ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 2 2016
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ДВА ОБОБЩЕНИЯ ПОЛИГАММА-ФУНКЦИЙ

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: Zverovich@bsu.by

Основное свойство $\psi^{(n)}(z+1)-\psi^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$ производных $\psi^{(n)}(z)=\frac{d^n}{dz^n}\ln\Gamma(z)$, $n=0,1,2,\ldots$ обобщается на случай производных дробного порядка от $\ln\Gamma(z)$. Полученное свойство в свою очередь обобщается до решения уравнения $F(z+1)-F(z)=e^{\pi i\alpha}\Gamma(\alpha+1)\frac{a^z}{z^{\alpha+1}}$, где $\operatorname{Re}\alpha>0$, $|a|<1$. Полученный результат применяется для суммирования рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty}a^n R(n)$, где $R(n)$ – рациональная функция от индекса суммирования.

Ключевые слова: полигамма-функция, суммирование рядов, интегральная формула Коши, периодический аналог ядра Коши, функции Гурвица.

E. I. ZVEROVICH

TWO GENERALIZATIONS OF POLYGAMMA-FUNCTIONS

Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: Zverovich@bsu.by

The basic property $\psi^{(n)}(z+1)-\psi^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$ for the derivatives $\psi^{(n)}(z)=\frac{d^n}{dz^n}\ln\Gamma(z)$, $n=0,1,2,\ldots$ is generalized in the case of fractional derivatives of the function $\ln\Gamma(z)$. The property obtained is then generalized to the solution of the equation $F(z+1)-F(z)=e^{\pi i\alpha}\Gamma(\alpha+1)\frac{a^z}{z^{\alpha+1}}$, where $\operatorname{Re}\alpha>0$, $|a|<1$. The result obtained is applied to summation of series of the form $\sum_{n=0}^{\infty}a^n R(n)$, where $R(n)$ is the rational function of summation index.

Keiwords: polygamma-function, summation of series, Cauchy integral formula, periodic analog of the Cauchy kernel, Hurwitz functions.

1. *Полигамма-функциями* называются производные различных порядков от функции $\ln\Gamma(z)$. В частности, пси-функция $\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$ называется также бигамма-функцией, а ее производные

$$\psi'(z),\ \psi''(z),\ \psi'''(z),\ \psi^{IV}(z),\ \ldots$$

– тригамма-, тетрагамма-, пентагамма-, гексагамма-, … функциями соответственно [1, с. 84–85]. Они хорошо изучены, табулированы и обладают многими свойствами, среди которых выделим следующее:

$$\psi^{(n)}(z+1)-\psi^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots\ . \tag{1}$$

Это свойство считаем основным, так как с его помощью, например, суммы любых сходящихся рядов вида $n=\sum_{n=0}^{\infty}R(n)$, где $R(n)$ – рациональная функция от индекса суммирования *n,* выражаются в явном виде через полигамма-функции.

Желая обобщить свойство (1), станем искать аналитическую при $\operatorname{Re} z > 0$ функцию $\psi^{(\alpha)}(z)$, удовлетворяющую следующему функциональному уравнению:

$$\psi^{(\alpha)}(z+1) - \psi^{(\alpha)}(z) = \frac{e^{\pi i \alpha}\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}, \tag{2}$$

где $\operatorname{Re}\alpha > 0$, причем $\psi^{(\alpha)}(z) \to 0$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$. Очевидно, что если $\alpha = 0,1,2,\ldots$, то (2) переходит в (1).

Чтобы найти функцию $\psi^{(\alpha)}(z)$, зададим параметр $\lambda \in (0,1)$ и будем считать сначала, что $\lambda < \operatorname{Re} z < \lambda+1$. Применим к функции $\frac{1}{z^{\alpha+1}}$ интегральную формулу Коши в полосе $\Pi = \Pi^{\circ} \cup \partial\Pi = \{\lambda \le \operatorname{Re} z \le \lambda+1\}$, используя периодический аналог ядра Коши $\frac{de^{2\pi i\tau}}{e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi i z}}$. Тогда получим

$$\frac{1}{z^{\alpha+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Pi} \frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi i z}\right)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty} + \int_{\lambda+i\infty}^{\lambda-i\infty}\right)\frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi i z}\right)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty}\frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi i z}\right)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi i z}\right)}.$$

Так как подынтегральный дифференциал мероморфен попеременной τ в правой полуплоскости, то последние интегралы можно вычислить с помощью вычетов. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi i z}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{\alpha+1}} = -\zeta(\alpha+1, z),$$

где $\zeta(\alpha+1,z)$ – обобщенная дзета-функция Римана (функция Гурвица; [2, с. 1087, формула 9.521.1]). Аналогично вычисляется и другой интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty}\frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi i z}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{de^{2\pi i\tau}}{(\tau+1)^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi i z}\right)} =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1+n)^{\alpha+1}} = -\zeta(\alpha+1, z+1).$$

Образовав разность значений последних двух интегралов, получим

$$-\zeta(\alpha+1, z+1) + \zeta(\alpha+1, z) = \frac{1}{z^{\alpha+1}}.$$

Умножим это равенство на $e^{\pi i\alpha}\Gamma(\alpha+1)$, найдем

$$e^{\pi i(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1, z+1) - e^{\pi i(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1, z) = \frac{e^{\pi i\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}. \tag{3}$$

Так как правые части равенств (2) и (3) совпадают, то из них находим

$$\psi^{(\alpha)}(z) = e^{\pi i(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1, z) + f(z),$$

где $f(z)$ – некоторая аналитическая функция, периодическая с основным периодом 1. Поскольку $\psi^{(\alpha)}(z) \to 0$ и $\zeta(\alpha+1, z) \to 0$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$, то $f(z) \equiv 0$. Таким образом, окончательно имеем

$$\psi^{(\alpha)}(z)=e^{\pi i(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1,z). \tag{4}$$

Эта формула в доступных нам источниках (напр., [1–3] и др.) не встречалась.

2. Рассмотрим теперь более общее, чем (2), уравнение

$$F(z+1)-F(z)=e^{\pi i\alpha}\Gamma(\alpha+1)\frac{a^z}{z^{\alpha+1}}, \tag{5}$$

где $0<|a|\leq 1, \operatorname{Re}\alpha>0$. Решим его с помощью интегральной формулы Коши в полосе $\Pi=\Pi^\circ\cup\partial\Pi=\{\lambda\leq\operatorname{Re}z\leq\lambda+1\}$. При $z\in\Pi^\circ$ имеем:

$$\frac{a^z}{z^{\alpha+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Pi}\frac{a^\tau de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau}-e^{2\pi iz}\right)}=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty}+\int\limits_{\lambda+i\infty}^{\lambda-i\infty}\right)\frac{a^\tau de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}(e^{2\pi i\tau}-e^{2\pi iz})}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty}\frac{a^\tau de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau}-e^{2\pi iz}\right)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau}-e^{2\pi iz}\right)}.$$

Так как подынтегральный дифференциал мероморфен по переменной τ в правой полуплоскости и стремится к нулю при $\operatorname{Re}\tau\to+\infty$, то последние интегралы можно вычислить с помощью вычетов. Имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{a^\tau de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau}-e^{2\pi iz}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+z}}{(z+n)^{\alpha+1}}=-a^z\Phi(a,\alpha+1,z),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty}\frac{a^\tau de^{2\pi i\tau}}{\tau^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau}-e^{2\pi iz}\right)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{a^{\tau+1}de^{2\pi i\tau}}{(\tau+1)^{\alpha+1}\left(e^{2\pi i\tau}-e^{2\pi iz}\right)}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1+z}}{(z+1+n)^{\alpha+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+z}}{(n+z)^{\alpha+1}}=-a^z\Phi(a,\alpha+1,z+1),$$

где $\Phi(a,\alpha+1,z)$ – обобщение функции Гурвица [2, с. 1089, формула 9.550]. Отсюда находим $-a^z\Phi(a,\alpha+1,z+1)+\Phi(a,\alpha+1,z)=\frac{a^z}{z^{\alpha+1}}$. Сравнив это равенство с (5), получим

$$F(z)=e^{\pi i(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)a^z\Phi(a,\alpha+1,z). \tag{6}$$

Таким образом, уравнение (5) решено.

В качестве приложения отметим, что использование функции (6) позволяет вычислять суммы всевозможных сходящихся рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}R(n)\cdot a^n, \tag{7}$$

где $0<|a|<1$, а $R(n)$ – рациональная функция от индекса суммирования n. Для этого надо сначала разложить рациональную функцию $R(n)$ на сумму простейших рациональных дробей. Затем в соответствии с этим представить ряд (7) в виде суммы рядов такого же типа, где вместо $R(n)$ стоит простейшая рациональная функция. Такие ряды суммируются непосредственно с помощью функции (6), где $\Phi(a,\alpha+1,z)$ – обобщение функции Гурвица.

В качестве примера просуммируем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(12n+5)a^n}{(2n+1)^2(3n+2)^2}$. Сначала разложим рациональную дробь на простейшие

$$\frac{12n+5}{(2n+1)^2(3n+2)^2}=\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(n+\frac{2}{3}\right)^2}.$$

В результате получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(12n+5)a^n}{(2n+1)^2(3n+2)^2}=a^{\frac{2}{3}}\Phi\left(a,2,\frac{2}{3}\right)-a^{\frac{1}{2}}\Phi\left(a,2,\frac{1}{2}\right),$$

где $\Phi(a,\alpha,z)$ – обобщение функции Гурвица.

Список использованной литературы

1. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абламовица, И. Стриган. – М.: Наука, 1979.

2. *Градштейн, И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962.

3. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. – М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 22.03.2016