

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЬЦЕВЫХ ЛАЗЕРОВ****Круглик Г.С., Зуйков И.Е.**

Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь

*Приведены результаты теоретического анализа динамики установления связи между встречными волнами в кольцевых лазерах, обеспечивающей корреляцию низкочастотных флуктуаций и дифференциальный режим работы кольцевых лазеров, как датчика угловых перемещений. Показано наличие двух времен становления связи: быстрого и медленного. (E-mail: ie-zuikov@bntu.by)*

**Ключевые слова:** кольцевой лазер, лазерный гироскоп, связь встречных волн, зона захвата, корреляция флуктуаций.

**Введение**

Кольцевой лазер (КЛ) является дифференциальным датчиком угловых перемещений, работа которого основана на измерении фазовой невзаимности для встречных волн, вызванной вращением резонатора. Уникальность КЛ состоит в реализуемой в них степени дифференциальности по отношению ко всем воздействующим на них факторам, кроме измеряемого вращения. Так, поскольку практически все используемые в навигационных целях КЛ, являются He-Ne лазерами, работающими на длине волны 0,63 мкм (т.е. несущая частота  $\sim 5 \cdot 10^{14}$  Гц), для достижения дрейфа нуля на уровне  $0,001^\circ/\text{ч}$  (что с учетом размеров современных лазеров соответствует дрейфу частоты  $(5-2) \cdot 10^{-2}$  Гц) обеспечиваемая в них степень недифференциальности должна быть на уровне  $10^{-16}$ . Такая степень недифференциальности не может быть обеспечена только технологическими и техническими методами. На практике она достигается благодаря наличию связи встречных волн за счет обратного рассеяния на зеркалах резонатора.

В то же время вся история развития КЛ связана со стремлением уменьшить связь встречных волн генерируемых в кольцевом резонаторе, приводящую к явлению захвата при малых измеряемых скоростях вращения. Кроме повышения качества зеркал (направленного на уменьшение обратного рассеяния) эта работа привела к использованию знакопеременных частотных подставок с различными ошумлен-

ными, динамически разрушающими связь встречных волн [1–4].

При измерении больших угловых скоростей и при работе с периодической «частотной подставкой» (особенно со знакопеременной) корректность получаемой информации определяется временем установления режима биений в КЛ. На практике используются частотные подставки с частотой коммутации до единиц кГц при амплитуде до нескольких сотен кГц. Для гармонической подставки это соответствует максимуму скорости изменения частотной невзаимности ( $\partial v / \partial t$ ) до  $10^9$  Гц/с. Это требует анализа работы КЛ в таком динамическом режиме и определения его влияния на процесс установления связи между встречными волнами с учетом возникающих переходных процессов.

**Анализ уравнения для фазы сигнала биений**

Оценим возможные динамические погрешности КЛ. Обычно используемое для рассмотрения процессов в КЛ дифференциальное уравнение первого порядка для фазы сигнала биений, полученное из полной системы амплитудно-фазовых уравнений КЛ при условии слабой связи между встречными волнами [5–7] не содержит в себе механизмов, определяющих задержку установления решения. Любые вычисления, выполненные с его помощью, не учитывают динамических характеристик КЛ.

Поэтому воспользуемся дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{1}{\Gamma} \ddot{\psi} + \dot{\psi} = -v + v_3 \sin(\psi + \varphi), \quad (1)$$

где  $v = \Delta v + v_{\Pi}(t)$  – частотная невзаимность резонатора для встречных волн;  $\Delta v = K \cdot \Omega$  – частотное расщепление, связанное с вращением КЛ;  $K$  – масштабный коэффициент КЛ;  $\Omega$  – скорость вращения КЛ;  $v_{\Pi}(t)$  – функция частотной подставки;  $v_3$  – величина зоны захвата;  $\varphi$  – фаза связи встречных волн;  $\Gamma$  – релаксационный параметр, определяемый равенством:

$$\Gamma = \frac{\omega}{Q \cdot F} \cdot (\mu - 1), \quad (2)$$

здесь  $Q$  – добротность резонатора;  $\mu$  – превышение накачки над пороговым значением;  $F$  – функция расстройки частоты генерации  $\omega$  относительно центра доплеровского контура усиления  $\omega_0$ .

Для равноизотопной смеси изотопов  $Ne^{20}$  и  $Ne^{22}$ , обычно используемой в современных КЛ, эта функция имеет вид:

$$F = 1 + 2\gamma^2 \cdot \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + (\Delta/2)^2}{\left[ (\omega_0 - \omega)^2 - (\Delta/2)^2 \right]^2 + \gamma^2 \cdot \left[ (\omega_0 - \omega)^2 + (\Delta/2)^2 \right]^2}, \quad (3)$$

где  $\gamma$  – однородная ширина линии перехода в канале генерации;  $\Delta$  – расстояние между центрами линий различных изотопов;  $\varepsilon$  – относительная концентрация примесного изотопа.

Для расчета времени установления режима биений  $\tau$  достаточно рассмотреть задачу с переменной подставкой в виде отдельной ступеньки (рисунок). До начального момента  $t = 0$  частотная подставка была постоянной и равнялась  $v_{\Pi}(t \leq 0) = -v_{\Pi 0}$ . При  $t \geq T$  подставка также постоянна, но имеет противоположный знак  $v_{\Pi}(t \geq 0) = v_{\Pi 0}$ . В промежутке  $0 < t < T$  идет процесс переключения невзаимного элемента, в результате которого подставка изменяется от величины  $-v_{\Pi 0}$  до  $+v_{\Pi 0}$ . Считая, что КЛ переходит из установившегося режима с  $v_{\Pi} = -v_{\Pi 0}$ , найдем время установления режима с подставкой  $v_{\Pi} = v_{\Pi 0}$  после завершения момента переключения.

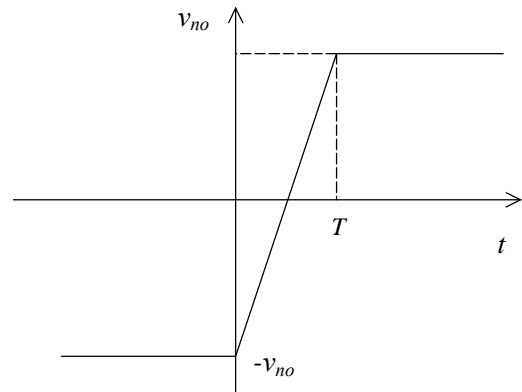


Рисунок – Фронт знакопеременной частотной подставки

Решение уравнения (1) для принятых условий переключения целесообразно искать в виде суммы двух слагаемых:

$$\psi(t) + \varphi = \tilde{\psi}(t) + \psi_0(t), \quad (4)$$

одно из которых  $\psi_0(t)$  соответствует установившемуся режиму биений и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\Gamma} \ddot{\psi} + \dot{\psi} = -(v_0 + v_{\Pi 0}) + v_3 \sin(\psi_0), \quad (5)$$

а второе –  $\tilde{\psi}(t)$  описывает переходной процесс. Подставляя (4) в (1) с учетом известного решения (5) получим для  $\tilde{\psi}$ :

$$\frac{1}{\Gamma} \ddot{\tilde{\psi}} + \dot{\tilde{\psi}} = v_{\Pi 0} - v_{\Pi}(t) + v_3 [\sin(\tilde{\psi} + \psi_0) - \sin(\psi_0)]. \quad (6)$$

Это уравнение в общем случае не решается аналитически. Однако из него можно извлечь информацию о  $\tau$ , если учесть, что функция  $\tilde{\psi}(t)$  является затухающей, т.е. вблизи установившегося режима  $|\tilde{\psi}(t)| \ll 1$ . С учетом этого условия уравнение (6) можно линеаризовать:

$$\frac{1}{\Gamma} \ddot{\tilde{\psi}} + \dot{\tilde{\psi}} = v_{\Pi 0} - v_{\Pi}(t) + v_3 \cdot \tilde{\psi} \cdot \cos \psi_0. \quad (7)$$

Одним из коэффициентов полученного уравнения (7) является  $\cos \psi_0$ . Для его нахождения учтем, что решение уравнения (5) при предположении  $|\dot{\psi}| \ll \Gamma \cdot |\psi_0|$  имеет вид:

$$\psi_0(t) \approx -2 \cdot \arctg \frac{1}{\Delta v + v_{\text{по}}} \left\{ \sqrt{(\Delta v + v_{\text{по}})^2 - v_3^2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta v + v_{\text{по}})^2 - v_3^2} \cdot t \right) - v_3 \right\}. \quad (8)$$

Это решение описывает режим биений с частотой:

$$\Delta v = \sqrt{(v_0 + v_{\text{по}})^2 - v_3^2}. \quad (9)$$

В силу уравнения (8) коэффициент  $\cos \psi_0$  периодически изменяется во времени с разностной частотой (9). Следовательно, уравнение (7) представляет собой неоднородное уравнение Хилла. Анализ подобного уравнения проведен в работе [8], согласно которой общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$\tilde{\psi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i(k\Delta v - \frac{\Gamma}{2})t} \left( AC_k(\lambda) \cdot e^{\lambda t} + BC_k(-\lambda) \cdot e^{-\lambda t} \right) + \\ + \frac{\Gamma}{2\lambda \cdot D(\lambda)} \sum_k \sum_{k'} \left\{ C_k(-\lambda) C_{k'}(\lambda) e^{i(k\Delta v - \frac{\Gamma}{2} - \lambda)t} \cdot \int_0^T e^{i(k\Delta v + \frac{\Gamma}{2} + \lambda)t'} \Delta v_n(t') dt' - C_k(\lambda) C_{k'}(-\lambda) e^{i(k\Delta v + \frac{\Gamma}{2} + \lambda)t} \cdot \int_0^T e^{i(k'\Delta v + \frac{\Gamma}{2} - \lambda)t'} \Delta v_n(t') dt' \right\}, \quad (10)$$

где А и В – постоянные, определяемые из начальных условий;  $C_k(t)$  – коэффициенты, удовлетворяющие системе линейных алгебраических уравнений [9]:

$$\Delta v_n(t) = v_{\text{по}} - v_{\text{п}}(t), \quad (11)$$

$$D(\lambda) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( 1 + i \frac{k\Delta v_n}{\lambda} \right) C_k(\lambda) C_{-k}(-\lambda), \quad (12)$$

$\lambda$  – характеристический показатель исходного уравнения, который вдали от зоны захвата ( $\Delta v + v_{\text{по}} \gg v_3$ ) описывается следующим выражением:

$$\lambda = \frac{\Gamma}{2} - \sigma^2 \frac{v_3^2}{\Delta v_{\text{п}}} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi\Gamma}{\Delta v_{\text{п}}} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\pi\Gamma}{\Delta v_{\text{п}}}}, \quad (13)$$

причем:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \sum \frac{\left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right)^2}{\left[ k^2 + \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right)^2 \right] \cdot \left[ (k+1)^2 + \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right)^2 \right]}. \quad (14)$$

При выводе уравнения (10) учтено, что  $\Delta v_{\text{п}}(t) = 0$  при  $t \gg T$ .

Таким образом, переходный процесс описывается осциллирующей, затухающей функцией (10) с характерными временами релаксации:

$$\tau_1 = \frac{1}{\left( \frac{\Gamma}{2} \right) + \lambda}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\left( \frac{\Gamma}{2} \right) - \lambda}. \quad (15)$$

Использованное условие малости  $\tilde{\psi}$  по сравнению с единицей выполняется при  $t \gg T$ .

### Время установления режима биений

Для оценки времен  $\tau_1$  и  $\tau_2$  вычислим сумму (15), разлагая каждый из членов этой суммы на элементарные дроби.

$$\frac{1}{\left[ k^2 + \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right)^2 \right] \cdot \left[ (k+1)^2 + \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right)^2 \right]} = \\ = \frac{A_1}{k + i \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right)} + \frac{A_2}{k - i \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right)} + \frac{A_3}{k + 1 + i \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right)} + \\ + \frac{A_4}{k + 1 - i \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right)}, \quad (16)$$

где:

$$A_1 = -A_4 = \frac{1}{i \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right) \left[ i \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right) - 1 \right]}, \quad (17) \\ A_2 = -A_3 = \frac{1}{i \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right) \left[ i \left( \frac{\Gamma}{2\Delta v_{\text{п}}} \right) + 1 \right]}.$$

С помощью известных формул [5]:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k + x} = \pi \cdot \operatorname{cth} \pi x, \quad \operatorname{ctg} ix = -i \cdot \operatorname{ctg} \pi x \quad (18)$$

преобразуем выражение (18):

$$\sigma^2 = \frac{\Gamma/\Delta v_{\Pi}}{1 + (\Gamma/\Delta v_{\Pi})^2} \operatorname{cth}\left(\pi\Gamma/2\Delta v_{\Pi}\right). \quad (19)$$

С учетом (19) и (13) находим:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \Gamma - v_3 \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + (\Delta v_{\Pi})^2} \operatorname{cth}\left(\pi\frac{\Gamma}{2\Delta v_{\Pi}}\right) \cdot \frac{\operatorname{ch}\left(\pi\frac{\Gamma}{\Delta v_{\Pi}}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\pi\frac{\Gamma}{\Delta v_{\Pi}}\right)} \approx \Gamma, \\ \tau_2 &= v_3 \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + (\Delta v_{\Pi})^2} \operatorname{cth}\left(\pi\frac{\Gamma}{2\Delta v_{\Pi}}\right) \cdot \frac{\operatorname{ch}\left(\pi\frac{\Gamma}{\Delta v_{\Pi}}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\pi\frac{\Gamma}{\Delta v_{\Pi}}\right)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для КЛ, работающих на равноизотопной смеси  $\text{Ne}^{20}$  и  $\text{Ne}^{22}$  и имеющих параметры:

$$\begin{aligned} \omega/Q &= 10^6 \text{ с}^{-1}, & \Delta v_{\Pi} &= 10^{-4} \text{ с}^{-1}, & \gamma &= 10^8 \text{ с}^{-1}, \\ \mu - 1 &= 10^{-2}, & v_3 &= 10^3 \text{ Гц}, & \Delta &= 8 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}, \end{aligned}$$

из (20) находим:

$$\tau_1 \sim 10^{-4} \text{ с}, \quad \tau_2 \sim 10^{-2} \text{ с},$$

т.е. процесс установления режима биений имеет две составляющие: с быстрым и медленным затуханием.

Аналогично может быть определено и время установления режима захвата. В общем случае оно может отличаться от того, что было получено в предыдущем разделе. Это связано с использованием более строгого исходного уравнения, учитывающего релаксационные процессы в КЛ.

В зоне захвата  $\ddot{\psi} = \dot{\psi} = 0$  и в силу уравнения (5) имеем:

$$\sin \psi_0 = \frac{\Delta v + v_{\text{ПО}}}{v_3}. \quad (21)$$

Откуда следует, что режим захвата существует в области:

$$|\Delta v + v_{\text{ПО}}| \leq v_3, \quad (22)$$

причем он асимптотически устойчив (по Ляпунову), если  $\cos \psi_0 < 0$ . В этом случае уравнение (7) легко решается, и в результате получаем

монотонно затухающую функцию  $\tilde{\psi}(t)$  с характерными временами релаксации:

$$\begin{aligned} \tau_{13} &\approx \left( \Gamma - v_3^2 - \sqrt{(\Delta v + v_{\text{ПО}})^2} \right)^{-1} \approx \frac{1}{\Gamma}, \\ \tau_{23} &\approx \left( \sqrt{v_3^2 - (\Delta v + v_{\text{ПО}})^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Как видно из уравнений (23) и (20)  $\tau_{13}$  практически совпадает с  $\tau_1$ , а времена  $\tau_{23}$  и  $\tau_2$  различны по величине, но сходны по своей сущности. Эти времена своим происхождением обязаны процессам релаксации, которые обусловлены связью встречных волн. При увеличении связи, т.е. с ростом ширины зоны захвата, эти времена уменьшаются.

Следовательно, чем сильнее связь, тем быстрее устанавливается стационарный режим биений и захвата. Из чего следует ограничение в возможности улучшения параметров КЛ за счет уменьшения их зоны захвата. Следует отметить, что вторая тенденция – уменьшение габаритов создаваемых КЛ, – частично компенсирует усилия по уменьшению причин, приводящих к связи встречных волн. Поэтому динамические характеристики используемых в настоящее время приборов удовлетворяют требованиям большинства реальных приложений по динамическим характеристикам.

В частности, полученная величина  $\tau_1$  не противоречит типичным значениям частоты колебаний вибропривода и может приводить лишь к незначительной модуляции амплитуды сигнала биений.

## Заключение

Связь встречных волн в КЛ обеспечивает корреляцию флуктуаций их частоты, что обеспечивает дифференциальный режим работы КЛ при использовании его в качестве датчика угловых перемещений.

Уменьшение зоны захвата КЛ может приводить к ухудшению их динамических точностных характеристик.

## Список использованных источников

1. Бабур, Н. Направления развития инерциальных датчиков / Н. Бабур, Дж. Шмидт // Гироскопия и навигация. – 2000. – № 1 (18). – С. 3–15.

2. Линч, Д. Взгляд компании «НОРТРОП ГРУММАН» на развитие инерциальных технологий / Д. Линч // Гироскопия и навигация. – 2008. – № 3. – С. 102–106.
3. Лукьянов, Д.И. Лазерные и волоконно-оптические гироскопы: состояние и тенденции развития / Д.И. Лукьянов // Гироскопия и навигация. – 1998. – № 4 (23). – С. 20–45.
4. Суханов, С.В. Исследование и анализ точностных характеристик лазерного гироскопа на температурных воздействиях / С.В. Суханов // Гироскопия и навигация. – 2009. – № 2. – С. 80.
5. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах / Г.С. Зейгер [и др.] ; под ред. Ю.Л. Климонтовича. – М. : Наука, 1974. – 413 с.
6. Куцак, А.А. О влиянии широкополосного шума на спектральные характеристики сигнала биений в кольцевом ОКГ / А.А. Куцак, Е.Ю. Стреколовская // Журнал прикладной спектроскопии. – 1976. – Т. 25, № 4. – С. 625–631.
7. Курятов, В.Н. Частотные характеристики кольцевого лазера на колеблющейся подставке / В.Н. Курятов, П.С. Ланда, Е.Г. Ларионцев // Известия вузов. Радиофизика. – 1968. – Т. 11, № 12. – С. 1839–1847.
8. Круглик, Г.С. [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. – 1970. – Т. 12. – № 3. – С. 432.
9. Морс, Ф.И. Методы теоретической физики / Ф.И. Морс, Г. Фешбах. – Т. 1. – ИИЛ, М., 1958.

---

Kruglik G.S., Zuikov I.E.

### Dynamic parameters of the ring lasers

The results of the theoretical analysis of dynamics of correlation determination between the contradirectional waves in ring lasers for low frequencies are given. This dynamics ensures a differential mode of an operation of the ring lasers as a sensor of the angle displacements. Presence of two modes of stabilization of a correlation is determined: a fast and a slow. (E-mail: ie-zuikov@bntu.by)

**Key words:** ring laser, laser gyro, intercoupling of contradirectional modes, lock-in zone, correlation of fluctuations.

*Поступила в редакцию 13.02.2012.*