

УДК 669.27:519

О ТОЧНОСТИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ НАГРЕВА И ОХЛАЖДЕНИЯ ОБЪЕКТОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ РАСХОДОВАНИЯ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ

Докт. физ.-мат. наук, проф. ЧИЧКО А. Н., асп. САЧЕК О. А.

Белорусский национальный технический университет

При решении сложных теплотехнических задач применяются численные методы расчета. Точность используемых численных схем при этом может существенно различаться. Экспериментально оценить адекватность численных схем довольно сложно, а аналитические решения тепловой задачи для объектов, имеющих сложную пространственную геометрию, отсутствуют. Однако во многих публикациях этот вопрос поднимается в том случае, когда речь идет об анализе получаемых решений, что свидетельствует об актуальности этой проблемы.

В статье рассмотрена тепловая задача для охлаждаемого двумерного металлического блюда. Аналитические решения, полученные для этого случая, сравниваются с результатами моделирования, полученными по явной и неявной численным схемам. Целью настоящей работы является численное моделирование температуры двумерного охлаждаемого объекта на основе аналитической схемы, неявной численной и явной численной схем.

Для оценки погрешности этих схем при моделировании на первом этапе исследования были проведены аналитические вычисления распределения температуры в охлаждаемом квадрате. В качестве модели использовали уравнение теплопроводности и систему начальных и граничных условий:

$$\Delta U = \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} \right); \quad (1)$$

$$U|_{x=\pm a} = T_1; \quad (2)$$

$$\begin{cases} U|_{y=\pm b} = T_1; \\ U|_{t=0} = T, \end{cases} \quad (3)$$

где $a = \lambda_1/(c\rho)$ – коэффициент температуропроводности материала; λ_1 – теплопроводность; c – теплоемкость; ρ – плотность.

В прямоугольнике $G = \{-a < x < a, -b < y < b\}$ для промежутка времени $0 \leq t \leq t_1$.

Для нахождения решения уравнения (1) обозначим $U(x, y, t) = T_1 + U_1(x, y, t)$.

После этого решение задачи (1)–(3) согласно методу Фурье [1] находим в виде

$$U_1(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t). \quad (4)$$

После подстановки в (1) получим:

$$\frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{1}{a} \frac{T'}{T} = -\lambda,$$

где λ – постоянная,
или

$$\begin{aligned} \Delta U_1 + \lambda U_1 &= 0; \\ T(t) &= ce^{-\lambda at}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если U_{km} – собственные функции; λ_{km} – собственные значения уравнения (5), то решение задачи (1)–(3) записывается в виде

$$U_1(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{km}(t) U_{km}(x, y). \quad (6)$$

Предположим, что температура в объекте подчиняется закону косинуса и может быть представлена в виде произведения двух функций, тогда в качестве U_{km} выбирается функция:

$$U_{km} = \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b},$$

а функция $T_{km}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a} T'_{km}(t) = -\lambda_{km},$$

где

$$\lambda_{km} = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{2b} \right)^2.$$

Найдем эту функцию в виде

$$T_{km} = \alpha_{km} e^{-\lambda_{km} at}.$$

Коэффициенты α_{km} определяем из начальных условий. Подставляя (4), (6) в (3), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{km} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b} = T_0 - T_1. \quad (7)$$

Умножая (7) на значения $\cos \frac{(2i+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2j+1)\pi y}{2b}$ после интегрирования по x, y от $[-a; a], [-b; b]$ соответственно получим

$$ab\alpha_{ij} = (T_0 - T_1) \frac{4a(-1)^{i+1}}{\pi(2i+1)} \frac{4b(-1)^{j+1}}{\pi(2j+1)}.$$

Следовательно:

$$\alpha_{ij} = \frac{16(T_0 - T_1)(-1)^{i+1}(-1)^{j+1}}{\pi^2(2i+1)(2j+1)}.$$

Таким образом, для вычисления распределения температуры предлагается следующая аналитическая формула:

$$U = T_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{km}(t) U_{km}(x, y).$$

Здесь $U_{km} = \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b}$; $T_{km} = \alpha_{km} e^{-\lambda_{km} at}$,

$$\lambda_{km} = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{2b} \right)^2, \quad \alpha_{km} = \frac{16(T_0 - T_1)(-1)^{k+1}(-1)^{m+1}}{\pi^2(2k+1)(2m+1)}.$$

Общая формула имеет вид

$$U(x, y, t) = T_1 + \frac{16(T_0 - T_1)}{\pi^2} \sum_k \sum_m \frac{(-1)^{k+1}(-1)^{m+1}}{(2k+1)(2m+1)} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2a} \times \\ \times \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2b} e^{-\frac{((2k+1)^2 + (2m+1)^2)\pi^2 at}{4ab}}.$$

На втором этапе уравнение теплопроводности вида (1)–(3) было распиано в явной конечно-разностной аппроксимации [2, 3].

Для построения разностной схемы введем разностную сетку с координатами узлов (x_p, y_l, t^n) , где $x_p = p\Delta x (p = 0, 1, 2, \dots, P; \Delta x = 2a/P)$; $y_l = l\Delta y (l = 0, 1, 2, \dots, L; \Delta y = 2b/L)$; $t^n = n\tau (n = 0, 1, 2, \dots, t_1/\tau)$. Тогда значение функции в узле (x_i, y_j, t^n) обозначим через $y_{ij}^n = U(i\Delta x, j\Delta y, n\tau)$. Решение задачи (1)–(3) можно найти с помощью явной схемы

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^n + \Lambda_2 y_{ij}^n,$$

где

$$\Lambda_1 y_{ij} = a \frac{y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}}{\Delta x^2}; \quad \Lambda_2 y_{ij} = a \frac{y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \quad (8)$$

В качестве краевых условий использовали условия (2):

$$y_{ij}^{n+1} = T_1, \text{ где } i=0 \text{ и } i=P, \quad j=0 \text{ и } j=L, \quad n=-1, 0, 1, \dots, N-1, \quad (9)$$

$$y_{ij}^0 = T_0, \text{ где } i=1, 2, \dots, P-1, \quad j=1, 2, \dots, L-1.$$

Таким образом, решение разностной схемы (8) находится по временным слоям с помощью явной формулы:

$$y_{ij}^{n+1} = y_{ij}^n + \tau(\Lambda_1 y_{ij}^n + \Lambda_2 y_{ij}^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, (t_1/\tau - 1).$$

На третьем этапе была предложена неявная схема уравнения теплопроводности [2, 3]

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+1} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1},$$

где

$$\Lambda_1 y_{ij} = a \frac{y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad \Lambda_2 y_{ij} = a \frac{y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}}{\Delta y^2}.$$

Краевые условия аналогичны (9).

Для поиска решения использовалась продольно-поперечная схема переменных направлений [2, 4]. Наряду с основными значениями функции $y(x, y, t)$, т. е. y_{ij}^n и y_{ij}^{n+1} , вводится промежуточное значение $y_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$, которое рассматривается как значение y_{ij} при $t = t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \tau/2$. Переход от слоя n к слою $(n+1)$ совершается в два этапа с шагами $0,5\tau$:

$$\frac{y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - y_{ij}^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y_{ij}^n; \quad (10)$$

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1}. \quad (11)$$

Перепишем уравнение (10) в виде [2]

$$0,5\gamma_1 y_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (1-\gamma_1) y_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\gamma_1 y_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = -(y_{ij}^n + 0,5\tau\Lambda_2 y_{ij}^n),$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\tau a}{\Delta x^2}.$$

Перепишем уравнение (11) в виде

$$0,5\gamma_2 y_{i,j-1}^{n+1} - (1 - \gamma_2) y_{ij}^{n+1} + 0,5\gamma_2 y_{i,j+1}^{n+1} = - \left(y_{ij}^{\frac{n+1}{2}} + 0,5\tau\Lambda_2 y_{ij}^{\frac{n+1}{2}} \right),$$

где

$$\gamma_2 = \frac{\tau a}{\Delta y^2}.$$

Уравнения решаем методом прогонки.

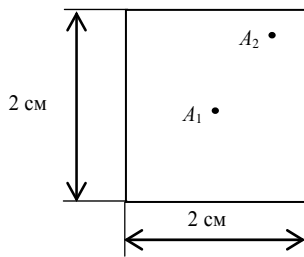


Рис. 1. Геометрия моделируемого объекта: $\lambda = 0,00007$ кал/(кг·град);
 $c = 0,14$ кал/(кг·град);
 $\rho = 0,0072$ кг/см³

По явной и неявной схемам была разработана программа, позволяющая рассчитывать температурное поле в охлаждаемом объекте. Геометрия моделируемого поля показана на рис. 1. На рис. 2 представлено распределение температур в рассматриваемом объекте (охлаждающемся металлическом квадрате) для трех моментов времени. Температуры получены с использованием аналитической схемы с шагом дискретизации координат 0,1, значение температуры рассматривается в центре ячейки.

Как видно, распределение температуры симметрично относительно центра квадрата.

Анализ рассчитанных распределений по температуре показал, что значение температур различается между собой для аналитической, явной и неявной схем. Величина расхождения по температурам различна. Поэтому для анализа были введены параметры, характеризующие значения разницы между температурами, полученными с помощью аналитической и численной схем:

$$P_1 = |T_{\text{анал}} - T_{\text{я.с.}}|;$$

$$P_2 = |T_{\text{анал}} - T_{\text{н.с.}}|,$$

где $T_{\text{анал}}$ – температура, полученная с помощью аналитической схемы; $T_{\text{я.с.}}$ – то же явной схемы; $T_{\text{н.с.}}$ – то же неявной схемы.

На рис. 3 представлены двумерные распределения параметра расчета P_1 для различных значений шага дискретизации по времени Δt . Как видно из рисунка, максимальные значения параметров P_1 локализованы в центральной части квадрата, при уменьшении шага по времени для явной схемы значения параметров уменьшаются. Было установлено также, что при уменьшении шага дискретизации по времени Δt в центре квадрата образуется область с меньшими значениями P_1 , т. е. с более точными значениями температуры, полученной по явной схеме.

I зона	II зона	III зона	IV зона	V зона	VI зона	VII зона
0-115	116-230	231-345	346-460	461-575	576-690	691-805

а

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	50,02	81,38	109,95	134,98	155,97	172,68	185,09	193,25	199,00
3	0	81,38	132,4	178,88	219,6	253,75	280,94	301,12	314,41	321,00

б

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	32,57	53,28	72,55	89,89	104,89	117,23	126,68	133,06	136,00
3	0	53,28	87,17	118,7	147,06	171,6	191,79	207,25	217,68	222,00

в

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	15,95	26,15	35,7	44,36	51,93	58,22	63,07	66,37	68,04	68,04	66,37	63,07	58,22	51,93	44,36	35,7	26,15	15,95	0
3	0	26,15	42,86	58,51	72,71	85,12	95,42	103,38	108,79	111,53	111,53	108,79	103,38	95,42	85,12	72,71	58,51	42,86	26,15	0
4	0	35,7	58,51	79,88	99,26	116,2	130,26	141,12	148,51	152,25	152,25	148,51	141,12	130,26	116,2	99,26	79,88	58,51	35,7	0
5	0	44,36	72,71	99,26	123,36	144,4	161,88	175,37	184,55	189,2	189,2	184,55	175,37	161,88	144,4	123,36	99,26	72,71	44,36	0
6	0	51,93	85,12	116,2	144,4	169,03	189,5	205,29	216,04	221,48	221,48	216,04	205,29	189,5	169,03	144,4	116,2	85,12	51,93	0
7	0	58,22	95,42	130,26	161,88	189,5	212,44	230,14	242,19	248,29	248,29	242,19	230,14	212,44	189,5	161,88	130,26	95,42	58,22	0
8	0	63,07	103,38	141,12	175,37	205,29	230,14	249,33	262,38	268,99	268,99	262,38	249,33	230,14	205,29	175,37	141,12	103,38	63,07	0
9	0	66,37	108,79	148,51	184,55	216,04	242,19	262,38	276,12	283,07	283,07	276,12	262,38	242,19	216,04	184,55	148,51	108,79	66,37	0
10	0	68,04	111,53	152,25	189,2	221,48	248,29	268,99	283,07	290,19	290,19	283,07	268,99	248,29	221,48	189,2	152,25	111,53	68,04	0
11	0	68,04	111,53	152,25	189,2	221,48	248,29	268,99	283,07	290,19	290,19	283,07	268,99	248,29	221,48	189,2	152,25	111,53	68,04	0
12	0	66,37	108,79	148,51	184,55	216,04	242,19	262,38	276,12	283,07	283,07	276,12	262,38	242,19	216,04	184,55	148,51	108,79	66,37	0
13	0	63,07	103,38	141,12	175,37	205,29	230,14	249,33	262,38	268,99	268,99	262,38	249,33	230,14	205,29	175,37	141,12	103,38	63,07	0
14	0	58,22	95,42	130,26	161,88	189,5	212,44	230,14	242,19	248,29	248,29	242,19	230,14	212,44	189,5	161,88	130,26	95,42	58,22	0
15	0	51,93	85,12	116,2	144,4	169,03	189,5	205,29	216,04	221,48	221,48	216,04	205,29	189,5	169,03	144,4	116,2	85,12	51,93	0
16	0	44,36	72,71	99,26	123,36	144,4	161,88	175,37	184,55	189,2	189,2	184,55	175,37	161,88	144,4	123,36	99,26	72,71	44,36	0
17	0	35,7	58,51	79,88	99,26	116,2	130,26	141,12	148,51	152,25	152,25	148,51	141,12	130,26	116,2	99,26	79,88	58,51	35,7	0
18	0	26,15	42,86	58,51	72,71	85,12	95,42	103,38	108,79	111,53	111,53	108,79	103,38	95,42	85,12	72,71	58,51	42,86	26,15	0
19	0	15,95	26,15	35,7	44,36	51,93	58,22	63,07	66,37	68,04	68,04	66,37	63,07	58,22	51,93	44,36	35,7	26,15	15,95	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2. Распределение температур в объекте на момент времени: а – $\tau = 2$ с; б – $\tau = 3$ с; в – $\tau = 5$ с; рассчитано по неявной схеме ($\Delta x = 0,05$; $\Delta y = 0,05$; $\Delta t = 0,01$)

Для более достоверного анализа на следующем этапе были введены абсолютные параметры, характеризующие отклонения по температурам, рассчитанным по различным схемам, не зависящие от величины температуры. В исследовании использовали два параметра сходимости решений (погрешности) для явной и неявной схем:

$$P_3 = \frac{|T_{\text{анал}} - T_{\text{я.с.}}|}{T_{\text{анал}}} \cdot 100 \%;$$

$$P_4 = \frac{|T_{\text{анал}} - T_{\text{н.с.}}|}{T_{\text{анал}}} \cdot 100 \%$$

I зона	II зона	III зона	IV зона	V зона
0-19	20-34	35-49	50-64	65-80

а

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	28,2	38,56	47,67	55,36	61,56	66,31	69,71	71,89	72,8
3	0	38,56	48,37	56,65	63,33	68,46	72,17	74,68	76,19	76,8

б

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	27,77	37,71	46,44	53,8	59,75	64,33	67,61	69,72	70,8
3	0	37,71	46,69	54,22	60,28	64,91	68,27	70,55	71,94	72,8

в

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	27,51	37,2	45,7	52,87	58,68	63,14	66,36	68,43	69,8
3	0	37,2	45,68	52,77	58,45	62,79	65,95	68,1	69,42	70,8

Рис. 3. Двумерное распределение параметра сходимости P_1 явной схемы при $\Delta x = \Delta y = 0,1$ для различных $\Delta \tau$ (для сходимости $\Delta \tau \leq 0,0025$): а – $\Delta \tau = 0,0025$; б – $0,001$; в – $\Delta \tau = 0,0001$

На рис. 4а представлено значение параметров сходимости решений для явной и неявной схем для точки квадрата, находящейся в центре. Как видно из рисунка, увеличение шага по времени увеличивает погрешность расчетов по температуре, причем явная схема для шага по времени $\Delta\tau < 0,06$ приводит к существенному различию явной и неявной схем, т. е. отклонение от аналитического решения для явной и неявной схем может быть различно в зависимости от дискретности по пространству.

На рис. 4б представлены значения параметров P_3 и P_4 для точки квадрата, находящейся вблизи угла. Как видно из рисунка, погрешность в расчетах температур изменяется подобно предыдущей зависимости. Точки квадрата, выбранные для анализа изменения температур на рис. 2а–в, 3а–в, 5а–в, выделены рамкой.

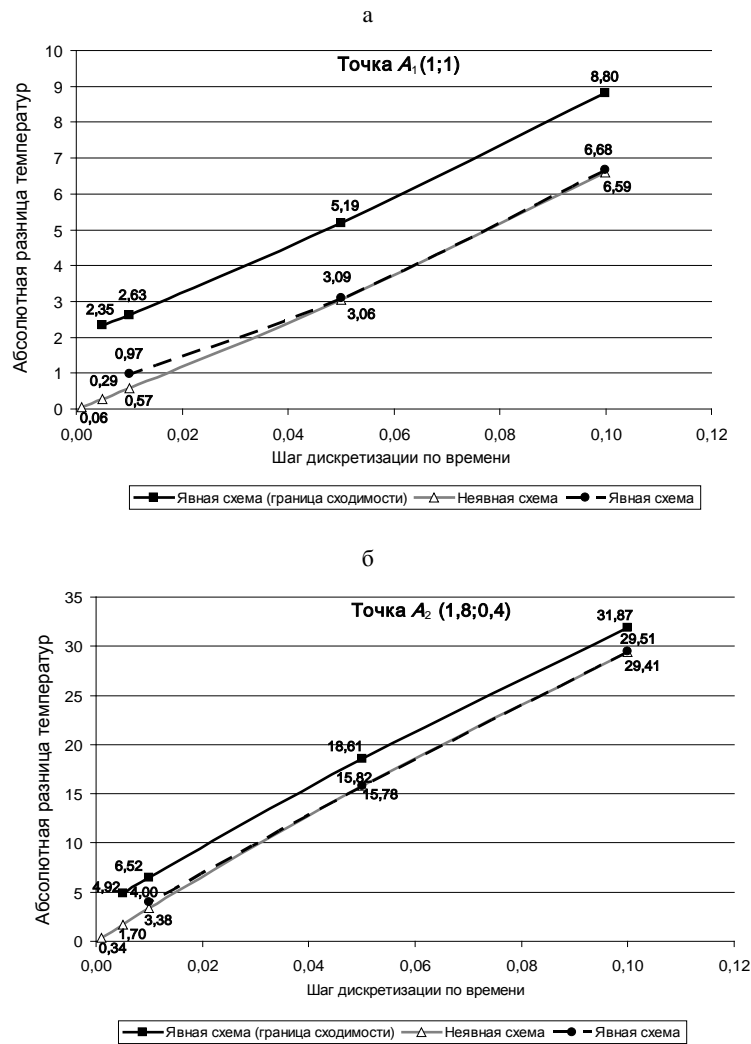


Рис. 4. Влияние шага дискретизации по координатам на параметры сходимости P_3 и P_4 для выделенных точек A_1 и A_2

На рис. 5а–в представлено двумерное распределение погрешности расчета (параметров P_3 и P_4) для температуры для различных случаев. Как видно из рисунка, максимальные значения параметров локализованы по

В табл. 1, 2 представлены параметры и результаты решения численных схем, используемых при вычислениях с помощью явной и неявной схем. Параметр сходимости для явной схемы вычислялся по формуле

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Таблица 1

Параметры и результаты моделирования для рассматриваемых вычислительных экспериментов с помощью явной схемы

Δx	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,05	0,01	0,01	0,01	0,005
Δy	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,05	0,01	0,01	0,01	0,005
$\Delta\tau$	0,01	0,0025	0,001	0,0001	0,000625	0,0001	0,00001	0,000025	0,00001	0,000005	0,0000063
P_1^{\max}	127,89	79,01	72,78	70,06	45,49	36,07	35,05	21,02	11,78	8,98	18,47
P_3^{\max}	62,3	56,75	55,66	55,01	57,11	55,69	55,45	57,1591	56,20	55,8774	57,142

Таблица 2

Параметры и результаты моделирования для рассматриваемых вычислительных экспериментов с помощью неявной схемы

Δx	0,1	0,05	0,01	0,005
Δy	0,1	0,05	0,01	0,005
$\Delta\tau$	0,001	0,001	0,0001	0,001
P_2^{\max}	69,76	34,96	7,00	3,50
P_4^{\max}	54,94	55,42	55,5577	55,5586

Таким образом, наиболее точные решения тепловой задачи дает неявная численная схема, обеспечивающая наименьшую погрешность в расчетах по температуре, о чем свидетельствует близость моделируемых температур, полученных по аналитической и численной схемам расчета.

ВЫВОДЫ

1. Показано, что при решении тепловых задач наиболее близки к значениям температур, полученным по аналитической схеме, величины температур, полученные по неявной схеме.
2. При уменьшении шага дискретизации по времени значения температур, полученные с помощью явной схемы, приближаются к величинам температур, полученным с помощью неявной схемы.
3. Установлено, что максимальные погрешности параметров расчета в тепловой задаче по различным численным схемам локализованы по углам квадрата.

ЛИТЕРАТУРА

1. А р а м а н о в и ч, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М.: Наука, 1964. – 288 с.
2. С а м а р с к и й, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин, . – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Б е р к о в с к и й, Б. М. Разностные методы исследования задач теплообмена / Б. М. Берковский, Е. Ф. Ноготов. – Минск: Наука и техника, 1976. – 144 с.
4. С а м а р с к и й, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

Представлена кафедрой
машин и технологий литейного производства

Поступила 5.05.2007