

УДК 517.977

А. С. АБУФАНАС, А. А. ЛОБАТЫЙ, Ю. Ф. ЯЦЫНА

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ФОРСИРОВАННОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ СИСТЕМЫ СЛЕЖЕНИЯ

*Белорусский национальный технический университет*

Рассматривается задача аналитического синтеза управляющего сигнала линейной динамической системой. В качестве критерия оптимизации предлагается рассматривать время перехода системы из начального состояния в заданное конечное состояние. Такой вид управления называется форсированным, обеспечивающим максимальное быстродействие системы. Рассматривается решение данной задачи на основе применения неопределенных множителей Лагранжа и принципа максимума Понтрягина. Получены выражения для матрицы переходов системы и управляющего сигнала в векторном виде.

В качестве примера для оценки работоспособности предлагаемой методики рассматривается электропривод, описываемый широко распространенной математической моделью второго порядка. Представлены качественные иллюстрации работоспособности предлагаемого подхода, полученные путем моделирования в среде *Mathcad* и количественные характеристики изменения входных и выходных сигналов гипотетической системы управления. Показано, что применение форсированного управления не приводит к выходу переменных, характеризующих состояние системы, за пределы допустимых значений.

Применение форсированного управления позволяет синтезировать закон управления в виде последовательности прямоугольных импульсов постоянной амплитуды, определяемой источником питания, переменной скважности и полярности. Такой подход может быть использован при управлении вентильными электродвигателями постоянного тока, применяемыми в различных системах слежения, применяемых на беспилотных летательных аппаратах.

**Ключевые слова:** форсированное управление, целевая функция, электрический привод, последовательность импульсов.

### Введение

Среди автоматических систем, в которых ключевое место занимают электрические приводы, необходимо выделить беспилотные летательные аппараты (БЛА), интенсивно завоевывающие своё место в различных областях применения [1]. Одной из основных задач БЛА является мониторинг земной поверхности или объектов, находящихся на земле. Для решения задач мониторинга на подвижной платформе, имеющей две степени свободы относительно корпуса БЛА, устанавливается оптическая или радиотехническая аппаратура. Управление (разворот) подвижной платформы относительно корпуса БЛА осуществляется специальным, как правило, электрическим приводом.

Среди электрических приводов широкое распространение имеют вентильные электрические двигатели [2], в которых в качестве входного сигнала используется последователь-

ность прямоугольных импульсов. Управление такими приводами заключается в том, что по определенному закону изменяются параметры этой управляющей последовательности импульсов: длительность и период следования. При этом в большинстве задач амплитуда импульсов остается постоянной, определяемой источником постоянного тока. Математические модели таких систем включают в себя как непрерывные, так и дискретные функции времени, что позволяет отнести эти модели к классу гибридных (непрерывно-дискретных) систем.

В работе [3] рассмотрены вопросы математического моделирования гибридных электротехнических систем на основе использования дифференциальных уравнений, включающих специальные функции, позволяющие учитывать дискретизацию сигналов управления в конкретные моменты времени. В работе [4] решается задача импульсного управления ги-

бридной электротехнической системой путём аналитического синтеза закона управления на основе непрерывной дифференциальной модели с последующей дискретной реализацией полученного закона управления в виде последовательности прямоугольных импульсов постоянной амплитуды и переменной скважности.

Задачи аналитического синтеза управлений при линейной математической модели системы для различных функционалов качества достаточно изучены. В общем случае большинство практических задач сводится к рассмотрению задачи минимизации функционала качества, включающего в себя терминальную и интегральную составляющие, характеризующие конечную цель управления и потери (затраты энергии) в процессе управления. Представляет практический интерес задача формирования последовательности импульсов для оптимального управления электрическим приводом, применяемым в системе мониторинга наземных объектов БЛА. При этом при постоянной амплитуде управляющих импульсов, определяемой источником постоянного тока, необходимо определить, чем управлять, то ли длительность импульсов, периодом следования, или тем и другим. Решение данной задачи может быть получено с помощью аналитического синтеза управления по критерию максимального быстродействия. Полученный закон управления в данном случае называется форсированным управлением. В некоторых источниках такое управление носит название «банг-банг» управление [5]. Методы реализации такого управления известны при детерминированных начальном и конечном состояниях объекта управления без случайных возмущений и при учете ограничений на максимальное значение управления.

Форсированное управление обеспечивает максимальное быстродействие регуляторов, функционирующих на основании использования измерений переменных, характеризующих состояние системы. Так как эти измерения, как правило, имеют ошибки в виде случайных составляющих выходных переменных, то в общем случае следует рассматривать стохастическую постановку задачи синтеза управления. Учитывая, что для линейных объектов справедлива так называемая теорема разделения [5, 6], следовательно, задачи оптимального оце-

нивания фазовых координат управляемой системы и синтеза оптимального закона управления можно решать последовательно.

Известно, что форсированное управление может применяться при управлении траекторией летательного аппарата, при управлении энергетическими или другими промышленными установками [6].

**Решение задачи управления.** Рассмотрим общую математическую постановку задачи. Пусть объект управления описывается векторным уравнением в канонической форме вида [6, 7]

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (1)$$

$X(t)$  –  $n$ -мерный вектор фазовых координат системы,  $U(t)$  – вектор управлений размерности  $m \leq n$ ,  $A(t)$  и  $B(t)$  – матрицы известных коэффициентов.

На конечное состояние объекта управления наложено ограничение  $X(t_k) = X_k$ . Требуется определить вектор оптимального управления  $U(t)$ , обеспечивающий перевод объекта управления из начального состояния  $X_0$  в конечное состояние  $X_k$  за минимальное время  $t_k - t_0$  с учетом того, что максимальные значения компонент вектора управлений ограничены значениями  $U_{i\max}$  ( $i = 1, m$ ). Минимизируемый функционал качества (целевая функция) при этом имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_k} dt = t_k - t_0. \quad (2)$$

В данной постановке задачу удобно решать, используя принцип максимума Понтрягина. При этом вводится в рассмотрение новая  $(n+1)$ -я фазовая координата  $X_{n+1}$ , удовлетворяющая уравнению

$$\dot{X}_{n+1} = 1, \quad X_{n+1}(t_0) = t_0. \quad (3)$$

Согласно принципу максимума [8] оптимальное управление должно доставлять максимум функции Гамильтона  $H = H(X, U, \lambda, t)$ , имеющей в данном случае вид

$$H(X, U, \lambda, t) = 1 + \lambda^T(t)A(t)X(t) + \lambda^T(t)B(t)U(t). \quad (4)$$

В выражении (4)  $\lambda(t)$  – вектор неопределенных множителей Лагранжа, определяемых ограничениями, накладываемыми конечным состоянием системы управления.

Из выражения (4) следует, что необходимое условие максимума функции  $H$  по отношению к скалярным компонентам управления  $U_i = U_i(t) \in U(t)$  определяется выражением

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i U_i > 0, |U_i| = U_{i\max}. \quad (5)$$

Функция Гамильтона (4) в данном случае имеет вид

$$H(X, U, \lambda, t) = 1 + \lambda^T(t) A(t) X(t) + |\lambda^T(t) B(t)| U_{\max}(t), \quad (6)$$

а оптимальное управление, минимизирующее гамильтониан (6), и соответственно функционал (2) определяется формулой [8, 9]

$$U(t) = -U_{\max} \operatorname{sign}[\lambda^T(t) B(t)]. \quad (7)$$

В соответствии с принципом максимума канонические уравнения Понтрягина в данном случае имеют вид [5, 8]

$$\dot{X}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} =$$

$$A(t)X(t) - B(t)U_{\max} \operatorname{sign}[\lambda^T(t) B(t)], \quad (8)$$

$$X(t_0) = X_0,$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -A^T(t)\lambda(t), \quad \lambda(t_k) = \lambda_k. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) имеет вид

$$\lambda(t) = \lambda(t_k) e^{-A^T(t-t_k)}. \quad (10)$$

**Управление электродвигателем.** Применим данный метод определения оптимального управления к математической модели электродвигателя, которая описывается известной системой дифференциальных уравнений [2, 10].

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad (11)$$

$$\dot{\omega} = -\alpha\omega + bu, \quad \omega(t_0) = \omega_0. \quad (12)$$

Здесь  $\varphi$  – угол поворота ротора двигателя,  $\omega$  – угловая скорость поворота,  $\alpha = 1/T$ ,  $b = K/T$ ,  $T$  – постоянная времени,  $K$  – обобщенный коэффициент усиления электродвигателя.

В матричной форме задача имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} \varphi(t_0) \\ \omega(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Матрица переходов в соответствии с (10) в данном случае имеет вид

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

а оптимальное форсированное управление в соответствии с (7) в данном случае вычисляется по формуле [5]

$$u(t) = -U_{\max} \operatorname{sign} \left[ \varphi(t) + \frac{1}{\alpha} \omega(t) - \left\{ \frac{\operatorname{sign}[\omega(t)]}{\alpha^2} \right\} \left\{ \ln[1 + \alpha|\omega(t)|] \right\} \right]. \quad (15)$$

На рис. 1, 2 представлены результаты моделирования системы (11)–(12) при управлении (15), полученные в следе Mathcad при решении дифференциальных уравнений, описывающих состояние гипотетической системы управления, методом Эйлера. На рис. 1 – графики изменения  $\varphi(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $u(t)$  при следующих начальных условиях:  $\varphi(0) = 1$ ,  $\omega(0) = -0.5$ ,  $u(0) = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $U_{\max} = 0.6$ .

На рис. 2 представлены графики изменения  $\varphi(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $u(t)$  при следующих начальных условиях:  $\varphi(0) = 1$ ,  $\omega(0) = -0.5$ ,  $u(0) = 0$ ,  $\alpha = 2$ ,  $U_{\max} = 2$ .

Из рис. 1, 2 видно, что, не смотря на скачкообразное изменение управляющего сигнала  $u(t)$ , выходной сигнал  $\varphi(t)$  не претерпевает резких изменений по причине инерционности системы, обусловленной её конструктивными особенностями. Путем изменения постоянной времени привода, характеризуемой коэффициентом  $\alpha$ , или напряжения питания  $U_{\max}$  можно получить необходимые характеристики переходных процессов конкретной гибридной системы управления.

### Заключение

Приведенные теоретические положения и результаты математического моделирования показывают, что при постановке и решении задачи форсированного управления управляющий сигнал представляет собой последовательность прямоугольных импульсов переменной полярности с заданной амплитудой и переменной длительностью. Это может быть использовано при управлении вентилями электродвигателями постоянного тока, применяемыми в различных системах слежения такими, как радиолокаторы, следящие телекамеры и т. п.

В данном случае наглядно присутствует такая особенность форсированного управления, как наличие знакопеременных импульсов в установившемся режиме после окончания процесса управления (рис. 1, 2), что может на практике приводить к нежелательным результатам, например – к преждевременному разряду аккумулятора постоянного тока. Такого

рода нежелательные явления могут быть устранены различными инженерными конструктивными решениями, например, отключением  $U(t)$  при  $|X(t) - X_k| \leq \varepsilon$ , где  $X_k$  – конечная точка фазовых координат рассматриваемой системы после окончания управления,  $\varepsilon$  – величина, характеризующая заданную точность решения задачи управления.

### Литература

1. **Беспилотные** летательные аппараты. Основы устройства и функционирования / под ред. И. С. Голубева, И. К. Туркина. – М.: МАИ, 2010. – 654 с.
2. **Терехов, В. М.** Системы управления электроприводов / В. М. Терехов. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 304 с.
3. **Лобатый, А. А.** Математическое моделирование гибридных электротехнических систем / А. А. Лобатый, Ю. Н. Петренко Ю. Н., А. Эльзейн, А. С. Абуфанас // Наука и техника. – 2016. – № 4. – С. 322–328.
4. **Лобатый, А. А.** Импульсное управление гибридной электротехнической системой / А. А. Лобатый, Ю. Н. Петренко Ю. Н., А. Эльзейн, А. С. Абуфанас // Системный анализ и прикладная информатика, 2016. № 4(12). С. 46–51.
5. **Сейдж, Э. П.** Оптимальное управление системами / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
6. **Синтез регуляторов систем автоматического управления** / под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. – М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 616 с.
7. **Теория систем автоматического управления** / под ред. В. Л. Бесекерского, Е. П. Попова. – М.: Изд. Санкт-Петербурга, 2003. – 747 с.
8. **Казаков, И. Е.** Методы оптимизации стохастических систем / И. Е. Казаков, Д. И. Гладков. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
9. **Брайсон, А.** Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-ши. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
10. **Гульков, Г. И.** Системы автоматического управления электроприводами / Г. И. Гульков, Ю. Н. Петренко, Т. В. Бачило; под общ. ред. Ю. Н. Петренко. – Минск: ИВЦ Минфина, 2014. – 366 с.

### References

1. **Unmanned aerial vehicles. Fundamentals of the device and functioning** / ed. I. S. Golubeva, I. K. Turkina. – Moscow: MAI, 2010. – 654 p.
2. **Terekhov, V. M.** Control systems of electric drives / V. M. Terekhov. – M.: Publishing Center «Academy», 2006. – 304 p.
3. **Lobaty, A. A.** Mathematical modeling of hybrid electrotechnical systems / A. A. Lobaty, Yu. N. Petrenko Yu. N., A. Elzeyn, A. S. Abufanas // Science and Technology. – 2016. – No. 4. – P. 322–328.
4. **Lobaty, A. A.** Impulse control of a hybrid electrical system / A. A. Lobaty, Yu. N. Petrenko Yu. N., A. Elzeyn, A. S. Abufanas // System Analysis and Applied Informatics, 2016. No. 4 (12). Pp. 46–51.
5. **Sage, E. P.** Optimum system management / EP. Sage, C. S. White. – Moscow: Radio and Communication, 1982. – 392 p.
6. **Synthesis of regulators of automatic control systems** / ed. K. A. Pupkov and N. D. Egurovaa. – Moscow: Izd. MSTU them. N. E. Bauman, 2004. – 616 p.
7. **The theory of automatic control systems** / under. Ed. V. L. Besekersky, E. P. Popova. – Moscow: Izd. St. Petersburg, 2003. – 747 p.
8. **Kazakov, I. E.** Methods for optimizing stochastic systems. Kazakov, D. I. Gladkov. – Moscow: Nauka, 1987. – 304 p.
9. **Bryson, A.** Applied theory of optimal control / A. Bryson, Ho Yushu. – Moscow: Mir, 1972. – 544 p.
10. **Gulkov, G. I.** Automatic control systems for electric drives / G. I. Gulkov, Yu. N. Petrenko, T. V. Bachilo; under the Society. Ed. Yu. N. Petrenko. – Minsk: IVC of the Ministry of Finance, 2014. – 366 p.

Поступила  
15.09.2017

После доработки  
27.09.2017

Принята к печати  
15.12.2017

*Abufanas A. S., Lobaty A. A., Yacina Y. F.*

## ANALYTICAL SYNTHESIS OF FORCED PULSE ELECTRONIC DRIVE CONTROL OF A TRACKING SYSTEM

*Belarusian National Technical University*

*The problem of analytical synthesis of a control signal by a linear dynamical system is considered. As an optimization criterion, it is proposed to consider the transition time of the system from the initial state to a given final state. This type of control is called forced, providing the maximum system speed. The principle of solving this problem is considered on the basis*

of application of uncertain Lagrange multipliers and the Pontryagin maximum principle. Expressions are obtained for the matrix of transitions of the system and the control signal in a vector form.

As an example, the electric drive described by the widespread second-order mathematical model is considered to evaluate the efficiency of the proposed method. Qualitative illustrations of the operability of the proposed approach, obtained by modeling in the Mathcad environment, and quantitative characteristics of the change in the input and output signals of the hypothetical control system are presented. It is shown that the use of forced control does not lead to the output of variables characterizing the state of the system, beyond the limits of admissible values.

The use of forced control makes it possible to synthesize the control law in the form of a sequence of rectangular pulses of constant amplitude determined by the power source, variable duty cycle and polarity. This approach can be used for the control of DC-type DC motors used in various tracking systems used on unmanned aerial vehicles. Key words: forced control, target function, electric drive, pulse train. The use of forced control makes it possible to synthesize the control law in the form of a sequence of rectangular pulses of constant amplitude determined by the power source, variable duty cycle and polarity. This approach can be used for the control of DC-type DC motors used in various tracking systems used on unmanned aerial vehicles.

**Keywords:** forced control, target function, electric drive, pulse train.



**Абуфанас Альседык Салем Ахмед**

Аспирант кафедры «Информационные системы и технологии» БНТУ, обучается по специальности «Системный анализ, управление и обработке информации»

Пр. Независимости 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: + 37517292-15-01, e-mail: upnkvk@bntu.by

**Abufanas Alseddig Salem Ahmed**

Post Graduate student, Department of «Information Systems and Technologies» BNTU,  
field of study «System Analysis, Control and Data Processing «.



**Lobaty A. A.** Doctor of science, professor. in 2000 he established chair «information systems and technologies» in belorussian national technical university, department of «international institute of distance education». his research interests include algorithms, concepts, and architecture for digital signal processing systems. he has extensive consulting experience in control of unmanned aerial vehicles. he is author and coauthor of many papers in scientific magazines, conference proceedings, and a number of books. he has number of university and state awards for achievements in teaching and research.

E-mail: lobaty@tut.by



**Yacina Y. F.**

Director of the State Research and Production Enterprise unmanned multipurpose complexes. A specialist in the field of research and development of control systems of mobile robotic systems for various economic purposes. Head of research and development work on the creation of unmanned aerial vehicles.

E-mail: yanvad003@gmail.com