

APLICACIÓN DE UN REGULADOR H-INFINITO NO LINEAL PARA GRÚA 3D

APPLICATION OF A NONLINEAR H-INFINITY REGULATOR FOR A 3D-CRANE

Ramón Imad Verdés Kairuz

CITEDI-IPN, México
rverdes@citedi.mx

Luis Tupak Aguilar Bustos

CITEDI-IPN, México
laguilarb@ipn.mx

Yury Orlov

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, México
yorlov@cicese.mx

Israel Ulises Ponce Monarrez

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México
israel.ulises@uacj.mx

Recepción: 10/octubre/2019

Aceptación: 2/diciembre/2019

Resumen

En este artículo se presenta la solución al problema de estabilización de posición robusta ante perturbaciones externas de una grúa a través de un regulador H-infinito no lineal. La grúa bajo estudio en un sistema mecánico subactuado de cinco grados de libertad y tres actuadores que manipulan el movimiento de la cuerda a través de un carro que se mueve en el plano cartesiano. Las posiciones de los actuadores y los ángulos de la cuerda que transporta la carga se pueden medir únicamente mientras que sus velocidades se estiman a través de un filtro H-infinito. Por naturaleza, la carga se encuentra sujeta a perturbaciones externas que se asumen pertenecen al espacio \mathcal{L}_2 . La solución al problema de control H-infinito por retroalimentación de salida involucra la solución a un par de ecuaciones algebraicas perturbadas de Riccati que evitan hacer la verificación de controlabilidad y detectabilidad del sistema. Los resultados experimentales, realizados en una grúa didáctica, demuestran la factibilidad del método.

Palabras claves: Grúa, regulador H-infinito no lineal, robustez.

Abstract

In this paper we present the solution to the robust position stabilization against external disturbances of a crane by using a nonlinear H-infinity regulator. The crane under study is an underactuated mechanical system of five degrees-of-freedom and three actuators that manipulate the rope through a cart moving along the Cartesian space. The position of the cart and the angles of the rope are the only available measurements for feedback while its velocities are estimated by using an H-infinity filter. Typically, the rope is affected by external disturbances which are assumed belong to the \mathcal{L}_2 space. The solution of the H-infinity regulator involves the solution of two perturbed algebraic Riccati equations which avoid the verification of the controllability and detectability of the system. The experimental results, made in a laboratory crane, demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Crane, nonlinear H-infinity regulator, robustness.

1. Introducción

Las grúas son sistemas electromecánicos empleados para transportar cargas pesadas en la industria de la construcción, en los almacenes y en los puertos marítimos durante el trasiego de mercancía a los barcos. Todas las grúas comparten el mismo objetivo que es mover una carga desde un punto inicial hasta un punto final. Las grúas 3D constituyen un sistema complejo de interés por la comunidad científica sobre el cual se ensayan diversos algoritmos de control y así lo evidencia [Rami, 2017]. Uno de los desafíos fundamentales está dado por la subactuación que presenta la misma. Un sistema mecánico subactuado es aquel que cuenta con menos actuadores que grados de libertad. Particularmente en una grúa, la subactuación se refleja cuando se acelera o desacelera el carro que transporta la carga que pende de una cuerda. Esta aceleración/desaceleración hace que la carga amarrada al extremo de la cuerda oscile.

Durante este proceso la carga puede experimentar oscilaciones no deseadas donde el ángulo de balanceo se puede incrementar incluso durante el movimiento o el

descenso de la carga. El fallo del sistema puede causar daño a las personas y al entorno sin mencionar a la carga per se. Por lo tanto, resulta atractivo el diseño de un controlador capaz de mantener este ángulo de balanceo lo más próximo posible al origen y atenuar el efecto de perturbaciones externas, dentro de las cuales se encuentra la velocidad del viento, que contribuyen a acrecentar el mismo. Uno de los principales obstáculos para resolver el problema de estabilización es que las perturbaciones externas, se reflejan directamente en la dinámica de los ángulos, afectando la estabilidad de la carga.

Existe una diversidad de trabajos relacionados con la solución al problema de estabilización robusta de grúas [Maghsoudi, 2019], [Chen, 2019]. El enfoque de este trabajo es a través del método de control H-infinito (\mathcal{H}_∞) no lineal inspirado en la idea de pasividad [Isidori, 1992]. Uno de los trabajos más recientes en la solución al problema de estabilización de grúas a través de control \mathcal{H}_∞ fue reportado por [Rigatos, 2018]. En ese resultado, la síntesis del controlador H-infinito es lineal y requiere la verificación de controlabilidad y detectabilidad del sistema.

La contribución del artículo reside en el diseño de un controlador H-infinito robusto para atenuar los efectos de las perturbaciones acopladas (que aparecen en el canal de control) y no acopladas inherentes en el problema de estabilización de la carga de una grúa en un punto deseado. Esta investigación está enfocada en el control robusto de una grúa caballete que son de cinco grados de libertad y tres actuadores. La síntesis del controlador \mathcal{H}_∞ se basa en la solución propuesta en [Isidori, 1992] y [Acho, 2001], pero en contraste con el trabajo de [Rigatos, 2017], ahora se requiere resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas de Riccati perturbadas, por lo que no es necesario comprobar la condición de controlabilidad ni detectabilidad del sistema.

2. Métodos

Modelo Matemático

Las ecuaciones de movimiento que gobiernan el comportamiento de la grúa viene dada por ecuaciones 1 y 2 [Almutairi, 2009].

$$M_{11}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_1 + M_{12}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{N}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{q}) = \mathbf{d}_1(t) \quad (1)$$

$$M_{12}^T(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_1 + M_{22}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{N}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}_2(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}_2(t) \quad (2)$$

Donde $\mathbf{q}_1 = [\theta_x, \theta_y]^T$ es el vector de posiciones angulares que forma la cuerda, $\mathbf{q}_2 = [x, y, z]^T$ es el vector de posición de la carga en espacio Euclidiano, $\boldsymbol{\tau}(t) \in \mathbb{R}^3$ es la entrada de control, $\mathbf{d}(t) = [\mathbf{d}_1(t), \mathbf{d}_2(t)]^T$ es el vector de perturbaciones que afectan a la carga y las matrices dadas por ecuaciones 3, son matrices de dimensiones apropiadas que denotan la matriz de inercia que es definida positiva para toda $\mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t)]^T$, el vector de fuerzas $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [\mathbf{N}_1^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{N}_2^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]^T$ consta de la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas y finalmente $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [\mathbf{G}_1^T(\mathbf{q}), \mathbf{G}_2^T(\mathbf{q})]^T$ es el vector de gravedad.

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) \\ M_{12}^T(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} N_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & N_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ N_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & N_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1(\mathbf{q}) \\ \mathbf{G}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

En la figura 1 se muestra el sistema de coordenadas de la grúa coordenadas donde (x_m, y_m, z_m) denotan la posición de la carga, (θ_x, θ_y) denotan la proyección del ángulo que forma la cuerda con respecto al carro (θ), y $[f_x, f_y, f_z]$ son las fuerzas ejercidas sobre el carro debido al peso de la carga y al par aplicado.

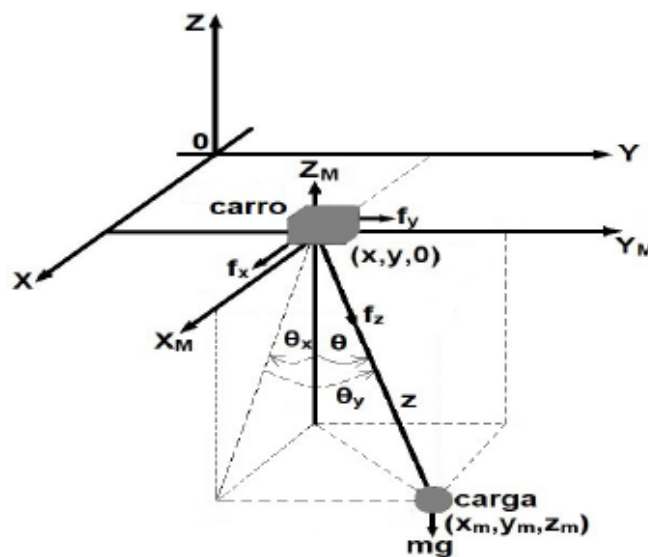


Figura 1 Esquema de la grúa donde se muestran las variables de posición y fuerza.

Los elementos de las matrices de ecuaciones 3, están dadas por ecuaciones 4.

$$\begin{aligned}
 M_{11}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} mz^2 \cos^2(\theta_y) & 0 \\ 0 & mz^2 \end{bmatrix} & M_{12}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_{13} & 0 & 0 \\ m_{23} & m_{24} & 0 \end{bmatrix}, \\
 M_{22}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} M_x + m & 0 & m_{35} \\ 0 & M_y + m & m_{45} \\ m_{35} & m_{45} & M_z + m \end{bmatrix} \\
 N_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ -n_{12} & mzz\dot{z} \end{bmatrix} & N_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & mz \cos^2(\theta_y) \dot{\theta}_x \\ 0 & 0 & mz \dot{\theta}_y \end{bmatrix} \quad (4) \\
 N_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} n_{31} & n_{32} \\ 0 & n_{42} \\ -n_{15} & -n_{25} \end{bmatrix}, & N_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & n_{35} \\ 0 & 0 & n_{45} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= mg \begin{bmatrix} z \cos \theta_y \sin \theta_x \\ z \cos \theta_x \sin \theta_y \\ 0 \\ 0 \\ -\cos \theta_x \cos \theta_y \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Cada uno de los elementos de la matriz $M(\mathbf{q})$ y del vector $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ son dados por:

$$m_{13} = mz \cos(\theta_x) \cos(\theta_y), \quad m_{23} = -mz \sin(\theta_x) \sin(\theta_y),$$

$$m_{35} = m \sin(\theta_x) \cos(\theta_y), \quad m_{42} = mz \cos(\theta_y), \quad m_{45} = m \sin(\theta_y);$$

$$n_{11} = mz \cos^2(\theta_y) \dot{z} - mz^2 \sin(\theta_y) \cos \theta_y \dot{\theta}_y,$$

$$n_{31} = m \cos(\theta_x) \cos(\theta_y) \dot{z} - mz \sin(\theta_x) \cos(\theta_y) \dot{\theta}_x - mz \cos(\theta_x) \sin(\theta_y) \dot{\theta}_y,$$

$$n_{32} = -m \sin(\theta_x) \sin(\theta_y) \dot{z} - mz \cos(\theta_x) \sin(\theta_y) \dot{\theta}_x - mz \sin(\theta_x) \cos(\theta_y) \dot{\theta}_y,$$

$$n_{35} = m \cos(\theta_x) \cos(\theta_y) \dot{\theta}_x - m \sin(\theta_x) \sin(\theta_y) \dot{\theta}_y,$$

$$n_{42} = m \cos(\theta_y) \dot{z} - mz \sin(\theta_y) \dot{\theta}_y,$$

$$n_{45} = m \cos(\theta_y) \dot{\theta}_y,$$

$$n_{12} = -mz^2 \sin(\theta_y) \cos(\theta_y) \dot{\theta}_x, \quad y$$

$$n_{22} = mzz\dot{z}.$$

Aquí $m > 0$ es la masa de la carga, $M_x > 0$ denota las masas equivalentes en el riel y el carro, $M_y > 0$ es la masa del carro y $M_z > 0$ denota la masa de la cuerda y el gancho que sujeta la carga.

El *objetivo de control* es encontrar una entrada de control τ tal que la posición de la carga se estabilice en el punto deseado, denotado como $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^5$, a pesar de las perturbaciones externas que afectan al sistema. En otras palabras, para el sistema libre de perturbación se debe satisfacer la condición de ecuación 5.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d\| = 0 \quad (5)$$

Donde \mathbf{q}_d es un vector constante para todo tiempo. Por otro lado, el origen del sistema de lazo cerrado debe ser estable de manera uniforme para el caso perturbado.

Síntesis del Regulador H-infinito No Lineal

Para resolver el problema de control H-infinito, considérese el siguiente sistema escrito en forma generalizada por ecuaciones 6 a 8.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{w} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (6)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_{12}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_{21}(\mathbf{x})\mathbf{w} \quad (8)$$

Donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el tiempo, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^r$ son los disturbios desconocidos, $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$ es la salida desconocida a ser controlada y $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ es la única variable medida en el sistema.

Las siguientes suposiciones se hacen sobre el sistema de las ecuaciones 3 a 5:

A1) Las funciones $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{h}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{h}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{k}_{12}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{k}_{21}(\mathbf{x})$ son funciones continuamente diferenciables y de dimensiones apropiadas.

A2) $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{h}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{h}_2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

A3) $\mathbf{h}_1^T(\mathbf{x})\mathbf{k}_{12}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{k}_{12}^T(\mathbf{x})\mathbf{k}_{12}(\mathbf{x}) = I$, $\mathbf{k}_{21}(\mathbf{x})\mathbf{g}_1^T(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{D}_{21}(\mathbf{x})\mathbf{D}_{21}^T(\mathbf{x}) = I$.

Estas suposiciones se hacen por razones técnicas. El supuesto A1 asegura que el origen es un punto de equilibrio del sistema dinámico (ecuación 6) no forzado ($\mathbf{u} = 0$) y libre de perturbaciones ($\mathbf{w} = 0$). Las Suposiciones A2 y A3, en conjunto,

garantizan que mientras se inyecten entradas exógenas integrables, el sistema dinámico estará bien planteado.

Definición: Dado un número real $\gamma > 0$, el sistema (ecuación 6) se dice que tiene una ganancia \mathcal{L}_2 menor que γ con respecto a la salida (ecuación 7) si la respuesta del sistema $\mathbf{z}(t)$, que resulta de $\mathbf{w}(t)$ para el estado inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$, existe en un intervalo arbitrario $(0, T)$ y satisface la desigualdad mostrada por ecuación 9.

$$\int_0^T \|\mathbf{z}(t)\|^2 dt < \gamma^2 \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \quad (9)$$

Para todo $T \geq 0$ y toda función continua a tramos $\mathbf{w}(t)$.

Considérese un controlador dinámico de la forma dada por ecuaciones 10 y 11.

$$\dot{\xi} = \boldsymbol{\eta}(\xi, \mathbf{y}), \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\theta}(\xi) \quad (11)$$

Donde $\xi(t) \in \mathbb{R}^s$ es el estado interno y $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\theta}$ son funciones continuamente diferenciables que satisfacen $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. El objetivo del controlador H-infinito no lineal que corresponde a un nivel de atenuación γ es encontrar un controlador dinámico (ecuación 10) tal que la ganancia \mathcal{L}_2 del sistema de lazo cerrado (Ecuaciones 3 a 5) sea menor que γ o que el origen del sistema de lazo cerrado sea asintóticamente estable cuando $w = 0$.

Los subsecuentes resultados involucran el caso local de ecuaciones 3 a 5, está dado por ecuación 12.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1\mathbf{w} + B_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = C_1\mathbf{x} + D_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C_2\mathbf{x} + D_{21}\mathbf{w} \end{cases} \quad (12)$$

Donde

$$A = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}), B_1 = \mathbf{g}_1(\mathbf{0}), B_2 = \mathbf{g}_2(\mathbf{0}), C_1 = \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}),$$

$$C_2 = \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}), D_{12} = k_{12}(\mathbf{0}), D_{21} = k_{21}(\mathbf{0}).$$

El problema es bien entendido si el sistema lineal (9) es estabilizable y detectable de \mathbf{u} y \mathbf{y} , respectivamente. Las siguientes condiciones son suficientes y necesarias para que exista solución al problema de regulación H-infinito [Doyle, 1989]:

C1) La ecuación algebraica de Riccati, ecuación 13, posee una solución simétrica positiva definida P tal que el origen del sistema de lazo cerrado, ecuación 14, sea exponencialmente estable.

$$PA + A^T P + C_1^T C_1 + P \left[\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right] P = 0 \quad (13)$$

$$\dot{x} = [A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) P] x(t) \quad (14)$$

C2) Sea $A_1 = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P$, entonces la ecuación algebraica de Riccati, ecuación 15, posee una solución simétrica positiva semidefinida Z , tal que el origen del sistema, ecuación 16, sea exponencialmente estable.

$$A_1 Z + Z A_1 + B_1 B_1^T + Z \left(\frac{1}{\gamma^2} P B_2 B_2^T P - C_2^T C_2 \right) Z = 0 \quad (15)$$

$$\dot{x} = [A - Z(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P)] x(t) \quad (16)$$

Con base en el lema de acotamiento real [Anderson, 1973], las condiciones C1 y C2 aseguran que existe una constante positiva ε_0 tal que las ecuaciones algebraicas de Riccati perturbadas, ecuaciones 17 y 18, tienen una solución positiva definida de las matrices P_ε y Z_ε para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ donde $A_\varepsilon = A + \frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_1 B_1^T$.

$$P_\varepsilon A + A^T P_\varepsilon + C_1^T C_1 + P_\varepsilon \left(\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) P_\varepsilon + \varepsilon I = 0, \quad (17)$$

$$A_\varepsilon Z_\varepsilon + Z_\varepsilon A_\varepsilon + B_1 B_1^T + Z_\varepsilon \left(\frac{1}{\gamma^2} P_\varepsilon B_2 B_2^T P_\varepsilon - C_2^T C_2 \right) Z_\varepsilon + \varepsilon I = 0 \quad (18)$$

Las ecuaciones algebraicas de Riccati (Ecuaciones 17 y 18) serán utilizadas para derivar la solución al problema de control H-infinito. El siguiente teorema resume el resultado principal.

Teorema. Asíumase que las condiciones C1 y C2 se satisfacen y sean $(P_\varepsilon, Z_\varepsilon)$ sean soluciones definidas positivas de ecuaciones 17 y 18, bajo cualquier $\varepsilon > 0$. Entonces el control por retroalimentación de salida, está dado por ecuaciones 19 y 20, solución local al problema de control H-infinito.

$$\dot{\xi} = f(\xi) + \left[\frac{1}{\gamma^2} g_1(\xi) g_1^T(\xi) - g_2(\xi) g_2^T(\xi) \right] P_\varepsilon \xi + Z_\varepsilon C_2^T [y - h_2(\xi)], \quad (19)$$

$$u = -g_2^T(\xi) P_\varepsilon \xi \quad (20)$$

Demostración: La demostración del teorema se presenta en [Acho, 2001].

Síntesis del Regulador \mathcal{H}_∞ para la Grúa

La solución al problema de control \mathcal{H}_∞ involucra la linealización parcial [Spong, 1994] de la parte actuada, ecuación 21.

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{M}_{22}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \bar{\mathbf{G}}_2(\mathbf{q}) \quad (21)$$

Donde $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$ es la entrada de control que resultará de la síntesis \mathcal{H}_∞ y

$$\bar{M}_{22}(\mathbf{q}) = M_{22}(\mathbf{q}) - M_{12}^T(\mathbf{q})M_{11}^{-1}(\mathbf{q})M_{12}(\mathbf{q})$$

$$\bar{\mathbf{G}}_2(\mathbf{q}) = -M_{12}^T(\mathbf{q})M_{11}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{G}_1(\mathbf{q}).$$

Después de sustituir la entrada de control (ecuación 21) en ecuación 2, se tiene ecuación 22, lazo cerrado resultante para la dinámica actuada.

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{u} + \bar{M}_{22}^{-1}(\mathbf{q})[-\bar{N}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \bar{\mathbf{G}}_2(\mathbf{q}) + \mathbf{d}_2 - M_{12}^T M_{11}^{-1} \mathbf{d}_1]. \quad (22)$$

A su vez se sustituye ecuación 22 en ecuación 1, ecuación 23.

$$\ddot{\mathbf{q}}_1 = -M_{11}^{-1}(\mathbf{q})M_{12}(\mathbf{q})\mathbf{u} + M_{11}^{-1}(\mathbf{q})M_{12}(\mathbf{q})\bar{M}_{22}^{-1}(\mathbf{q})\bar{N}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M_{11}^{-1}(\mathbf{q})[N_1 + \mathbf{G}_1(\mathbf{q})] + M_{11}^{-1}[\mathbf{d}_1 - M_{12}(\mathbf{q})\bar{M}_{22}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{d}_2 + M_{12}(\mathbf{q})\bar{M}_{22}^{-1}(\mathbf{q})M_{12}^T(\mathbf{q})M_{11}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{d}_1] \quad (23)$$

Donde $\bar{N}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = N_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M_{12}^T(\mathbf{q})M_{11}^{-1}(\mathbf{q})N_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Detalles de la obtención algebraica de ecuaciones 17 y 18 se pueden obtener en [Verdes, 2019].

Se definen $\mathbf{x}_1 = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_{d2}]^T \in \mathbb{R}^5$ y $\mathbf{x}_2 = [\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2]^T \in \mathbb{R}^5$ como los errores de posición y velocidad de los ángulos, el carro y la cuerda, respectivamente y $\mathbf{q}_{d2} \in \mathbb{R}^3$ el vector de posición que es constante para todo el tiempo.

Para la formulación del problema \mathcal{H}_∞ , el vector de perturbaciones $\mathbf{w}(t)$ queda conformado como $\mathbf{w} = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_y]^T$ donde $\mathbf{d}_y(t) \in \mathbb{R}^5$ representa el ruido que afecta a las mediciones.

Entonces, la representación de la dinámica del error en la forma estándar \mathcal{H}_∞ viene dada por ecuaciones 24 a 28.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ M_{11}^{-1}(\mathbf{x}_1)M_{12}(\mathbf{x}_1)\bar{M}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_1)\bar{N}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - M_{11}^{-1}(\mathbf{x}_1)[N_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x}_1)] \\ -\bar{M}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_1)(\bar{N}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{G}_2(\mathbf{x}_1)) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} & 0_{5 \times 3} & 0_{5 \times 5} \\ M_{11}^{-1} + M_{11}^{-1} M_{12} \bar{M}_{22}^{-1} M_{12}^T M_{11}^{-1} & -M_{11}^{-1}(x_1) M_{12}(x_1) \bar{M}_{22}^{-1}(x_1) & 0_{2 \times 5} \\ -\bar{M}_{22}^{-1}(x_1) M_{12}^T(x_1) M_{11}^{-1}(x_1) & \bar{M}_{22}^{-1}(x_1) & 0_{3 \times 5} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$g_2(x) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 3} \\ -M_{11}^{-1}(x_1) M_{12}(x_1) \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$h_1(x) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad h_2(x) = x_1 \quad (27)$$

$$k_{12}(x) = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0_{10 \times 3} \end{bmatrix}, \quad k_{21}(x) = [0_{5 \times 2} \quad 0_{5 \times 3} \quad I_5] \quad (28)$$

Aquí I_n es la matriz identidad de orden n y $0_{n \times m}$ es una matriz de $n \times m$ ceros. El paso siguiente consiste en la linealizar los vectores y matrices anteriores para hacer uso del Teorema 1.

3. Resultados

La plataforma para la realización de los experimentos consiste en una grúa 3D fabricada por INTECO®. La carga se eleva y baja en la dirección del eje Z. El riel por el que se desplaza el carro se mueve en la dirección del eje X. El carro sobre el riel se mueve en la dirección del eje Y. Por lo tanto, la carga atada al extremo de la cuerda puede moverse libremente en dos dimensiones (figura 2).

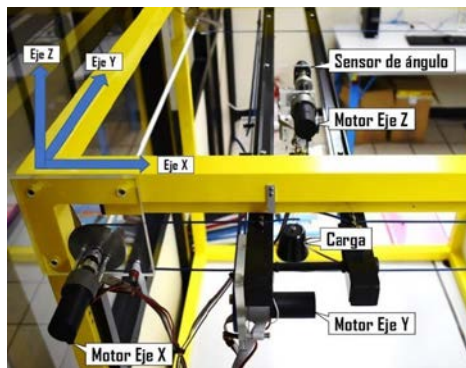


Figura 2 Grúa utilizada en los experimentos.

El sistema consta de una carga que cuelga del extremo de una cuerda atada a un motor de corriente directa que va montado sobre un carro.

El riel por el que se desplaza el carro se mueve en la dirección del eje X y del eje Y. Por lo tanto, la carga atada al extremo de la cuerda puede moverse libremente en tres dimensiones. El sistema está equipado con cinco sensores rotatorios de posición con una resolución de 4096 pulsos por revolución para la medición de las cinco variables de estado: las coordenadas del carro en el plano horizontal ($x(t)$ y $y(t)$), la longitud de la cuerda ($z(t)$) y los dos ángulos de desviación de la carga.

Los experimentos se realizaron en una computadora personal con procesador Intel i7® equipada con una tarjeta multipropósitos RTDAC/ PCI de entradas/salidas digitales, la cual se comunica con la tarjeta de interfaz de potencia que alimenta los motores. Toda la lógica necesaria para activar y leer las señales de los sensores de posición y para generar la secuencia del modulador de ancho de pulsos necesarios para operar los motores de corriente directa está internamente configurada en un circuito integrado Xilinx® dentro de la tarjeta RTDAC/ PCI. A través del entorno MATLAB/Simulink® se puede acceder a las funciones de la tarjeta. Véase a [Inteco, 2017] para más detalles sobre la grúa 3D de INTECO®.

Las condiciones iniciales del experimento fueron $x(0) = y(0) = z(0) = 0.1$ m mientras que los ángulos permanecen en el origen, es decir $\theta_x(0) = \theta_y(0) = 0$ rad. Los movimientos parten del reposo.

Para la síntesis del controlador \mathcal{H}_∞ , los parámetros seleccionados fueron $\gamma = 7$ y $\varepsilon = 0.1$. La figura 3 muestra los resultados experimentales obtenidos de la grúa.

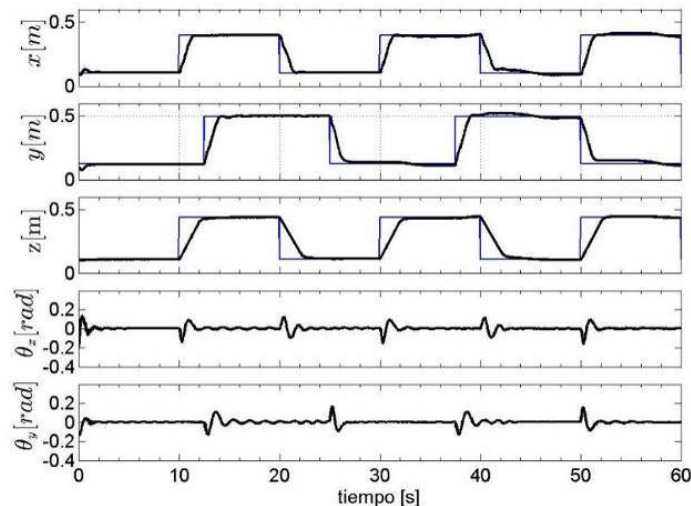


Figura 3 Posiciones lineales del carro y posiciones angulares de la cuerda.

Debido a que se está resolviendo el problema de regulación, se aplican entradas de referencia en forma de pulso. Además, se inyectó una perturbación ficticia sobre los ángulos tal que $\mathbf{d}_2 = [0.2 \sin(0.5t), 0.2 \sin(0.5t), 0.2 \sin(0.5t)]^T$ para todo $t \geq 30$ segundos. Además, también se perturbó el sistema de manera externa con impacto instantáneo y aplicado en instantes aleatorios de tiempo.

La figura 4 muestra los pares aplicados que se encuentran normalizados entre menos uno y uno.

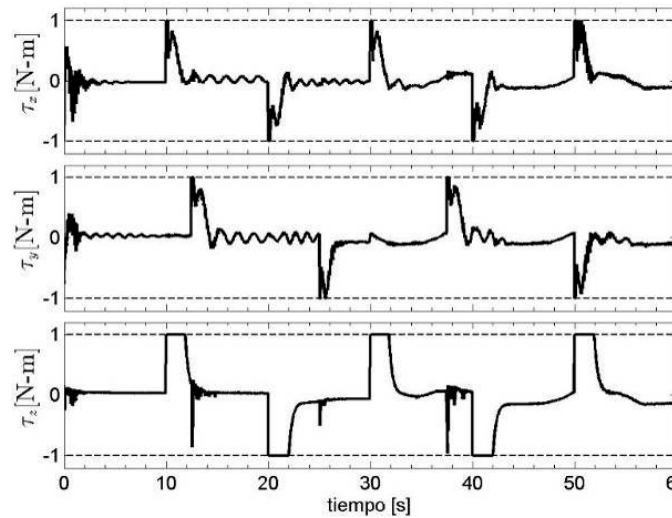


Figura 4 Pares aplicados normalizados.

Las soluciones a las ecuaciones algebraicas de Riccati (ecuaciones 16 y 17), son simétricas y no contienen valores propios imaginarios. Además, el valor de γ dado es mayor que el óptimo ($\gamma^* = 1.5$) con el fin de evitar rebasar los niveles de saturación de la planta:

$$P_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 10.92 & -0.57 & 0 & 0 & -1.02 & -2.03 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.57 & 0.41 & 0 & 0 & 0.94 & 1.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21.23 & -0.69 & 0 & 0 & -0.67 & -2.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.69 & 0.84 & 0 & 0 & 1.06 & 2.10 & 0 & 0 \\ -1.02 & 0.94 & 0 & 0 & 2.33 & 2.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.03 & 1.01 & 0 & 0 & 2.35 & 2.57 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.67 & 1.06 & 0 & 0 & 1.47 & 2.66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.40 & 2.10 & 0 & 0 & 2.66 & 5.30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0013 & 0.0007 \end{bmatrix}$$

$$Z_\varepsilon = \begin{bmatrix} 12.10 & -4.02 & 0 & 0 & -7.69 & -8.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.02 & 2.72 & 0 & 0 & 3.92 & 3.93 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12.35 & 5.03 & 0 & 0 & 5.89 & 10.88 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.03 & 4.55 & 0 & 0 & 4.42 & 7.54 & 0 & 0 \\ -7.69 & 3.92 & 0 & 0 & 7.33 & 7.37 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8.15 & 3.93 & 0 & 0 & 7.37 & 7.57 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5.89 & 4.24 & 0 & 0 & 4.87 & 8.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10.88 & 7.54 & 0 & 0 & 8.56 & 15.60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.29 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0002 & 0.007 \end{bmatrix}$$

4. Discusión

Los resultados experimentales corroboran que las trayectorias van hacia la posición deseada, mientras que permanecen acotadas durante la presencia de perturbaciones.

El controlador es subóptimo en el sentido de que el valor de γ obtenido no es el mínimo, sin embargo evita la saturación de la entrada de control. Obsérvese que en los ángulos de la grúa (θ_x, θ_y) , donde no hay desplazamientos angulares muy grandes a pesar de los movimientos bruscos del riel y del carro (x, y, z) . Las señales medidas no presentan nivel de ruido alto.

En la tabla 1 se muestra el error cuadrático medio y el error máximo de los errores de posición para el caso perturbado y no perturbado.

Tabla 1 Error cuadrático medio y error máximo.

	Caso no perturbado		Caso perturbado	
	ECM	$\ e(t)\ _\infty$	ECM	$\ e(t)\ _\infty$
Eje x	0.0535	0.2971	0.0691	0.3119
Eje y	0.0673	0.3760	0.0684	0.3861
Eje z	0.0768	0.3317	0.0946	0.3361
θ_x	0.0299	0.1964	0.0305	0.1641
θ_y	0.0300	0.1703	0.0270	0.1580

El error cuadrático medio (ECM) para cada una de las coordenadas generalizadas viene dado por ecuación 29.

$$ECM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2 \tag{29}$$

Donde $\hat{Y}_i \in [x, y, z, \theta_x, \theta_y]$ es el valor de la medición de la variable en cada instante de tiempo, Y_i es el valor deseado en cada instante de tiempo y n es el número de muestras tomadas. El error máximo viene dado por ecuación 30.

$$\|e(t)\|_{\infty} = \|q(t) - q_d(t)\| = \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |e| \quad (30)$$

A diferencia del trabajo publicado por [Rigatos, 2018], el controlador \mathcal{H}_{∞} propuesto en el presente artículo es totalmente no lineal y no requiere verificación extra de controlabilidad ni detectabilidad del sistema. En los resultados experimentales también se puede verificar que el movimiento de la cuerda no oscila lo suficiente como para liberar accidentalmente la carga. Entre la desventaja del método de control \mathcal{H}_{∞} es la solución local del método debido a la linealización para involucrar la solución de ecuaciones algebraicas de Riccati en lugar de desigualdades de Hamilton-Jacobi-Issacs y así evitar la exigencia computacional y el tiempo de muestreo. Queda pendiente para trabajo futuro, la solución al problema de seguimiento de trayectorias, cuyo principal reto es la solución al conjunto de ecuaciones diferenciales de Riccati.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentó la solución al problema de regulación de posición, a través de un controlador \mathcal{H}_{∞} , de una grúa de cinco grados de libertad y tres actuadores. La síntesis del controlador no requiere la verificación extra de controlabilidad ni detectabilidad, en contraste con la formulación presentada por [Isidori, 1992]. El esquema de control se verificó de manera experimental en una grúa fabricada por *Inteco*. Los resultados corroboraron que las trayectorias se dirigen al punto deseado mientras el sistema esté no perturbado mientras que las trayectorias permanecen acotadas y estables durante la presencia de perturbaciones. En los resultados experimentales también se puede verificar que el movimiento de la cuerda no oscila lo suficiente como para liberar accidentalmente la carga, demostrando así rechazo a perturbaciones no acopladas que son más difíciles de atenuar por otros métodos de control. Se debe destacar que control por estructura variable hace eliminación de perturbaciones siempre y cuando sean

acopladas (que estén dentro del mismo canal de control). Entre la desventaja del método de control \mathcal{H}_∞ es la solución local del método debido a la linealización para involucrar la solución de ecuaciones algebraicas de Riccati en lugar de desigualdades de Hamilton-Jacobi-Issacs. La solución al problema de seguimiento de trayectorias por retroalimentación de salida queda pendiente para trabajo futuro, así como la solución global del método.

Agradecimientos

Luis T. Aguilar agradece al CONACYT por el apoyo brindado a través del proyecto 285279. El Dr. Yury Orlov agradece al CONACYT por el apoyo brindado a través del proyecto A1-S-9270.

6. Bibliografía y Referencias

- [1] Acho, L., Orlov, Y. & Solis, V. Nonlinear measurement feedback \mathcal{H}_∞ control of time-periodic systems with application to tracking control of robot manipulator. *International Journal of Control*, No. 2, 190-198, 2001.
- [2] Almutairi, N. B., & Zribi, M. Sliding Mode Control of a Three-dimensional Overhead Crane. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 15, No. 11, 1679–1730, 2009.
- [3] Anderson, B., Vreugdenhil, R.: *Network Analysis and Synthesis*. Prentice Hall, Englewood, Cliffs, 1973.
- [4] Chen, H., Fang, Y., & Sun, N. An adaptive tracking control method with swing suppression for 4-DOF tower crane systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, No. 123, 426-442, 2019.
- [5] Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P., & Francis, B. State space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, No. 34, 831–846, 1989.
- [6] INTECO, 3D-crane user manual RT-CON with USB board version, 2017.
- [7] Isidori, A. & Astolfi, A. Disturbance attenuation and \mathcal{H}_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, No. 9, 1283-1293, 1992.

- [8] Spong M. W., Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems, in *Intelligent Robots and Systems. Advanced Robotic Systems and the Real World*, vol. 1, pp. 314 –321, 1994.
- [9] Maghsoudi, M. J., Ramli, L., Sudin, S., Mohamed, Z., Husain, A. R., & Wahid, H. Improved unity magnitude input shaping scheme for sway control of an underactuated 3D overhead crane with hoisting. *Mechanical Systems and Signal Processing*, No. 123, 466-482, 2019.
- [10] Verdes R.I.. Control de Estructura Variable para Grúa de Tres Grados de Libertad. Tesis de Maestría en Ciencias en Sistemas Digitales, 2019: <https://www.thesis.ipn.mx>.
- [11] Ramli, L., Mohamed, Z., Abdullahi, A. M., Jaafar, H. & Lazim, I. M. Control strategies for crane systems: a comprehensive review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 95, pp. 1–23, 2017.
- [12] Rigatos, G., Siano, P., & Abbaszadeh, M. Nonlinear H-infinity control for 4-DOF underactuated overhead cranes. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Vol. 40, No. 7, 2364–2377, 2018.