

6. Mamedov R. N., El'darov V. S., Mustafayev A. M. Pressure influence to the heat conductivity of electrolytes water solutions // Trans. of 4th Baku International Congress, Baku, September 23–26. – Baku, 1997. – P. 5–6.

7. П е п и н о в Р. И. Теплофизические свойства водных растворов солей – основных компонентов природных соленых вод в широком интервале параметров состояния: Автореф. дис. ... докт. техн. наук. – Баку, 1994. – 68 с.

8. Магомедов У. Б. Теплопроводность водных растворов солей при высоких параметрах // Геотермия, геологические и теплофизические задачи. – Махачкала, 1992. – С. 168–187.

9. Absolute measurements of the thermal conductivity of aqueous NaCl solutions at pressures up to 40 Мра / T. Nagasaka, A. Okada, Z. Suzuki et al. // Ber. Bursenges. Phys. Chem. – 1983. – V. 87. – P. 859–866.

10. Андрианова И. С., Самойлов О. Я., Фишер И. З. Теплопроводность и структура воды // Журнал структ. химии. – 1967. – Т. 8, № 5. – С. 813–816.

Представлена кафедрой
промышленной теплоэнергетики
и технологии воды

Поступила 1.11.2002

УДК 536.2.001.24

ПРОБЛЕМА ТЕПЛОВОГО УДАРА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Докт. физ.-мат. наук, проф. КАРТАШОВ Э. М.,
РЕМИЗОВА О. И.

*Московская государственная академия тонкой химической технологии
им. М. В. Ломоносова*

В настоящей работе продолжены начатые в [1] исследования динамической реакции массивного тела в случае резкого теплового воздействия на его поверхность.

В ряде важных практических режимов работы элементов конструкций в условиях повышенных температур встречаются случаи, когда имеет место достаточно быстрый и интенсивный нагрев объектов. Такая ситуация возникает, например, при высокоинтенсивном теплообмене в устройствах импульсной и лазерной техники, лазерной обработке материалов, в процессах плазменного напыления, в энергетических каналах ядерных реакторов, псевдоожигенном слое, дисперсных системах и зернистых материалах, слоистых полупроводниковых структурах, кристаллах катализатора и при выращивании гомоэпитаксиальных пленок германия и др. Характерной особенностью материалов, находящихся в условиях перечисленных тепловых воздействий, является наличие больших по абсолютной величине градиентов температур, приводящих к появлению напряжений, которые в свою очередь могут вызвать разрушение материала. Для описания возни-

кающих температурных полей авторы использовали в [1] уравнение теплопроводности гиперболического типа, в основе которого лежит обобщенный закон теплопроводности для изотропных тел, учитывающий инерцию теплового потока [2]. В настоящей работе изучается вопрос о роли температурных полей и температурных напряжений в проблеме термической прочности с учетом эффекта конечной скорости распространения теплоты в твердых телах в рамках гиперболических моделей нестационарного теплопереноса.

Следует отметить, что влияние конечной скорости распространения теплоты на теплообмен становится заметным не только при высоких, но и при очень низких температурах (например, в жидком гелии $v_T = 19 \text{ м/с}$ при $T = 1,4 \text{ К}$), а также при обычных температурах в твердых телах, когда в нестационарном процессе рассматривается малый период времени [3], что может стать предметом дальнейших исследований в данной области. Именно эта ситуация характерна для проблемы теплового удара в терминах динамической термоупругости [4].

Уравнение совместности в напряжениях для динамического случая. Пусть D – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x_1, x_2, x_3)$, находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S – кусочно-гладкая поверхность, которая ограничивает область D ; \bar{n} – внешняя нормаль к S ; $T(M, t)$ – распределение температуры в области D при $t > 0$; T_0 – начальная температура, при которой тело находится в недеформируемом и ненапряженном состоянии.

Пусть $\sigma_{i,j} = \sigma_{i,j}(M, t)$; $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon_{i,j}(M, t)$; $U_{i,j} = U_{i,j}(M, t)$ ($i, j = x_1, x_2, x_3$) – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям термомеханики [4]: уравнениям движения (с учетом объемных сил $F_i(M, t)$), геометрическим соотношениям и физическим уравнениям (в индексных обозначениях):

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{U}_i; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(U_{i,j} + U_{j,i}); \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij}. \quad (3)$$

Из (3) следует

$$\varepsilon_{ij} \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk} + 3\alpha_T (T - T_0), \quad (4)$$

где ν – коэффициент Пуассона; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; E – модуль упругости; δ_{ij} – символ Кронекера.

Дифференцируя (2) по x_n и x_m

$$\varepsilon_{ij,nn} = \frac{1}{2}(U_{i,jnn} + U_{j,inn}),$$

совершая циклическую перестановку индексов и компоненты вектора перемещения, приводим к известному уравнению совместности в деформациях

$$\varepsilon_{ij,nn} - \varepsilon_{im,jn} - \varepsilon_{nj,mi} + \varepsilon_{nm,ji} = 0. \quad (5)$$

Подставим (3) в (5), полагая (5) при $m = n$:

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{ij,nn} - \sigma_{in,jn} - \sigma_{nj,ni} + \sigma_{nn,ji}) + \frac{\nu}{E}(-\sigma_{kk,nn}\delta_{ij} + \sigma_{kk,jn}\delta_{in} + \sigma_{kk,ni}\delta_{nj} - \sigma_{kk,ji}\delta_{nn}) + \\ + \alpha_{\tau}(T-T_0)_{nn}\delta_{ij} - \alpha_{\tau}(T-T_0)_{jn}\delta_{in} - \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ni}\delta_{nj} + \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}\delta_{nn} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, используя (1) и свойства тензоров:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{in,jn} &= -F_{i,j} + \rho\ddot{U}_{i,j}; & \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}\delta_{in} &= \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}; \\ \sigma_{nj,ni} &= -F_{j,i} + \rho\ddot{U}_{j,i}; & \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ni}\delta_{nj} &= \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}; \\ \sigma_{kk,jn}\delta_{in} &= \sigma_{kk,ji}; & \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}\delta_{nn} &= 3\alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji}; \\ \sigma_{kk,ni}\delta_{ni} &= \sigma_{kk,ji}; & & \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

подставим (7) в (6). Получим:

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{ij,nn} + F_{i,j} - \rho\ddot{U}_{i,j} + F_{j,i} - \rho\ddot{U}_{j,i} + \sigma_{nn,ji}) + \\ + \frac{\nu}{E}(-\sigma_{kk,nn}\delta_{ij} + \sigma_{kk,ji} + \sigma_{kk,ji} - 3\sigma_{kk,ji}) + \\ + \alpha_{\tau}(T-T_0)_{nn}\delta_{ij} - \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji} - \alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji} + 3\alpha_{\tau}(T-T_0)_{ji} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij,nn} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk,nn}\delta_{ij} + \frac{1}{E}\sigma_{nn,ji} + \frac{1+\nu}{E}(F_{j,i} + F_{i,j}) + \\ + \alpha_{\tau}[(T-T_0)_{nn}\delta_{ij} + (T-T_0)_{ji}] = \frac{1+\nu}{E}\rho(\ddot{U}_{i,j} + \ddot{U}_{j,i}). \end{aligned} \quad (8)$$

Если положить $i = j$, то можно выразить $\sigma_{kk,nn}$

$$\sigma_{kk,nn} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}F_{i,i} - \frac{2\alpha_{\tau}E}{1-\nu}(T-T_0)_{nn} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\ddot{U}_{i,i}. \quad (9)$$

Подставим (9) в (8)

$$\begin{aligned}
& (1+\nu)\sigma_{ij,nn} + \sigma_{nn,ji} + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)} F_{n,n} \delta_{ij} + (1+\nu)[F_{i,j} + F_{j,i}] + \\
& + E\alpha_{\tau} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} (T-T_0)_{nn} \delta_{ij} + (T-T_0)_{ji} \right] = \\
& = (1+\nu)\rho \left[(\ddot{U}_{i,j} + \ddot{U}_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{U}_{n,n} \delta_{ij} \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Но: $\ddot{U}_{i,j} + \ddot{U}_{j,i} = 2\ddot{\epsilon}_{ij} = \frac{2(1+\nu)}{E} \ddot{\sigma}_{ij} - \frac{2\nu}{E} \ddot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + 2\alpha_{\tau} (T-T_0)_{,j^2} \delta_{ij}$;

$$\ddot{U}_{i,i} = \ddot{\epsilon}_{ii} = \frac{1-2\nu}{E} \ddot{\sigma}_{kk} + 3\alpha_{\tau} (T-T_0)_{,i^2}. \tag{11}$$

Подставив в (10) выражение (11), находим:

$$\begin{aligned}
& (1+\nu)\sigma_{ij,nn} + \sigma_{nn,ji} + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)} F_{n,n} \delta_{ij} + (1+\nu)[F_{i,j} + F_{j,i}] + \\
& = E\alpha_{\tau} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} (T-T_0)_{nn} \delta_{ij} + (T-T_0)_{ji} \right] = \\
& = \frac{(1+\nu)\rho}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[2\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_{nn} \delta_{ij} + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_{\tau} (T-T_0) \delta_{ij} \right],
\end{aligned} \tag{12}$$

или в координатной форме (x, y, z)

$$\begin{aligned}
& (1+\nu)\Delta\sigma_{ij}(M, t) + \sigma_{ij}(M, t) + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)} \operatorname{div}\bar{F}(M, t)\delta_{ij} + \\
& + (1+\nu)[F_{i,j}(M, t) + F_{j,i}(M, t)] + E\alpha_{\tau} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta T(M, t)\delta_{ij} + (T(M, t) - T_0)_{ij} \right] = \\
& = \frac{\rho(1+\nu)}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[2\sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma(M, t)\delta_{ij} + \right. \\
& \left. + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_{\tau} (T(M, t) - T_0)\delta_{ij} \right], \quad M \in G, t > 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $i, j = x, y, z$; $M = M(x, y, z)$; $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$;

$$\bar{F} = \{F_x, F_y, F_z\}, \quad \operatorname{div}\bar{F} = F_{n,n} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Уравнение (13) может быть названо обобщенным уравнением динамической термоупругости в напряжениях. Этот случай впервые рассмотрел В. Новацкий [5], используя уравнения эластокинетики в напряжениях, однако конечный результат в [5] имеет форму, отличную от (13). Частный случай уравнения (13) для квазистатических задач (в (1) следует считать

$\rho=0$) указан в [4], а при отсутствии объемных сил ($F_i = 0$ квазистатика) в [5]. В конкретных случаях теплового удара (характер нагрева; область термонапряженного состояния; случаи симметрии) соотношение (13) приводит к известным результатам динамической термоупругости, описанным в [4].

Представляет интерес получить аналогичное соотношение и для плоской задачи динамической термоупругости. Для этого случая в (1), (2) индексы $i, j = x, y$, а соотношение (3) следует записать в виде

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1 + \nu_1}{\nu_1} \sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{nn}(M, t) \delta_{ij} + \alpha_{\tau_1} [T(M, t) - T_0] \delta_{ij}, \quad (14)$$

где $M = M(x, y)$ а параметры в (14) есть:

- для плоской деформации:

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}; \quad E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad \alpha_{\tau_1} = \alpha_{\tau}(1 + \nu); \quad (15)$$

- для плосконапряженного состояния:

$$\nu_1 = \nu; \quad E_1 = E; \quad \alpha_{\tau_1} = \alpha_{\tau}. \quad (16)$$

Уравнение совместности в деформациях (5) вырождается и теперь имеет вид $\varepsilon_{ii,nn}(M, t) = \varepsilon_{in,in}(M, t)$.

Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к конечному результату в виде

$$\Delta \sigma_{i,j}(M, t) + (1 + \nu_1) F_{n,n}(M, t) + E_1 \alpha_{\tau_1} [T(M, t) - T_0]_{,nn} = \frac{\rho(1 + \nu_1)}{E_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times \left[(1 - \nu_1) \sigma(M, t) + 2\alpha_{\tau_1} (T(M, t) - T_0) \right] \quad (17)$$

одновременно для случая плоской деформации (15) и плосконапряженного состояния (16).

Динамическая реакция упругого полупространства на тепловой удар. Рассмотрим упругое полупространство, первоначально находящееся при температуре T_0 . Нагрев происходит температурным или тепловым путем либо нагревом средой. Пусть $T(z, t)$ – температура полупространства. Возникающие вследствие наличия температурного градиента напряжения будут зависеть только от z и t , т. е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$; при этом перемещения: $U_x = U_y = 0$; $U_z = U_z(z, t)$. Уравнение (12) (без учета объемных сил $F_i = 0$) дает для этого случая:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_{\tau} \rho \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial t^2}, \quad z > l; \quad t > 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) впервые получили Даниловская из соотношений (1)...(3) и (независимо от нее) Т. Мура ([4]), который, по-видимому, не знал о ранней и более общей работе Даниловской. Уравнение (18) явилось

предметом многочисленных исследований в зависимости от условий нагрева изучаемой области, геометрической формы тела и особенностей физико-механических характеристик нагреваемого материала. Наиболее детально изучено упругое полупространство, $z \geq 0$, что объясняется многочисленными приложениями этой области и возможностью записать аналитическое решение задачи в достаточно обозримой форме. Последнее имеет немаловажное значение для целей качественного параметрического анализа динамической реакции области на тепловой удар. При этом предполагается, что в исходной постановке задачи в начальный момент область свободна от напряжений и что в процессе нагревания на границе области напряжения отсутствуют.

Рассмотрим уравнение (18) при следующих условиях:

$$\sigma_{zz}(z,0) = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} /_{t=0}, \quad z > l; \quad \sigma_{zz}(l,t) = \sigma_{zz} /_{z=\infty} = 0, \quad t > 0. \quad (19)$$

Здесь $T(z,t)$ является решением тепловых задач для уравнения теплопроводности гиперболического типа:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad z > l, \quad t > 0 \quad (20)$$

с постоянными начальными условиями:

$$T(z,t) /_{t=0} = T_0, \quad z \geq l, \quad \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} /_{t=0} = 0, \quad z \geq l \quad (21)$$

и граничными условиями:

$$T(z,t) /_{z=l} = T_c; \quad t > 0 \quad - \text{температурный нагрев}; \quad (22)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z} /_{z=l} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\frac{1}{\lambda} \varphi_0, \quad t > 0 \quad - \text{тепловой нагрев}; \quad (23)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z} /_{z=l} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h[T(z,t) /_{z=l} - T_c], \quad t > 0 \quad - \text{нагрев средой}. \quad (24)$$

Необходимо также учесть условие

$$|T(z,t)| < \infty, \quad z \geq l, \quad t \geq 0. \quad (25)$$

В безразмерных переменных:

$$z' = \frac{V_p}{a} (z-l); \quad Fo = \frac{V_p^2 t}{a}; \quad \beta = \frac{V_p}{V_t}; \quad V_t = \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}; \quad \sigma_{z'z'}(z',Fo) = \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{S(T_c - T_0)};$$

$$T(z',Fo) = \frac{T(z,t) - T_0}{T_c - T_0}; \quad Bi = \frac{ha}{V_p}; \quad S = \alpha_t (3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha_t E}{1 - 2\nu}; \quad V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (26)$$

соотношения (18)...(25) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{z'z'}}{\partial z'^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{z'z'}}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 T(z', Fo)}{\partial Fo^2}, \quad z' > 0; \quad Fo > 0; \quad (27)$$

$$\sigma_{z'z'}(z', Fo) /_{Fo=0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{z'z'}(z', Fo)}{\partial Fo} /_{Fo=0} = 0, \quad z' \geq 0; \quad (28)$$

$$\sigma_{z'z'}(z', Fo) /_{z'=0} = \sigma_{z'z'}(z', Fo) /_{z'=\infty} = 0, \quad Fo > 0; \quad (29)$$

$$\frac{\partial T(z', Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T(z', Fo)}{\partial z'^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 T(z', Fo)}{\partial Fo^2}, \quad z' > 0; \quad Fo > 0; \quad (30)$$

$$T(z', Fo) /_{Fo=0} = 0; \quad \frac{\partial T(z', Fo)}{\partial Fo} /_{Fo=0} = 0; \quad (31)$$

$$T(z', Fo) /_{z'=0} = 1, \quad Fo > 0 \text{ – температурный нагрев}; \quad (32)$$

$$\int_0^{Fo} \frac{\partial T(z', \tau')}{\partial z'} /_{z'=0} \exp\left(-\frac{Fo - \tau'}{c}\right) d\tau' = -q^*, \quad Fo > 0 \text{ – тепловой нагрев}; \quad (33)$$

$$\int_0^{Fo} \frac{\partial T(z', \tau')}{\partial z'} /_{z'=0} \exp\left(-\frac{Fo - \tau'}{c}\right) d\tau' = \beta^2 \text{Bi} [T(z', Fo) /_{z'=0} - 1],$$

$$Fo > 0 \text{ – нагрев средой}; \quad (34)$$

$$|T(z', Fo)| < \infty, \quad z' \geq l, \quad Fo \geq 0. \quad (35)$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{T}(z', p) = \int_0^{\infty} \exp(-pFo) T(z', Fo) dFo \quad (36)$$

решение уравнения (30) с учетом (35) сводится к выражениям вида $\bar{f}(p) \exp(-k\sqrt{(p\beta)^2 + p})$, где вид зависимости $\bar{f}(p)$ определяется типом граничного условия (32)...(34).

Используя формулы операционного исчисления, полученные в [1], выпишем аналитические решения всех трех краевых задач нестационарной теплопроводности, рассмотренных в (30)...(35).

Имеем

$$\bar{T}(z', Fo) = \bar{f}(p) \exp(-z'\beta\sqrt{p^2 + p/\beta^2}), \quad (37)$$

где

$$\bar{f}(p) = \begin{cases} \frac{1}{p} \text{ – температурный нагрев;} \\ q^* \frac{\sqrt{\beta^2 p + 1}}{p\sqrt{p}} \text{ – тепловой нагрев;} \\ \text{Bi} \frac{\sqrt{\beta^2 p + 1}}{p(\sqrt{p} + \text{Bi}\sqrt{\beta^2 p + 1})} \text{ – нагрев средой.} \end{cases}$$

Находим из (27)...(29) для $\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p)$ в случае:

- температурного нагрева

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \frac{1}{p(\beta^2 - 1) + 1} \left\{ \exp(-z' \sqrt{(p\beta)^2 + p}) - \exp(-z'p) \right\}; \quad (38)$$

- теплового нагрева

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = q^* \frac{\sqrt{\beta^2 p + 1}}{\sqrt{p(p(\beta^2 - 1) + 1)}} \left\{ \exp(-z' \sqrt{(p\beta)^2 + p}) - \exp(-z'p) \right\}; \quad (39)$$

- нагрева средой

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \text{Bi} \frac{\sqrt{p\beta^2 + 1}}{(\text{Bi} \sqrt{p\beta^2 + 1} + \sqrt{p})(p(\beta^2 - 1) + 1)} \times \left\{ \exp(-z' \sqrt{(p\beta)^2 + p}) - \exp(-z'p) \right\}. \quad (40)$$

Используя основные теоремы операционного исчисления и таблицы изображений [6], получим оригиналы для (38)...(40):

$$\sigma_{z'z'}(z', \text{Fo}) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < \text{Fo} < z'\beta; \\ \sigma_{z'z'}^{(1)}, & \text{если } z'\beta < \text{Fo} < z'; \\ \sigma_{z'z'}^{(1)} - \sigma_{z'z'}^{(2)}, & \text{если } \text{Fo} > z' \end{cases} \quad (41)$$

при $\beta \in (0, 1)$;

$$\sigma_{z'z'}(z', \text{Fo}) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < \text{Fo} < z'; \\ \sigma_{z'z'}^{(2)}, & \text{если } z' < \text{Fo} < z'\beta; \\ \sigma_{z'z'}^{(1)} - \sigma_{z'z'}^{(2)}, & \text{если } \text{Fo} > z'\beta \end{cases} \quad (42)$$

при $\beta > 1$, где

$$\sigma_{z'z'}^{(1)} = f(\text{Fo} - z'\beta) \exp\left(-\frac{z'}{2\beta}\right) + \frac{z'}{2\beta} \int_{z'\beta}^{\text{Fo}} f(\text{Fo} - \tau) \exp\left(-\frac{z'}{2\beta}\right) \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{\tau^2 - (z'\beta)^2}}{2\beta^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - (z'\beta)^2}} d\tau, \quad (43)$$

$$\sigma_{z'z'}^{(2)} = f(\text{Fo} - z'), \quad (44)$$

$$f(t) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \exp\left(\frac{t}{1 - \beta^2}\right) - \text{в условиях температурного нагрева}; \quad (45)$$

$$f(t) = \frac{q^* \beta}{(\beta^2 - 1)} \int_0^t \left[\frac{\exp\left(-\frac{\tau}{\beta^2}\right)}{\sqrt{\pi\tau}} + \frac{\exp\left(\frac{\tau}{1-\beta^2}\right)}{\sqrt{\beta(1-\beta^2)}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\tau}{\beta(1-\beta^2)}}\right) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} -$$

в условиях теплового нагрева;

(46)

$$f(t) = \frac{\operatorname{Bi}}{((\operatorname{Bi}\beta)^2 - 1)(\beta^2 - 1)} \left[\frac{\operatorname{Bi}^2}{\operatorname{Bi}^2 - 1} \times \right. \\ \times \left. \left((1-\beta^2) \exp\left(\frac{\operatorname{Bi}}{1-(\operatorname{Bi}\beta)^2} t\right) - (1-(\operatorname{Bi}\beta)^2) \exp\left(\frac{1}{1-\beta^2} t\right) \right) - \right. \\ \left. - \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{\operatorname{Bi} \exp\left(\frac{\operatorname{Bi}}{1-(\operatorname{Bi}\beta)^2} (t-\tau)\right)}{\sqrt{1-(\operatorname{Bi}\beta)^2}} \operatorname{erf}\left(\operatorname{Bi} \sqrt{\frac{t-\tau}{1-(\operatorname{Bi}\beta)^2}}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\exp\left(-\frac{\tau}{\beta^2}\right)}{\sqrt{\tau}} + \frac{\exp\left(\frac{\tau}{1-\beta^2}\right)}{\beta\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\tau}{(1-\beta^2)\beta^2}}\right) \right] dt \right] -$$

в условиях
нагрева
средой.

(47)

При $\beta = 0$ (имея в виду классическую феноменологию Фурье) получим в случае:

- температурного нагрева

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \frac{1}{1-p} \left\{ \exp(-z'\sqrt{p}) - \exp(-z'p) \right\}; \quad (48)$$

- теплового нагрева

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \frac{q^*}{\sqrt{p(1-p)}} \left\{ \exp(-z'\sqrt{p}) - \exp(-z'p) \right\}; \quad (49)$$

- нагрева средой

$$\bar{\sigma}_{z'z'}(z', p) = \frac{\operatorname{Bi}}{(\operatorname{Bi} + \sqrt{p})(1-p)} \left\{ \exp(-z'\sqrt{p}) - \exp(-z'p) \right\} \quad (50)$$

Используя основные теоремы операционного исчисления и таблицы изображений [6], получим оригиналы для (48)...(50):

$$\sigma_{z'z'} = \begin{cases} \sigma_{z'z'}^{(1)}, & \text{если } 0 < \operatorname{Fo} < z'; \\ \sigma_{z'z'}^{(1)} + \sigma_{z'z'}^{(2)}, & \text{если } \operatorname{Fo} > z', \end{cases} \quad (51)$$

где

$$\sigma_{z'z'}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{\exp\left(\frac{-z'}{\pi}(Fo - \tau)\right)}{\sqrt{Fo - \tau}} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} + \exp(\tau) \operatorname{erf}(\sqrt{\tau}) \right] d\tau,$$

$$\sigma_{z'z'}^{(2)} = \exp(Fo - z') \text{ — для температурного нагрева;} \quad (52)$$

$$\sigma_{z'z'}^{(1)} = -\frac{q^*}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \exp\left(\frac{Fo - \tau - z'^2}{4\tau}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}},$$

$$\sigma_{z'z'}^{(2)} = -\frac{q^*}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \exp(Fo - z') \frac{d\tau}{\sqrt{Fo - \tau}} \text{ — для теплового нагрева;} \quad (53)$$

$$\sigma_{z'z'}^{(i)} = \int_0^{Fo} f_1(Fo - \tau) f_2(\tau) d\tau,$$

$$f_1(t) = \int_0^{Fo} \exp\left(-\frac{z'^2}{4(t - \tau)}\right) \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \exp(t) \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(Fo - \tau)}} \text{ при } i = 1,$$

$$f_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \exp(t) \operatorname{erf}(\sqrt{t})$$

и

$$f_1(t) = \exp(t - z'),$$

$$f_2(t) = \operatorname{Bi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \operatorname{Bi} \exp(\operatorname{Bi}^2 t) \operatorname{erfc}(\operatorname{Bi} \sqrt{t}) \right] \text{ при } i = 2 \text{ — для нагрева средой.} \quad (54)$$

Остальные компоненты тензора напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{y'y'} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{z'z'} - \frac{E\alpha_p T(z', Fo)}{(1 - \nu)ST_0}; \quad \sigma_{x'z'} = \sigma_{x'y'} = \sigma_{y'z'} = 0. \quad (55)$$

Физический анализ решений. Как видно из выражений (41), (42), напряжение $\sigma_{z'z'}(z', Fo)$ в фиксированной точке полупространства возникает спустя время $Fo = z'\beta$, если $\nu_p < \nu_s$, или $Fo = z'$, если $\nu_p > \nu_s$, после начала воздействия источника теплоты на границу полупространства. Но в отличие от классической феноменологии Фурье соотношения (41), (42) показывают наличие двух скачков напряжения: один — на фронте тепловой, другой — на фронте упругой волны, идущие соответственно со скоростями ν_t и ν_p .

На рис. 1...3 приведены графики зависимости динамического температурного напряжения от безразмерного времени при фиксированном значении координаты $z' = 2$. На этих рисунках, в частности, приведены результаты при $\beta = 3,4$, что соответствует стали; $\beta = 1,84$ — алюминию; $\beta = 0,6$ — кристаллу. Кривые при $\beta = 0$ соответствуют случаю, когда скорость распространения теплоты бесконечно велика (классическая феноменология Фурье). Числовые расчеты проведены по формулам (51)–(54).

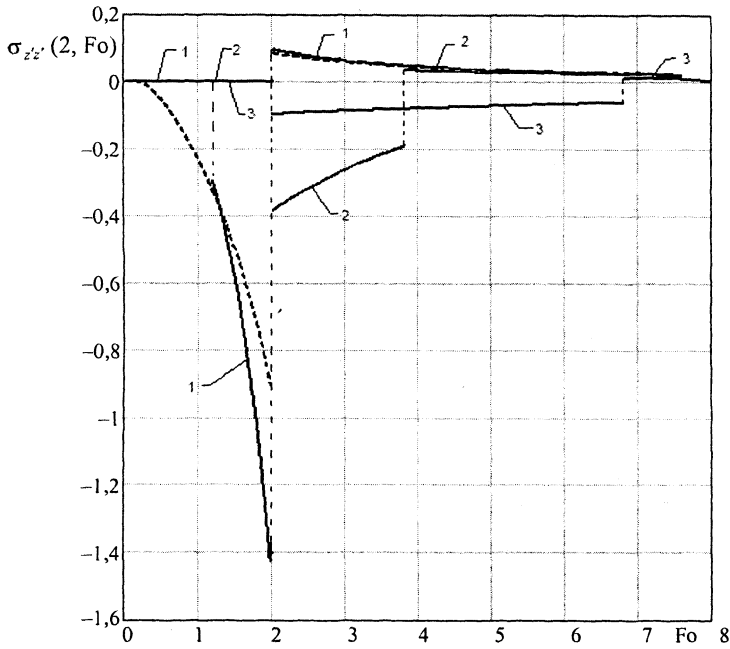


Рис. 1. Зависимость безразмерного напряжения $\sigma_{z'z'}$ от времени Fo в сечении $z' = 2$ при температурном нагреве: - $\beta = 0$; 1 - $\beta = 0,6$ (кристалл); 2 - 1,86 (алюминий); 3 - 3,4 (сталь)

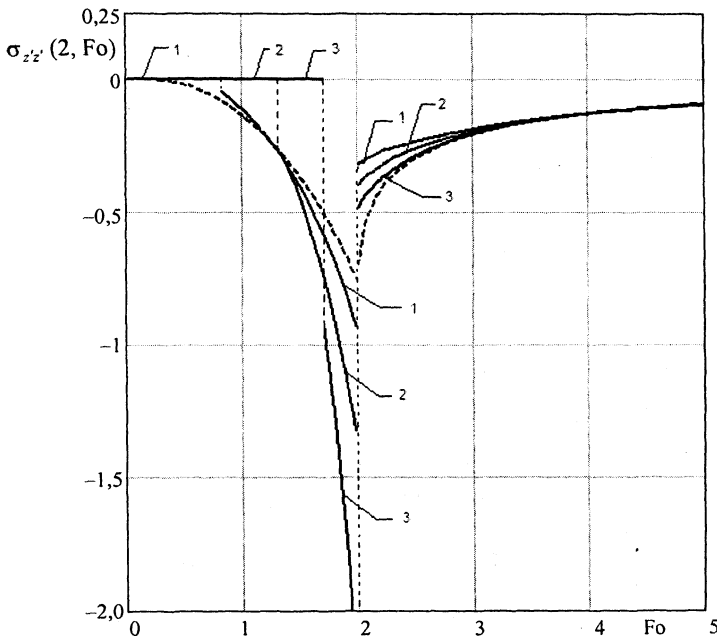


Рис. 2. Зависимость безразмерного напряжения $\sigma_{z'z'}$ от времени Fo в сечении $z' = 2$ при $q^* = 1$ при тепловом нагреве: - $\beta = 0$; 1 - $\beta = 0,4$ (кристалл); 2 - 0,6 (алюминий); 3 - 0,8 (сталь)

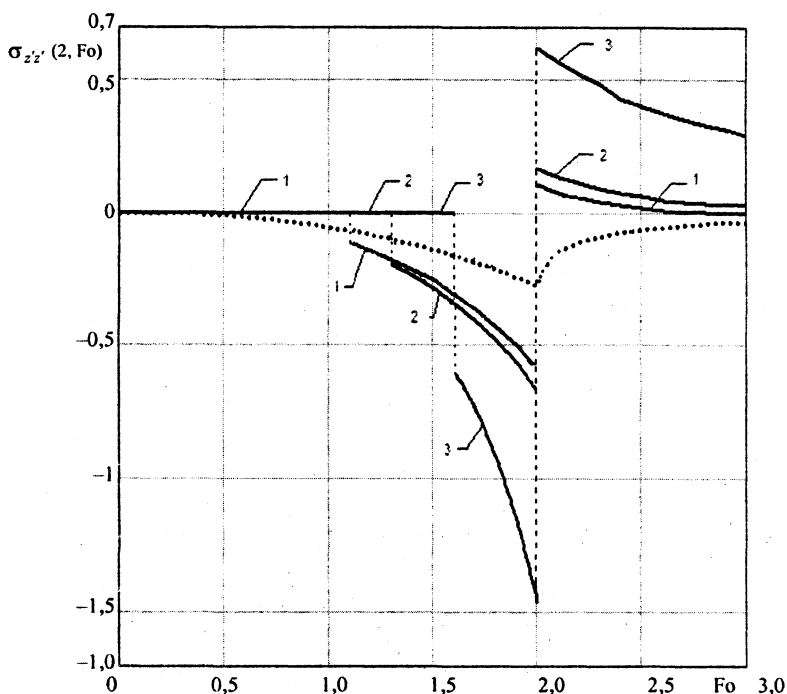


Рис. 3. Зависимость безразмерного напряжения $\sigma_{z'z'}$ от времени Fo в сечении $z' = 2$ при $Bi = 0,5$ при нагреве среды: — $\beta = 0$; 1 — 0,8; 2 — 0,6; 3 — 0,54

Из графиков видно, что учет скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению динамических температурных напряжений. Возьмем произвольную точку внутри упругого полупространства. В случае, когда $\beta > 1$ ($v_p > v_t$), напряжения в ней равны нулю. В момент времени $Fo = z'$ к этой точке подходит продольная упругая волна напряжения, фронт которой движется со скоростью v_p . В рассматриваемой точке возникает скачком сжимающее напряжение, которое дальше уменьшается. В момент времени $Fo = z'\beta$ к этой точке подходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью v_t . В момент прохождения тепловой волны напряжение, изменяясь скачком, становится растягивающим, а дальше асимптотически стремится к нулю.

В случае, когда $\beta < 1$ ($v_p > v_t$), к рассматриваемой точке в момент времени $Fo = z'\beta$ приходит тепловая волна, что вызывает скачкообразное возникновение сжимающего напряжения, которое возрастает. В момент времени $Fo = z'$ подошедшая к рассматриваемой точке продольная упругая волна вызывает скачкообразное изменение напряжения, которое становится растягивающим. Далее напряжение уменьшается до нуля.

Расчет скачков на фронте термоупругой волны. Представляет интерес получить расчетные инженерные формулы скачка напряжений $\sigma_{z'z'}$ на фронте термоупругой волны по методу, описанному в [7], в зависимости от характера нагрева поверхности полупространства.

Величина скачка для случая температурного нагрева определяется с помощью (38)

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{1}{|p(\beta^2 - 1) + 1|} = \frac{1}{|\beta^2 - 1|}; \quad (56)$$

• для случая теплового нагрева – с помощью (39)

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{q^* \sqrt{\beta^2 p + 1}}{\sqrt{p} |p(\beta^2 - 1) + 1|} = \frac{q^* \beta}{|\beta^2 - 1|}; \quad (57)$$

• для случая нагрева средой – с помощью (40)

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} p \text{Bi} \frac{\sqrt{\beta^2 p + 1}}{(\text{Bi} \sqrt{\beta^2 p + 1} + \sqrt{p}) |(\beta^2 - 1)p + 1|} = \frac{\text{Bi} \beta}{|\beta^2 - 1| (\text{Bi} \beta + 1)}. \quad (58)$$

Полученные выражения (56)...(58) дают возможность качественно и количественно оценить степень опасности теплового воздействия на упругий материал. Прежде всего, из (56)...(58) следует, что величина скачка напряжений определяется условиями внешнего нагрева, тепловыми и упругими свойствами материала.

На рис. 4 представлены кривые изменения $\sigma_{z'z'}(z', \text{Fo})$ в сечении $z' = 2$; $q^* = 1$; $\text{Bi} = 0,5$, позволяющие провести сравнительный анализ различных режимов нагружения: температурного (32), теплового (33) и средой (34). Видно, что по величине возникающих в области $0 > z' > 2$, $\text{Fo} > 0$ напряжений (и деформаций) наиболее опасен случай температурного нагрева.

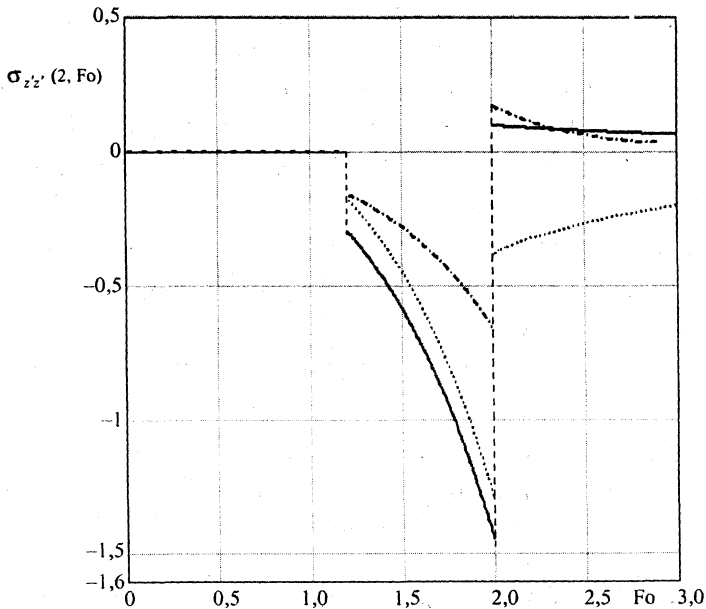


Рис. 4. Зависимость безразмерного напряжения $\sigma_{z'z'}$ от времени Fo в сечении $z' = 2$ при $q^* = 1$; $\text{Bi} = 0,5$; $\beta = 0,6$: ——— температурный нагрев; — тепловой нагрев; —•—•— нагрев средой

Для задач 2-го (тепловой нагрев) и 3-го (тепловое взаимодействие поверхности полупространства с окружающей средой) типов из (57), (58) следует, что при учете конечной скорости распространения теплоты в материале при тепловом ударе будут иметь место скачки напряжения, в то время как в классическом варианте ($\beta = 0$) скачков напряжения не наблюдается.

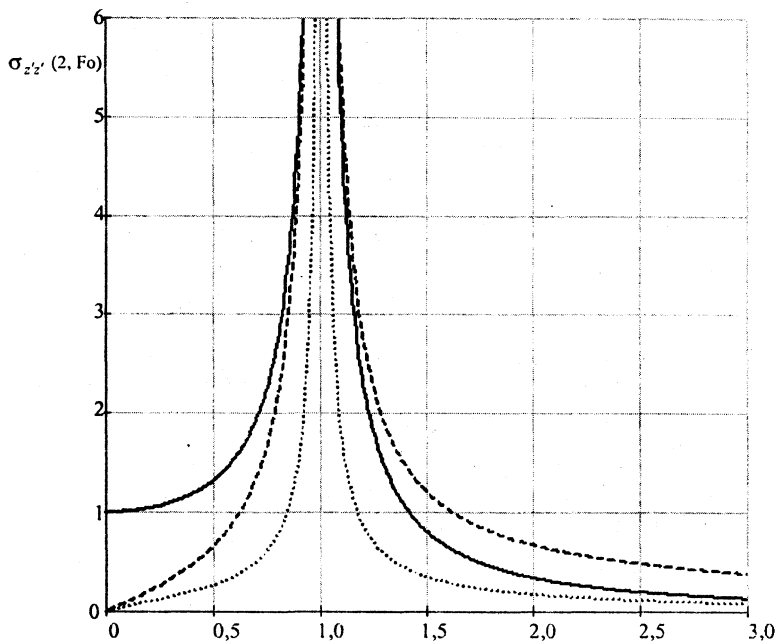


Рис. 5. Анализ скачков напряжения в зависимости от параметра $\beta = \frac{v_p}{v_t}$:
 ——— температурный нагрев; - - - - тепловой нагрев; — нагрев средой

Рис. 5 позволяет наглядно сравнить величины скачков напряжения при учете конечной скорости распространения теплоты в материале и в классическом варианте (считая скорость распространения теплоты в материале бесконечной). Кроме того, при любом из рассмотренных выше способов нагрева величина скачка тем больше, чем меньше разность скоростей распространения звука и теплоты в среде и в случае равенства скоростей наступает явление резонанса, следствием которого является скачок бесконечно большой величины, что создает опасность разрушения материала.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена проблема теплового удара в терминах динамической термоупругости с учетом конечной скорости распространения теплоты в материале. Получены формулы для расчета напряжений, возникающих в материале в результате резкого теплового нагрева при различных видах теплового нагружения (температурный, тепловой или нагрев средой), а также

формулы, позволяющие непосредственно вычислить величину скачка напряжений.

Направление дальнейшего обобщения гиперболической модели нестационарного теплопереноса будет заключаться в переходе к областям с движущимися во времени границами. Проблемы, требующие разрешения указанной задачи, возникают во многих областях науки и техники, описанных в [6], [8] и [9].

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Э. М., Ремизова О. И. Новые интегральные соотношения в теории нестационарного теплопереноса на основе уравнения гиперболического типа // Энергетика (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2001. – № 6. – С. 44–56.

2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.

3. Баумейстер К., Хамилл Д. Гиперболическое уравнение теплопроводности: Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. – 1969. – № 4. – С. 112–119.

4. Карташов Э. М. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. – Сер.: Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1991. – Т. 22. – С. 55–127.

5. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

6. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1965.

7. Карташов Э. М., Бартнев Г. М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии // Итоги науки и техники. – Сер.: Химия и технология высокомолекулярных соединений. – М., 1988. – Т. 25.

8. Карташов Э. М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущейся границей // ИФЖ. – 2001. – № 2, Т. 74. – С. 171–195.

9. Стальной слиток / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова и др. – Мн.: Бел. наука, 2000. – Т. 1. – 584 с.