

УДК 621.1

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ РАСПЛАВОВ В СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ ЛИТЬЯ

Докт. техн. наук, проф. ЕСЬМАН Р. И., канд. техн. наук ШУБ Л. И.

*Белорусский национальный технический университет*

Разработана математическая модель формирования тонкостенных отливок сложной конфигурации в металлической форме, где особое значение имеет начальная стадия заполнения с одновременным затвердеванием металла в процессе течения в полости литейной формы. Анализ этих факторов совершенно необходим при рассмотрении условий формирования тонкостенных фасонных отливок, время затвердевания которых соизмеримо с временем заполнения формы.

Численным методом проведен расчет затвердевания и охлаждения движущегося расплава в полости цилиндрической формы заданной геометрии. Расчеты выполнены для двумерной модели с учетом переменной вязкости металла как функции температуры  $\mu = f(T)$  во всей области течения. В качестве искоемых (зависимых) параметров выбраны составляющие скорости  $u$  и  $v$  (в продольном и поперечном направлениях), давление в потоке  $p$ , функции тока  $\psi$ , температуры  $T$  в потоке, затвердевшей корке металла, форме [1].

Численное решение задачи получено конечно-разностным методом. Для нахождения дискретного аналога системы дифференциальных уравнений переноса и краевых условий используется нерегулярная (растягивающаяся) сетка со сгущением узлов вблизи контактных границ. Для расчета составляющих скорости применяется шахматная сетка с расположением переменных по схеме «бумеранг» (рис. 1). Контур, имеющий форму бумеранга, охватывает триаду узловых точек, в которых хранится информация о давлении, температуре и других переменных, за исключением составляющих скорости. При такой схеме составляющие скорости  $u$  и  $v$  (располагаются непосредственно на гранях контрольного объема, охватывающего узлы сетки, что дает возможность использовать их непосредственно для определения конвективных потоков и расчета градиента давления.

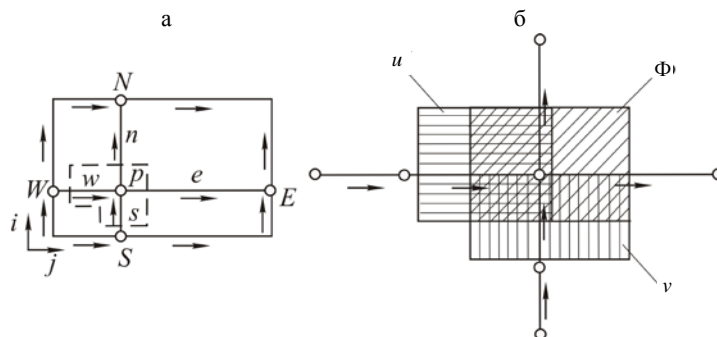


Рис. 1. Контрольные объемы на шахматной сетке: а – расположение переменных по схеме «бумеранг»; б – контрольные объемы с полюсами в точках  $P$

Запишем уравнения, определяющие течение жидкого металла и теплообмен во всей расчетной области  $L \times R$ . Уравнение энергии в цилиндрических координатах имеет вид

$$\rho c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_x T}{\partial x} + \frac{\partial v_r T}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]. \quad (1)$$

В левой части члены, стоящие в круглых скобках, определяют конвективный теплоперенос. Эти члены следует учитывать только в области, занятой каналом с движущимся жидким металлом. Во всей остальной расчетной области для металлической формы, стержня и затвердевшего металла следует положить  $\partial v_x T / \partial x + \partial v_r T / \partial r = 0$ .

Если бы течение происходило при постоянных теплофизических свойствах жидкости, то для его описания следовало бы воспользоваться уравнениями Навье – Стокса. Изменение вязкости от температуры можно учесть, применяя форму уравнений количества движения в направлениях. С учетом сказанного в цилиндрической системе координат уравнения движения запишем следующим образом:

- уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

- уравнение изменения количества движения в проекции на ось  $r$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau_{rr} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{rx} = \frac{\tau_{\phi\phi}}{r}; \quad (3)$$

- уравнение изменения количества движения в проекции на ось  $x$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \tau_{rx} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx}. \quad (4)$$

Для ламинарного режима течения напряжения, входящие в (3), (4), выражаются следующим образом:

$$\tau_{rx} = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right); \quad \tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad (5)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \tau_{\phi\phi} = 2\mu \frac{v_r}{r}.$$

С учетом переменной вязкости  $\mu$  в выражениях (5) перепишем уравнения неразрывности и количества движения в виде:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial ruv}{\partial x} + \frac{\partial rv^2}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + Q_v; \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial ru^2}{\partial x} + \frac{\partial ruv}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + Q_u, \quad (8)$$

где источникные члены  $Q_v$  и  $Q_u$  соответственно равны:

$$Q_v = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (9)$$

$$Q_u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

При записи выражений (5)–(9) использованы безразмерные переменные:

$$(\bar{x}, \bar{r}) = (x, r)/R; \quad u = v_x/u_0; \quad v = v_r/u_0; \quad (10)$$

$$\bar{t} = tu_0/R_1; \quad \bar{\mu} = \mu/(\rho_f u_0 R_1); \quad \bar{p} = p/(\rho_f u_0^2),$$

черточки над которыми в уравнениях (6)–(10) и в дальнейшем опущены.

Введем также безразмерную температуру  $\Theta = (T - T_\infty)/T_\infty$ , где  $T$  – температура окружающей среды, и перепишем выражение (1) в виде

$$\rho u_0 R_1 c \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial ru\Theta}{\partial x} + \frac{\partial rv\Theta}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \right]. \quad (11)$$

Начальные условия по скорости получаются из решения стационарных уравнений движения в канале при изотермическом процессе  $T = T_{01}$ . Для этого стационарные уравнения количества движения, которые получаются из выражений (7), (8) при приравнивании к нулю локальных производных по времени  $\partial u/\partial t = 0$ , решаются при постоянных физических свойствах жидкости, соответствующих начальной температуре  $T = T_{01}$ , и полученные поля скорости и давления принимаются за начальные условия.

Для описания численного метода перепишем уравнения (6), (8), (11) в обобщенной форме

$$a \frac{\partial \Phi}{\partial t} + b \frac{1}{r} \left( \frac{\partial ru\Phi}{\partial x} + \frac{\partial rv\Phi}{\partial r} \right) = d \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( r\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right] Q_\Phi, \quad (12)$$

где  $\Phi = 1, u, v, \Theta$ .

В выражении (11) величины  $\rho, u_0, R, c$  и  $\lambda$  – размерные, остальные – безразмерные. Введение безразмерных комплексов  $Re = \rho_f u_0 R_1/\mu$  и  $Pr = c_p \mu/\lambda$  не имеет смысла ввиду переменности физических свойств среды в области течения и во всей расчетной области.

Для решения системы уравнений (6)–(11) необходимо сформулировать начальные и граничные условия. Начальные условия по температуре как обычно принимаются постоянными в каждой из подобластей, а именно: при  $t = 0$  в подобласти 1 (жидкий металл)  $T = T_{01}$ ; в подобласти 2 (металлическая форма)  $T = T_{02}$ .

Сформулируем граничные условия на наружной поверхности формы, на оси симметрии, в плоскостях входного и выходного сечений. На наружной поверхности формы принимается условие теплообмена с окружающей средой –  $\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(T - T_\infty)$ , а на оси – условие симметрии  $\partial T / \partial r = 0$ . В безразмерных переменных эти условия переписываются в виде:

- при  $r = 1$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = \text{Bi} \Theta,$$

- при  $r = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0,$$

где  $\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}$  ( $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала формы, взятый при температуре наружной поверхности).

Для составляющих скорости с учетом ламинарного течения на твердых стенках выполняются условия «прилипания». На входе  $x = 0$  и выходе  $x = L$  для составляющих скорости и температуры принимаются мягкие граничные условия, заключающиеся в равенстве нулю производной по продольной координате. Это обусловлено равномерным характером течения и теплопереноса.

Если проекции скорости помещаются посередине между узлами, в которых заданы значения давления, то можно легко рассчитывать соответствующие градиенты давления, которые входят в уравнения количества движения. Кроме того, при такой схеме составляющие скорости располагаются непосредственно на гранях контрольного объема, охватывающего узлы сетки, и это дает возможность использовать их непосредственно для определения конвективных потоков. В расчетной области располагались посередине между узлами, что позволяет поместить нормальные составляющие скорости непосредственно на границах. Для построения разностных аналогов уравнений количества движения используются контрольные объемы с центром в точках расположения соответствующих проекций скорости. Таким образом, для переменных  $\Phi = pT$  и составляющих скорости  $u$  и  $v$  используются три вида контрольных объемов, смещенных относительно друг друга (рис. 1).

Рассмотрим разностный аналог для уравнения количества движения в проекции на продольную координату. Выделим часть источникового члена, содержащего разность давления в двух соседних узлах сетки:

$$C_p^u u_p = C_E^u u_E + C_W^u u_W + C_N^u u_N + C_S^u u_S + A_\omega^u = (p_W - p_p) + S_u, \quad (13)$$

где  $A_w^u = r_p \Delta r$ ;  $\bar{S}_u$  – источниковый член с исключенным градиентом давления.

Разностный аналог составляется для уравнения количества движения в проекции на радиальную координату

$$C_p^v v_p = C_E^v v_W + C_N^v v_N + C_S^v v_S + A_S^v = (p_S - p_p) + \bar{S}_v. \quad (14)$$

Поскольку значения давления, входящие в (13), (14), не известны, при их решении подставляем наилучшие, известные к данному моменту значения для поля давления  $p^*$ . В результате получаем предварительные значения составляющих скорости  $u^*$  и  $v^*$ . Таким образом, имеем:

$$C_p^u u_p^* = \sum_{i=E,W,N,S} C_i^u u_i^* + A_w^u (p_W^* - p_p^*) + \bar{S}_u; \quad (15)$$

$$C_p^v v_p^* = \sum c_i^v v_i^* + A_s^v (p_s^* - p_p^*) + \bar{S}_v. \quad (16)$$

Алгоритм расчета течения и затвердевания жидкого металла в цилиндрической линейной полости и теплообмена сводится к следующему. Вначале производится расчет начального поля течения в полости в предположении изотермичности течения. Для расчета гидродинамических параметров течения  $u$ ,  $v$ ,  $p$  используется метод установления, который состоит в следующей итерационной процедуре.

В узлы соответствующих сеток заносим произвольные первоначальные значения переменных – составляющих скорости  $u$ ,  $v$ , давления и градиентов давления во входном  $(\partial \bar{p} / \partial x)$  и выходном  $(\partial \bar{p} / \partial x)_m$  сечениях, которые обычно принимаются нулевыми и задаются временным шагом  $\Delta t$ .

Используя соотношения (15) и (16), находим предварительные значения составляющих скорости  $u^*$  и  $v^*$  в узлах сетки на данном временном слое. Каждое уравнение (15), (16) содержит по пять неизвестных функций на рассматриваемом временном слое (в узле  $P$  и в четырех смежных узлах  $E$ ,  $W$ ,  $N$ ,  $S$ ). Совокупность таких уравнений, записанных для всех внутренних узлов сетки (включая узлы, лежащие на входной и выходной границах) и дополненных разностными соотношениями, вытекающими из граничных условий, образует систему уравнений для определения неизвестных узловых значений переменных. Решение системы производится методом линейного сканирования. Для этого в каждом уравнении типа (15), (16) две узловых переменные, например в узлах  $E$  и  $W$ , берутся с предыдущего временного слоя; тем самым уравнения сводятся к трехточечному аналогу, решение которого производится методом прогонки. В этом случае обход узлов осуществляется по сеточным линиям, являющимся радиальными координатными прямыми. Найденные таким образом поля скоростей  $u^*$  и  $v^*$  считаются предварительными на данном временном слое.

При нестационарном режиме производится решение полной системы уравнений, включающей в себя уравнения движения (6)–(8) и уравнение энергии (11), при этом уравнения движения решаются только в области, приходящейся на литейную полость, а уравнение энергии – во всей

расчетной области. На каждом шаге по времени расчет производится в три этапа:

- рассчитываются поля гидродинамических параметров в области, занятой движущейся жидкостью;
- определяется поле температур во всей расчетной области путем решения уравнения энергии. Конвективные члены выражения (8) в областях, занятых твердым материалом, кокилем, стержнем и затвердевшим материалом, приравниваются к нулю. В последней области это производится автоматически за счет нулевых значений скорости  $u$  и  $v$ . Для решения уравнения энергии также может использоваться метод линейного сканирования;
- найденные значения температуры применяются для расчета узловых значений коэффициента динамической вязкости  $\mu$  в поле движущейся жидкости, которые затем будут использоваться для расчета течения на следующем временном поле.

## ВЫВОДЫ

В работе исследованы теплофизические и гидродинамические особенности движения жидких металлов и сплавов в каналах цилиндрического сечения. Решена сопряженная задача гидродинамики и теплообмена при движении расплавов.

В результате проведенных исследований установлены новые количественные соотношения между тепловыми и гидродинамическими параметрами движущегося металла. Из анализа температурных и скоростных полей выявлено влияние краевых условий на структуру потока расплава.

Анализ процессов тепломассопереноса при течении жидких металлов и сплавов проведен с учетом зависимости эффективной вязкости от температуры во всей области течения.

Из анализа результатов математического моделирования и численного эксперимента выявлен физический механизм течения жидких металлов и сплавов с изменяющейся вязкостью в каналах цилиндрического сечения. Исследование полученных картин линий тока позволяет определить зоны вихревого циркуляционного течения в кольцевых цилиндрических каналах, что открывает возможности прогнозирования расположения дефектных зон в изделиях, получаемых специальными технологиями литья (жидкой штамповкой, методами выжимания и непрерывного литья и др.).

Результаты математического моделирования и численного эксперимента позволяют определить основные управляющие параметры специальных технологий литья.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е с ь м а н, Р. И. Расчеты процессов литья / Р. И. Есьман, Н. М. Жмакин, Л. И. Шуб. – Минск: Вышэйш. шк., 1977. – 264 с.

Представлена кафедрой  
промышленной теплоэнергетики  
и теплотехники

Поступила 3.03.2008