



# On a Mechanism for the Formation of Spatially Inhomogeneous Structures of Light Waves in Optical Information Transmission Systems

E. P. Kubyshkin<sup>1</sup>, V. A. Kulikov<sup>1</sup>DOI: [10.18255/1818-1015-2020-2-152-163](https://doi.org/10.18255/1818-1015-2020-2-152-163)<sup>1</sup>P.G. Demidov Yaroslavl State University, 14 Sovetskaya str., Yaroslavl 150003, Russia.

MSC2020: 37G15, 78A40

Research article

Full text in Russian

Received June 1, 2020

After revision June 10, 2020

Accepted June 10, 2020

Spatially inhomogeneous structures of light waves are used as a mechanism of compacting information in optical and fiber-optic communication systems. In this paper, we consider a mathematical model of an optical radiation generator with a nonlinear delayed feedback loop and a stretching (compression) operator of the spatial coordinates of the light wave in a plane orthogonal to the radiation direction. It is shown that the presence of a delay in the feedback loop can lead to the generation of stable periodic spatially inhomogeneous oscillations. In the space of the main parameters of the generator, the spaces of generation of stable spatially non-uniform oscillations are constructed, the mechanism of their occurrence is studied, and approximate asymptotic formulas are constructed.

**Keywords:** spatially inhomogeneous waves, bifurcation, optical information transmission systems.

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Evgenii P. Kubyshkin correspondence author	<a href="https://orcid.org/0000-0003-1796-0190">orcid.org/0000-0003-1796-0190</a> . E-mail: <a href="mailto:kubysh.e@yandex.ru">kubysh.e@yandex.ru</a> Doctor of Science, Professor.
Vladimir A. Kulikov	<a href="https://orcid.org/0000-0003-1351-7706">orcid.org/0000-0003-1351-7706</a> . E-mail: <a href="mailto:kulikov7677@gmail.com">kulikov7677@gmail.com</a> Graduate student.

**Funding:** RFBR, project No 19-31-90133.

**For citation:** E. P. Kubyshkin and V. A. Kulikov, "On a Mechanism for the Formation of Spatially Inhomogeneous Structures of Light Waves in Optical Information Transmission Systems", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 27, no. 2, pp. 152-163, 2020.

## Об одном механизме образования пространственно-неоднородных структур световых волн в оптических системах передачи информации

Е. П. Кубышкин<sup>1</sup>, В. А. Куликов<sup>1</sup>

DOI: 10.18255/1818-1015-2020-2-152-163

<sup>1</sup>Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150003 Россия.

УДК 517.9, 535.015

Научная статья

Полный текст на русском языке

Получена 1 июня 2020 г.

После доработки 10 июня 2020 г.

Принята к публикации 10 июня 2020 г.

Пространственно-неоднородные структуры световых волн используются как механизм уплотнения информации в системах оптической и волоконно-оптической связи. В работе рассматривается математическая модель генератора оптического излучения с контуром нелинейной запаздывающей обратной связи и оператором растяжения (сжатия) пространственных координат световой волны в плоскости, ортогональной направлению излучения. Показано, что наличие запаздывания в контуре обратной связи может привести к генерации устойчивых периодических пространственно-неоднородных колебаний. В пространстве основных параметров генератора построены области генерации устойчивых пространственно-неоднородных колебаний, изучен механизм их возникновения, построены приближенные асимптотические формулы.

**Ключевые слова:** пространственно-неоднородные волны, бифуркация, оптические системы передачи информации.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Евгений Павлович Кубышкин  
автор для корреспонденции

[orcid.org/0000-0003-1796-0190](https://orcid.org/0000-0003-1796-0190). E-mail: [kubysh.e@yandex.ru](mailto:kubysh.e@yandex.ru)  
д-р. физ.-мат. наук, профессор.

Владимир Александрович Куликов

[orcid.org/0000-0003-1351-7706](https://orcid.org/0000-0003-1351-7706). E-mail: [kulikov7677@gmail.com](mailto:kulikov7677@gmail.com)  
аспирант.

**Финансирование:** РФФИ, проект № 19-31-90133.

**Для цитирования:** Е. П. Kubyshkin and V. A. Kulikov, "On a Mechanism for the Formation of Spatially Inhomogeneous Structures of Light Waves in Optical Information Transmission Systems", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 27, no. 2, pp. 152-163, 2020.

## Введение

В работе [1–3] приведены экспериментальные результаты образования пространственно-неоднородных волн в лазерных пучках генератора оптического излучения со специальным нелинейным контуром двумерной обратной связи. Такие структуры возникают в плоскости, ортогональной направлению распространения световой волны. Их возникновение обусловлено нелинейностью системы, которая обеспечивается тонким слоем нелинейной проводящей среды и контуром двумерной обратной связи с оператором пространственного преобразования световой волны в плоскости излучения оптического генератора. В [1] также предложена математическая модель для описания этого явления и приведены результаты ее численного анализа в случае оператора поворота плоскости световой волны. Математическая модель представляет собой начально-краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с оператором преобразования пространственного аргумента, которое рассматривается в области, определяемой апертурой светового излучения. Эта начально-краевая задача и различные ее обобщения изучались в большом количестве работ, где различными аналитическими и численными методами строятся пространственно-неоднородные решения. Обзор данных публикаций приведен, например, в [4]. В работах в основном рассматривается оператор поворота пространственного аргумента, так как такой оператор создается механизмом генерации автоколебательных решений. Модель работы [1] не учитывает фактор временного запаздывания в контуре нелинейной обратной связи. Временное запаздывание также может служить механизмом возбуждения автоколебаний [4, 5], в том числе при более простом, с конструктивной точки зрения, операторе преобразования пространственных координат. В настоящей работе рассматривается математическая модель работы [1] в круговой области с оператором растяжения (сжатия) пространственного аргумента и временным запаздыванием в контуре обратной связи, для которой исследуются условия и характер потери устойчивости состояний равновесия в зависимости от коэффициента усиления и величины запаздывания. Показана возможность колебательной потери устойчивости состояний равновесия и возможность бифуркации устойчивых пространственно-неоднородных периодических решений. Такие решения могут быть использованы как носители информации в оптических и волоконно-оптических системах связи.

### 1. Математическая постановка задачи

Для функционально-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) + K(1 + \gamma \cos(Q_\alpha u(\rho, \phi, t - T))) \quad (1)$$

относительно функции  $u(\rho, \phi, t + s)$ , заданной в полярных координатах  $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi$  ( $R > 0$ ) и  $t \geq 0, -T \leq s \leq 0$  ( $T > 0$ ), в котором  $\Delta_{\rho\phi}$  – оператор Лапласа в полярных координатах,  $Q_\alpha$  – оператор преобразования пространственных координат,  $D, K$  – положительные постоянные,  $0 < \gamma < 1$ , в области  $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^+$ , где круг  $\bar{K}_R = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ ,  $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < \infty\}$ , рассматривается начально-краевая задача вида

$$\begin{aligned} u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \end{aligned} \quad (2)$$

В (1) при  $0 < \alpha < 1$

$$Q_\alpha u(\rho, \phi, t) = \begin{cases} \alpha^{-2}u(\rho/\alpha, \phi, t), & 0 \leq \rho \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < \rho \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

– оператор сжатия пространственных координат, при  $\alpha > 1$

$$Q_\alpha u(\rho, \phi, t) = \alpha^{-2}u(\rho/\alpha, \phi, t), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (4)$$

– оператор растяжения пространственных координат; в (2) пространство начальных условий

$$H_0(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \times [-T, 0]), u(\rho, 0, s) = u(\rho, 2\pi, s), u_\phi(\rho, 0, s) = u_\phi(\rho, 2\pi, s), \\ \text{при каждом } s \ u(\rho, \phi, s) \in H^2(K_R)\},$$

где пространство функций  $H^2(K_R) \subset W_2^2(K_R)$  и получено замыканием множества функций

$$\{u(\rho, \phi) : u(\rho, \phi) \in C^2(\bar{K}_R), u_\rho(R, \phi) = 0, u(\rho, 0) = u(\rho, 2\pi), u_\phi(\rho, 0) = u_\phi(\rho, 2\pi)\}$$

в метрике пространства функций  $W_2^2(K_R)$ . В дальнейшем  $L_2(K_R)$  – пространство вещественнозначных определенных в  $K_R$  функций  $u(\rho, \phi)$ , для которых

$$\|u(\rho, \phi)\|_{L_2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{L_2}^{1/2} < \infty, (u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} = \int_{K_R} \rho u(\rho, \phi) v(\rho, \phi) d\rho d\phi,$$

здесь и в дальнейшем

$$W_2^2(K_R) \subset L_2(K_R), W_2^2(K_R) = \{u(\rho, \phi) : \|u(\rho, \phi)\|_{W_2^2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{W_2^2}^{1/2} < \infty, (u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{W_2^2} = \\ (u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} + (\Delta_{\rho\phi} u(\rho, \phi), \Delta_{\rho\phi} v(\rho, \phi))_{L_2},$$

$C(\bar{K}_R)$  и  $C^2(\bar{K}_R)$  пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых в  $\bar{K}_R$  функций, для которых определена норма

$$\|u(\rho, \phi)\|_C = \max_{\rho, \phi} |u(\rho, \phi)|, \|u(\rho, \phi)\|_{C^2} = \|u(\rho, \phi)\|_C + \|\Delta_{\rho\phi} u(\rho, \phi)\|_C < \infty.$$

Фазовым пространством начально-краевой задачи (1)-(2) является пространство

$$H(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in L_2(K_R) \\ \text{при каждом } -T \leq s \leq 0, \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2} \in C([-T, 0])\},$$

норму в котором определим как

$$\|u(\rho, \phi, s)\|_H = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2}.$$

Областью определения правой части уравнения (1) является пространство  $H_0(K_R; -T, 0)$ . Норму в  $H_0(K_R; -T, 0)$  определим как

$$\|u(\rho, \phi, s)\|_{H_0} = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{W_2^2}.$$

Под решением начально-краевой задачи (1)-(2), определенным при  $t > 0$ , будем понимать функцию  $u(\rho, \phi, t + s) \in H_0(K_R; -T, 0)$  (при каждом  $t > 0$ ), непрерывно дифференцируемую по  $t$  при  $t > 0$ , обращающую уравнение (1) в тождество в фазовом пространстве и удовлетворяющую начальным условиям (2).

В работе изучаются условия и характер потери устойчивости состояний равновесия  $u_*(\rho, K, \gamma)$  и обусловленные ею бифуркации пространственно-неоднородных автоколебательных решений начально-краевой задачи (1)-(2), а также их устойчивость.

## 2. Анализ устойчивости состояний равновесия начально-краевой задачи (1)-(2)

Состояния равновесия начально-краевой задачи (1)-(2) определяются решениями  $u_*(\rho) = u_*(\rho, K, \gamma) \in H^2(K_R)$  нелинейного операторного уравнения

$$u(\rho, \phi) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi) + K(1 + \gamma \cos(Q_\alpha u(\rho, \phi))) \quad (5)$$

в  $L_2(K_R)$ . Выберем одно из решений  $u_*(\rho) = u_*(\rho, K, \gamma)$  уравнения (5) и запишем начально-краевую задачу (1)-(2) в его окрестности, заменив  $u(\rho, \phi, t) \rightarrow u_*(\rho, K, \gamma) + u(\rho, \phi, t)$ . В результате получим начально-краевую задачу

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - b(\rho)Q_\alpha u(\rho, \phi, t - T) + b_2(\rho)(Q_\alpha u(\rho, \phi, t - T))^2/2 + b(\rho)(Q_\alpha u(\rho, \phi, t - T))^3/6 + \dots, \quad (6)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0), \quad (7)$$

$$b(\rho) = K\gamma \sin(Q_\alpha u_*(\rho, K, \gamma)), \quad b_2(\rho) = -K\gamma \cos(Q_\alpha u_*(\rho, K, \gamma)), \quad (8)$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие по  $Q_\alpha u(\rho, \phi, t - T)$  более высокий порядок малости в норме  $L_2(K_R)$ .

Рассмотрим линейную часть (6)-(7)

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - b(\rho)Q_\alpha u(\rho, \phi, t - T), \quad (9)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \quad (10)$$

Определяя решения (9)-(10) вида  $u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi)e^{\lambda t}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  (решения Эйлера) получим пучок операторов

$$P(\lambda)u(\rho, \phi) \equiv \lambda u(\rho, \phi) + u(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi) + b(\rho)Q_\alpha u(\rho, \phi)e^{-\lambda T}, \quad (11)$$

действующий в  $\tilde{L}_2(K_R)$  с областью определения  $\tilde{H}^2(K_R)$ , точки спектра которого определяют устойчивость решений начально-краевой задачи (9)-(10), а соответствующие им собственные функции решения искомого вида. Здесь и в дальнейшем знаком “тильде” будем обозначать комплексное расширение соответствующего функционального пространства, скалярное произведение и норма в котором обобщается стандартным образом.

Представим  $u(\rho, \phi) \in H^2(K_R)$  в виде

$$u(\rho, \phi) = u_0(\rho)v_{00} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\rho, n\phi)v_{nj}, \quad u_0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}, \quad u_j(\rho, n\phi) = \frac{R_{nj}(\rho)e^{in\phi}}{(2\pi)^{1/2}},$$

$$R_{nj}(\rho) = \frac{\sqrt{2}/R J_n(\gamma_{nj}\rho/R)}{(1 - n^2/\gamma_{jn}^2)^{1/2} |J_n(\gamma_{nj})|} \quad (n \geq 0), \quad R_{-nj}(\rho) = R_{nj}(\rho), \quad u_j(\rho, 0) \equiv u_j(\rho),$$

$$\int_0^R \rho R_{nj}(\rho) R_{np}(\rho) d\rho = \delta_{jp}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad v_{00}, v_{0j} \in \mathbb{R}, \quad v_{nj} \in \mathbb{C}, \quad v_{-nj} = \bar{v}_{nj}, \quad (12)$$

где  $J_n(\rho)$  функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка,  $\gamma_{nj}$   $j$ -й положительный ноль функции  $J_n'(\rho)$ ,  $\gamma_{00} = 0$ ,  $\delta_{jp}$  – символ Кронекера,  $v_0 = (v_{00}, v_{01}, v_{02}, \dots) \in l_2^2 \subset l_2$ ,  $l_2^2 = \{v = (v_0, v_1, v_2, \dots), v_k \in \mathbb{R} : \|v\|_{l_2^2} = (v_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^4 v_k^2)^{1/2} < \infty\}$ ,  $v_n = (0, v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, \dots) \in \tilde{l}_2 \subset \tilde{l}_2$ ,  $\tilde{l}_2^2 = \{(v_0, v_1, v_2, v_3, \dots), v_k \in \mathbb{C} : \|v\|_{\tilde{l}_2} = (|v_0|^2 +$

$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 |v_k|^2)^{1/2} < \infty$ . Функции  $u_j(\rho, n\phi)$ , являясь полной системой собственных функций оператора Лапласа, образуют ортогональный базис в  $\tilde{H}^2(K_R)$  и ортонормированный в  $\tilde{L}_2(K_R)$ , т.е.  $v_0 \in \tilde{L}_2^2$  и  $v_n \in \tilde{L}_2^2$  определяются однозначно. Подставим ряд (12) в (11) и спроектируем на  $u_0(\rho)$ ,  $u_j(\rho, n\phi)$ ,  $j, n = 1, 2, \dots$ . В результате получим последовательность операторных уравнений в пространстве  $\tilde{L}_2$  с областью определения  $\tilde{L}_2^2$  вида

$$P^{(n)}(\lambda, \alpha)v_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

для определения  $v_n \in \tilde{L}_2^2$ , где  $P^{(n)}(\lambda, \alpha)$  бесконечномерные матрицы с элементами

$$P_{jj}^{(n)}(\lambda, \alpha) = \lambda + 1 + D\gamma_{0j}^2 + p_{jj}^{(n)}(\alpha)e^{-\lambda T}, \quad P_{jq}^{(n)}(\lambda, \alpha) = p_{jq}^{(n)}(\alpha)e^{-\lambda T}, \quad j \neq q,$$

$$p_{jq}^{(n)}(\alpha) = \alpha^{-2} \int_0^{r_\alpha} \rho b(\rho) R_{nq}(\rho/\alpha) R_{np}(\rho) d\rho, \quad r_\alpha = \alpha \quad (\alpha < 1), \quad r_\alpha = 1 \quad (\alpha > 1), \quad (14)$$

$j, q = 0, 1, \dots$ , при  $n = 0$ , и  $j, q = 1, 2, \dots$ , при  $n > 0$ . Отметим, что коэффициенты  $p_{jq}^{(n)}(\alpha) \rightarrow 0$  при  $j, q \rightarrow \infty$ .

Совокупность значений  $\lambda_*^{(n)}$ , при которых операторные уравнения (13) имеют ненулевые решения  $v_*^{(n)} \in \tilde{L}_2^2$  определяет множество точек спектра пучка операторов (11), а решения  $v_*^{(n)}$  с учетом (12) соответствующие собственные функции. Анализ расположения  $\lambda_*^{(n)}$  позволяет построить в пространстве параметров области устойчивости решений начально-краевой задачи (9)-(10).

Рассмотрим оператор растяжения (4). В этом случае начально-краевая задача (1)-(2) может иметь однородные состояния равновесия  $u_*(\rho, K, \gamma) \equiv u_*(K, \gamma)$ . Однородные состояния равновесия  $u_* = u_*(K, \gamma)$  начально-краевой задачи (1)-(2) определяются как решения уравнения

$$u_* = K(1 + \gamma \cos u_*). \quad (15)$$

Уравнение (15) в зависимости от  $K$  и  $\gamma$  может иметь несколько решений, в том числе кратные. Отметим, что  $b(\rho) \equiv b = K\gamma \sin(u_*(K, \gamma))$ . С учетом этого в (13), (14)  $p_{jq}^{(n)}(\alpha)$  представим в виде  $bp_{jq}^{(n)}(\alpha)$ . Исследуем условия потери устойчивости состоянием равновесия  $u_*(K, \gamma)$ . Воспользуемся для этого методом  $D$ -разбиения [6]. Положим в (13)  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega \geq 0$  и рассмотрим для каждого  $n$  последовательность "усеченных" конечномерных матриц  $P_m^{(n)}(i\omega, \alpha)$ , в которых  $j, q = 0, 1, \dots, m$  при  $n = 0$ , и  $j, q = 1, 2, \dots, m$  при  $n > 0$ . Рассмотрим сначала случай  $n = 0$ . Приравняем нулю определитель матрицы  $P_m^{(0)}(i\omega, \alpha)$  и выразим из этого равенства элемент  $P_{jj}^{(0)}(i\omega, \alpha)$ . В результате получим выражение

$$i\omega + 1 + D\gamma_{0j}^2 + bp_{jj}^{(0)}(\alpha)e^{-i\omega T} + \Delta_{m1}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha) + i\Delta_{m2}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha) = 0, \quad (16)$$

в котором функции  $\Delta_{m1}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha)$  и  $\Delta_{m2}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha)$  получены в результате объединения выражений, не содержащих  $P_{jj}^{(0)}(i\omega, \alpha)$ . Выделив в (16) вещественную и мнимую часть, получим равенства

$$1 + D\gamma_{0j}^2 + bp_{jj}^{(0)}(\alpha) \cos(\omega T) + \Delta_{m1}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha) = 0, \quad \omega - bp_{jj}^{(0)}(\alpha) \sin(\omega T) + \Delta_{m2}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha) = 0,$$

из которых находим

$$b = b(\omega) = (-1)^{k+1} (1 + D\gamma_{0j}^2 + \Delta_{m1}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha)) / (p_{jj}^{(0)}(\alpha) \cos(\arctg((\omega + \Delta_{m2}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha)) / (1 + D\gamma_{0j}^2 + \Delta_{m1}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha))))), \quad (17)$$

$$T = T(\omega) = \omega^{-1} (\pi k - \arctg(\omega + \Delta_{m2}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha)) / (1 + D\gamma_{0j}^2 + \Delta_{m1}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha))), \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для других  $n$ . В случае  $\alpha = 1$  функции  $\Delta_{m1}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha) \equiv 0$  и  $\Delta_{m2}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha) \equiv 0$ . В связи с этим выражения (17), (18) определяют совокупность кривых в плоскости  $(b, T)$  на которых пучок операторов (11) имеет точки спектра, расположенные на мнимой оси комплексной плоскости. Это дает возможность построить в плоскости  $(b, T)$  (при фиксированных других параметрах) область устойчивости решений начально-краевой задачи (9)-(10). В случае  $\alpha > 1$  по (17), (18) построим итерационный процесс

$$b^{(q)}(\omega) = (-1)^{k+1}(1 + D\gamma_{0j}^2 + \Delta_{m1}^{(j)}(b^{(q-1)}(\omega), T^{(q-1)}(\omega), \omega, \alpha))/(p_{jj}^{(0)}(\alpha) \cos(\arctg((\omega + \Delta_{m2}^{(j)}(b^{(q-1)}(\omega), T^{(q-1)}(\omega), \omega, \alpha))/(1 + D\gamma_{0j}^2 + \Delta_{m1}^{(j)}(b^{(q-1)}(\omega), T^{(q-1)}(\omega), \omega, \alpha))))), \quad (19)$$

$$T^{(q)}(\omega) = \omega^{-1}(\pi k - \arctg(\omega + \Delta_{m2}^{(j)}(b^{(q-1)}(\omega), T^{(q-1)}(\omega), \omega, \alpha)) / (1 + D\gamma_{0j}^2 + \Delta_{m1}^{(j)}(b^{(q-1)}(\omega), T^{(q-1)}(\omega), \omega, \alpha))), \quad k = 1, 2, \dots, \quad q = 1, 2, \dots \quad (20)$$

В качестве  $b^{(0)}(\omega)$ ,  $T^{(0)}(\omega)$  выбираем решение (17), (18) при  $\Delta_{m1}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha) \equiv 0$ ,  $\Delta_{m2}^{(j)}(b, T, \omega, \alpha) \equiv 0$ . Итерационный процесс (19), (20) достаточно быстро сходится как по  $q$ , так и по  $m$ , в силу достаточно быстрого стремления к нулю коэффициентов  $p_{jq}^{(n)}(\alpha)$  матриц (13).

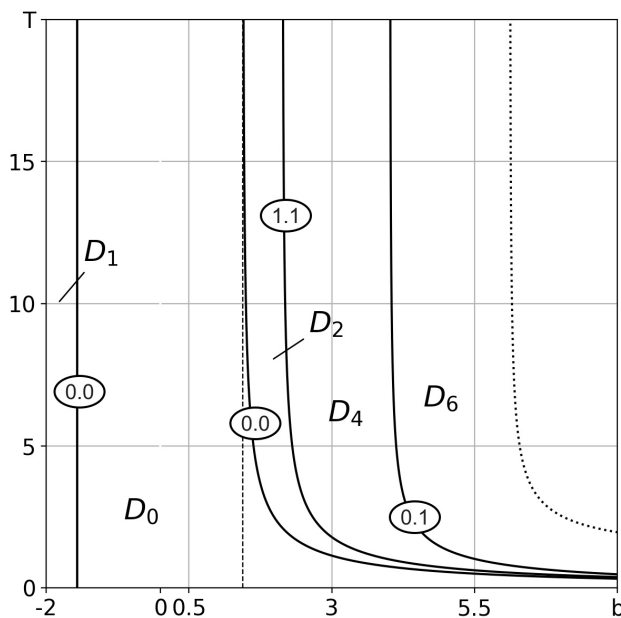
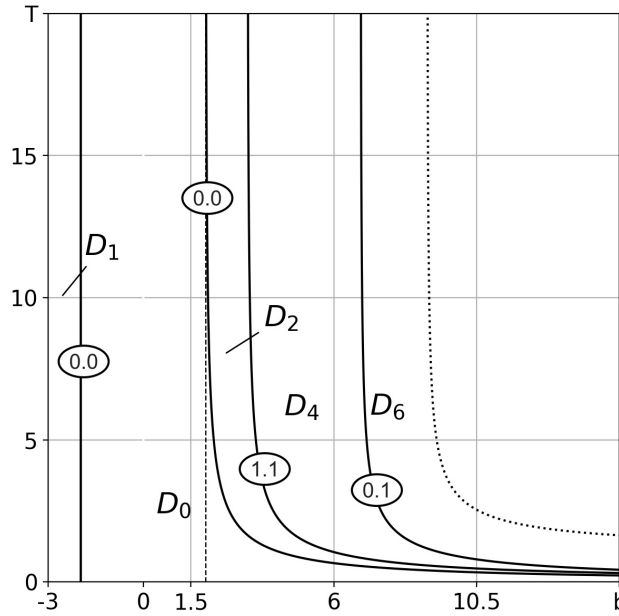


Fig. 1. The  $D$ -partition pattern of the plane  $(b, T)$  for  $\alpha = 1.2$

Рис. 1. Картина  $D$ -разбиения плоскости  $(b, T)$  для  $\alpha = 1.2$

На рисунках 1 и 2 для значений  $D = 0.1$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = 1.2$  и  $\alpha = 1.4$  приведена картина  $D$  разбиения плоскости  $(b, T)$ . На рисунках через  $D_j$  обозначены области, при значении параметров из которых пучок операторов (11) имеет  $j$  точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости, а границы этих областей соответствуют точкам спектра, лежащим на мнимой оси. Из рисунков видно, что имеются значения параметров на границе области устойчивости (область



**Fig. 2.** The  $D$ -partition pattern of the plane  $(b, T)$  for  $\alpha = 1.4$

**Рис. 2.** Картина  $D$ -разбиения плоскости  $(b, T)$  для  $\alpha = 1.4$

$D_0$ ), при которых в правую полуплоскость может переходить пара комплексно сопряженных точек спектра (11) (правая граница), а также значения параметров, соответствующие нулевой точке спектра (11) (левая граница – вертикальная прямая). Цифры на границе указывают значения параметров  $n$  и  $j$  в функциях, определяющих соответствующую границу (см. (17), (18)). Отметим, что собственные функции, отвечающие указанным точкам спектра имеют пространственно-неоднородную форму.

В случае оператора сжатия (3) схема построения областей устойчивости решений начально-краевой задачи (9)-(10) остается прежней, однако в этом случае зависимость  $b$  от  $K$  и  $T$  более сложная.

### 3. Бифуркация пространственно-неоднородных решений начально-краевой задачи (1)-(2)

Рассмотрим случай растяжения ( $\alpha > 1$ ). При заданных  $D, \gamma$  выберем параметры  $b_*, T_*$  таким образом, чтобы они соответствовали точке границы области устойчивости решений начально-краевой задачи (9)-(10) и при этом пучок операторов (11) имел одну пару комплексно сопряженных точек спектра  $\pm i\omega_*$ ,  $\omega_* > 0$ , которым отвечают собственные функции  $u_*(\rho), \bar{u}_*(\rho) \in H^2(K_R), \|u_*(\rho)\|_{L_2} = 1$ . Сопряженным с (11) пучком операторов  $P^*(\lambda) : (P(\lambda)u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} = (u(\rho, \phi), P^*(\lambda)v(\rho, \phi))_{L_2}$ ,  $u(\rho, \phi), v(\rho, \phi) \in H^2(K_R)$  будет пучок операторов

$$P^*(\lambda)v(\rho, \phi) \equiv \lambda v(\rho, \phi) + v(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho, \phi}v(\rho, \phi) + b(\rho)Q_\alpha v(\rho, \phi)e^{-\lambda T}, \alpha_* = 1/\alpha. \quad (21)$$

При этом  $\pm i\omega_*$  также являются точками спектра, а отвечающие им собственные функции  $v_*(\rho), \bar{v}_*(\rho) \in H^2(K_R)$  удовлетворяют условию

$$(P'(i\omega_*)u_*(\rho), v_*(\rho))_{L_2} = 1, (P'(i\omega_*)u_*(\rho), \bar{v}_*(\rho))_{L_2} = 0. \quad (22)$$



Отметим, что функции  $u_*(\rho)$ ,  $\bar{u}_*(\rho)$  строятся по матрицам  $P^{(n)*}(i\omega_*, \alpha)$ , сопряженным с (14).

По  $b_*$  выберем  $K_*$  и  $u_* = u(K_*, \gamma)$ , удовлетворяющими равенствам (8), (15). Отметим, что такой выбор может быть неоднозначным. Положим теперь  $K = K_* + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр, и исследуем возможность бифуркации из состояния равновесия

$$u_*(\varepsilon) = u_*(K_* + \varepsilon, \gamma) = u_* + \varepsilon u_{*1} + \dots, u_{*1} = u_*/(1 + b_*)$$

пространственно-неоднородных периодических решений начально-краевой задачи (1)-(2) при изменении параметра  $\varepsilon$ . Для анализа воспользуемся методом инвариантных (центральных) многообразий [7] и теорией нормальных форм обыкновенных дифференциальных уравнений [8].

Отметим, что теперь в (8), (12), (13), (21)

$$b(\rho) = b(\varepsilon) = (K_* + \varepsilon)\gamma \sin(Q_\alpha u_*(\varepsilon)) = b_* + \varepsilon b_1 + \dots, b_1 = \gamma \sin(u_*) + u_* \gamma \cos(u_*)/(1 + b_*),$$

$$b_2(\rho) = b_2(\varepsilon) = -(K_* + \varepsilon)\gamma \cos(Q_\alpha u_*(\varepsilon)) = -(K_* + \varepsilon)\gamma \cos(u_*(\varepsilon)).$$

Соответственно в дальнейшем будем использовать обозначение пучка операторов  $P(\lambda) \equiv P(\lambda; \varepsilon)$ . Обозначим  $\lambda(\varepsilon) = i\omega_* + \varepsilon\lambda_1 + \dots$ , точку спектра оператора  $P(\lambda; \varepsilon)$ , удовлетворяющую условию  $\lambda(0) = i\omega_*$ , а соответствующую ей собственную функцию  $u_*(\rho, \varepsilon) = u_*(\rho) + \varepsilon u_{1*}(\rho) + \dots$ .  $\lambda(\varepsilon)$  и  $u_*(\rho, \varepsilon)$  аналитически зависят от  $\varepsilon$ . Начально-краевая задача (9)-(10) имеет двумерное пространство решений, которое можно записать в следующей форме

$$u(\rho, s, z, \bar{z}; \varepsilon) = u_*(\rho, \varepsilon)e^{\lambda(\varepsilon)s}z + \bar{u}_*(\rho, \varepsilon)e^{\bar{\lambda}(\varepsilon)s}\bar{z}, \dot{z} = \lambda(\varepsilon)z,$$

$$z = z(t) \in \mathbb{C}, u_*(\rho, \varepsilon)e^{\lambda(\varepsilon)s} \in H_0(K_R; -T_*, 0). \quad (23)$$

Остальные решения начально-краевой задачи (9)-(10) экспоненциально затухают при  $t \rightarrow \infty$ .

Начально-краевая задача (6)-(8) в окрестности нулевого состояния равновесия имеет локальное экспоненциально устойчивое инвариантное многообразие (центральное многообразие), поведение решений на котором определяется поведением решений двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для построения центрального многообразия и системы дифференциальных уравнений на нем воспользуемся подходом работы [9] и перейдем от (6)-(8) к эквивалентной начально-краевой задаче в области ( $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -T_* \leq s \leq 0, t \geq 0$ ), положив  $w(\rho, \phi, s, t) = u(\rho, \phi, t + s)$ ,

$$w_t = w_s \quad (24)$$

$$w_s(\rho, \phi, 0, t) = -w(\rho, \phi, 0, t) + D\Delta_{\rho\phi}w(\rho, \phi, 0, t) - b(\varepsilon)Q_\alpha w(\rho, \phi, -T_*) + b_2(\varepsilon)(Q_\alpha w(\rho, \phi, -T_*, t))^2/2 + b(\varepsilon)(Q_\alpha w(\rho, \phi, -T_*, t))^3/6 + \dots, \quad (25)$$

$$w_\rho(R, \phi, s, t) = 0, w(\rho, \phi, s, t) = w(\rho, \phi + 2\pi, s, t), w_\phi(\rho, \phi, s, t) = w_\phi(\rho, \phi + 2\pi, s, t),$$

$$w(\rho, \phi, s, 0) = w_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T_*, 0). \quad (26)$$

Центральное многообразие в силу специфики рассматриваемого “критического случая” потери устойчивости нулевым решением (6)-(8) не будет зависеть от переменной  $\phi$ . На это указывает также структура решений (23). Будем строить центральное многообразие и дифференциальные уравнения траекторий на нем в виде разложения по

$$W(\rho, s, z, \bar{z}; \varepsilon) = u_*(\rho, \varepsilon)e^{\lambda(\varepsilon)s}z + \bar{u}_*(\rho, \varepsilon)e^{\bar{\lambda}(\varepsilon)s}\bar{z} + w_{20}(\cdot)z^2 + w_{11}(\cdot)z\bar{z} + w_{02}(\cdot)\bar{z}^2 + w_{30}(\cdot)z^3 + w_{21}(\cdot)z^2\bar{z} + w_{12}(\cdot)\bar{z}^2z + w_{03}(\cdot)\bar{z}^3 + \dots, w_{jk}(\cdot) = \bar{w}_{jk}(\cdot), w_{jk}(\cdot) = w_{jk}(\rho, s; \varepsilon), \quad (27)$$

$$\dot{z} = \lambda(\varepsilon)z + d_{21}(\varepsilon)z^2\bar{z} + \dots = Z(z, \bar{z}, \varepsilon). \quad (28)$$

В (27), (28) точками обозначены слагаемые, имеющие по  $z, \bar{z}$  более высокий порядок малости. Дифференциальное уравнение для  $\bar{z}$  получается простым сопряжением уравнения (28).

Условие принадлежности траекторий уравнения (28) в силу (27) начально-краевой задаче (24)-(26) дает тождество

$$W_{\bar{z}}(\cdot) = W_z(\cdot)Z(z, \bar{z}; \varepsilon) + W_{\bar{z}}(\cdot)\bar{Z}(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv W_s(\cdot), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} W_s(\rho, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) &\equiv -W(\rho, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) + D\Delta_\rho W(\rho, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) - b(\varepsilon)Q_\alpha W(\rho, -T_*, z, \bar{z}; \varepsilon) - \\ &+ b_2(\varepsilon)(Q_\alpha W(\rho, -T_*, z, \bar{z}; \varepsilon))^2/2 + b(\varepsilon)(Q_\alpha W(\rho, -T_*, z, \bar{z}; \varepsilon))^3/6 + \dots, \end{aligned} \quad (30)$$

$$W_\rho(R, s, z, \bar{z}; \varepsilon) = 0, \quad \Delta_\rho W(\rho) \equiv \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dW(\rho)}{d\rho} \right), \quad (31)$$

которое должно выполняться тождественно при различных степенях  $z, \bar{z}, \varepsilon z, \varepsilon \bar{z}$ . Приравняем сначала слева и справа в (29)-(31) коэффициенты при  $\varepsilon z$ . В результате получим для определения  $\lambda_1$  и  $u_1(\rho)$  следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} P(i\omega_*, 0)u_1(\rho) &\equiv (i\omega_* + 1)u_1(\rho) - D\Delta_\rho u_1(\rho) + b_* e^{-i\omega_* T_*} Q_\alpha u_1(\rho) = \\ &= -\lambda_1 P'(i\omega_*, 0)u_*(\rho) - b_1 e^{-i\omega_* T_*} Q_\alpha u_*(\rho), \quad \frac{du_1(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=R} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что тождество (29) выполняется автоматически. В силу  $P(i\omega_*, 0)u_*(\rho) = 0$  и равенств (22) однозначную разрешимость (32) обеспечивают условия

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(b_1 e^{-i\omega_* T_*} Q_\alpha u_*(\rho), v_*(\rho))_{L_2} = b_1/b_* ((1 + i\omega_*)(u_*(\rho), v_*(\rho))_{L_2} + (u_*'(\rho), v_*'(\rho))_{L_2}), \\ (P'(i\omega_*, 0)u_1(\rho), v_*(\rho))_{L_2} &= 0. \end{aligned}$$

Определяя теперь  $u_1(\rho)$  в виде ряда по функциям  $R_{0j}(\rho)$ , получим для определения коэффициентов разложения линейную алгебраическую систему в  $\tilde{l}_2$ , которая имеет единственное решение, принадлежащее  $\tilde{l}_2^2$ . Аналогичным образом определяются  $\lambda_j, u_j(\rho), j = 2, 3, \dots$

Приравняем теперь слева и справа в (29)-(31) коэффициенты при  $z^2$ . В результате получим для определения  $w_{20}(\cdot)$  краевую задачу вида

$$2\lambda(\varepsilon)w_{20}(\rho, s; \varepsilon) = w_{20s}(\rho, s; \varepsilon) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} w_{20s}(\rho, 0; \varepsilon) &= -w_{20}(\rho, 0; \varepsilon) + D\Delta_\rho w_{20}(\rho, 0; \varepsilon) - b(\varepsilon)Q_\alpha w_{20}(\rho, -T_*; \varepsilon) + \\ &+ b_2(\varepsilon)(Q_\alpha u_*(\rho; \varepsilon))^2 e^{-2\lambda(\varepsilon)T_*}/2, \quad w_{20\rho}(R, s; \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Решением (33)-(34) будет функция  $w_{20}(\rho, s, \varepsilon) = v_{20}(\rho, \varepsilon)e^{2\lambda(\varepsilon)s}$ , где  $v_{20}(\rho, \varepsilon)$  есть решение краевой задачи

$$P(2\lambda(\varepsilon); \varepsilon)v_{20}(\rho; \varepsilon) = b_2(\varepsilon)(Q_\alpha u_*(\rho; \varepsilon))^2 e^{-2\lambda(\varepsilon)T_*}/2, \quad v_{20\rho}(R; \varepsilon) = 0.$$

Решение однозначно определяется в виде

$$v_{20}(\rho, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(\varepsilon)R_{0j}(\rho), \quad v_{20}(\varepsilon) = (v_0(\varepsilon), v_1(\varepsilon), \dots) \in \tilde{l}_2^2,$$

$v_{20}(\varepsilon)$  решение линейного уравнения в  $\tilde{l}_2$

$$P^{(0)}(2\lambda(\varepsilon), \alpha; \varepsilon)v_{20}(\varepsilon) = f_{20}(\varepsilon), \quad f_{20}(\varepsilon) = (f_0(\varepsilon), f_1(\varepsilon), \dots),$$

$$f_j(\varepsilon) = b_2(\varepsilon)e^{-2\lambda(\varepsilon)T_*}((Q_\alpha u_*(\rho; \varepsilon))^2, R_{0j}(\rho))_{L_2}/2,$$

с матрицей, определенной в (13). Аналогичным образом определяется функция  $w_{11}(\rho, s, \varepsilon) = v_{11}(\rho, \varepsilon)e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s}$ , где

$$v_{11}(\rho, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(\varepsilon)R_{0j}(\rho), \quad v_{11}(\varepsilon) = (v_0(\varepsilon), v_1(\varepsilon), \dots) \in \tilde{l}_2^2,$$

$v_{11}(\varepsilon)$  решение линейного уравнения в  $\tilde{l}_2$

$$P^{(0)}(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon), \alpha; \varepsilon)v_{11}(\varepsilon) = f_{11}(\varepsilon), \quad f_{11}(\varepsilon) = (f_0(\varepsilon), f_1(\varepsilon), \dots),$$

$$f_j(\varepsilon) = b_2(\varepsilon)e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}(Q_\alpha u_*(\rho; \varepsilon)Q_\alpha \bar{u}_*(\rho; \varepsilon), R_{0j}(\rho))_{L_2}.$$

Рассмотрим определение функции  $w_{21}(\rho, s; \varepsilon)$ . Приравняв слева и справа в (29)-(31) коэффициенты при  $z^2 \bar{z}$ , получим краевую задачу

$$u_*(\rho, \varepsilon)e^{\lambda(\varepsilon)s}d_{21}(\varepsilon) + (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))w_{21}(\rho, s; \varepsilon) = w_{21s}(\rho, s; \varepsilon), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} w_{21s}(\rho, 0, \varepsilon) &= -w_{21}(\rho, 0, \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}w_{21}(\rho, 0; \varepsilon) - b(\varepsilon)Q_\alpha w_{21}(\rho, -T_*; \varepsilon) + \\ &+ (b_2(\varepsilon)(Q_\alpha v_{20}(\rho; \varepsilon)Q_\alpha \bar{u}_*(\rho, \varepsilon) + Q_\alpha v_{11}(\rho; \varepsilon)Q_\alpha u_*(\rho, \varepsilon) + \\ &+ b(\varepsilon)(Q_\alpha u_*(\rho, \varepsilon)^2 Q_\alpha \bar{u}_*(\rho, \varepsilon)/2)e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}, \quad w_{21\rho}(R, s; \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Краевая задача (35)-(36) при  $\varepsilon = 0$  не разрешима. Разрешимости добиваемся выбором  $d_{21}(\varepsilon)$ , который при этом определяется однозначно. Непрерывное по  $\varepsilon$  решение (35)-(36) также определяется однозначно в виде разложения по  $R_{0j}(\rho)$ . При этом коэффициенты разложения однозначно определяются по аналогии с краевой задачей (33)-(34). В дальнейшем используется лишь коэффициент  $d_{21}(0)$ , поэтому приведем для него выражение

$$\begin{aligned} d_{21}(0) &= (b_2(0)(Q_\alpha v_{20}(\rho; 0)Q_\alpha \bar{u}_*(\rho) + Q_\alpha v_{11}(\rho; 0)Q_\alpha u_*(\rho)) + \\ &+ b_*(Q_\alpha u_*(\rho))^2 Q_\alpha \bar{u}_*(\rho)/2, v_*(\rho))_{L_2} e^{-i\omega_* T_*}, \end{aligned}$$

полученное из условия разрешимости (35)-(36) при  $\varepsilon = 0$  с учетом равенств (22).

Величины  $\lambda_1, d_{21}(0)$  были вычислены в точках границы области устойчивости (на рисунке 1 это граница (0 0)). При этом оказалось, что во всех точках  $Re \lambda_1 > 0, Re d_{21}(0) < 0$ . В связи с этим при  $\varepsilon > 0$  уравнение (28) имеет асимптотически устойчивое периодическое решение

$$z(t; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2} \rho_* e^{i\tau} + O(\varepsilon), \quad \rho_* = (-Re \lambda_1 / Red_{21}(0))^{1/2},$$

$$\dot{\tau} = \omega_*(\varepsilon) = \omega_* + \varepsilon(Im \lambda_1 + Im d_{21}(0)\rho_*^2) + O(\varepsilon^2),$$

в котором  $z(t; \varepsilon^{1/2})$  и  $\omega_*(\varepsilon)$  аналитические функции  $\varepsilon^{1/2}$  и  $\varepsilon$  соответственно.

Этому решению в начально-краевой задаче (6)-(8) соответствует согласно (27)-(28) асимптотической устойчивости периодическое решение вида

$$u(\rho, \omega_*(\varepsilon)(t+s); \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2}(u_*(\rho)e^{i\omega_*(\varepsilon)(t+s)} + \bar{u}_*(\rho)e^{-i\omega_*(\varepsilon)(t+s)}) + O(\varepsilon),$$

которое представляет собой стоячую волну периода  $2\pi/\omega_*(\varepsilon)$ . Указанное решение является аналитической функцией  $\varepsilon^{1/2}$ .

## References

- [1] S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, and V. J. Ivanov, “Krupnomasshtabnye poperechnye nelineynye vzaimodeistviya v lazernyh puchkah; novye tipy nelineinyh voln, vzniknovenie opticheskoi turbylentnosti”, *Pisma v ZHETPH*, vol. 47, no. 12, pp. 611–614, 1988, In Russian.
- [2] S. A. Akhmanov and M. A. Vorontsov, “Neustojchivosti i struktury v kogerentnyh nelinejno-opticheskikh sistemah, ohvachennyh dvumernoj obratnoj svyaz’yu”, *Science*, vol. 9, pp. 228–238, 1989, In Russian.
- [3] S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, V. Y. Ivanov, A. V. Larichev, and N. I. Zheleznykh, “Controlling transverse wave interactins in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures”, vol. 9, no. 1, pp. 78–90, 1992.
- [4] A. V. Razgulin and T. E. Romanenko, “Vrashchayushchiesya volny v parabolicheskom funkcional’no-differencial’nom uravnenii s povorotom prostranstvennogo argumenta i zapazdyvaniem”, *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.*, vol. 53, no. 11, pp. 1804–1821, 2013, In Russian.
- [5] E. P. Kubyshkin and V. A. Kulikov, “Analysis of the conditions for the emergence of spatially inhomogeneous structures of light waves in optical information transmission systems”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 297–305, 2019, In Russian.
- [6] Y. I. Neymark, “D-razbienie prostranstva kvazipolinomov (k ustojchivosti linearizovannyh raspredelennyh sistem)”, *PMM*, vol. 13, no. 4, pp. 349–380, 1949.
- [7] J. Marsden and M. McCracken, *The Bifurcation of the Birth of a Cycle and Its Applications*, 1980.
- [8] A. D. Bryuno, “Lokal’nyj metod nelinejnogo analiza differencial’nyh uravnenij”, *Science*, 1979.
- [9] E. P. Kubyshkin and A. R. Moriakova, “Features of Bifurcations of Periodic Solutions of the Ikeda Equation”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, vol. 14, no. 3, pp. 301–324, 2018.