

0. Il problema del rimbalzo unidimensionale.

Sia $\bar{\Omega} = [0, T]$, $f \in L^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$.

Definizione.-

Diremo che u , lipschitziana in $\bar{\Omega}$, è soluzione del pdr (problema del rimbalzo) se soddisfa le seguenti condizioni:

- (i) $u \leq 0$ in $\bar{\Omega}$;
- (ii) $\int_{\bar{\Omega}} [u(t) \ddot{\phi}(t) - f(t) \dot{\phi}(t)] dt \leq 0$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, $\phi \geq 0$;
- (iii) per $u < 0$ $\int_{\bar{\Omega}} [u(t) \ddot{\phi}(t) - f(t) \dot{\phi}(t)] dt = 0$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$;
- (iv) per ogni $t \in \Omega$ esistono $\dot{u}^+(t)$ ed $\dot{u}^-(t)$; esistono $\dot{u}^+(0)$, $\dot{u}^-(T)$ e si ha:

$$\frac{1}{2} [\dot{u}^\pm(t)]^2 = \frac{1}{2} [\dot{u}^+(0)]^2 + \int_0^t f(n) \dot{u}(n) dn \quad \text{per } t \in \bar{\Omega}$$

(conservazione dell'energia).

Osservazione I- L'esistenza per ogni $t \in \Omega$ della derivata destra $\dot{u}^+(t)$ e sinistra $\dot{u}^-(t)$ segue da (ii), osservato che la funzione

$$w(t) = u(t) - \int_0^t \left(\int_0^n f(\xi) d\xi \right) dn \quad \text{è concava ed}$$

$$F(t) = \int_0^t \left(\int_0^n f(\xi) d\xi \right) dn \quad \text{è derivabile con derivata prima continua.}$$

Diremo condizioni iniziali ammissibili per il pdr condizioni del tipo

$$u(0) = s \quad , \quad \dot{u}^+(0) = b \quad ,$$

con $s < 0$, $b \in \mathbb{R}$ oppure $s = 0$, $b \leq 0$.