

ЭНЕРГЕТИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕН

УДК 536.2(075)46

В. А. КОТ

**ГРАНИЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.
АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ И СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ***Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: valery.kot@hmti.ac.by*

Представлены результаты численного анализа точности и сходимости решений на основе интегрального метода граничных характеристик. На примере рассмотрения полуограниченного пространства с граничным условием первого рода показано, что построенные решения, по существу, являются точными, поскольку погрешность для широкой области значений параметров составляет сотые – десятитысячные доли процента.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, приближенный метод, интегральные тождества, фронт возмущения.

V. A. KOT

**BOUNDARY CHARACTERISTICS IN HEAT-CONDUCTION PROBLEMS. ANALYSIS
OF ACCURACY AND CONVERGENCE OF SOLUTIONS***A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: valery.kot@hmti.ac.by*

Results of numerical analysis of accuracy and convergence of solutions on the basis of the integral method of boundary characteristics are presented. It is shown by the example of consideration of a semi-bounded space with the first-kind boundary conditions that the solutions constructed are exact in essence because their error for parameters changing within a wide range comprises hundredth–ten-thousandth fractions of a percent.

Keywords: heat conduction equation, approximate method, integral identities, front of a disturbance.

Введение. Настоящая статья является логическим продолжением работы [1], в которой рассмотрен в общих чертах *интегральный метод граничных характеристик* (ИМГХ). Он относится к достаточно широкому классу интегральных методов, включающих в себя идею Т. Гудмена [2], связанную с введением в рассмотрение *фронта температурного возмущения* $\delta(t)$. Предложенный Т. Гудменом интегральный метод теплового баланса (Heat Balance Integral Method – HBIM) предусматривает три последовательных шага:

рассматривается область, ограниченная фронтом температурного возмущения $\delta(t)$, за пределами которого тело сохраняет первоначальную температуру,

температурный профиль в пределах возмущенной области $0 \leq x \leq \delta(t)$ представляется полиномом с переменными во времени коэффициентами, которые подлежат определению,

интегрируется уравнение теплопроводности по области $x \in [0, \delta(t)]$, что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $\delta(t)$.

Рассмотрим ИМГХ в приложении полубесконечной среды с граничным условием первого рода, т. е. ограничимся рассмотрением одного из основных и наиболее важных случаев. Отметим, что именно данная постановка рассматривается в большинстве публикаций (например, [3–5]).

Параметры оценки точности и сходимости решений. Оценку точности аппроксимационных решений, получаемых ИМГХ и другими приближенными интегральными методами, проведем с помощью параметров

$$\begin{aligned} \varepsilon_T &= T_{appr} - T_{ex}, \quad E = |T_{appr} - T_{ex}|, \quad E_{\max} = |T_{appr} - T_{ex}|_{\max}, \\ \|E_L^N\| &= \frac{1}{\delta(t)} \sqrt{\int_a^{\delta(t)} (T_{appr} - T_{ex})^2 dx}, \quad E_Q = |Q_{appr} - Q_{ex}|, \quad \varepsilon_Q = \left| \frac{Q_{appr} - Q_{ex}}{Q_{ex}} \right| 100\%, \end{aligned} \quad (1)$$

где T_{appr} , T_{ex} – приближенное и точное значения температуры соответственно, $\|E_L^N\|$ – модифицированная норма Лангфорда для полинома степени N ; E и E_{\max} – модуль погрешности (отклонения) и модуль максимальной абсолютной погрешности; E_Q , ε_Q – абсолютная и относительная ошибки расчета плотности теплового потока $(Q(t) = \partial T(x, t) / \partial x|_{x=0})$ на поверхности полупространства соответственно.

Сходимость решений охарактеризуем параметрами

$$\begin{aligned} p_E^1 &= \ln \frac{\|E_L^{N=v}\|}{\|E_L^{N=v+3}\|} \left(\ln \frac{v+3}{v} \right)^{-1}, \quad p_E^2 = \ln \frac{\|E_L^{N=5}\|}{\|E_L^{N=5+3k}\|} \left(\ln \frac{5+3k}{5} \right)^{-1}, \\ p_Q^1 &= \ln \frac{\varepsilon_Q^{N=v}}{\varepsilon_Q^{N=v+3}} \left(\ln \frac{v+3}{v} \right)^{-1} = \ln \frac{E_Q^{N=v}}{E_Q^{N=v+3}} \left(\ln \frac{v+3}{v} \right)^{-1}, \\ p_Q^2 &= \ln \frac{\varepsilon_Q^{N=5}}{\varepsilon_Q^{N=5+3k}} \left(\ln \frac{5+3k}{5} \right)^{-1} = \ln \frac{E_Q^{N=5}}{E_Q^{N=5+3k}} \left(\ln \frac{5+3k}{5} \right)^{-1}, \quad v=5, 8, \dots; k=1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\|E_L^{N=v}\|$, $\|E_L^{N=v+3}\|$, $\|E_L^{N=5}\|$, $\|E_L^{N=5+3k}\|$ – модифицированная норма (по Лангфорду) при полиномах степени $N=v$, $N=v+3$, $N=5$, $N=5+3k$ соответственно; $E_Q^{N=v}$, $E_Q^{N=v+3}$, $E_Q^{N=5}$, $E_Q^{N=5+3k}$, $\varepsilon_Q^{N=v}$, $\varepsilon_Q^{N=v+3}$, $\varepsilon_Q^{N=5}$, $\varepsilon_Q^{N=5+3k}$ – абсолютная и относительная (%) ошибки расчета теплового потока при $N=v$, $v+3$, 5 , $5+3k$ соответственно.

Постановка задачи и метод решения. Для полубесконечной среды с условием первого рода на поверхности задача представляется в безразмерной форме:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad 0 < x < \delta(t), \quad (3)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad (4)$$

$$T(0, t) = h(t), \quad (5)$$

$$T(\delta(t), t); \quad \frac{\partial T}{\partial x}(\delta(t), t) = 0, \quad (6)$$

$$T(x, t)|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (7)$$

где $T = (\bar{T} - \bar{T}_0) / \Delta T$ – относительная избыточная температура; \bar{T} – температура, \bar{T}_0 – начальная температура, ΔT – температурный масштаб, $t = \bar{t} / \tau$, $\tau = L^2 / \kappa$, $\rho = y / L$ – безразмерная координата, \bar{t} – время, κ – коэффициент теплопроводности, L – пространственный масштаб, y – пространственная координата. Решение задачи (3)–(5), (7) известно [6]:

$$T = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau. \quad (8)$$

При $h(t)=1$ из (8) имеем $T = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}}$.

В соответствии с граничным условием (6) и общей концепцией методов, использующих понятие «фронт возмущения», представим температурный профиль полиномом

$$T = h(t) + \sum_{j=1}^N a_j(t) \left(\frac{x}{\delta(t)}\right)^j. \quad (9)$$

В [1] введена в рассмотрение последовательность из интегральных граничных характеристик $\Gamma_n(t)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), которая для рассматриваемой задачи предстанет как

$$\left\{ \Gamma_n(t) = \int_0^t dt \dots \int_0^t h(t) dt \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (10)$$

Для первой стадии процесса в [1] доказано существование последовательности из тождественных равенств, образуемых граничными характеристиками n -го порядка и соответствующими $2n$ -кратными интегралами от искомой температурной функции для области $x \in [0, \delta(t)]$:

$$\{\mathcal{L}_n\{T\} \equiv \Gamma_n(t)\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n T &= \underbrace{\int_0^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x dx^2}_{\mathcal{L}_1} \dots \underbrace{\int_0^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x dx^2}_{\mathcal{L}_1^x} \underbrace{\int_0^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x T(x,t) dx^2}_{\mathcal{L}_1^x} = \int_0^0 \dots \int_0^0 T(x,t) dx^{2n}, \\ \mathcal{L}_n T &= \underbrace{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_1^x \dots \mathcal{L}_1^x \mathcal{L}_1^x T}_n, \quad \mathcal{L}_1^x = \int_0^x \int_{\delta(t)\delta(t)}^x (\dots) dx^2, \quad \mathcal{L}_1 = \int_0^0 \int_{\delta(t)\delta(t)}^x (\dots) dx^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Если обозначить $\Gamma_0(t) = h(t)$, а производную n -го порядка от функции $h(t)$ записать как

$$\frac{d^k h(t)}{dt^k} \equiv D_k h(t) = \Gamma_{-k}(t), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (13)$$

т. е. как интегральную граничную характеристику порядка минус k , то в этом случае для функции $h(t)$ граничного условия (6) можно составить последовательность из n -х интегральных характеристик:

$$\dots \Gamma_{-2}(t), \Gamma_{-1}(t), \Gamma_0(t), \Gamma_1(t), \Gamma_2(t) \dots, \quad (14)$$

или $\{\Gamma_n(t)\}_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Как показано в ряде работ (например, [7–10]), в виде дополнительных граничных условий могут быть приняты условия

$$\left. \frac{d^{2k} T}{dx^{2k}} \right|_{x=0} = \frac{d^k T(0,t)}{dt^k} = \frac{d^k h(t)}{dt^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (15)$$

В таком случае из (11)–(16) приходим к двойной последовательности для граничных характеристик

$$\{\Gamma_{-k}(t)\} \cup \{\Gamma_n(t)\}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}_\geq. \quad (16)$$

Такой формальный подход позволяет распространить интегральные операторы (12) на область отрицательного порядка:

$$\mathcal{L}_{-k} T = \underbrace{\frac{\mathcal{L}_{-1}}{\partial x^2} \dots \frac{\mathcal{L}_{-1}}{\partial x^2} \frac{\mathcal{L}_{-1}}{\partial x^2}}_k T(0, t) = \frac{\partial^{2k} T}{\partial x^{2k}} \Big|_{x=0}, \quad \mathcal{L}_{-k} T = \underbrace{\mathcal{L}_{-1} \dots \mathcal{L}_{-1} \mathcal{L}_{-1}}_k T, \quad \mathcal{L}_{-1} T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x=0}. \quad (17)$$

Отсюда вместо последовательности (17) запишем ее новое представление:

$$\{\mathcal{L}_{-k} T \equiv \Gamma_{-k}(t)\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (18)$$

Объединив (11) и (18), получим двойную последовательность из тождественных равенств

$$\{\mathcal{L}_{-k} T \equiv \Gamma_{-k}(t)\} \cup \{\mathcal{L}_n T \equiv \Gamma_n(t)\}, \quad n \in \mathbb{Z}_\geq, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (19)$$

Если исходить из описания температурного профиля полиномом (9), то для нахождения коэффициентов $a_j(t)$, $j = \overline{1, N}$, достаточно применить два граничных условия на фронте (6) и $(N-2)$ -уравнений из двойного ряда (19). Если в качестве первого приближения принять полином степени $N = 5$, чему отвечают три тождественных равенства $\{\mathcal{L}_n T \equiv \Gamma_n(t)\}_{n=1}^3$, а последующие приближения определить как $\{N\}_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$ ($n = 1, 2, \dots$), то из (16) приходим к двойному множеству для граничных характеристик

$$\{\Gamma_{-k}(t)\}_{k=0}^K \cup \{\Gamma_n(t)\}_{n=1}^{N-K-2}, \quad k = \overline{0, K}, \quad n = \overline{1, N-K-2}, \quad K = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Объединив дискретные переменные n и k посредством равенства $k = n - 1$, что вытекает из (19), преобразуем множество (20):

$$\{\Gamma_{-k}(t)\}_{k=0}^K \cup \{\Gamma_{k+1}(t)\}_{k=0}^{2K+3}, \quad k = \overline{0, K}, \quad K \in \mathbb{Z}_\geq, \quad (21)$$

или в раскрытом виде

$$\begin{array}{c} \xrightarrow[k=0]{K=0} \begin{pmatrix} \Gamma_3(t) \\ \Gamma_2(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \Gamma_0(t) \end{pmatrix} \xrightarrow[k=0,1]{K=1} \begin{pmatrix} \Gamma_5(t) \\ \Gamma_4(t) \\ \Gamma_3(t) \\ \Gamma_2(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \Gamma_0(t) \\ \Gamma_{-1}(t) \end{pmatrix} \xrightarrow[k=0,1,2]{K=2} \begin{pmatrix} \Gamma_7(t) \\ \dots \\ \Gamma_2(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \Gamma_0(t) \\ \Gamma_{-1}(t) \\ \Gamma_{-2}(t) \end{pmatrix} \xrightarrow[k=0,1,2,3]{K=3} \dots \xrightarrow[k=0,K]{K} \begin{pmatrix} \Gamma_{2K+3}(t) \\ \dots \\ \Gamma_1(t) \\ \Gamma_0(t) \\ \Gamma_{-1}(t) \\ \dots \\ \Gamma_{-K}(t) \end{pmatrix} \end{array} \quad (22)$$

Тогда из (19)–(21) следует двойное множество из тождественных равенств

$$\{\mathcal{L}_{k+1} T \equiv \Gamma_{k+1}(t)\}_{k=0}^{2K+3} \cup \{\mathcal{L}_{-2k} T \equiv \Gamma_{-2k}(t)\}_{k=0}^K, \quad k = \overline{0, K}, \quad K \in \mathbb{Z}_\geq. \quad (23)$$

Используя равенство $k = n - 1$, имеем

$$\{\mathcal{L}_n T \equiv \Gamma_n(t)\}_{n=1}^{2K+3} \cup \{\mathcal{L}_{-(n-1)} T \equiv \Gamma_{-(n-1)}(t)\}_{n=1}^K, \quad n = \overline{1, K}, \quad K \in \mathbb{Z}_\geq. \quad (24)$$

Отсюда приходим к следующей схеме определения полиномиальных коэффициентов:

$$\xrightarrow[N=5+3K]{K=0,1,2,\dots} \left\langle \begin{array}{l} \{\mathcal{L}_n T \equiv \Gamma_n(t)\}_{n=1}^{2K+3} \cup \{\mathcal{L}_{-(n-1)} T \equiv \Gamma_{-(n-1)}(t)\}_{n=1}^K \\ T(\delta(t), t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\delta(t), t) = 0 \end{array} \right\rangle \rightarrow \{a_j(t)\}_{j=1}^N. \quad (25)$$

Фронт $\delta(t)$ определим на основе интеграла теплового баланса [2]

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\delta(t)} T(x, t) dx = -\frac{\partial T(0, t)}{\partial x}. \quad (26)$$

Подставив в (29) полином (9), получим дифференциальное уравнение с начальным условием $\delta(0) = 0$:

$$\delta(t) \frac{d}{dt} \left[\delta(t) \left(h(t) + \sum_{j=1}^N \frac{a_j(t)}{j+1} \right) \right] + a_1(t) = 0. \quad (27)$$

Анализ точности и сходимости решений. Найдем решение задачи (3)–(6) для $K = \overline{0, 5}$ ($N_0 = 3$). Из соотношения $N = N_0 + 2 + 3K$ имеем $N = 5, 8, \dots, 20$. Тогда для нулевого приближения ($K = 0, N = 5$) из схемы (25) получаем систему линейных алгебраических уравнений (в матричной форме)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2/3 & 1/2 & 2/5 & 1/3 & 2/7 \\ 4/5 & 2/3 & 4/7 & 1/2 & 4/9 \\ 6/7 & 3/4 & 2/3 & 3/5 & 6/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2t/\sigma(t) - 1 \\ 12(t/\sigma(t))^2 - 1 \\ 120(t/\sigma(t))^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\sigma(t) = \delta(t)^2$. Отсюда находим

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{175}{16} + 86625 \frac{t^3}{\sigma^3} - \frac{19845}{2} \frac{t^2}{\sigma^2} + \frac{3675}{8} \frac{t}{\sigma}, & a_2 &= 40 - 554400 \frac{t^3}{\sigma^3} + 60480 \frac{t^2}{\sigma^2} - 2520 \frac{t}{\sigma}, \\ a_3 &= -\frac{525}{8} + 1212750 \frac{t^3}{\sigma^3} - 127575 \frac{t^2}{\sigma^2} + \frac{19845}{4} \frac{t}{\sigma}, & a_4 &= 50 - 1108800 \frac{t^3}{\sigma^3} + 113400 \frac{t^2}{\sigma^2} - 4200 \frac{t}{\sigma}, \\ a_5 &= -\frac{231}{16} + 363825 \frac{t^3}{\sigma^3} - \frac{72765}{2} \frac{t^2}{\sigma^2} + \frac{10395}{8} \frac{t}{\sigma}. \end{aligned}$$

Функцию $\sigma(t)$ определим из (26), откуда приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} \left(1 + \sum_{j=1}^N \frac{a_j(t)}{j+1} \right) + \sigma(t) \sum_{j=1}^N \frac{2}{j+1} \frac{da_j(t)}{dt} + 2a_1(t) = 0. \quad (28)$$

Подстановка в (28) коэффициентов $a_j(t), j = \overline{1, 5}$, дает дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = 168 \frac{19800 t^3 - 1872 t^2 \sigma(t) + 69 t \sigma(t)^2 - \sigma(t)^3}{55440 t^3 - 4536 t^2 \sigma(t) + 126 t \sigma(t)^2 - \sigma(t)^3} \quad (29)$$

с начальным условием $\sigma(0) = 0$. Решение (29) имеем простой вид: $\sigma(t) = \alpha t$, где $\alpha \approx 24,10645$ – корень алгебраического уравнения

$$3326400 - 369936 \alpha + 16128 \alpha^2 - 294 \alpha^3 + \alpha^4 = 0.$$

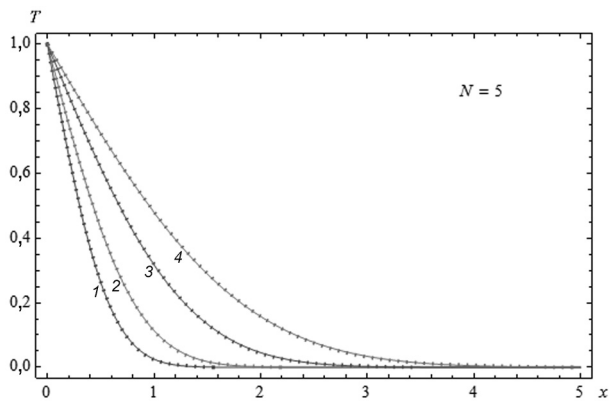


Рис. 1. Приближенные температурные профили, рассчитанные по формуле (30) (пунктир) в сравнении с точным решением (сплошные линии) в моменты времени $t = 0,1$ (1); $0,2$ (2); $0,5$ (3); 1 (4)

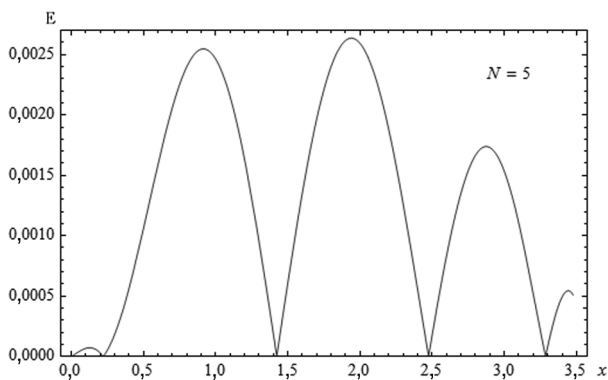


Рис. 2. Абсолютное отклонение приближенного температурного профиля, рассчитанного по формуле (30) в момент времени $t = 0,5$, от точного решения

Подстановка $a_j(t)$ и $\delta(t)$ в (9) дает решение

$$T(x,t) = \left(1 - 0,20367 \frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2 \left(1 - 0,15734 \frac{x}{\sqrt{t}} - 0,10710 \frac{x^2}{t} + 0,02389 \frac{x^3}{t^{3/2}}\right). \quad (30)$$

Температурные профили, рассчитанные ИМГХ, практически совпадают с кривыми для точного решения (рис. 1). Абсолютное отклонение приближенного решения от точного для фиксированного момента времени ($t_1 = 0,5$) отражает рис. 2.

Сравнительный анализ параметра E для ряда интегральных методов и ИМГХ (рис. 3, а) свидетельствует о более высокой аппроксимирующей точности последнего. По сравнению с решениями на основе полинома степени $n(t)$ [3] погрешность в ИМГХ снижается более чем на порядок. По сравнению с СИМ [11], РИМ [12,13] и НВИМ [14, 15] при сложном профиле с логарифмической функцией [16]

$$T(x,t) = \left[h(t) + \phi(t) \ln \left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right) \right] \left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^{n(t)}, \quad 0 \leq x \leq \delta(t), \quad (31)$$

а также с методом дополнительных граничных условий (АВСИМ) [9, 10] при степенном полиноме (9) ошибка снижается многократно. Это подтверждают данные табл. 1, 2, в которых представлены методы НВИМ, РИМ, СИМ, АВСИМ и ИМГХ. Отметим, что температурные профили для ИМГХ и АВСИМ заданы полином (9) с одинаковой степенью N (рис. 3, а, табл. 2).

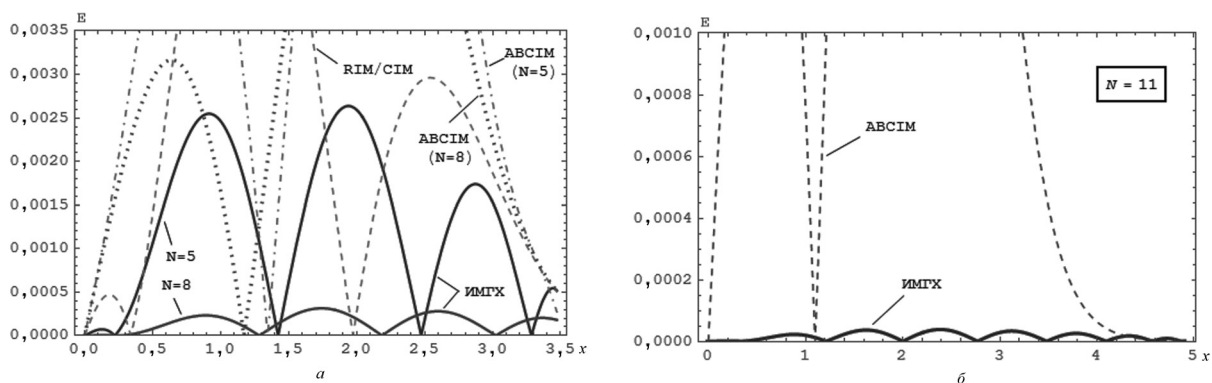


Рис. 3. Абсолютная погрешность температурных профилей в момент времени $t = 0,5$ для интегральных методов: а – НВИМ ($n = 5,2895$, профиль (18)), РИМ ($n = 5,5212$, профиль (18)), АВСИМ ($N = 5, 8$), ИМГХ ($N = 5, 8$); б – сравнение методов АВСИМ и ИМГХ

Таблица 1. Параметры оценки точности аппроксимации E_{\max} , $\|E_L^N\|$ ($t_1 = 1$)

Метод расчета	[14]	[15]		[16]		ИМГХ	
	НВИМ	НВИМ	RIM	RIM	СИМ	(5)	(8)
n (N)	2,121	2,008	2,074	5,5215	5,5132	(5)	(8)
Профиль	$\left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^n$			$\left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^n \left[1 + \phi(t) \ln\left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)\right]$		$1 + \sum_{j=1}^N a_j \left(\frac{x}{\delta(t)}\right)^j$	
E_{\max}	0,0351	0,0330	0,0298	0,00715	0,00721	0,00263	0,00031
$\ E_L\ $	0,0224	0,0223	0,0197	0,00312	0,00315	0,00147	0,000143

Таблица 2. Параметры E_{\max} , $\|E_L^N\|$ для АВСИМ и ИМГХ в зависимости от N

Метод расчета	Параметр	Степень полинома N				
		5	8	11	14	20
АВСИМ	E_{\max}	0,01035	0,00734	0,00575	0,00474	0,00351
ИМГХ		0,00263	0,000314	0,000036	$4,32 \times 10^{-6}$	$1,85 \times 10^{-7}$
АВСИМ	$\ E_L\ $	0,005977	0,003576	0,002481	0,001853	0,001175
ИМГХ		0,001481	$1,434 \times 10^{-4}$	$1,599 \times 10^{-5}$	$1,884 \times 10^{-6}$	$5,765 \times 10^{-8}$

Решение задачи (3)–(6) в первом приближении ($K = 1$, $N = 8$) приводит к аналогичной (по форме) системе уравнений, дающей коэффициенты $a_j(t)$, $j = \overline{1, 8}$ (с целью сокращения коэффициенты опускаем). Из (27) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{\left(10585935360 t^5 - 1023422400 t^4 \sigma(t) + 43243200 t^3 \sigma(t)^2 - \right.}{220540320 t^5 - 21621600 t^4 \sigma(t) + 900900 t^3 \sigma(t)^2 - 19800 t^2 \sigma(t)^3 + 225 t \sigma(t)^4 - \sigma(t)^5}, \left. -1009800 t^2 \sigma(t)^3 + 13200 t \sigma(t)^4 - 78 \sigma(t)^5\right)$$

откуда находим $\sigma(t) = \alpha t$, где $\alpha \approx 36,20416$ – корень алгебраического уравнения

$$10585935360 - 1243962720\alpha + 64864800\alpha^2 - 1910700\alpha^3 + 33000\alpha^4 - 303\alpha^5 + \alpha^6 = 0.$$

Для фронта возмущения получаем $\delta(t) = \sqrt{36,20416} t$, тогда решение принимает вид

$$T(x,t) = 1 - 0,5642193729 \frac{x}{\sqrt{t}} + 0,0467173026 \frac{x^3}{t^{3/2}} + 0,0023128157 \frac{x^4}{t^2} - \quad (32)$$

$$- 0,0066570621 \frac{x^5}{t^{5/2}} + 0,0017065643 \frac{x^6}{t^3} - 0,000181089 \frac{x^7}{t^{7/2}} + 7,22436525 \cdot 10^{-6} \frac{x^8}{t^4}.$$

Коэффициенты в решении (32) быстро убывают: $a_{j+1}/a_j \approx 10^{-1}$.

В [16] аналогичная задача решена с помощью представления температурного профиля комбинированным полиномом (31) на основе интегральных методов НВИМ, RIM и СИМ. Для RIM и СИМ соответственно получено $n = 5,5215$ и $5,5132$, т. е. $n > 5$. Расчеты показали, что ИМГХ ($N = 8$) превосходит по точности методы НВИМ, RIM и СИМ на два порядка и выше, а с комбинированным профилем (31) – примерно в 20 раз выше (рис. 3, а, табл. 2). Анализ решений, согласно АВСИМ ($N = 8$) и ИМГХ ($N = 8$), дает следующие значения параметров E_{\max} и $\|E_L\|$: $E_{\max}|_{\text{АВСИМ}} = 0,00734$, $E_{\max}|_{\text{ИМГХ}} = 0,000314$, $\|E_L\|_{\text{АВСИМ}} = 0,003576$, $\|E_L\|_{\text{ИМГХ}} = 1,434 \cdot 10^{-4}$. Для $N = 8$ точность решения ИМГХ более чем в 20 раз превосходит точность решения согласно АВСИМ.

Для второго ($K = 2, N = 11$) и третьего ($K = 3, N = 14$) приближений значения коэффициентов $a_j (j = 1, \bar{N})$ температурного профиля (5) приведены в табл. 3. В соответствии с ИМГХ из (28) для $N = 11$ и $N = 14$ находим $\delta(t) = \sqrt{48,3438266 t}$ и $\delta(t) = \sqrt{60,6889316 t}$ соответственно. В таком случае для $\delta(t)$ при разных приближениях ($K = 0, 1, 2, \dots$) приходим к последовательности

$$\{\delta(t)\}_K = \sqrt{24,10645 t}, \sqrt{36,20416 t}, \sqrt{48,3438266 t}, \sqrt{60,6889316 t}, \dots \quad (K = 0, 1, \dots).$$

Т а б л и ц а 3. Полиномиальные коэффициенты a_j для формулы (9)

$j = 0, 1, 2$		a_0	a_1	a_2
N	11	1	-0,564191515	0
	14	1	-0,564189637	0
$j = 3, 4, 5$		a_3	a_4	a_5
N	11	0,046994665	0	-0,003211522
	14	0,047007190	0	-0,003498003
$j = 6, 7, 8$		a_6	a_7	a_8
N	11	0,0005634	0,0006307	-0,00321152
	14	0	0,0001493	0,00007095
$j = 9, 10, 11$		a_9	a_{10}	a_{11}
N	11	0,00002022	-0,000001298	$3/427153 \cdot 10^{-8}$
	14	-0,00004946	0,000012216	-0,00000166
$j = 12, 13, 14$		a_{12}	a_{13}	a_{14}
N	14	$1,325642 \cdot 10^{-7}$	$-5,866628 \cdot 10^{-9}$	$1,1173503 \cdot 10^{-10}$

Охарактеризуем точность приближенных решений на основе применения полиномов высокого порядка. На рис. 3, б представлены значения параметра E для методов АВСИМ и ИМГХ при степени полинома $N = 11$. Представленные графики наглядно отражают совершенную несопоставимость сравниваемых интегральных методов по точности получения аппроксимационных решений. Параметры E_{\max} и $\|E_L\|$ для АВСИМ и ИМГХ соответственно равны: $E_{\max}|_{\text{АВСИМ}} = 0,00575$, $E_{\max}|_{\text{ИМГХ}} = 0,000036$, $\|E_L\|_{\text{АВСИМ}} = 0,002481$, $\|E_L\|_{\text{ИМГХ}} = 1,599 \cdot 10^{-5}$. В данном случае ($N = 11$) ИМГХ превосходит по точности решений АВСИМ примерно в 150 раз. Графики отклонения (ε_T) для $t = 0,5$ при $N = 14$ и 20 приведены на рис. 4. При степени полинома $N = 20$ имеем $E_{\max} = 1,85 \cdot 10^{-7}$, $\|E_L\| = 5,765 \cdot 10^{-8}$, что дает основание считать полученное решение, по существу, точным. При $N = 14$ получаем следующее отношение ошибок:

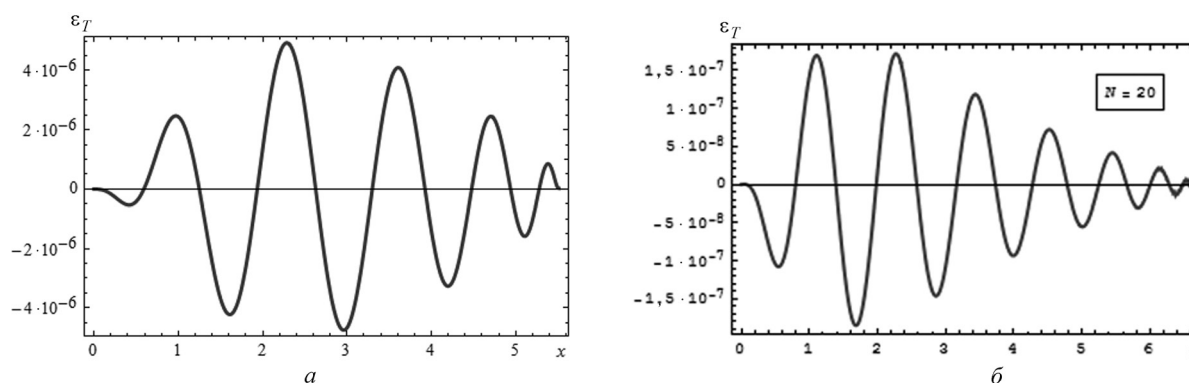


Рис. 4. Отклонение приближенного решения на основе ИМГХ от точного решения в момент времени $t_1 = 0,5$ при $N = 14$ (а) и 20 (б)

$(E_{\max}|_{\text{АВСІМ}})/(E_{\max}|_{\text{ІМГХ}}) = 1,097 \cdot 10^3$ (три порядка). Для степени полинома $N = 20$ получаем $(E_{\max}|_{\text{АВСІМ}}^{N=20})/(E_{\max}|_{\text{ІМГХ}}^{N=20}) = 1,90 \cdot 10^4$ (четыре порядка).

Представляет интерес определение плотности теплового потока Q на поверхности. Подобного рода задачи имеют важное прикладное значение [17]. При $h(t) = 1$ плотность теплового потока в момент времени $t = 1$ составляет $Q|_{t=1} = 1/(\pi t) = 1/\pi$. Определим для данного момента времени тепловой поток известными приближенными методами, а также ИМГХ и затем сравним расчетные данные с точным значением. В табл. 4 представлены полученные значения для методов НВИМ, СИМ и АВСІМ. Как видим, из рассмотренных известных методов наилучшую точность ($\approx 0,5\%$) дают RIM в случае усложненного полинома (31). Однако отметим, что ИМГХ с простым степенным полиномом обеспечивает более высокую точность расчета плотности теплового потока (табл. 4). При $N = 5$ и 8 относительная ошибка (ε_Q) для ИМГХ составляет 0,0884 и 0,0053% соответственно. По сравнению с методами, использующими комбинированный профиль [16], ИМГХ ($N = 8$) дает точность расчета Q на два порядка выше.

Таблица 4. Сравнительные данные расчета плотности теплового потока и ε_Q (%)

Метод расчета	[14]	[15]		[16]		ИМГХ	
	НВИМ	НВИМ	RIM	RIM	СИМ	$N = 5$	$N = 8$
$n (N)$	2,121	2,008	2,074	5,5215	5,5132	$N = 5$	$N = 8$
Профиль	$\left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^n$	$\left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^n \left[1 + \phi(t) \ln\left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)\right]$			$1 + \sum_{j=1}^N a_j \left(\frac{x}{\delta(t)}\right)^j$		
Q_{appr}	0,58292	0,57773	0,58601	0,56707	0,56692	0,5646886	0,564219
$\varepsilon_Q, \%$	3,320	2,401	3,877	0,510	0,483	0,0884	0,0053

Примечание. $Q_{ex} = 1/\sqrt{\pi} \approx 0,5641896$.

В табл. 5 представлены сравнительные данные плотности теплового потока и параметры E_Q , ε_Q для методов АВСІМ и ИМГХ в зависимости от величины N . Для АВСІМ увеличение степени полинома N от 5 до 14 приводит к уменьшению ошибки ε_Q с 0,9168% ($N = 5$) до 0,6752% ($N = 14$), т. е. совершенно незначительно. Отметим также, что для $N = 5$ и 8 плотность теплового потока сохраняет одно и то же значение $Q_{appr} = 0,5590170$ при ошибке $\varepsilon_Q = 0,9168\%$, т. е. в методе АВСІМ увеличение степени полинома от 5 до 8 не дало никакого эффекта. Иная картина наблюдается при использовании ИМГХ: точность расчета теплового потока Q на несколько порядков превышает его точность в АВСІМ. При $N = 14$ имеем $(\varepsilon_Q|_{\text{АВСІМ}}^{N=14})/(\varepsilon_Q|_{\text{ІМГХ}}^{N=14}) \approx 0,704 \cdot 10^5$ (около пяти порядков).

Таблица 5. Тепловой поток Q_{appr} и параметры E_Q , ε_Q (%) в зависимости от N

Метод расчета	Параметр	Степень полинома N			
		5	8	11	14
АВСІМ	Q_{appr}	0,5590170	0,5590170	0,5597444	0,5603801
ИМГХ		0,5646886	0,5642193	0,5641915	0,5641896
АВСІМ	E_Q	0,0051726	0,0051726	0,0044452	0,0038095
ИМГХ		$4,9901 \cdot 10^{-4}$	$2,9716 \cdot 10^{-5}$	$1,9165 \cdot 10^{-6}$	$5,4092 \cdot 10^{-8}$
АВСІМ	$\varepsilon_Q, (\%)$	0,9168	0,9168	0,7879	0,6752
ИМГХ		0,0884	0,0053	$3,42 \cdot 10^{-4}$	$9,587 \cdot 10^{-6}$

Примечание. $Q_{ex} = 1/\sqrt{\pi} \approx 0,564189583$.

Представленные в табл. 2, 5 данные свидетельствуют о высокой скорости сходимости решений на основе ИМГХ, что в равной мере относится к температурной функции $T(x,t)$ и ее производной $\partial T/\partial x|_{x=0}$. Например, для E_{\max} и E_Q имеем $(E_{\max}^{N=5})/(E_{\max}^{N=14}) \approx 1,40 \cdot 10^4$, $(E_{\max}^{N=5})/(E_{\max}^{N=20}) \approx 1,42 \cdot 10^5$, $(E_Q^{N=5})/(E_Q^{N=14}) \approx 0,92 \cdot 10^5$. Отмечаем, что каждые три степени полинома N дают уменьшение ошибки решения примерно на порядок. Для оценки скорости сходимости использованы параметры p_E^1 , p_E^2 , p_Q^1 и p_Q^2 из (12). Результаты расчета приведены в табл. 6. Как известно, значение параметра $p = 2$ характеризует хорошую сходимость решений. Полученные для ИМГХ значения $p_L^{1,2} \gg 2$ и $p_Q^{1,2} \gg 2$ при $N = \overline{5, 20}$ отражают очень высокую сходимость.

Таблица 6. Параметры сходимости $p_E^{1,2}$ и $p_Q^{1,2}$ в зависимости от N

Метод расчета	Параметр	Степень полинома N			
		8	11	14	20
АВСИМ	p_L^1	1,093	1,148	1,212	1,272
ИМГХ		4,967	6,887	8,869	
АВСИМ	p_L^2	1,093	1,115	1,138	1,173
ИМГХ		4,967	5,745	6,475	7,324
АВСИМ	p_Q^1	0	0,48	0,64	
ИМГХ		6,00	8,59	14,79	
АВСИМ	p_Q^2	0	0,19	0,30	
ИМГХ		6,00	7,05	8,87	

Заключение. Для решения широкого класса краевых задач эволюционного типа, описываемых дифференциальным уравнением теплопроводности, предложен интегральный метод граничных характеристик (ИМГХ), использующий идею фронта возмущения $R(t)$ и основанный на последовательности из граничных характеристик $\{\Gamma_n(t)\}, \forall n \in \mathbb{Z}$. В рассмотренном случае полупространства с граничным условием первого рода $T(0,t) = h(t)$ функция $h(t)$ представляется граничной характеристикой нулевого порядка $h(t) = \Gamma_0(t)$. Система линейных алгебраических уравнений, составленная на основе интегральных тождеств $\{\mathcal{L}_n\{T\} \equiv \Gamma_n(t)\}_{n=1}^{2K+3}$ и $\{\mathcal{L}_{-(n-1)}\{T\} \equiv \Gamma_{-(n-1)}(t)\}_{n=1}^K, n = \overline{1, K}, K \in \mathbb{Z}_{\geq}$, а также на основе двух условий на фронте температурного возмущения, позволяет определить полиномиальные коэффициенты $a_j(t), j = \overline{1, N}$, причем $N = N_0 + 2 + 3K$ ($N_0 = 3$). Применение полиномов высокого порядка дает практически точные решения. Так, при $N = 14$ и 20 ошибка составляет $\|E_L^{N=14}\| = 1,88 \cdot 10^{-5}$ и $\|E_L^{N=20}\| = 5,765 \cdot 10^{-8}$ соответственно. При $N = 20$ точность решений ИМГХ превосходит точность решений на основе известного метода дополнительных граничных условий более чем на четыре порядка. Установлена высокая сходимость решений: каждые три степени полинома снижают ошибку примерно на порядок.

Список использованной литературы

1. *Kot, B. A.* Метод граничных характеристик в задачах теплопроводности на основе интеграла теплового баланса / В. А. Кот // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2016, – № 2. – С. 54–65.
2. *Goodman, T. R.* Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer / T. R. Goodman // Adv. Heat Transfer. – New York: Academic Press, 1964. – Vol. 1. – P. 51–122.
3. *Myers, T. G.* Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods / T. G. Myers // Int. Commun. Heat Mass Transfer. – 2009. – Vol. 36, N 2. – P. 143–147.
4. *Langford, D.* The heat balance integral method / D. Langford // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1973. – Vol. 16, N 12. – P. 2424–2428.
5. *Wood, A. S.* A new look at the heat balance integral method / A. S. Wood // Appl. Math. Model. – 2001. – Vol. 25, N 10. – P. 815–824.
6. *Лыков, А. В.* Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1978. – 600 с.

7. *Goodman, T. R.* The heat-balance integral – further considerations and refinements / T. R. Goodman // Transactions of ASME, ser. C. – 1961. – №. 1. – P. 83–93.
8. *Федоров, Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики / Ф. М. Федоров. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
9. *Кудинов, В. А.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях / В. А. Кудинов, Б. В. Авенин, Е. В. Стефанюк. – М.: Высшая школа, 2008. – 305 с.
10. *Стефанюк, Е. В.* Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности / Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов // Теплофизика высоких температур. – 2009. – Т. 47, № 2. – С. 269–282.
11. *Myers, T. G.* Application of the combined integral method to Stefan problems / T. G. Myers, S. L. Mitchell // Appl. Math. Model. – 2011. – Vol. 35, N 9. – P. 4281–4294.
12. *Sadoun, N.* On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions / N. Sadoun, E. K. Si-Ahmed, P. Colinet // Appl. Math. Model. – 2006. – Vol. 30, N 6. – P. 531–544.
13. *Mitchell, S. L.* Application of standard and refined heat balance integral methods to one-dimensional Stefan problems / S. L. Mitchell, T. G. Myers // SIAM Rev. – 2010. – Vol. 52, N 1. – P. 57–86.
14. *Hristov, J. Y.* The heat-balance integral: 2. Parabolic profile with a variable exponent: The concept, analysis and numerical experiments / J. Y. Hristov // C. R. Mecanique. – 2012. – Vol. 340, N 7. – P. 493–500.
15. *Mitchell S. L.* Application of heat balance integral methods to one-dimensional phase change problems / S. L. Mitchell, T. G. Myers // Int. J. Diff. Eq. – 2012. – Vol. 2012. Article ID 187902. 22 p. doi:10.1155/2012/187902.
16. *Mitchell, S. L.* Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions / S. L. Mitchell, T. G. Myers // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2010. – Vol. 53, N 17. – P. 3540–3551.
17. *Zien, T. F.* Approximate calculation of transient heat conduction / T. F. Zien // AIAA J. – 1976. – Vol. 14, N 3. – P. 401–406.

Поступила в редакцию 19.06.2015