вариант IV, обеспечивающий простоту конструкции, минимальные капиталовложения, необходимые для его реализации, и большую экономию топлива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров В. И., Вакулич Е. В. К расчету изменения экономичности работы теплофикационного энергоблока при впрыске воды в промперегреватель // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2003. – № 1. – С. 44–57.
2. Кроль Л. Б., Кемельман Г. Н. Промежуточный перегрев пара и его регулирование в энергетических блоках. – М.: Энергия, 1970.
3. Тепловой расчет котла ТГМП-344. – ЦКТИ, 1981.
4. Вопросы ТЭП при проектировании КА. – М., 1979.
5. Тепловые испытания КА ТГМП-344 бл. № 6 МТЭЦ-4 при сжигании природного газа. – Львов, 1975.
6. Яковлев Б. В. Повышение эффективности систем теплофикации и теплоснабжения. – Мн.: Адукацыя и выхаванне, 2002.

Представлена кафедрой ТЭС Поступила 16.12.2005

УДК 621.1.0.18

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ НАГРЕВА И ТЕРМООБРАБОТКИ

Канд. техн. наук, доц. ВОРОНОВА Н. П., инж. КЛИМОВИЧ Г. А.

Белорусский национальный технический университет

Математическое моделирование технологических процессов широко применяется при их исследовании и оптимизации. Возможность применения ЭВМ позволяет реализовывать сложные математические модели, получая весьма точные результаты. Адекватность данных моделей предполагает их практическую реализацию с заранее заданной точностью и возможность обработки большого объема информации. Таким образом, применение таких моделей приносит значительный экономический эффект, позволяя исследовать процессы при неизмеримо меньших затратах, чем натурные исследования на реальных агрегатах, стендах или физических моделях. С помощью математических моделей можно еще на стадии проектирования найти оптимальное конструктивное решение и выбрать оптимальные режимные параметры работы [1].

Различают стохастические, детерминированные математические модели и модели смешанного типа. Стохастические модели разрабатываются на основе экспериментальных исследований натурального образца и изучают лишь реакцию системы на подаваемые на вход возмущения. Результаты обрабатываются методами математической статистики. Экспериментальные исследования удобно организовывать на основе методов планирования эксперимента, в результате получая регрессионные уравнения.

Достоинством стохастических моделей является их простота, что позволяет применять их в системах автоматизированного управления различными объектами. К несовершенству этих моделей можно отнести их недостаточные содержательность и универсальность. Для каждого индивидуального объекта необходимо строить свою стохастическую модель.

Более универсальными считаются детерминированные модели. Они строятся на основе дифференциальных либо интегральных уравнений. С точки зрения содержательности такие модели значительно превосходят стохастические. В них заложены не только формальные связи между входными и выходными параметрами, но и функциональные зависимости, отражающие физические механизмы процессов. Недостаток детерминированных моделей – сложность расчетов.

Модели смешанного типа строятся на основе меньшего числа уравнений, чем детерминированные. Математически описывается механизм лишь наиболее существенных для данного натурального образца процессов. Влияние всех других процессов учитывается с помощью настроечных коэффициентов. Степень универсальности таких моделей выше стохастических, но для их реализации необходима адаптация, т. е. по результатам эксперимента получение значений настроечных коэффициентов.

Актуальность проблемы разработки и использования математических моделей в практике исследования, совершенствования и проектирования агрегатов для нагрева и термообработки привела к необходимости создания комплексного метода, включающего все параметры, которые влияют на качество протекания процесса.

Задачу оптимизации процесса нагрева и термообработки материалов по ряду параметров можно рассматривать как функцию $Q(k_1, k_2, k_3, k_4)$, где k_1 – параметр, характеризующий точность математической модели в зависимости от точности коэффициентов, входящих в математическую модель; k_2 – параметр, отражающий влияние математических методов, применяемых для реализации модели; k_3 – параметр, учитывающий технологические изменения процесса; k_4 – параметр, определяющий оптимальность протекания процесса.

Процессы нагрева и термообработки непосредственно связаны с изменением температуры вещества T согласно уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T, \qquad (1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности; t – время;

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

где x, y, z – координаты, позволяющие рассматривать пространственный случай, плоский или линейный.

Для объектов различной формы можно рассматривать различные системы координат. Уравнение (1) представим в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{2}$$

где при $n = 0$ уравнение (2) исследуется в прямоугольной системе координат, при $n = 1$ – в цилиндрической и при $n = 2$ – в сферической системах координат.

Однозначность решения обеспечивает начальные и граничные условия. Граничные условия в общей постановке имеют вид:

$$\begin{aligned}&\left.\left(A_1T+A_2\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=A_3;\\ &\left.\left(B_1T+B_2\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=B_3.\end{aligned} \tag{3}$$

Задавая параметры A_1, A_2, B_1, B_2 в (3), можно варьировать краевые условия задачи. При $A_2=B_2=0$ – граничные условия I рода; $A_2=B_2=1$, $A_1=B_1=0$ – граничные условия II рода; при $A_3=B_3=0$ – граничные условия III рода.

Поставленную задачу можно свести к системе уравнений:

$$\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\lambda\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x}\right),\ r_i\le x\le r_{i+1};$$

$$T_i(r_{i+1},t)=T_{i+1}(r_{i+1},t);$$

$$T_{i-1}(r_i,t)=T_i(r_i,t);$$

$$\lambda_i\frac{\partial T_i(r_{i+1},t)}{\partial x}=\lambda_{i+1}\frac{\partial T_{i+1}(r_{i+1},t)}{\partial x};$$

$$\lambda_{i-1}\frac{\partial T_{i-1}(r_i,t)}{\partial x}=\lambda_i\frac{\partial T_i(r_i,t)}{\partial x},\ i=\overline{1,m},$$

где m – число слоев, на которые разбивается слой $0\le x\le l$.

В качестве базовой рассмотрим смешанную задачу для однородного уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right);$$

$$T(r,0)=f(r);$$

$$-\frac{\partial T(R,t)}{\partial r}+h[\varphi(t)-T(R,t)]=0;$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial r}=0,$$

где $0\le r\le R$, $f(r)=T_0$ – начальное значение температуры, $\varphi(t)$ = T_0 + $+\Delta T\sin\omega t$.

Применим ортогональный метод Бубнова – Галеркина [3] к решению поставленной задачи. В изображениях по Лапласу задача приводится к виду:

$$\lambda \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\bar{T}}{dr} \right) - \mathrm{p} r\bar{T} + rf(r) = 0 ;$$

$$\left(-\frac{d\bar{T}}{dr} + h\bar{T} \right)\bigg|_{r=R} = h\left(\frac{T_0}{\mathrm{p}} + \frac{\Delta T\omega}{\mathrm{p}^2 + \omega^2} \right);$$

$$\frac{d\bar{T}}{dr}\bigg|_{r=0} = 0 .$$

Приближенное решение для изображений будем искать в семействе функций вида [4]

$$T_n\left(\frac{r}{R}, \mathrm{p} \right) = \overline{\varphi(\mathrm{p})} - \sum_{k=1}^{n} a_k(\mathrm{p})\psi_k\left(\frac{r}{R} \right).$$

В качестве координатных функций выберем функции:

$$\psi_1\left(\frac{r}{R} \right) = \frac{M+2}{M} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 ;$$

$$\psi_k\left(\frac{r}{R} \right) = \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{r}{R} \right)^{2(k-2)}, \quad k = 2, ..., n,$$

где M – критерий, зависящий от $\left(\frac{R}{x} \right)$.

Определяющая система уравнений Бубнова – Галеркина приводится к виду:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m}\left(\frac{(A_{jk} + B_{jk}\mathrm{p})\bar{a}_k}{\mathrm{p}} = C_j + \frac{D_j \mathrm{p}\bar{\varphi}}{\mathrm{p}} \right); \\ A_{jk} = -\frac{a}{R^2}\int\limits_0^1 \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi_k}{\partial\rho} \right)\psi_j(\rho)d\rho; \\ B_{jk} = \int\limits_0^1 \rho\psi_j(\rho)\psi_k(\rho)d\rho; \\ C_j = -\int\limits_0^1 \rho f(\rho)\psi_j(\rho)d\rho; \\ D_j = \int\limits_0^1 \rho\psi_j(\rho)d\rho, \quad \rho = \frac{r}{R}. \end{cases} \tag{4}$$

Из системы (4) получим

$$\overline{a_k(\mathrm{p})} = \frac{\sum_{m=1}^{n} C_m \Delta_{mk}(\mathrm{p}) + \sum_{m=1}^{n} D_m \Delta_{mk}(\mathrm{p})}{\Delta(\mathrm{p})},$$

где $\Delta(\mathrm{p})$ – основной определитель системы (4); $\Delta_{mk}(\mathrm{p})$ – алгебраическое дополнение m-й строки и k-го столбца определителя $\Delta(\mathrm{p})$.

$\sum_{m=1}^{n} C_m \Delta_{mk}(\mathrm{p})$ и $\sum_{m=1}^{n} D_m \Delta_{mk}(\mathrm{p})$ представляют собой дробно-рациональные функции, поэтому существуют функции $f_k(t)$ и $\varphi_k(t)$ такие, как $\frac{\sum_{m=1}^{n} C_m \Delta_{mk}(\mathrm{p})}{\Delta(\mathrm{p})} = f_k(t)$, $\frac{\sum_{m=1}^{n} D_m \Delta_{mk}(\mathrm{p})\mathrm{p}\overline{\varphi}(\mathrm{p})}{\Delta(\mathrm{p})} = \varphi_k(t)$. Тогда, обозначив

$$\mathrm{p}\overline{\varphi}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}\left(\frac{T_0}{\mathrm{p}} + \frac{\Delta T \omega}{\mathrm{p}^2 + \omega^2}\right) = \varphi^*(\tau)\varphi_k(t-\tau)d\tau,$$

получим

$$\overline{a}_k(\mathrm{p}) = f_k(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau)\varphi_k(t-\tau)d\tau.$$

Температура на оси опишется формулой

$$T(\mathrm{p},t) = \varphi(t) - \sum_{k=1}^{n}\left\{f_k(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau)\varphi_k(t-\tau)d\tau\right\}\psi_k(\mathrm{p}).$$

Распределение температур в первом приближении имеет вид:

$$a_1(\mathrm{p}) = \frac{A_1(\mathrm{M})}{4}\left[\mathrm{p}\overline{\varphi}(\mathrm{p}) - T_0\right]\left[\mathrm{p} + \frac{A_1(\mathrm{M})a}{R^2}\right]^{-1};$$

$$A_1(\mathrm{M}) = \frac{6\mathrm{M}(\mathrm{M}+4)}{\mathrm{M}^2 + 6\mathrm{M} + f_2}.$$

Переходя к оригиналу, получим

$$a_1(\mathrm{p}) = \frac{A_1(\mathrm{M})}{4}\Delta T\omega\frac{\omega\sin\omega t + \frac{A_1(\mathrm{M})a}{R^2}\cos\omega t - \frac{A_1(\mathrm{M})a}{R^2}\exp\left(\frac{A_1(\mathrm{M})a}{R^2}t\right)}{\omega^2 + \left(\frac{A_1(\mathrm{M})}{R^2}\right)^2}.$$

Значение температуры в первом приближении опишется формулой

$$T\left(\frac{r}{R}\right) = T_0 + \Delta T \sin \omega t - a_1(t)\left[\frac{\mathrm{M}+2}{\mathrm{M}} - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \qquad (5)$$

На основании сравнения значений температур в контрольных точках и вычисленных по (5) легко показать, что относительная погрешность повышается с ростом критерия М и достигает своего максимального значения 3,7 % при $\mathrm{M} \to \infty$.

ВЫВОДЫ

1. Сформулировано и предложено решение задачи оптимизации нагрева и термообработки материалов, в которой учтены все основные параметры, влияющие на качество и характер протекания процессов.

2. С помощью ортогонального метода Бубнова – Галеркина решена система уравнений, включающая уравнение теплопроводности, граничные условия I, II, III рода и соответствующие начальные условия.

3. Оценка адекватности расчетных результатов опытным данным показала, что их максимальная относительная погрешность не превышает 3,7 %.

4. Разработанная математическая модель может быть использована с целью оптимизации теплотехнических режимов работы и конструкции различных нагревательных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теплотехнология металлургических мини-заводов / В. И. Тимошпольский, А. Б. Стеблов, И. А. Трусова и др. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 158 с.

2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.

3. Цой В. П. Методы расчеты оптимальных задач тепломассопереноса. – М.: Энергия, 1971. – 235 с.

4. Воронова Н. П., Березовский Н. И. Об одном аспекте аналитического решения задач тепломассопереноса // Литье и металлургия. – 1998. – № 2. – С. 42–46.

Представлена кафедрой
металлургических технологий

Поступила 15.11.2005