,89	0,10	–	2,07	0,14	–	2,26	0,57	–
	0,60	1,49	0,03	–	1,68	0,08	–	1,84	0,11	–	2,03	0,33	–
	0,75	1,41	0,02	–	1,59	0,04	–	1,73	0,10	–	1,91	0,29	–
	0,90	1,35	0,02	–	1,52	0,04	–	1,65	0,06	–	1,81	0,27	–
30°	0,40	1,48	0,01	–	1,67	0,03	–	1,81	0,08	–	1,99	0,20	–
	0,60	1,36	0,01	–	1,51	0,03	–	1,64	0,04	–	1,80	0,17	–
	0,75	1,30	0,00	–	1,44	0,01	–	1,55	0,03	–	1,71	0,15	–
	0,90	1,25	0,00	–	1,38	0,01	–	1,49	0,03	–	1,64	0,14	–

B Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf

Torsion – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 21$											Nabenlänge $L/d_B = 0,4$		
φ	d_w/d_f	0,900			0,925			0,950			0,975		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	0,18	0,65	2,30	0,20	0,64	2,49	0,26	0,63	2,75	0,58	0,77	3,22
	0,60	0,16	0,61	2,39	0,33	0,76	2,59	0,40	0,78	2,85	0,60	0,75	3,28
	0,75	0,21	0,68	2,49	0,26	0,69	2,66	0,36	0,69	2,91	0,51	0,65	3,30
	0,90	0,20	0,55	2,54	0,20	0,53	2,70	0,47	0,79	2,98			
15°	0,40	0,96	0,59	2,18	1,05	0,64	2,27	1,25	0,65	2,36	1,50	0,73	2,49
	0,60	0,99	0,60	2,20	1,11	0,65	2,32	1,28	0,68	2,39	1,54	0,75	2,46
	0,75	1,05	0,64	2,26	1,12	0,68	2,34	1,31	0,70	2,43	1,53	0,77	2,49
	0,90	1,09	0,67	2,30	1,20	0,70	2,35	1,30	0,74	2,43			
30°	0,40	1,39	0,55	1,94	1,51	0,56	1,91	1,58	0,58	2,03	1,68	0,59	2,07
	0,60	1,45	0,56	1,93	1,51	0,58	2,04	1,56	0,59	2,08	1,69	0,60	2,08
	0,75	1,48	0,58	1,97	1,58	0,59	1,93	1,61	0,60	2,08	1,82	0,63	1,96
	0,90	1,44	0,59	2,04	1,61	0,60	1,95	1,61	0,61	2,08			

Torsion – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 21$											Nabenlänge $L/d_B = 0,4$		
φ	d_w/d_f	0,900			0,925			0,950			0,975		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	2,06	0,20	–	2,29	0,27	–	2,61	0,55	–	3,06	1,46	–
	0,60	1,82	0,11	–	2,02	0,21	–	2,31	0,31	–	2,67	1,23	–
	0,75	1,71	0,09	–	1,88	0,19	–	2,15	0,28	–	2,47	1,12	–
	0,90	1,62	0,08	–	1,78	0,11	–	2,03	0,25	–			–
15°	0,40	1,85	0,12	–	2,04	0,17	–	2,32	0,31	–	2,68	1,08	–
	0,60	1,66	0,06	–	1,82	0,13	–	2,06	0,21	–	2,38	0,92	–
	0,75	1,57	0,04	–	1,71	0,10	–	1,94	0,19	–	2,22	0,85	–
	0,90	1,50	0,04	–	1,63	0,09	–	1,85	0,13	–			–
30°	0,40	1,64	0,05	–	1,78	0,07	–	2,00	0,14	–	2,32	0,60	–
	0,60	1,49	0,02	–	1,61	0,05	–	1,81	0,09	–	2,09	0,52	–
	0,75	1,42	0,01	–	1,53	0,05	–	1,71	0,08	–	1,98	0,48	–
	0,90	1,37	0,01	–	1,46	0,02	–	1,64	0,07	–			–

Torsion – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 21$										Nabenlänge $L/d_B = 0,8$			
d_w/d_f		0,900			0,925			0,950			0,975		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$
0°	0,40	0,20	0,62	2,21	0,34	0,72	2,41	0,39	0,74	2,68	0,58	0,75	3,13
	0,60	0,32	0,71	2,31	0,34	0,73	2,50	0,41	0,75	2,76	0,60	0,72	3,18
	0,75	0,23	0,65	2,39	0,28	0,66	2,57	0,37	0,67	2,82	0,52	0,63	3,21
	0,90	0,21	0,53	2,45	0,21	0,52	2,61	0,48	0,77	2,89			
15°	0,40	0,95	0,57	2,11	1,05	0,62	2,20	1,23	0,64	2,29	1,49	0,71	2,42
	0,60	0,98	0,58	2,13	1,10	0,63	2,25	1,26	0,66	2,32	1,52	0,73	2,39
	0,75	1,04	0,62	2,19	1,11	0,66	2,27	1,29	0,68	2,36	1,51	0,74	2,42
	0,90	1,08	0,65	2,22	1,19	0,67	2,28	1,29	0,71	2,36			
30°	0,40	1,37	0,53	1,88	1,49	0,54	1,86	1,56	0,56	1,97	1,66	0,57	2,00
	0,60	1,43	0,54	1,87	1,49	0,56	1,98	1,54	0,56	2,02	1,67	0,58	2,01
	0,75	1,46	0,56	1,91	1,56	0,57	1,88	1,59	0,58	2,02	1,80	0,61	1,91
	0,90	1,42	0,56	1,97	1,59	0,58	1,89	1,59	0,59	2,02			

Torsion – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 21$										Nabenlänge $L/d_B = 0,8$			
d_w/d_f		0,900			0,925			0,950			0,975		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$
0°	0,40	2,04	0,21	–	2,27	0,27	–	2,58	0,55	–	3,02	1,44	–
	0,60	1,80	0,12	–	1,99	0,22	–	2,28	0,32	–	2,63	1,22	–
	0,75	1,70	0,10	–	1,86	0,19	–	2,12	0,29	–	2,44	1,11	–
	0,90	1,61	0,08	–	1,76	0,12	–	2,01	0,26	–			–
15°	0,40	1,84	0,13	–	2,03	0,18	–	2,30	0,32	–	2,65	1,08	–
	0,60	1,65	0,07	–	1,81	0,14	–	2,05	0,22	–	2,35	0,92	–
	0,75	1,56	0,05	–	1,70	0,11	–	1,92	0,20	–	2,20	0,85	–
	0,90	1,49	0,04	–	1,62	0,06	–	1,83	0,18	–			–
30°	0,40	1,63	0,06	–	1,77	0,08	–	1,99	0,15	–	2,30	0,60	–
	0,60	1,48	0,03	–	1,60	0,06	–	1,80	0,10	–	2,08	0,52	–
	0,75	1,41	0,02	–	1,52	0,06	–	1,70	0,09	–	1,96	0,48	–
	0,90	1,36	0,01	–	1,46	0,03	–	1,63	0,08	–			–

B Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf

Torsion – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 21$											Nabenlänge $L/d_B = 1,2$		
φ	d_w/d_f	0,900			0,925			0,950			0,975		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	0,20	0,62	2,21	0,21	0,62	2,40	0,39	0,74	2,68	0,58	0,75	3,12
	0,60	0,32	0,71	2,31	0,34	0,73	2,49	0,41	0,75	2,76	0,60	0,72	3,18
	0,75	0,23	0,65	2,39	0,28	0,66	2,57	0,37	0,67	2,82	0,52	0,63	3,21
	0,90	0,21	0,53	2,45	0,21	0,52	2,60	0,48	0,77	2,89			
15°	0,40	0,95	0,57	2,11	1,05	0,62	2,20	1,23	0,63	2,29	1,49	0,71	2,42
	0,60	0,98	0,58	2,13	1,10	0,63	2,25	1,26	0,66	2,32	1,52	0,73	2,39
	0,75	1,04	0,62	2,19	1,11	0,66	2,27	1,29	0,68	2,35	1,51	0,74	2,41
	0,90	1,08	0,65	2,22	1,18	0,67	2,28	1,29	0,71	2,35			
30°	0,40	1,37	0,53	1,88	1,49	0,54	1,86	1,56	0,56	1,97	1,66	0,57	2,00
	0,60	1,43	0,54	1,87	1,49	0,56	1,98	1,54	0,56	2,02	1,67	0,58	2,01
	0,75	1,46	0,55	1,90	1,56	0,57	1,88	1,59	0,58	2,02	1,80	0,61	1,90
	0,90	1,42	0,56	1,97	1,59	0,58	1,89	1,59	0,59	2,02			

Torsion – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 21$											Nabenlänge $L/d_B = 1,2$		
φ	d_w/d_f	0,900			0,925			0,950			0,975		
		t_{rw}/t_f	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$	$\alpha_{t\sigma_\varphi}$	$\alpha_{t\tau}$	$\alpha_{t\sigma_z}$
0°	0,40	2,04	0,21	–	2,27	0,27	–	2,57	0,56	–	3,02	1,44	–
	0,60	1,80	0,12	–	1,99	0,22	–	2,28	0,32	–	2,63	1,22	–
	0,75	1,70	0,10	–	1,86	0,19	–	2,12	0,29	–	2,44	1,11	–
	0,90	1,61	0,09	–	1,76	0,12	–	2,01	0,26	–			–
15°	0,40	1,84	0,13	–	2,02	0,18	–	2,30	0,32	–	2,65	1,08	–
	0,60	1,65	0,07	–	1,81	0,14	–	2,05	0,22	–	2,35	0,92	–
	0,75	1,56	0,05	–	1,70	0,11	–	1,92	0,20	–	2,20	0,85	–
	0,90	1,49	0,05	–	1,62	0,06	–	1,83	0,18	–			–
30°	0,40	1,63	0,06	–	1,77	0,08	–	1,99	0,15	–	2,30	0,60	–
	0,60	1,48	0,03	–	1,60	0,06	–	1,80	0,10	–	2,08	0,52	–
	0,75	1,41	0,02	–	1,52	0,06	–	1,70	0,09	–	1,96	0,48	–
	0,90	1,36	0,01	–	1,46	0,03	–	1,63	0,08	–			–

B.2 Biegung

Biegung – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 7$												Nabenlänge $L/d_B = 0,4$	
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	0,86	4,55	2,30	0,77	4,65	2,13	0,79	4,45	2,46	0,76	4,46	2,58
	0,60	0,77	4,64	2,15	0,85	4,58	2,31	0,71	4,52	2,35	0,71	4,52	2,48
	0,75	0,82	4,62	2,24	0,70	4,50	2,28	0,76	4,48	2,48	0,77	4,50	2,60
	0,90	0,81	4,38	2,49	0,74	4,48	2,36	0,75	4,48	2,48	0,70	4,56	2,40
15°	0,40	2,68	1,55	1,22	0,46	3,18	2,01	0,51	3,08	2,07	0,57	3,25	1,74
	0,60	0,45	3,25	1,91	2,81	1,51	1,41	0,52	3,16	2,00	0,58	3,22	1,78
	0,75	0,45	3,36	1,69	2,72	1,53	1,44	0,51	3,26	1,68	0,59	3,25	1,70
	0,90	0,45	3,17	1,95	0,48	3,15	2,00	2,74	1,45	1,44			
30°	0,40	0,46	2,67	1,78	0,69	2,58	1,81	0,54	2,79	1,31	0,56	2,73	1,49
	0,60	2,69	1,37	0,99	0,52	2,76	1,32	2,76	1,27	0,99	0,57	2,81	1,40
	0,75	0,48	2,72	1,67	0,52	2,76	1,53	0,54	2,68	1,54	0,71	2,39	1,76
	0,90				0,52	2,71	1,65	0,55	2,79	1,38	0,58	2,73	1,26

Biegung – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 7$												Nabenlänge $L/d_B = 0,4$	
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	2,83	–	–	3,81	–	–	4,65	–	–	5,37	–	–
	0,60	2,35	–	–	2,60	–	–	3,38	–	–	4,65	–	–
	0,75	1,65	–	–	2,48	–	–	3,19	–	–	4,36	–	–
	0,90	1,75	–	–	2,46	–	–	3,07	–	–	4,12	–	–
15°	0,40	2,36	–	–	3,05	–	–	3,62	–	–	4,57	–	–
	0,60	2,05	–	–	2,57	–	–	3,05	–	–	3,85	–	–
	0,75	1,90	–	–	2,34	–	–	2,77	–	–	3,50	–	–
	0,90	1,79	–	–	2,16	–	–	2,76	–	–		–	–
30°	0,40	2,10	–	–	2,46	–	–	2,75	–	–	3,33	–	–
	0,60	1,84	–	–	2,15	–	–	2,39	–	–	2,86	–	–
	0,75	1,72	–	–	2,00	–	–	2,22	–	–	2,63	–	–
	0,90		–	–	1,89	–	–	2,10	–	–	2,46	–	–

B Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf

Biegung – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 7$												Nabenlänge $L/d_B = 0,8$	
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	0,30	1,69	0,81	0,30	1,61	1,07	0,29	1,66	1,10	0,33	1,65	1,22
	0,60	0,31	1,66	0,91	0,29	1,63	1,08	0,30	1,63	1,15	0,38	1,57	1,31
	0,75	0,31	1,64	0,97	0,30	1,62	1,10	0,30	1,65	1,14	0,38	1,58	1,31
	0,90	0,29	1,61	1,02	0,29	1,64	1,07	0,32	1,58	1,22	0,41	1,57	1,30
15°	0,40	0,36	1,15	0,89	0,42	1,24	0,93	0,49	1,23	0,90	0,57	1,19	0,81
	0,60	0,36	1,19	0,88	0,46	1,19	0,86	0,50	1,24	0,91	0,56	1,21	0,86
	0,75	0,36	1,22	0,85	0,47	1,21	0,84	0,51	1,24	0,91	0,57	1,22	0,85
	0,90	0,41	1,15	0,88	0,47	1,24	0,90	0,52	1,25	0,91			
30°	0,40	0,43	1,09	0,69	0,49	1,10	0,65	0,52	1,07	0,64	0,56	1,09	0,59
	0,60	0,45	1,10	0,67	0,49	1,08	0,66	0,53	1,10	0,63	0,57	1,09	0,59
	0,75	0,46	1,10	0,67	0,50	1,09	0,64	0,53	1,07	0,62	0,58	1,08	0,59
	0,90				0,51	1,10	0,65	0,54	1,09	0,61	0,55	1,08	0,61

Biegung – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 7$												Nabenlänge $L/d_B = 0,8$	
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	2,63	–	–	3,29	–	–	3,86	–	–	4,78	–	–
	0,60	2,24	–	–	2,77	–	–	3,23	–	–	4,01	–	–
	0,75	2,05	–	–	2,53	–	–	2,93	–	–	3,63	–	–
	0,90	1,91	–	–	2,35	–	–	2,72	–	–	3,36	–	–
15°	0,40	2,34	–	–	2,83	–	–	3,27	–	–	3,99	–	–
	0,60	2,03	–	–	2,40	–	–	2,77	–	–	3,38	–	–
	0,75	1,88	–	–	2,22	–	–	2,53	–	–	3,09	–	–
	0,90	1,77	–	–	2,08	–	–	2,35	–	–		–	–
30°	0,40	2,06	–	–	2,42	–	–	2,73	–	–	3,21	–	–
	0,60	1,81	–	–	2,11	–	–	2,35	–	–	2,76	–	–
	0,75	1,68	–	–	1,96	–	–	2,18	–	–	2,54	–	–
	0,90		–	–	1,85	–	–	2,05	–	–	2,38	–	–

Biegung – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 7$												Nabenlänge $L/d_B = 1,2$	
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	0,26	0,79	0,88	0,36	0,79	1,01	0,40	0,85	1,06	0,45	0,88	1,17
	0,60	0,32	0,80	0,88	0,37	0,81	1,02	0,43	0,85	1,05	0,49	0,86	1,15
	0,75	0,33	0,80	0,87	0,38	0,83	1,03	0,44	0,87	1,05	0,49	0,88	1,15
	0,90	0,32	0,79	0,88	0,38	0,85	1,03	0,45	0,87	1,05	0,51	0,87	1,14
15°	0,40	0,37	0,80	0,78	0,47	0,75	0,77	0,52	0,75	0,86	0,59	0,75	0,81
	0,60	0,37	0,80	0,79	0,48	0,74	0,78	0,53	0,76	0,86	0,60	0,77	0,85
	0,75	0,41	0,80	0,77	0,49	0,75	0,78	0,54	0,76	0,86	0,60	0,76	0,81
	0,90	0,43	0,79	0,76	0,49	0,76	0,78	0,54	0,77	0,86			
30°	0,40	0,48	0,79	0,64	0,54	0,73	0,63	0,58	0,69	0,61	0,61	0,69	0,57
	0,60	0,49	0,78	0,64	0,54	0,74	0,60	0,58	0,71	0,60	0,62	0,68	0,57
	0,75	0,50	0,78	0,63	0,55	0,73	0,61	0,58	0,70	0,59	0,63	0,68	0,58
	0,90				0,55	0,74	0,60	0,59	0,69	0,60	0,62	0,69	0,62

Biegung – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 7$												Nabenlänge $L/d_B = 1,2$	
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	2,59	–	–	3,17	–	–	3,67	–	–	4,51	–	–
	0,60	2,22	–	–	2,69	–	–	3,10	–	–	3,79	–	–
	0,75	2,04	–	–	2,47	–	–	2,83	–	–	3,44	–	–
	0,90	1,91	–	–	2,29	–	–	2,63	–	–	3,18	–	–
15°	0,40	2,34	–	–	2,78	–	–	3,17	–	–	3,85	–	–
	0,60	2,03	–	–	2,39	–	–	2,69	–	–	3,26	–	–
	0,75	1,88	–	–	2,21	–	–	2,48	–	–	2,98	–	–
	0,90	1,76	–	–	2,07	–	–	2,33	–	–		–	–
30°	0,40	2,05	–	–	2,41	–	–	2,71	–	–	3,20	–	–
	0,60	1,80	–	–	2,10	–	–	2,34	–	–	2,75	–	–
	0,75	1,68	–	–	1,95	–	–	2,17	–	–	2,53	–	–
	0,90		–	–	1,84	–	–	2,04	–	–	2,37	–	–

B Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf

Biegung – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 13$										Nabenlänge $L/d_B = 0,4$			
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	1,20	7,02	2,30	1,35	7,19	2,42	1,22	7,35	2,24	1,37	7,50	2,29
	0,60	1,28	7,12	2,38	1,19	7,31	2,23	1,46	7,37	2,42	1,25	7,57	2,11
	0,75	1,42	7,19	2,47	1,28	7,38	2,24	1,19	7,48	2,06	1,44	7,58	2,23
	0,90	1,00	7,34	1,81	1,45	7,38	2,26	1,30	7,52	2,03	1,53	7,55	2,22
15°	0,40	1,06	5,45	1,64	1,04	5,55	1,60	1,04	5,49	1,75	1,05	5,47	1,77
	0,60	1,02	5,60	1,35	1,04	5,61	1,51	1,04	5,56	1,67	1,05	5,49	1,73
	0,75	1,05	5,54	1,57	1,04	5,51	1,70	1,04	5,55	1,69	1,04	5,67	1,43
	0,90	1,03	5,62	1,39	1,04	5,53	1,66	1,04	5,62	1,53	1,12	5,88	1,44
30°	0,40	0,83	4,75	1,27	0,82	4,79	1,14	0,82	4,83	1,00	0,84	4,82	1,12
	0,60	0,83	4,79	1,38	0,82	4,88	0,98	0,82	4,81	0,91	0,84	4,84	1,08
	0,75	0,82	4,81	0,99	0,82	4,88	0,91	0,83	4,72	1,24	0,85	4,83	1,12
	0,90	0,82	4,84	1,01	0,82	4,77	1,17	0,84	4,79	1,18	0,86	4,89	0,96

Biegung – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 13$										Nabenlänge $L/d_B = 0,4$			
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	3,06	–	–	4,27	–	–	5,27	–	–	6,29	–	–
	0,60	2,53	–	–	3,10	–	–	3,94	–	–	5,40	–	–
	0,75	1,69	–	–	2,45	–	–	3,08	–	–	5,03	–	–
	0,90	1,96	–	–	2,66	–	–	3,21	–	–	4,10	–	–
15°	0,40	2,48	–	–	3,30	–	–	4,01	–	–	5,14	–	–
	0,60	2,08	–	–	2,78	–	–	3,38	–	–	4,34	–	–
	0,75	1,88	–	–	2,52	–	–	3,08	–	–	3,95	–	–
	0,90	1,46	–	–	1,92	–	–	2,38	–	–	2,48	–	–
30°	0,40	2,07	–	–	2,48	–	–	2,95	–	–	3,69	–	–
	0,60	1,83	–	–	2,12	–	–	2,52	–	–	3,15	–	–
	0,75	1,71	–	–	1,94	–	–	2,30	–	–	2,89	–	–
	0,90	1,62	–	–	1,81	–	–	2,15	–	–	2,69	–	–

Biegung – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 13$							Nabenlänge $L/d_B = 0,8$						
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	0,38	2,34	0,63	0,44	2,40	0,77	0,49	2,42	0,91	0,51	2,46	1,12
	0,60	0,41	2,37	0,70	0,50	2,39	0,89	0,47	2,46	0,96	0,50	2,50	1,10
	0,75	0,46	2,39	0,77	0,42	2,45	0,83	0,50	2,46	1,00	0,53	2,47	1,17
	0,90	0,50	2,39	0,81	0,47	2,45	0,89	0,52	2,46	1,04	0,50	2,52	1,08
15°	0,40	0,36	1,84	0,77	0,36	1,85	0,87	0,42	1,83	0,90	0,50	1,91	0,87
	0,60	0,34	1,82	0,82	0,37	1,88	0,85	0,44	1,85	0,89	0,52	1,91	0,86
	0,75	0,35	1,86	0,78	0,37	1,91	0,83	0,46	1,85	0,88	0,53	1,90	0,86
	0,90	0,35	1,87	0,74	0,41	1,83	0,87	0,46	1,87	0,86	0,56	1,93	0,84
30°	0,40	0,36	1,69	0,69	0,45	1,67	0,73	0,49	1,66	0,65	0,56	1,71	0,65
	0,60	0,37	1,74	0,67	0,46	1,70	0,71	0,50	1,68	0,67	0,56	1,70	0,64
	0,75	0,38	1,69	0,66	0,47	1,68	0,68	0,51	1,70	0,65	0,57	1,69	0,65
	0,90	0,41	1,72	0,71	0,48	1,67	0,71	0,52	1,71	0,65	0,57	1,69	0,67

Biegung – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 13$							Nabenlänge $L/d_B = 0,8$						
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	2,67	–	–	3,33	–	–	3,91	–	–	4,84	–	–
	0,60	2,26	–	–	2,78	–	–	3,26	–	–	4,05	–	–
	0,75	2,07	–	–	2,54	–	–	2,96	–	–	3,67	–	–
	0,90	1,92	–	–	2,35	–	–	2,72	–	–	3,38	–	–
15°	0,40	2,32	–	–	2,84	–	–	3,30	–	–	4,03	–	–
	0,60	2,00	–	–	2,40	–	–	2,78	–	–	3,40	–	–
	0,75	1,84	–	–	2,21	–	–	2,54	–	–	3,10	–	–
	0,90	1,72	–	–	2,06	–	–	2,35	–	–	2,76	–	–
30°	0,40	1,97	–	–	2,34	–	–	2,67	–	–	3,20	–	–
	0,60	1,73	–	–	2,01	–	–	2,29	–	–	2,74	–	–
	0,75	1,62	–	–	1,87	–	–	2,10	–	–	2,52	–	–
	0,90	1,53	–	–	1,76	–	–	1,97	–	–	2,36	–	–

B Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf

Biegung – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 13$										Nabenlänge $L/d_B = 1,2$			
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	0,25	1,49	0,46	0,31	1,31	0,79	0,30	1,31	0,94	0,33	1,41	1,02
	0,60	0,26	1,50	0,52	0,31	1,33	0,81	0,31	1,33	0,95	0,38	1,38	1,01
	0,75	0,29	1,51	0,59	0,32	1,36	0,89	0,31	1,33	0,96	0,38	1,40	1,01
	0,90	0,31	1,34	0,76	0,30	1,30	0,91	0,33	1,41	0,95	0,42	1,39	1,00
15°	0,40	0,23	1,14	0,70	0,29	1,16	0,77	0,39	1,15	0,80	0,46	1,20	0,82
	0,60	0,22	1,18	0,69	0,30	1,18	0,77	0,40	1,16	0,80	0,48	1,21	0,81
	0,75	0,22	1,21	0,68	0,35	1,15	0,78	0,42	1,16	0,79	0,50	1,20	0,80
	0,90	0,27	1,17	0,70	0,37	1,15	0,78	0,42	1,18	0,79	0,52	1,22	0,78
30°	0,40	0,34	1,11	0,61	0,44	1,08	0,64	0,49	1,06	0,64	0,56	1,08	0,63
	0,60	0,34	1,13	0,62	0,44	1,09	0,65	0,50	1,08	0,63	0,56	1,08	0,63
	0,75	0,36	1,11	0,60	0,45	1,08	0,64	0,50	1,09	0,63	0,57	1,07	0,63
	0,90	0,39	1,11	0,65	0,47	1,08	0,64	0,51	1,10	0,63	0,57	1,07	0,61

Biegung – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 13$										Nabenlänge $L/d_B = 1,2$			
d_w/d_f		0,850			0,900			0,925			0,950		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	2,59	–	–	3,14	–	–	3,62	–	–	4,43	–	–
	0,60	2,21	–	–	2,67	–	–	3,05	–	–	3,72	–	–
	0,75	2,02	–	–	2,44	–	–	2,79	–	–	3,37	–	–
	0,90	1,88	–	–	2,27	–	–	2,59	–	–	3,12	–	–
15°	0,40	2,28	–	–	2,73	–	–	3,13	–	–	3,78	–	–
	0,60	1,97	–	–	2,34	–	–	2,65	–	–	3,20	–	–
	0,75	1,82	–	–	2,15	–	–	2,43	–	–	2,92	–	–
	0,90	1,71	–	–	2,01	–	–	2,27	–	–	2,62	–	–
30°	0,40	1,96	–	–	2,29	–	–	2,58	–	–	3,07	–	–
	0,60	1,72	–	–	1,99	–	–	2,22	–	–	2,63	–	–
	0,75	1,61	–	–	1,85	–	–	2,05	–	–	2,43	–	–
	0,90	1,52	–	–	1,74	–	–	1,93	–	–	2,27	–	–

Biegung – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 21$												Nabenlänge $L/d_B = 0,4$	
d_w/d_f		0,900			0,925			0,950			0,975		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	1,80	8,94	2,40	1,65	9,19	2,28	2,04	9,50	2,43	2,26	9,95	2,44
	0,60	1,36	9,20	1,97	2,06	9,35	2,46	1,94	9,68	2,33	2,18	10,08	2,28
	0,75	1,55	9,43	2,03	1,47	9,54	1,92	2,19	9,81	2,36	1,86	10,12	2,20
	0,90	1,90	9,66	2,04	1,84	9,79	1,93	2,43	9,86	2,30			
15°	0,40	1,57	7,45	1,18	1,66	7,49	1,43	1,72	7,58	1,55	1,78	7,72	1,38
	0,60	1,69	7,35	1,52	1,69	7,62	1,35	1,77	7,64	1,50	1,84	7,59	1,54
	0,75	1,68	7,56	1,20	1,76	7,65	1,41	1,82	7,63	1,53	1,87	7,69	1,46
	0,90	1,77	7,63	1,20	1,79	7,72	1,12	1,87	7,76	1,37			
30°	0,40	1,35	6,49	1,40	1,35	6,29	1,69	1,37	6,62	0,80	1,44	6,75	0,82
	0,60	1,38	6,66	1,24	1,38	6,77	0,79	1,43	6,83	0,92	1,47	6,79	0,85
	0,75	1,42	6,64	1,22	1,43	6,60	1,04	1,46	6,80	0,81	1,51	6,80	0,95
	0,90	1,44	6,75	0,92	1,47	6,57	1,03	1,50	6,83	0,80			

Biegung – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 21$												Nabenlänge $L/d_B = 0,4$	
d_w/d_f		0,900			0,925			0,950			0,975		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	4,75	–	–	5,94	–	–	7,73	–	–	11,35	–	–
	0,60	4,03	–	–	4,73	–	–	6,28	–	–	8,73	–	–
	0,75	3,12	–	–	3,92	–	–	5,28	–	–	8,05	–	–
	0,90	3,01	–	–	4,13	–	–	4,45	–	–		–	–
15°	0,40	3,51	–	–	4,36	–	–	5,67	–	–	8,22	–	–
	0,60	2,98	–	–	3,69	–	–	4,79	–	–	6,92	–	–
	0,75	2,77	–	–	3,39	–	–	4,38	–	–	5,97	–	–
	0,90	2,19	–	–	2,61	–	–	3,29	–	–		–	–
30°	0,40	2,52	–	–	3,02	–	–	3,85	–	–	5,55	–	–
	0,60	2,14	–	–	2,59	–	–	3,32	–	–	4,75	–	–
	0,75	1,97	–	–	2,39	–	–	3,06	–	–	4,38	–	–
	0,90	1,87	–	–	2,27	–	–	2,87	–	–		–	–

B Formzahlen für Zahnwellenverbindungen mit freiem Auslauf

Biegung – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 21$												Nabenlänge $L/d_B = 0,8$	
d_w/d_f		0,900			0,925			0,950			0,975		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	0,55	2,78	0,72	0,66	2,85	0,85	0,63	2,96	0,90	0,69	3,11	1,13
	0,60	0,65	2,83	0,81	0,63	2,91	0,84	0,73	2,98	1,02	0,78	3,11	1,21
	0,75	0,70	2,86	0,82	0,69	2,96	0,89	0,67	3,05	0,93	0,76	3,15	1,16
	0,90	0,58	2,97	0,70	0,78	2,97	0,93	0,74	3,07	0,96			
15°	0,40	0,52	2,37	0,72	0,52	2,44	0,73	0,53	2,48	0,83	0,59	2,50	0,90
	0,60	0,53	2,42	0,72	0,52	2,47	0,72	0,55	2,49	0,84	0,63	2,50	0,88
	0,75	0,52	2,46	0,66	0,54	2,49	0,77	0,56	2,49	0,86	0,63	2,52	0,87
	0,90	0,55	2,48	0,68	0,57	2,46	0,81	0,58	2,53	0,82			
30°	0,40	0,42	2,16	0,67	0,47	2,15	0,70	0,55	2,11	0,71	0,65	2,19	0,67
	0,60	0,43	2,21	0,66	0,49	2,12	0,72	0,52	2,26	0,66	0,65	2,23	0,66
	0,75	0,44	2,19	0,63	0,49	2,17	0,70	0,53	2,23	0,67	0,66	2,26	0,66
	0,90	0,45	2,18	0,69	0,48	2,20	0,63	0,55	2,27	0,66			

Biegung – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 21$												Nabenlänge $L/d_B = 0,8$	
d_w/d_f		0,900			0,925			0,950			0,975		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	3,28	–	–	3,85	–	–	4,76	–	–	6,67	–	–
	0,60	2,73	–	–	3,20	–	–	3,96	–	–	5,55	–	–
	0,75	2,49	–	–	2,89	–	–	3,57	–	–	5,01	–	–
	0,90	2,30	–	–	2,65	–	–	3,29	–	–		–	–
15°	0,40	2,79	–	–	3,21	–	–	3,91	–	–	5,39	–	–
	0,60	2,35	–	–	2,70	–	–	3,29	–	–	4,55	–	–
	0,75	2,16	–	–	2,46	–	–	3,00	–	–	4,13	–	–
	0,90	2,01	–	–	2,27	–	–	2,77	–	–		–	–
30°	0,40	2,29	–	–	2,58	–	–	3,06	–	–	4,11	–	–
	0,60	1,98	–	–	2,21	–	–	2,63	–	–	3,51	–	–
	0,75	1,84	–	–	2,03	–	–	2,41	–	–	3,23	–	–
	0,90	1,73	–	–	1,90	–	–	2,25	–	–		–	–

Biegung – Zahnfuß (Nennquerschnitt d_h)													
Zähnezahl $z = 21$												Nabenlänge $L/d_B = 1,2$	
d_w/d_f		0,900			0,925			0,950			0,975		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	0,35	1,77	0,50	0,42	1,80	0,61	0,46	1,85	0,79	0,48	1,94	1,08
	0,60	0,41	1,79	0,57	0,47	1,81	0,71	0,46	1,89	0,81	0,48	1,97	1,06
	0,75	0,44	1,82	0,61	0,44	1,87	0,67	0,48	1,90	0,85	0,51	1,95	1,09
	0,90	0,49	1,83	0,66	0,49	1,88	0,72	0,51	1,90	0,92			
15°	0,40	0,31	1,51	0,60	0,31	1,49	0,70	0,38	1,50	0,76	0,55	1,53	0,78
	0,60	0,32	1,54	0,61	0,32	1,53	0,70	0,39	1,51	0,76	0,55	1,60	0,82
	0,75	0,30	1,43	0,68	0,32	1,52	0,72	0,37	1,58	0,75	0,56	1,61	0,82
	0,90	0,33	1,51	0,67	0,34	1,56	0,70	0,42	1,54	0,75			
30°	0,40	0,32	1,38	0,59	0,41	1,35	0,60	0,50	1,33	0,60	0,60	1,41	0,64
	0,60	0,33	1,41	0,58	0,42	1,34	0,61	0,46	1,44	0,61	0,60	1,37	0,60
	0,75	0,34	1,41	0,59	0,43	1,38	0,61	0,49	1,38	0,61	0,61	1,45	0,62
	0,90	0,38	1,38	0,60	0,41	1,41	0,59	0,49	1,45	0,63			

Biegung – Zahnauslauf (Nennquerschnitt d_w)													
Zähnezahl $z = 21$												Nabenlänge $L/d_B = 1,2$	
d_w/d_f		0,900			0,925			0,950			0,975		
φ	t_{rw}/t_f	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$	$\alpha_{b\sigma_z}$	$\alpha_{b\sigma_\varphi}$	$\alpha_{b\tau}$
0°	0,40	3,07	–	–	3,51	–	–	4,28	–	–	5,90	–	–
	0,60	2,60	–	–	2,95	–	–	3,56	–	–	4,91	–	–
	0,75	2,38	–	–	2,69	–	–	3,22	–	–	4,44	–	–
	0,90	2,21	–	–	2,50	–	–	2,98	–	–		–	–
15°	0,40	2,66	–	–	3,01	–	–	3,61	–	–	4,89	–	–
	0,60	2,28	–	–	2,55	–	–	3,05	–	–	4,13	–	–
	0,75	2,10	–	–	2,34	–	–	2,78	–	–	3,76	–	–
	0,90	1,96	–	–	2,19	–	–	2,57	–	–		–	–
30°	0,40	2,23	–	–	2,49	–	–	2,91	–	–	3,84	–	–
	0,60	1,95	–	–	2,14	–	–	2,50	–	–	3,29	–	–
	0,75	1,81	–	–	1,99	–	–	2,30	–	–	3,03	–	–
	0,90	1,71	–	–	1,87	–	–	2,15	–	–		–	–

C Kerbspannungen Beispielgeometrie

Die Tabellen C.2 und C.3 fassen die ermittelten Kerbspannungsergebnisse für das in Abschnitt 3.3 beschriebene Modell eines Kerbbeispiels zusammen. Auf diesen Daten beruhen die Einflussanalysen in Abschnitt 3.4.

Die Spannungsangabe erfolgt für den Ort, an dem die Amplitude des örtlichen Spannungstensorverlaufes σ_a – bewertet mit der Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese σ_{va} – ihr Maximum einnimmt. Für die untersuchten Lastfälle Torsion, Biegung und kombinierte Belastung ergeben sich dadurch unterschiedliche Ableseorte (siehe Abbildung C.1).

Neben den äußeren Belastungen von $M_t = 864 \text{ Nm}$ bzw. $M_b = 432 \text{ Nm}$ wirkt in der Verbindung ein Fugendruck infolge des Übermaßes zwischen Welle und Nabe. Tabelle C.1 führt die wesentlichen geometrischen Abmessungen auf.

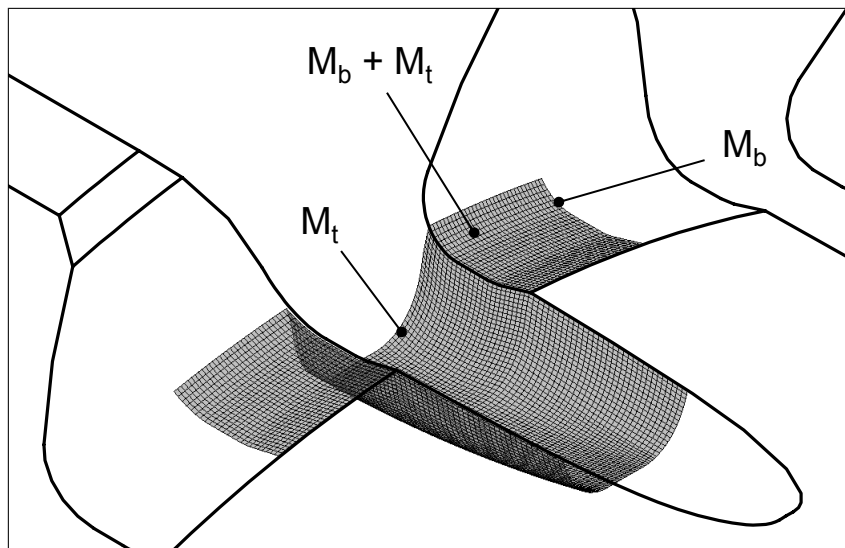


Abb. C.1: Orte der größten Amplitude der Vergleichsspannung (GEH) im Kerbgrund des Kerbbeispiels »Wellenabsatz mit Verzahnung, Freistich und Presssitz« bei unterschiedlichen Lastfällen

Tab. C.1: Geometrische Abmessungen

	Fugendurchmesser	40 mm
	Mittleres Übermaß	38 μm
	Freistich	DIN 509 – E1x0,2
	Zahnmodul	2,6 mm
	Zähnezahl	16
	Fußkreisdurchmesser	36,763 mm

Tab. C.2: Örtliche Kerbspannungen im (jeweils) lokalen Koordinatensystem an verschiedenen Nachweispunkten

Spannungen [N/mm ²]	Auswertungsort: $\sigma_{va,max}$ bei ...								
	Torsion			Biegung			Kombiniert		
	σ_{zK}	$\sigma_{\varphi K}$	τ_K	σ_{zK}	$\sigma_{\varphi K}$	τ_K	σ_{zK}	$\sigma_{\varphi K}$	τ_K
Torsion (Amplitude)	18,8	26,9	143,6	-	-	-	102,5	17,1	56,1
Biegung (Amplitude)	-	-	-	193,9	35,8	-0,6	179,9	17,8	4,5
Presssitz (Mittelsp.)	-2,5	-52,2	25,1	180,7	37,9	-2,0	161,6	22,7	10,1

Tab. C.3: Spannungsabfall der Vergleichsspannung an verschiedenen Nachweispunkten (Knotenabstand $\Delta s = 0.02$ mm)

Spannungen [N/mm ²]	Auswertungsort: $\sigma_{va,max}$ bei ...					
	Torsion		Biegung		Kombiniert	
	$\sigma_{vK,1}$	$\sigma_{vK,2}$	$\sigma_{vK,1}$	$\sigma_{vK,2}$	$\sigma_{vK,1}$	$\sigma_{vK,2}$
Torsion (Maximalspannung)	294,4	286,7	-	-	267,6	255,0
Biegung (Maximalspannung)	-	-	347,8	330,3	332,2	315,9

D Berechnung der Zahnprofilkurve

Die Zahnprofilkurve setzt sich aus der evolventischen Zahnflankenkurve und der vom Herstellungsverfahren abhängigen Zahnfußübergangskurve zusammen (siehe Abbildung 4.1 auf Seite 76). Der Berühr- bzw. Schnittpunkt¹ der beiden Kurven wird durch den ebenfalls werkzeugabhängigen Formkreisdurchmesser markiert. Begrenzt ist die Zahnprofilkurve durch den Kopf- und Fußkreis der Verzahnung.

D.1 Bestimmung der Evolventenflanke

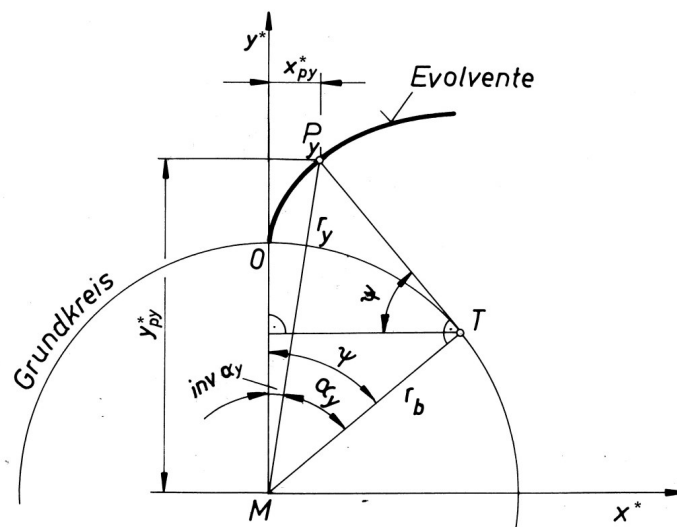


Abb. D.1: Evolventenfunktion [48]

Linke [48] gibt eine Gleichung zur Koordinatenberechnung der Evolventenkurve in Abhängigkeit des Winkels Ψ (vgl. Abbildung D.1) an:

$$\begin{aligned} x &= r_b \cdot (\sin \Psi - \Psi \cos \Psi) \\ y &= r_b \cdot (\cos \Psi - \Psi \sin \Psi) \end{aligned} \tag{D.1}$$

¹nur im Falle von Unterschnitt

Der Definitionsbereich der Zahnevolvente erstreckt sich vom Fußformkreisdurchmesser d_{Ff} (Abschnitt D.3) zum Kopfkreisdurchmesser d_a der Verzahnung. Die Grenzen der Laufvariable Ψ können durch Ermitteln und Gleichsetzen des zugehörigen Durchmessers

$$d(\Psi) = \sqrt{x(\Psi)^2 + y(\Psi)^2} \quad (\text{D.2})$$

zu

$$\Psi_a = \sqrt{\frac{d_{\text{Ff}}^2}{d_b^2} - 1} \quad \text{und} \quad \Psi_e = \sqrt{\frac{d_a^2}{d_b^2} - 1} \quad (\Psi = \Psi_a \dots \Psi_e) \quad (\text{D.3})$$

berechnet werden, wobei $d_b = 2 \cdot r_b$ der Grundkreisdurchmesser sei.

D.2 Bestimmung der Zahnfußübergangskurve

Bei Herstellung der Verzahnung nach dem Formverfahren (z. B. Räumen, Kaltwalzen) entspricht der Werkzeugzahn genau der Zahnücke. Dementsprechend bildet die Zahnfußrundung ρ_{F} genau die Werkzeugkopfrundung ρ_{a0} ab ($\rho_{\text{F}} = \rho_{a0}$). Bei Fertigung nach dem Wälzverfahren (z. B. Wälzfräsen, Wälzstoßen mit Schneidrad) ergeben sich andere Zusammenhänge. Das Zahnprofil wird durch Abwälzen des Werkzeuges erstellt. Dadurch entspricht die Zahnückenform der herzustellenden Verzahnung nicht der Werkzeugzahnform. Vor allem besitzt die Zahnfußübergangskurve eine andere Form als die Kopfrundung des Wälzwerkzeuges. Im Allgemeinen ergibt sich ein größerer, nicht konstanter Krümmungsradius der Zahnfußkurve: $\rho_{\text{F}} \geq \rho_{a0}$ [48].

D.2.1 Fußkurve bei Herstellung mit Wälzfräser

Eine Herleitung der folgenden Berechnungsgleichung für die Koordinaten der Zahnfußkurve bei Herstellung mit Wälzfräser kann [48] entnommen werden. Mit Hilfe der Bestimmungsgrößen aus Tabelle D.1 und Abbildung D.2 können die Koordinaten in Abhängigkeit des Winkels Ψ geschrieben werden:

$$\begin{aligned} X &= r_{w1} \cdot \sin \left(\gamma_1 + \frac{\Delta h}{r_{w1} \tan \Psi} \right) - \left(\frac{\Delta h}{\sin \Psi} + \rho_{a0} \right) \cdot \cos \left(\Psi - \gamma_1 - \frac{\Delta h}{r_{w1} \tan \Psi} \right) \\ Y &= r_{w1} \cdot \cos \left(\underbrace{\gamma_1 + \frac{\Delta h}{r_{w1} \tan \Psi}}_{\varphi_1} \right) - \left(\frac{\Delta h}{\sin \Psi} + \rho_{a0} \right) \cdot \sin \left(\underbrace{\Psi - \gamma_1 - \frac{\Delta h}{r_{w1} \tan \Psi}}_{\Psi - \varphi_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Für Verzahnungen *ohne* Unterschnitt leitet sich der Definitionsbereich von Ψ zu $\Psi = \alpha_0 \dots \pi/2$ ab.

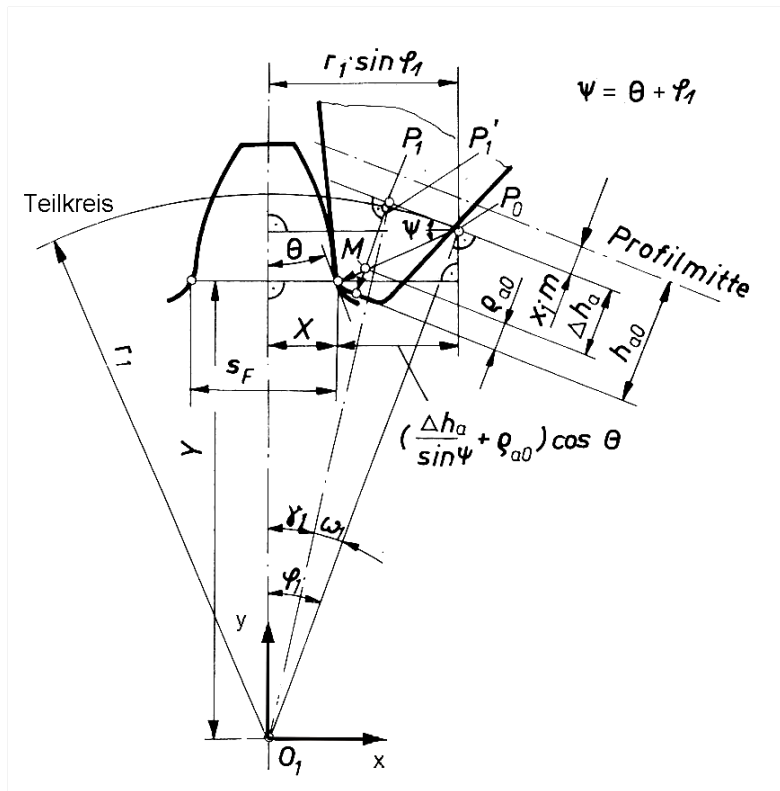


Abb. D.2: Geometrische Größen zur Ableitung der Zahnfußübergangskurve bei Herstellung mit Zahnstangenwerkzeug [48]

Tab. D.1: Bestimmungsgrößen der Zahnfußkurve bei Herstellung mit Wälzfräser

Bestimmungsgröße	Berechnungsformel nach [48]
Wälzkreisradius des Werkrades mit Werkzeug	$r_{w1} = \frac{mz_1}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0}$
Höhendifferenz am Werkzeug	$\Delta h = h_{a0} - x_1 m - \rho_{a0} + z_1 \frac{m}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} - 1 \right)$
Wälzwinkel bei Mittelstellung des Werkzeuges	$\gamma_1 = \left(\frac{s_{w1}}{2} + \Delta h \tan \alpha_0 + \frac{\rho_{a0}}{\cos \alpha_0} \right) \frac{1}{r_{w1}}$

D.2.2 Fußkurve bei Herstellung mit Schneidrad (Wälzstoßen)

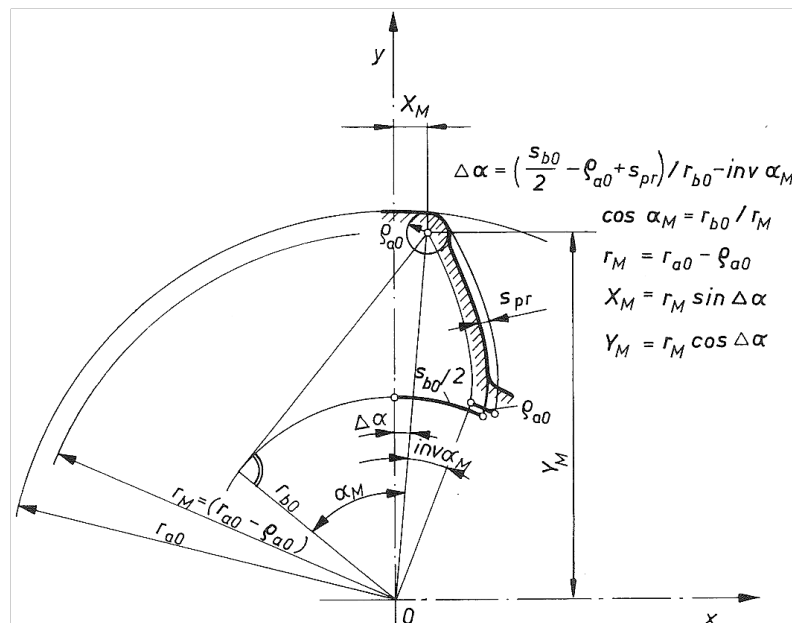


Abb. D.3: Geometrische Größen am Schneidrad [48]

Die Ableitung erfolgt nach Linke [48] analog zur Fußkurve bei Herstellung mit Wälzfräser:

$$\begin{aligned} X &= r_{w1} \cdot \sin \varphi_1 - \left(\frac{\Delta h}{\sin \Psi} + \rho_{a0} \right) \cdot \cos(\Psi - \varphi_1) \\ Y &= r_{w1} \cdot \cos \varphi_1 - \left(\frac{\Delta h}{\sin \Psi} + \rho_{a0} \right) \cdot \sin(\Psi - \varphi_1) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Hierbei ist allerdings der Wälzkreisdurchmesser r_{w1} des Werkrades zusätzlich von der Zähnezah und Profilverschiebung des Schneidrades abhängig². Der Wälzwinkel φ_1 lässt sich mit Hilfe der geometrischen Größen r_M und $\Delta\alpha$ am Schneidrad entsprechend Abbildung D.3 durch

$$\varphi_1(\Psi) = \frac{\pi}{z_1} + \frac{z_0}{z_1} \left[\arccos \left(\frac{r_{w0}}{r_M} \cdot \cos \Psi \right) - \Psi - \Delta\alpha \right] \quad \text{mit} \quad r_{w0} = r_{w1} \frac{z_0}{z_1} \quad (\text{D.6})$$

bestimmen (abweichend von Linke [48]).

Die Strecke $\overline{MT} = \frac{\Delta h}{\sin \Psi}$ (enthalten in (D.5)) wird zur besseren Programmierbarkeit, ebenfalls abweichend von Linke [48], berechnet nach:

$$\overline{MT} = \sqrt{r_M^2 - (r_{w0} \cdot \cos \Psi)^2} - r_{w0} \cdot \sin \Psi. \quad (\text{D.7})$$

²Iteration zur Bestimmung von r_{w1} notwendig, siehe [48, S. 714]

D.3 Berechnung des Fußformkreisdurchmessers

Herstellung mit Wälzfräser

Fußformkreisdurchmesser bei Herstellung mit Wälzfräser nach [48]:

$$d_{\text{Ff(W)}} = \sqrt{\left[d \cdot \sin \alpha_0 - \frac{2(h_{a0} - x \cdot m - \rho_{a0}(1 - \sin \alpha_0))}{\sin \alpha_0} \right]^2 + d_b^2}. \quad (\text{D.8})$$

Herstellung mit Schneidrad

Fußformkreisdurchmesser bei Herstellung mit Schneidrad nach [48]:

$$d_{\text{Ff(S)}} = \sqrt{\left(2a_0 \cdot \sin \alpha_{w0} - \sqrt{d_{\text{Fa0}}^2 - d_{b0}^2} \right)^2 + d_{b1}^2}, \quad (\text{D.9})$$

wobei d_{Fa0} der Durchmesser des *wirksamen* Schneidradkopfkreises (Einfluss von Kopf-abrundungen) sei.

Herstellung mit Räum- oder Walzwerkzeug

Die Beschreibung der Zahnfußübergangskurve reduziert sich hierbei auf die parametrische Darstellung einer Kreisgleichung. Der Fußformkreisdurchmesser bei Herstellung mit Räumwerkzeug wird analog zum Vorgehen von Linke bei Wälzfräser und Schneidrad abgeleitet zu

$$d_{\text{Ff(R)1,2}} = \frac{z_{1,2}}{|z_{1,2}|} \sqrt{d_{b1,2}^2 + \left(\frac{z_{1,2}}{|z_{1,2}|} \sqrt{(d_{f1,2} + 2 \cdot \rho_{a0})^2 - d_{b1,2}^2} - 2 \cdot \rho_{a0} \right)^2}. \quad (\text{D.10})$$

Literaturverzeichnis

- [1] Norm ANSI B92.2M (1989-03). *Metric Module Involute Splines*
- [2] Norm ANSI/AGMA 6001 (2008-12). *Design and Selection of Components for Enclosed Gear Drives*
- [3] Norm ANSI/AGMA 6101 (2008-12). *Design and Selection of Components for Enclosed Gear Drives (Metric Edition)*
- [4] BARROT, Adrien ; PAREDES, Manuel ; SARTOR, Marc: Extended equations of load distribution in the axial direction in a spline coupling. In: *Engineering Failure Analysis* 16 (2009), Nr. 1, S. 200–211
- [5] BATHE, Klaus-Jürgen: *Finite-Elemente-Methoden*. 2., vollst. neu bearb. u. erw. Aufl. Berlin : Springer, 2002. – ISBN 3–540–66806–3
- [6] BILIR, Ferhat B.: *Vergleich von Festigkeitsnachweisen zur Wellenberechnung und dem Stand der Forschung*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, 2016
- [7] BÖHM, J. ; HECKEL, K.: Die Vorhersage der Dauerschwingfestigkeit unter Berücksichtigung des statistischen Größeneinflusses. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 13 (1982), Nr. 4, S. 120–128
- [8] BURGTORF, Uwe: *Montage- und Betriebseigenschaften von Zahnwellen-Verbindungen mit Preßsitz*. 1. Aufl. Clausthal-Zellerfeld : Papierflieger, 1998. – ISBN 3–89720–212–3
- [9] DANKERT, Jürgen ; DANKERT, Helga: *Technische Mechanik: Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik*. 7., erg. Aufl. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013. – ISBN 978–3–8348–2235–2
- [10] DARYUSI, Ali: *Beitrag zur Ermittlung der Kerbwirkung an Zahnwellen mit freiem und gebundenem Auslauf*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diss., 2009
- [11] DARYUSI, Ali ; JUNG, Sebastian: Der Ersatzdurchmesser d_{h1} nach DIN 5466 unter der Lupe. In: *VDI-Berichte* 2238 (2014), S. 261–265

- [12] DIETZ, Peter: *Die Berechnung von Zahn- und Keilwellenverbindungen: Lastaufteilung, Lasteinleitung und Zentrierverhalten von Wellen-Naben-Verbindungen nach dem Prinzip der Zahn- oder Keilwellenverbindungen als Hauptkriterien der Übertragungsfähigkeit*. Büttelborn : Selbstverlag des Verfassers, 1978
- [13] Norm DIN 743 (2012-12). *Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen*
- [14] Norm DIN 5466 (2000-10). *Tragfähigkeitsberechnung von Zahn- und Keilwellen-Verbindungen*
- [15] Norm DIN 5480 (2006-03). *Passverzahnungen mit Evolventenflanken und Bezugsdurchmesser*
- [16] Norm DIN 7190 (2001-02). *Pressverbände - Berechnungsgrundlagen und Gestaltungsregeln*
- [17] Norm DIN 32711-1 (2009-03). *Welle-Nabe-Verbindung – Polygonprofil P3G – Teil 1: Allgemeines und Geometrie*
- [18] Norm DIN ISO 6413 (1990-03). *Technische Zeichnungen; Darstellung von Keilwellen und Kerbverzahnungen*
- [19] DING, J. ; McCOLL, I. R. ; LEEN, Sean B.: The application of fretting wear modeling to a spline coupling. In: *Wear* 262 (2007), Nr. 9-10, S. 1205–1216
- [20] DOLAN, Thomas J.: The Combined Effect of Corrosion and Stress Concentration at Holes and Fillets in Steel Specimens subjected to reversed Torsional Stresses. In: *University of Illinois Bulletin* 36 (1937), Nr. 69
- [21] ECCARIUS, Michael: *Untersuchungen zur Berechnung und optimierten Gestaltung von Wellen und Achsen mit konstruktiven Kerben*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diss., 2000
- [22] Richtlinie FKM (2012). *Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile: aus Stahl, Eisenguss- und Aluminiumwerkstoffen*. 6., überarb. Ausg. Frankfurt/Main : VDMA Verlag
- [23] GOUGH, Herbert J.: Engineering steels under combined cyclic and static stresses. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 160 (1949), Nr. 1, S. 417–440
- [24] GOUGH, Herbert J. ; POLLARD, H. V.: The strength of metals under combined alternating stresses. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 131 (1935), Nr. 1, S. 3–103
- [25] GRAMS, Sebastian: *Beanspruchung und Tragfähigkeit von Plankerbverzahnungen mit zentraler und dezentraler Verschraubung*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diss., 2016

- [26] GRUTTMANN, Friedrich ; WAGNER, W. ; SAUER, R.: Zur Berechnung von Wölbfunktion und Torsionskennwerten beliebiger Stabquerschnitte mit der Methode der finiten Elemente. In: *Bauingenieur* 73 (1998), Nr. 3, S. 138–143
- [27] HAIBACH, Erwin: *Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. 3., korr. und erg. Aufl. Berlin : Springer, 2006 (VDI-Buch). – ISBN 978–3–540–29363–7
- [28] HÄRTEL, Hans: *Evaluation höherwertiger Festigkeitshypothesen für phasenverschobene Schwingbeanspruchungen*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, 2017
- [29] HEIM, Rüdiger: *FEM mit NASTRAN: Einstieg und Umsetzung mit Lernprogramm UNA*. München : Hanser, 2005. – ISBN 3–446–22958–2
- [30] HEROLD, Wilfried: *Die Wechselfestigkeit metallischer Werkstoffe: Ihre Bestimmung und Anwendung*. Wien : Springer, 1934
- [31] HILBICH, Nadine L.: *Numerische Berechnung der Wölbfunktion von Zahnwellenquerschnitten zur Bestimmung des Torsionswiderstandsmomentes*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, 2017
- [32] HONG, J. ; TALBOT, D. ; KAHRAMAN, A.: Effects of Tooth Indexing Errors on Load Distribution and Tooth Load Sharing of Splines Under Combined Loading Conditions. In: *Journal of Mechanical Design* 137 (2015), Nr. 3, S. 032601
- [33] HUA, Qingsong: *Überlegungen zum Lebensdauerverhalten von Zahnwellenverbindungen nach den Theorien des Reib- und Ermüdungsverschleißes*. 1. Aufl. Clausthal-Zellerfeld : Papierflieger, 2006. – ISBN 3–89720–863–6
- [34] INST. FÜR LEICHTBAU U. ÖKONOMISCHE VERWENDUNG VON WERKSTOFFEN (Hrsg.): *Festigkeitsberechnung: Ermüdungsfestigkeit, Bruchmechanik*. 1. Aufl. Dresden : Inst. für Leichtbau u. ökonomische Verwendung von Werkstoffen, 1986 (Leichtbau-Handbuch 4/2)
- [35] Norm ISO 4156 (2005-10). *Straight cylindrical involute splines – Metric module, side fit*
- [36] ISSLER, Lothar ; RUOSS, Hans ; HÄFELE, Peter: *Festigkeitslehre - Grundlagen: [mit CD-ROM]*. 2. Aufl., Nachdr. in veränd. Ausstattung, korr. Nachdr. Berlin : Springer, 2006. – ISBN 3–540–40705–7
- [37] JUDT, Horst O.: *Spannungsoptische Untersuchung und Optimierung von Entlastungskernen*. Clausthal-Zellerfeld, Technische Universität Clausthal, Diss., 1973

- [38] KLEIN, Bernd: *FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. 10., verb. Aufl. 2015. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2015. – ISBN 978–3–658–06054–1
- [39] KLOOS, K.-H.: Einfluß des Oberflächenzustandes und der Probengröße auf die Schwingfestigkeitseigenschaften. In: *VDI-Berichte* 268 (1976), S. 63–76
- [40] KOHL, Günter: *Ein Ansatz zur Berechnung der Zahnfußspannungen an Zahnwellenverbindungen*. Clausthal-Zellerfeld, Technische Universität Clausthal, Diss., 1986
- [41] KOLLMANN, Franz G.: *Welle-Nabe-Verbindungen: Gestaltung, Auslegung, Auswahl*. Berlin : Springer, 1984 (Konstruktionsbücher 32). – ISBN 3–540–12215–X
- [42] KUGUEL, R.: A relation between theoretical stress concentration factor and fatigue notch factor deduced from the concept of highly stressed volume. In: *ASTM Proceeding* 61 (1961), S. 732–748
- [43] LEIDICH, Erhard ; BRŮŽEK, Bohumil ; HOFMANN, Stefan: *Gestaltfestigkeit von Pressverbindungen II: Erstellung einer praxisnahen Auslegungsvorschrift für die Gestaltung von Pressverbindungen: FKM-Vorhaben Nr. 294*. Frankfurt/Main, 2013 (FKM-Heft 320)
- [44] LEIDICH, Erhard ; BRŮŽEK, Bohumil ; WINKLER, M.: *Gestaltfestigkeit von Pressverbindungen: Erstellung einer praxisnahen Auslegungsvorschrift für die Gestaltung von Pressverbindungen: FKM-Vorhaben Nr. 276*. Frankfurt/Main, 2009 (FKM-Heft 305)
- [45] LEIDICH, Erhard ; HOFMANN, Stefan ; BRŮŽEK, Bohumil: On the shrink-fit induced multiaxial stress state in adjacent notched shaft geometries. In: *Proceedings of the 10th International Conference on Multiaxial Fatigue & Fracture*. Kyoto, 2013
- [46] LEIDICH, Erhard ; HOFMANN, Stefan ; WIELAGE, Bernhard ; PODLESÁK, Harry: *Gehärtete Passfederverbindungen: Dauergestaltfestigkeitsuntersuchungen an einsatzgehärteten Passfederverbindungen: FVA-Forschungsvorhaben Nr. 402 III*. Frankfurt/Main, 2015 (FVA-Heft 1146)
- [47] LEIDICH, Erhard ; SUCHY, Lukas: *Kombinierte Belastungen bei WNV: Untersuchungen zur Gestaltfestigkeit von Welle-Nabe-Verbindungen unter kombinierter dynamischer Belastung (Biegung und Torsion): FVA-Forschungsvorhaben Nr. 579 III*. Projekt laufend
- [48] LINKE, Heinz (Hrsg.): *Stirnradverzahnung: Berechnung Werkstoffe Fertigung*. 1. Aufl. München : Hanser, 1996. – ISBN 3–446–18785–5
- [49] LINKE, Heinz ; RÖHMHILD, Iris ; MELZER, Dietmar ; TREMPER, Uwe: Tragfähigkeit von Wellen und Achsen: Grundlagen der DIN 743 und weiterführende Betrachtungen. In: *Antriebstechnik* (2006), Nr. 9, S. 48–55

- [50] LIU, Jiping ; ZENNER, Harald: Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung – Teil 1. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 24 (1993), Nr. 7, S. 240–249
- [51] LIU, Jiping ; ZENNER, Harald: Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung – Teil 2. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 24 (1993), Nr. 8, S. 296–303
- [52] LIU, Jiping ; ZENNER, Harald: Berechnung der Dauerschwingfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung – Teil 3. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 24 (1993), Nr. 9, S. 339–347
- [53] LOHRENGEL, Armin ; WILD, Jochen ; SCHLECHT, Berthold ; WENDLER, Jörg: *Tragfähigkeit von Zahnwellenverbindungen: Tragfähigkeit von Profilverbindungen (Zahnwellenverbindungen) unter typischen Einsatzbedingungen: FVA-Forschungsvorhaben Nr. 467 II*. Frankfurt/Main, 2017 (FVA-Heft 1224)
- [54] MELZER, Dietmar: *Maximal ertragbare Spannungsspitzen bei einsetzgehärteten Wellen und Achsen*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diss., 2004
- [55] MOSZYŃSKI, W.: *Wytrzymałość zmęczeniowa części maszynowych*. Warschau : Państwowe Wydawnictwa Techniczne, 1953
- [56] MÜLLER, Günter ; REHFELD, Ingolf ; KATHEDER, Willi: *FEM für Praktiker: Die Methode der finiten Elemente mit dem FE-Programm ANSYS Rev. 5.0. 2.*, verb. Aufl. Renningen-Malmsheim : Expert-Verlag, 1995. – ISBN 3–8169–1123–4
- [57] NAKAZAWA, Hajime: On the Torsion of the Spline Shafts: 1st Report, On the Spline Shafts for Light and Medium Loads. In: *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers* 25 (1959), Nr. 155, S. 643–650
- [58] NEUBER, Heinz: Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen. In: *Konstruktion* 20 (1968), Nr. 7, S. 245–251
- [59] NEUBER, Heinz: *Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration; genaue Berechnung der Festigkeit*. 4. Aufl. Berlin : Springer, 2001 (Klassiker der Technik). – ISBN 3–540–67657–0
- [60] PAUL, Frank W. ; FAUCETT, Thomas R.: The Superposition of Stress Concentration Factors. In: *Journal of Engineering for Industry* 84 (1962), Nr. 1, S. 129–132
- [61] PETERSEN, Cord: Die praktische Bestimmung von Formzahlen gekerbter Stäbe. In: *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens* 17 (1951), Nr. 1, S. 16–20
- [62] PILKEY, Walter D. ; PILKEY, Deborah F. ; PETERSON, Rudolph E.: *Peterson's stress concentration factors*. 3. ed. Hoboken, NJ : Wiley, 2008. – ISBN 9780470048245

- [63] PUCHNER, O. ; KAMENSKÝ, A.: Spannungskonzentration und Kerbwirkung von Kerben im Kerbrand. In: *Konstruktion* 24 (1972), Nr. 4, S. 127–134
- [64] RADAJ, Dieter ; VORMWALD, Michael: *Ermüdungsfestigkeit: Grundlagen für Ingenieure*. 3., neubearb. und erw. Aufl. Berlin : Springer, 2007. – ISBN 978–3–540–71458–3
- [65] RÖHMHILD, Iris ; LINKE, Heinz: *Weiterentwicklung von DIN 743 - Studie: Grundlagen zur Weiterentwicklung der Wellenberechnung auf der Basis von DIN 743: FVA-Forschungsvorhaben Nr. 321 III*. Frankfurt/Main, 2006 (FVA-Heft 799)
- [66] RUST, Wilhelm: *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen: Kontakt Geometrie Material*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2009. – ISBN 978–3–8349–8500–2
- [67] SCHÄFER, Günter: *Der Einfluss von Oberflächenbehandlungen auf das Verschleißverhalten flankenzentrierter Zahnwellenverbindungen mit Schiebesitz*. 1. Aufl. Clausthal-Zellerfeld : Papierflieger, 1997. – ISBN 3–932243–43–9
- [68] SCHLECHT, Berthold: *Maschinenelemente 1: Festigkeit, Wellen, Verbindungen, Federn, Kupplungen*. 2., aktualisierte Auflage. Hallbergmoos : Pearson Studium, 2015. – ISBN 978–3–82734–268–2
- [69] SCHLECHT, Berthold ; DARYUSI, Ali ; LOHRENGEL, Armin ; LAU, Peter: *Profilwellen-Kerbwirkung: Ermittlung der Kerbwirkung bei Profilwellen für die praktische Getriebeberechnung von Zahnwellen: FVA-Forschungsvorhaben Nr. 467 I*. Frankfurt/Main, 2009 (FVA-Heft 905)
- [70] SCHLECHT, Berthold ; SENF, Michael ; WENDLER, Jörg: Überlagerung von schwingender Torsions- und Biegebeanspruchung im Tragfähigkeitsnachweis von Zahnwellen mit freiem Auslauf. In: *Dresdner Maschinenelemente Kolloquium: DMK 2013*. Dresden : TUDpress, 2013. – ISBN 978–3–944331–33–1, S. 229–239
- [71] SCHLECHT, Berthold ; SENF, Michael ; WENDLER, Jörg ; SCHÄFER, Günter: Biege- und Torsionsformzahlen von Zahnwellen-Verbindungen zur Anwendung im Tragfähigkeitsnachweis nach DIN 743. In: *Dresdner Maschinenelemente Kolloquium: DMK 2015*. Dresden : TUDpress, 2015. – ISBN 978–3–95908–030–9, S. 447–460
- [72] SCHLECHT, Berthold ; WENDLER, Jörg ; LEIDICH, Erhard ; KRESINSKY, Felix: *DIN 743 - Kerbspannungen mit FEM: Berechnung von Mehrfachkerben nach DIN 743 durch Einbindung von FEM-Ergebnissen: FVA-Forschungsvorhaben Nr. 700 I*. Frankfurt/Main, 2016 (FVA-Heft 1182)
- [73] SCHLECHT, Berthold ; WENDLER, Jörg ; ULRICH, Carsten ; WEIGAND, Michael ; GRAFINGER, Manfred ; LEIDICH, Erhard ; KRESINSKY, Felix: *Softwareintegration + Validierung Mehrfachkerbe: Teil A - Einbindung der Berechnung von Mehrfachkerben nach FVA 700 I in FVA-Workbench, Teil B - Validierung der in FVA 700 I abgeleiteten*

- Berechnungsvorschrift für Mehrfachkerben bei überlagerten dynamischen Belastungen: FVA-Forschungsvorhaben Nr. 700 II.* Frankfurt/Main, 2018 (FVA-Heft 1311)
- [74] SCHÖPF, Hans-Joachim: *Festigkeitsuntersuchung an Zahnwellen-Verbindungen mit Spannungsoptik und Dauerschwingversuchen.* München, Technische Universität München, Diss., 1976
- [75] SIEBEL, E. ; STIELER, Manfred: Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwingender Beanspruchung. In: *VDI-Zeitschrift* 97 (1955), Nr. 5, S. 121–152
- [76] SOCIE, Darrell F. ; MARQUIS, Gary B.: *Multiaxial fatigue.* Warrendale, Pa. : Society of Automotive Engineers, 2000. – ISBN 0–7680–0453–5
- [77] STIELER, Manfred: *Untersuchungen über die Dauerschwingfestigkeit metallischer Bauteile bei Raumtemperatur.* Stuttgart, Technische Hochschule Stuttgart, Diss., 1954
- [78] SUM, Wei S. ; WILLIAMS, Edward J. ; LEEN, Sean B.: Finite element, critical-plane, fatigue life prediction of simple and complex contact configurations. In: *International Journal of Fatigue* 27 (2005), Nr. 4, S. 403–416
- [79] SUSMEL, Luca: *Multiaxial notch fatigue: From nominal to local stress/strain quantities.* Boca Raton, Oxford : CRC Press, Woodhead, 2009 (Woodhead publishing in materials). – ISBN 978–1–84569–582–8
- [80] Norm TGL 19340 (1983-03). *Dauerfestigkeit der Maschinenbauteile*
- [81] THUM, August ; BERG, S.: Die Entlastungskerbe. In: *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens* 2 (1931), Nr. 10, S. 345–351
- [82] THUM, August ; PETERSEN, Cord ; SVENSON, Otto: *Verformung, Spannung und Kerbwirkung: Eine Einführung.* Düsseldorf : VDI-Verlag, 1960
- [83] THUM, August ; SVENSON, Otto: Mehrfache Kerbwirkung: Entlastungskerben - Überlastungskerben. In: *VDI-Zeitschrift* 92 (1950), Nr. 10, S. 225–230
- [84] TJERNBERG, A.: Load distribution and pitch errors in a spline coupling. In: *Materials & Design* 22 (2001), Nr. 4, S. 259–266
- [85] Richtlinie VDI 2226 (1965-07). *Empfehlung für die Festigkeitsberechnung metallischer Bauteile.* Berlin : Beuth Verlag
- [86] VICENTINI, Vittorio: Stress-concentration factors for superposed notches. In: *Experimental Mechanics* 7 (1967), Nr. 3, S. 117–123
- [87] VILLMER, Franz-Josef: *Zum Mechanismus der Lastverteilung in Zahnwellenverbindungen.* Clausthal-Zellerfeld, Technische Universität Clausthal, Diss., 1984

- [88] VOLFSOHN, B. P.: Stress Sources and Critical Stress Combinations for Splined Shaft. In: *Journal of Mechanical Design* 104 (1982), Nr. 3, S. 551–556
- [89] WAGNER, Wolf W.: *FE-Kontaktsimulation einer Zahnwellenverbindung unter kombinierter Torsions- und Biegebelastung*. Dresden, Technische Universität Dresden, Großer Beleg, 2013
- [90] WAGNER, Wolf W.: *Untersuchung zur Spannungskonzentration und zur Kerbwirkung eines mehrfach gekerbten Wellenabsatzes*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, 2014
- [91] WENDLER, Jörg: *Entwicklung eines Präprozessors für die automatisierte Erstellung von Finite-Elemente-Modellen von Zahnwellenverbindungen*. Dresden, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, 2011
- [92] WENDLER, Jörg ; SCHLECHT, Berthold: Automatisierte FE-Berechnungen der Kerbwirkung von Zahnwellenverbindungen: zur Untersuchung eines mehrdimensionalen Parameterfeldes. In: *Getriebe aktuell : Wissenschaftlicher Informationsdienst für Getriebe- und Antriebstechnik* 3 (2015), S. 13–21
- [93] WENDLER, Jörg ; SCHLECHT, Berthold: Calculation of fatigue strength of transmission shafts with multiple notches according to the nominal stress concept by integrating FE-analysis results. In: *VDI-Berichte* 2255 (2015), S. 515–526
- [94] WENDLER, Jörg ; SCHLECHT, Berthold: Stress concentration and fatigue strength of involute spline shafts and couplings. In: QIN, Datong (Hrsg.) ; SHAO, Yimin (Hrsg.): *Power Transmissions: Proceedings of the International Conference on Power Transmissions 2016 (ICPT 2016), Chongqing, P.R. China, 27-30 October 2016*. Boca Raton : CRC Press, 2016. – ISBN 978–1–138–03267–5, S. 311–318
- [95] WENDLER, Jörg ; SCHLECHT, Berthold ; WILD, Jochen: Numerische und experimentelle Analyse der Gestaltfestigkeit von Zahnwellenverbindungen bei Umlaufbiegung. In: *Getriebe aktuell : Wissenschaftlicher Informationsdienst für Getriebe- und Antriebstechnik* 14 (2016), S. 6–15
- [96] WESOLOWSKI, Klemens: *Dreidimensionale Beanspruchungszustände und Festigkeitsnachweis drehmomentbelasteter Zahnwellen-Verbindungen unter elastischer und teilplastischer Verformung*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1997 (Fortschrittberichte VDI : Reihe 1, Konstruktionstechnik, Maschinenelemente Nr. 286). – ISBN 3–18–328601–7
- [97] WITTEL, Herbert ; MUHS, Dieter ; JANNASCH, Dieter ; VOSSIEK, Joachim: *Rollhoff/Matek Maschinenelemente: Normung Berechnung Gestaltung*. 21., vollst. überarb. Aufl. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013. – ISBN 978–3–658–02327–0

- [98] YOSHITAKE, Hiroyuki: Photoelastic Stress Analysis of the Spline Shaft. In: *Bulletin of JSME* 5 (1962), Nr. 17, S. 195–201
- [99] ZAPF, Rupprecht: *Betriebs- und Verschleißverhalten flankenzentrierter Zahnwellenverbindungen mit Schiebesitz*. Clausthal-Zellerfeld, Technische Universität Clausthal, Diss., 1986