Потоковая матрица

$$X^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку элементы $\overline{d}_{ij}^{*} = 0;\ i = 1,\ 2;\ \ j = 6,\ 7,$ то величину потока нельзя увеличить, даже если мощности источников и стоков будут не ограничены. Это означает, что любой путь, ведущий из источника в сток, содержит дугу с нулевой пропускной способностью («насыщенную» дугу). Множество таких дуг образует минимальный разрез $R, \overline{R}$, отделяющий источники от стоков. В случае необходимости, минимальный разрез $R, \overline{R}$ легко находится с помощью матрицы $\overline{D}^{*}$. Действительно, вершины множества S и все вершины j, для которых хотя бы для одного $i \in S, \overline{d}_{ij}^{*} > 0$, относятся к множеству R, остальные $(\overline{d}_{ij}^{*} = 0\ \ \forall i \in S)$ – к множеству $\overline{R}$. В рассматриваемом примере $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\overline{R} = \{6, 7\}$, минимальный разрез $R, \overline{R}$ ={(3, 6), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7)} имеет пропускную способность, равную 55 единиц и равную величине максимального суммарного потока из источников $S = \{1, 2\}$ в сток $T = \{6, 7\}$.

ВЫВОД

Разработан новый алгоритм нахождения максимального потока в многополюсной сети, который основан лишь на матричном ее описании и не требует графического представления последней. В силу этого программная реализация данного алгоритма является очень простой, и он может быть использован при решении широкого круга проблем, математические модели которых могут быть сформулированы в терминах теории графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Floyd, R. W.** Aigorithm 97: Shortest Path. Communication of ACM / R. W. Floyd – 1962. – № 5 (6). – 345 p.
2. **Корзников, А. Д.** Моделирование и оптимизация процесса перемещения грузов в логистической транспортной системе / А. Д. Корзников, В. А. Корзников // Вестник БНТУ. – 2003. – № 6. – С. 54–60.
3. **Форд, Л. Р.** Потоки в сетях / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. – М.: Мир, 1963. – 276 с.
4. **Veinott, A. F.** Integer Extrime Points / A. F. Veinot, Jr. and G. B. Dantzig // SIAM. Revjew. – 1968. – No 10 (3). – P. 371–372.

Поступила 22.04.2013

УДК 517.977

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СУЩЕСТВЕННО РАЗНОТЕМПОВЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Канд. физ.-мат. наук, доц. КОПЕЙКИНА Т. Б.[1)], ГРЕКОВА А. В.[2)]

[1)]Белорусский государственный технологический университет,
[2)]Белорусский национальный технический университет

В [1] была рассмотрена проблема управляемости разнотемповой сингулярно возмущенной динамической системы (РСВДС):

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1u; \\ \mu\,\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2u; \\ \mu^2\dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3u, \end{cases} \qquad (1)$$

где μ – малый положительный параметр: $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 << 1$; $x \in R^{n_1}$ – вектор медленных переменных; $y \in R^{n_2}$, $z \in R^{n_3}$ – векторы быстрых переменных с различными скоростями $\dot{y} = O(1/\mu)$, $\dot{z} = O(1/\mu^2)$; A_{ij}, B_j, $i, j = \overline{1,3}$ – заданные постоянные матрицы соответствующих размеров; $u \in R^r$ – вектор-функция управляющих воздействий, выбираемый из класса кусочно-непрерывных функций, $n_1 + n_2 + n_3 \le r$; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – производные соответствующих вектор-функций по времени t, $t > 0$.

С помощью перехода в $(n_1 + n_2 + n_3)$-мерное пространство состояний системы (1) и применения для нее метода определяющих уравнений [2], состоящего в построении по исходной системе дифференциальных уравнений системы матричных алгебраических рекуррентных уравнений, в [1] были получены эффективные алгебраические условия полной, относительной управляемости, выраженные в терминах параметров A_{ij}, B_j, $i, j = \overline{1,3}$ РСВДС (1).

В данной статье проблема управляемости рас-сматривается для более общего вида РСВДС:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1u; \\ \mu^{\alpha}\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2u; \\ \mu^{\beta}\dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3u, \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha < \beta$, α, β – целые положительные числа.

В (2) x – n_1-вектор медленных переменных по сравнению с векторами $y \in R^{n_2}$, $z \in R^{n_3}$ быстрых переменных, входящих в систему (2) с существенно различными скоростями $\dot{y} = O(1/\mu^{\alpha})$, $\dot{z} = O(1/\mu^{\beta})$. Поэтому систему (2) назовем существенно разнотемповой сингулярно возмущенной динамической системой (СРСВДС). Отметим, что системами с малым параметром при старшей производной описывается, например, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа; движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость; поведение тонких и гибких пластин и оболочек и др. В [2, 3] обоснована математическая модель движения многоопорной машины как объекта управления сингулярно возмущенной системой. Рассмотрена модель половины большегрузного автомобиля [4], имеющая четыре степени свободы. В системе активной подвески автомобиля комбинируется классическая пассивная система станины и кузова автомобиля массой m_s с активной системой, состоящей из жестких тел передних и задних колес массой m_f и m_r. Для большегрузного автомобиля $m_f + m_r << m_s$, так что $\mu = \dfrac{m_f + m_r}{m_s} \approx 0{,}001$, в связи с чем модель системы активной подвески может быть рассмотрена как динамическая система в двух шкалах времени: медленной и быстрой, т. е. как сингулярно возмущенная система управления. Многие задачи гидродинамики, динамики полета, химической кинетики, автоматического управления и регулирования описываются РСВДС, в которые малый параметр входит в качестве множителей с различными степенями при переменных состояниях системы.

Впервые проблема управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем была рассмотрена в [5], где достаточные условия полной управляемости получены на основе разложения пространства состояний системы в прямую сумму подпространств меньшей размерности. В данной статье исследование полной и различных видов относительной управляемости СРСВДС (2) с постоянными коэффициентами проводится с помощью метода пространства состояний и дальнейшего развития метода определяющих уравнений [2] на более общие, чем РСВДС (1), системы вида (2).

Рассмотрим вопрос об управляемости РСВДС (2) с начальными условиями:

$$x(0,\mu) = x_0; \quad y(0,\mu) = y_0; \quad z(0,\mu) = z_0. \quad (3)$$

Определение 1. РСВДС (2) полностью управляема при заданном μ, если для любых $(n_1 + n_2 + n_3)$-векторов (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) существует такой момент времени t_1, $t_1 > 0$, и допустимое управление $u(t)$, что соответствующая им в силу (2), (3) траектория $(x(t; x_0, u(t), \mu), y(t; y_0, u(t), \mu), z(t; z_0, u(t), \mu))$ удовлетворяет условиям:

$$x(0; x_0, u(t), \mu) = x_0,\ y(0; y_0,\ u(t), \mu) = y_0,$$

$$z(0; z_0, u(t), \mu) = z_0,\ x(t_1; x_0, u(t), \mu) = x_1,$$

$$y(t_1; y_0, u(t), \mu) = y_1,\ z(t_1; z_0, u(t), \mu) = z_1.$$

Введем вектор $w \in R^{n_1+n_2+n_3}$, матрицы $A(\mu) \in M^{(n_1+n_2+n_3) \times (n_1+n_2+n_3)}$, $B(\mu) \in M^{(n_1+n_2+n_3) \times r}$:

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad A(\mu) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21}/\mu^{\alpha} & A_{22}/\mu^{\alpha} & A_{23}/\mu^{\alpha} \\ A_{31}/\mu^{\beta} & A_{32}/\mu^{\beta} & A_{33}/\mu^{\beta} \end{pmatrix};$$

$$B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2/\mu^{\alpha} \\ B_3/\mu^{\beta} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

При этом система (2) принимает вид

$$\dot{w} = A(\mu) w + B(\mu) u \qquad (5)$$

с начальным условием $w(0, \mu) = w_0$.

Согласно критерию Калмана [6], система (5) полностью управляема тогда и только тогда, когда

$$rank(B(\mu), A(\mu)B(\mu), A^2(\mu)B(\mu), \ldots, A^{n_1+n_2+n_3-1}(\mu)B(\mu)) = \\ = n_1 + n_2 + n_3. \qquad (6)$$

Критерий (5) с матрицами (4) являются труднопроверяемыми, так как в знаменателях матриц, входящих в левую часть (6), присутствуют большие степени малого параметра. Целью исследований является получение необходимых и достаточных условий управляемости РСВДС (2) в терминах ее параметров A_{ij}, B_j, $i, j = \overline{1,3}$.

Пусть $p = d/dt$ – оператор дифференцирования функции по времени t. Тогда система (2) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} px(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + A_{13}z(t) + B_1u(t); \\ \mu^{\alpha} py(t) = A_{21}x(t) + A_{22}y(t) + A_{23}z(t) + B_2u(t); \\ \mu^{\beta} pz(t) = A_{31}x(t) + A_{32}y(t) + A_{33}z(t) + B_3u(t). \end{cases} \qquad (7)$$

Каждому вектору-функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$ из (7) поставим в соответствие постоянные матрицы с двумя индексами i, k: $X_k^i \in M^{n_1 \times r}$, $Y_k^i \in M^{n_2 \times r}$, $Z_k^i \in M^{n_3 \times r}$, $U_k^i \in M^{r \times r}$, оператору дифференцирования p – оператор Δ_+ сдвига на единицу нижнего индекса k, малому параметру μ – оператор Δ^+ сдвига на единицу верхнего индекса i, т. е. $\Delta_+ Q_k^i = Q_{k+1}^i$, $\Delta^+ Q_k^i = Q_k^{i+1}$.

В силу этих соответствий из (7) получаем систему алгебраических рекуррентных по k и i матричных уравнений:

$$\begin{cases} X_{k+1}^i = A_{11}X_k^i + A_{12}Y_k^i + A_{13}Z_k^i + B_1U_k^i; \\ Y_{k+1}^{i+\alpha} = A_{21}X_k^i + A_{22}Y_k^i + A_{23}Z_k^i + B_2U_k^i; \\ Z_{k+1}^{i+\beta} = A_{31}X_k^i + A_{32}Y_k^i + A_{33}Z_k^i + B_3U_k^i, \end{cases} \qquad (8)$$

которые будем решать с начальными условиями:

$$\begin{aligned} &U_0^0 = E_r;\ U_k^i = 0_r \quad \text{при} \quad k \neq 0 \quad \text{или} \quad i \neq 0; \\ &X_0^i = 0_{n_1 \times r} \quad \text{для} \quad \text{любого} \quad i; \\ &Y_k^i = 0_{n_2 \times r} \quad \text{при} \quad k = 0 \quad \text{или} \quad i = 0, 1, \ldots, \alpha - 1; \\ &Z_k^i = 0_{n_3 \times r} \quad \text{при} \quad k = 0 \quad \text{или} \quad i = 0, 1, \ldots, \beta - 1. \end{aligned} \qquad (9)$$

Уравнения (8) назовем системой определяющих уравнений для РСВДС (2). Решением (8), (9) является тройка матриц (X_k^i, Y_k^i, Z_k^i), каждую из которых назовем компонентой решения. Из системы (8) в силу начальных условий (9) получаем дополнительные свойства компонент решения X_k^i, Y_k^i, Z_k^i:

$$X_{к}^i = 0_{n_1 \times r} \ \text{при} \ i \geq \beta(k-1)+1;$$

$$Y_k^i = 0_{n_2 \times r} \ \text{при} \ i \geq \beta(k-1)+1+\alpha;$$

$$Z_k^i = 0_{n_3 \times r} \ \text{при} \ i \geq \beta k + 1,$$

или, что то же самое:

$$\begin{aligned} &X_{к}^i = 0_{n_1 \times r};\quad Y_k^{i+\alpha} = 0_{n_2 \times r}; \\ &Z_k^{i+\beta} = 0_{n_3 \times r} \quad \text{при} \quad i \geq \beta(k-1)+1. \end{aligned} \qquad (10)$$

Доказательство этих соотношений проводится методом математической индукции и в данной статье опускается.

Лемма. Для любого целого $l \geq 0$ справедливо равенство

$$A^l(\mu)B(\mu) = col\left(\sum_{i=0}^{l\beta} \frac{X_{l+1}^i}{\mu^i} \quad \sum_{i=0}^{l\beta l} \frac{Y_{l+1}^{i+\alpha}}{\mu^{i+\alpha}} \quad \sum_{i=0}^{l\beta} \frac{Z_{l+1}^{i+\beta}}{\mu^{i+\beta}} \right). \qquad (11)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $l=0$ из (8) в силу начальных условий (9) следует, что $X_1^0 = B_1$, $Y_1^\alpha = B_2$, $Z_1^\beta = B_3$. С другой стороны, из (4) имеем $B(\mu) = col\begin{pmatrix} B_1 & \dfrac{B_2}{\mu^\alpha} & \dfrac{B_3}{\mu^\beta}\end{pmatrix}$. Значит, $A^0B = = col\begin{pmatrix} X_1^0 & \dfrac{Y_1^\alpha}{\mu^\alpha} & \dfrac{Z_1^\beta}{\mu^\beta}\end{pmatrix}$. Равенство (11) для $l=0$ доказано.

Предположим далее, что равенство (11) верно для некоторого $l = j$, т. е.

$$A^j(\mu)B(\mu) = col\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{j\beta}\dfrac{X_{j+1}^i}{\mu^i} & \sum_{i=0}^{j\beta}\dfrac{Y_{j+1}^{i+\alpha}}{\mu^{i+\alpha}} & \sum_{i=0}^{j\beta}\dfrac{Z_{j+1}^{i+\beta}}{\mu^{i+\beta}}\end{pmatrix}.$$

Докажем его для $l = j + 1$. Рассмотрим произведение

$$A^{j+1}(\mu)B(\mu) = A(\mu)A^j(\mu)B(\mu) =$$

$$= \left(\begin{matrix} A_{11}X_{j+1}^0 + \ldots + \dfrac{1}{\mu^\alpha}\left(A_{11}X_{j+1}^\alpha + A_{12}Y_{j+1}^\alpha\right) + \ldots + \dfrac{1}{\mu^\beta}\left(A_{11}X_{j+1}^\beta + A_{12}Y_{j+1}^\beta + A_{13}Z_{j+1}^\beta\right) + \ldots + \\ A_{21}\dfrac{X_{j+1}^0}{\mu^\alpha} + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{2\alpha}}\left(A_{21}X_{j+1}^\alpha + A_{22}Y_{j+1}^\alpha\right) + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{\alpha+\beta}}\left(A_{21}X_{j+1}^\beta + A_{22}Y_{j+1}^\beta + A_{23}Z_{j+1}^\beta\right) + \ldots + \\ A_{31}\dfrac{X_{j+1}^0}{\mu^\beta} + ..+ \dfrac{1}{\mu^{\alpha+\beta}}\left(A_{31}X_{j+1}^\alpha + A_{32}Y_{j+1}^\alpha\right) + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{2\beta}}\left(A_{31}X_{j+1}^\beta + A_{32}Y_{j+1}^\beta + A_{33}Z_{j+1}^\beta\right) + \ldots + \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} + \dfrac{1}{\mu^{j\beta+1}}\left(A_{12}Y_{j+1}^{j\beta+1} + A_{13}Z_{j+1}^{j\beta+1}\right) + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{\alpha+j\beta+1}}A_{13}Z_{j+1}^{\alpha+j\beta+1} + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{\beta+j\beta}}A_{13}Z_{j+1}^{j\beta+\beta} \\ + \dfrac{1}{\mu^{\alpha+j\beta+1}}\left(A_{22}Y_{j+1}^{j\beta+1} + A_{23}Z_{j+1}^{j\beta+1}\right) + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{2\alpha+j\beta+1}}A_{23}Z_{j+1}^{\alpha+j\beta+1} + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{\alpha+\beta+\beta j}}A_{23}Z_{j+1}^{j\beta+\beta} \\ + \dfrac{1}{\mu^{\beta+j\beta+1}}\left(A_{32}Y_{j+1}^{j\beta+1} + A_{33}Z_{j+1}^{j\beta+1}\right) + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{\alpha+\beta+j\beta+1}}A_{33}Z_{j+1}^{\alpha+j\beta+1} + \ldots + \dfrac{1}{\mu^{2\beta+j\beta}}A_{33}Z_{j+1}^{j\beta+\beta} \end{matrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{j+2}^0 + \dfrac{X_{j+2}^1}{\mu} + ..+ \dfrac{X_{j+2}^\alpha}{\mu^\alpha} + \ldots + \dfrac{X_{j+2}^\beta}{\mu^\beta} + \ldots + \dfrac{X_{j+2}^{j\beta}}{\mu^{j\beta}} + \ldots + \dfrac{X_{j+2}^{\alpha+j\beta}}{\mu^{\alpha+j\beta}} + \ldots + \dfrac{X_{j+2}^{\beta+j\beta}}{\mu^{\beta+j\beta}} \\ \dfrac{Y_{j+2}^\alpha}{\mu^\alpha} + \dfrac{Y_{j+2}^{\alpha+1}}{\mu^{\alpha+1}} + \ldots + \dfrac{Y_{j+2}^{2\alpha}}{\mu^{2\alpha}} + \ldots + \dfrac{Y_{j+2}^{\alpha+\beta}}{\mu^{\alpha+\beta}} + \ldots + \dfrac{Y_{j+2}^{\alpha+j\beta}}{\mu^{\alpha+j\beta}} + \ldots + \dfrac{Y_{j+2}^{2\alpha+j\beta}}{\mu^{2\alpha+j\beta}} + \ldots + \dfrac{Y_{j+2}^{\alpha+\beta+j\beta}}{\mu^{\alpha+\beta+j\beta}} \\ \dfrac{Z_{j+2}^\beta}{\mu^\beta} + \dfrac{Z_{j+2}^{\beta+1}}{\mu^{\beta+1}} + \ldots + \dfrac{Z_{j+2}^{\alpha+\beta}}{\mu^{\alpha+\beta}} + \ldots + \dfrac{Z_{j+2}^{2\beta}}{\mu^{2\beta}} + \ldots + \dfrac{Z_{j+2}^{\beta+j\beta}}{\mu^{\beta+j\beta}} + + \dfrac{Z_{j+2}^{\alpha+\beta+j\beta}}{\mu^{\alpha+\beta+j\beta}} + \ldots + \dfrac{Z_{j+2}^{2\beta+j\beta}}{\mu^{2\beta+j\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{j\beta+\beta}\dfrac{X_{j+2}^i}{\mu^i} \\ \sum_{i=0}^{j\beta+\beta}\dfrac{Y_{j+2}^{i+\alpha}}{\mu^{i+\alpha}} \\ \sum_{i=0}^{j\beta+\beta}\dfrac{Z_{j+2}^{i+\beta}}{\mu^{i+\beta}} \end{pmatrix},$$

что совпадает с (11) при $l = j + 1$. Лемма доказана.

Используя равенство (11), необходимое и достаточное условие (6) полной управляемости системы (2) может быть представлено в виде

$$rank\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{s\beta}\dfrac{X_{s+1}^j}{\mu^j} & \\ \sum_{i=0}^{s\beta}\dfrac{Y_{s+1}^{j+\alpha}}{\mu^{j+\alpha}}, & s = \overline{0, n_1+n_2+n_3-1} \\ \sum_{i=0}^{s\beta}\dfrac{Z_{s+1}^{j+\beta}}{\mu^{j+\beta}} & \end{pmatrix} = n_1 + n_2 + n_3. \qquad (12)$$

Полученное условие затруднительно для проверки, так как в нем присутствуют слагаемые с большими отрицательными степенями малого параметра μ. Выведем условие полной управляемости РСВДС (2), не содержащее μ. Для этого представим матрицу левой части (12) в виде произведения трех матриц:

$$S = PQR,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0_{n_1\times n_2} & 0_{n_1\times n_3} \\ 0_{n_2\times n_1} & E_{n_2} & 0_{n_2\times n_3} \\ 0_{n_3\times n_1} & 0_{n_3\times n_2} & E_{n_3} \end{pmatrix}, \quad P\in M^{(n_1+n_2+n_3)\times(n_1+n_2+n_3)};$$

$$Q = \begin{pmatrix} X_k^i \\ Y_k^{i+\alpha}, \quad k=\overline{1, n_1+n_2+n_3}, \quad i=\overline{0,\beta(k-1)} \\ Z_k^{i+\beta} \end{pmatrix}, \quad Q\in M^{(n_1+n_2+n_3)\times\frac{r(n_1+n_2+n_3)(\beta(n_1+n_2+n_3-1)+2)}{2}};$$

$$R = diag\begin{pmatrix} \frac{E_r}{\mu^k}, \quad l=\overline{0, n_1+n_2+n_3-1} \\ k=\overline{0,\beta l} \end{pmatrix}, \quad R\in M^{\frac{r(n_1+n_2+n_3)(\beta(n_1+n_2+n_3-1)+2)}{2}\times r(n_1+n_2+n_3)}.$$

Так как $\det P = \frac{1}{\mu^{\alpha n_1+\beta n_2}} \neq 0$ для любого $\mu > 0$, то $rank S = rank(PQR) = rank(QR) \leq rank(Q, R)$, т. е. $rank\, S$ не превосходит $rank\, Q$ и $rank\, R$. Поскольку $rank\, Q \leq n_1+n_2+n_3$, $rank\, R \leq r(n_1+n_2+n_3)$, то $rank\, S \leq rank\, Q \leq n_1+n_2+n_3$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для полной управляемости РСВДС (2) при любом $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0 << 1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\begin{pmatrix} X_k^i \\ Y_k^{i+\alpha}, \quad k=\overline{1, n_1+n_2+n_3};\ i=\overline{0,\beta(k-1)} \\ Z_k^{i+\beta} \end{pmatrix} = n_1+n_2+n_3. \qquad (13)$$

Определение 2. РСВДС (2) называется *x*-управляемой (*y*-управляемой, *z*-управляемой) при заданном μ, если для любого $(n_1+n_2+n_3)$-вектора (x_0, y_0, z_0) и любого n_1-вектора x_1 (n_2-вектора y_1, n_3-вектора z_1) существует такой момент времени t_1, $t_1 > 0$ и допустимое управление $u(t)$, что соответствующая им в силу (2), (3) траектория $(x(t;x_0,u(t),\mu), y(t;y_0,u(t),\mu), z(t;z_0,u(t),\mu))$ удовлетворяет условиям: $x(0;x_0,u(t),\mu) = x_0$, $y(0;y_0,u(t),\mu) = y_0$, $z(0;z_0,u(t),\mu) = z_0$, $x(t_1;x_0,u(t),\mu) = x_1$, $(y(t_1;y_0,u(t),\mu) = y_1$, $z(t_1;z_0,u(t),\mu) = z_1)$.

Пусть $H_1 = (E_{n_1}, 0_{n_1\times n_2}, 0_{n_1\times n_3})$, $H_2 = (0_{n_2\times n_1}, E_{n_2}, 0_{n_2\times n_3})$, $H_3 = (0_{n_3\times n_1}, 0_{n_3\times n_2}, E_{n_3})$ – заданные $n_1\times(n_1+n_2+n_3)$-, $n_2\times(n_1+n_2+n_3)$- и $n_3\times(n_1+n_2+n_3)$-матрицы соответственно.

Теорема 2. Для *x*-управляемости РСВДС (2) при любом $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0 << 1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\left(X_k^i,\ k=\overline{1, n_1+n_2+n_3};\ i=\overline{0,\beta(k-1)}\right) = n_1. \qquad (14)$$

Доказательство. Согласно определению 2, *x*-управляемость РСВДС (2) означает относительную H_1-управляемость, т. е. управляемость любого начального состояния $(x_0, y_0, z_0) \in M^{n_1+n_2+n_3}$ этой системы в любое конечное состояние $H_1 w(t_1) = x_1$. Необходимое и достаточное условие H_1-управляемости системы (5) согласно [7] имеет вид

$$rank\left(H_1B(\mu), H_1A(\mu)B(\mu), ..., H_1A^{n_1+n_2+n_3-1}(\mu)B(\mu)\right) = rank\, H_1. \qquad (15)$$

В силу леммы, теоремы 1, вида матрицы H_1 и равенства $rank\, H_1 = n_1$ условие (15) принимает вид (14). Теорема доказана.

Аналогично доказываются критерии *y*-управляемости и *z*-управляемости РСВДС (2).

Теорема 3. Для *y*-управляемости РСВДС (2) при любом $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0 << 1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\ Y_k^{i+\alpha},\quad k=\overline{1,n_1+n_2+n_3};$$
$$i=\overline{0,\beta(k-1)}\ = n_2. \qquad (16)$$

Теорема 4. Для z-управляемости РСВДС (2) при любом $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0<<1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\ Y_k^{i+\beta},\quad k=\overline{1,n_1+n_2+n_3};$$
$$i=\overline{0,\beta(k-1)}\ = n_3. \qquad (17)$$

Определение 3. РСВДС (2) называется $\{xy\}$-управляемой ($\{xz\}$-управляемой; $\{yz\}$-управляемой) при заданном μ, если для любого $(n_1+n_2+n_3)$-вектора (x_0,y_0,z_0) и любых n_1-вектора x_1 и n_2-вектора y_1 (n_1-вектора x_1 и n_3-вектора z_1; n_2-вектора y_1 и n_3-вектора z_1) существует такой момент времени $t_1, t_1>0$, и допустимое управление $u(t)$, что соответствующая им в силу (2), (3) траектория $(x(t;x_0,u(t),\mu), y(t;y_0,u(t),\mu), z(t;z_0,u(t),\mu))$ удовлетворяет условиям:

$$x(0;x_0,u(t),\mu)=x_0,\ y(0;y_0,u(t),\mu)=y_0,\ z(0;z_0,u(t),\mu)=z_0,\ x(t_1;x_0,u(t),\mu)=x_1,\ y(t_1;y_0,u(t),\mu)=y_1,$$
$$(x(t_1;x_0,u(t),\mu)=x_1,\ z(t_1;z_0,u(t),\mu)=z_1;\ y(t_1;y_0,u(t),\mu)=y_1,\ z(t_1;z_0,u(t),\mu)=z_1).$$

Пусть $G_1=[E_{n_1+n_2},\ 0_{(n_1+n_2)\times n_3}]$, $G_2=\begin{bmatrix} E_{n_1}, & 0_{n_1\times n_2}, & 0_{n_1\times n_3} \\ 0_{n_3\times n_1}, & 0_{n_3\times n_2}, & E_{n_3}\end{bmatrix}$, $G_3=\begin{bmatrix}0_{(n_2+n_3)\times n_1}, & E_{n_2+n_3}\end{bmatrix}$ – заданные $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2+n_3)$-, $(n_1+n_3)\times(n_1+n_2+n_3)$- и $(n_2+n_3)\times(n_1+n_2+n_3)$-матрицы соответственно.

Теорема 5. Для $\{xy\}$-управляемости РСВДС (2) при любом $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0<<1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\begin{pmatrix} X_k^i \\ Y_k^{i+\alpha}\end{pmatrix}\ k=\overline{1,n_1+n_2+n_3},\quad i=\overline{0,\beta(k-1)}\ = n_1+n_2. \qquad (18)$$

Доказательство. Согласно определению 3, $\{xy\}$-управляемость РСВДС (2) означает относительную G_1-управляемость, т. е. управляемость любого начального состояния $(x_0,y_0,z_0)\in M^{n_1+n_2+n_3}$ этой системы в любое конечное состояние $G_1w(t_1)=(x_1,y_1)$. Необходимое и достаточное условие G_1-управляемости системы (4) согласно [7] имеет вид

$$rank\ [G_1B(\mu),G_1A(\mu)B(\mu),...,G_1A^{n_1+n_2+n_3-1}(\mu)B(\mu)]=rank\ G_1.$$

В силу леммы, теоремы 1, вида G_1 и равенства $rank G_1=n_1+n_2$ это условие принимает вид (18). Теорема доказана.

Аналогично доказываются критерии $\{xz\}$-управляемости и $\{xz\}$-управляемости.

Теорема 6. Для $\{xz\}$-управляемости РСВДС (2) при любом $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0<<1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\begin{pmatrix} X_k^i \\ Z_k^{i+\beta}\end{pmatrix}\ k=\overline{1,n_1+n_2+n_3},\quad i=\overline{0,\beta(k-1)}\ = n_1+n_3. \qquad (19)$$

Теорема 7. Для $\{yz\}$-управляемости РСВДС (2) при любом $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0<<1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$rank\begin{pmatrix} Y_k^{i+\alpha} & k=\overline{1,n_1+n_2+n_3}, & i=\overline{0,\beta\ k-1} \\ Z_k^{i+\beta} & & \end{pmatrix}=n_2+n_3. \qquad (20)$$

Следствие 1. Если РСВДС (2) полностью управляема для некоторого $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0<<1$, то она x-управляема, y-управляема, z-управляема и $\{xy\}$-управляема, $\{xz\}$-управляема, $\{yz\}$-управляема для этого же значения малого параметра.

Доказательство следует из того, что выполнение условия (13) немедленно влечет выполнение условий (14), (16)–(20).

Следствие 2. Если РСВДС (2) $\{xy\}$-управляема ($\{xz\}$-управляема, $\{yz\}$-управляема) для некоторого $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0<<1$, то она x-управляема и y-управляема (x-управляема и z-управляема, y-управляема и z-управляема) для этого же значения малого параметра.

Обратные утверждения места не имеют.

Замечание. Рассмотрим РСВДС (2) с $\alpha,\beta\in Q^+$, т. е. систему с рациональными степенями малого параметра. Пусть $\alpha=\dfrac{m}{n}$, $\beta=\dfrac{p}{q}$, где m, n, p, q – целые положительные числа. Покажем, что исследование управляемости РСВДС (2) с такими показателями малого параметра μ можно свести к рассмотренному случаю. Положим $\alpha'=qm$, $\beta'=np$, $\nu=\sqrt[nq]{\mu}$, тогда РСВДС (2) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}=A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z+B_1u; \\ \nu^{\alpha'}\dot{y}=A_{21}x+A_{22}y+A_{23}z+B_2u; \\ \nu^{\beta'}\dot{z}=A_{31}x+A_{32}y+A_{33}z+B_3u, \end{cases}$$

где α' и β' – целые положительные. Следовательно, при достаточно малом $\nu=\sqrt[nq]{\mu}$ все ранее доказанные утверждения справедливы и для РСВДС с рациональными степенями малого параметра.

Пример. Рассмотрим РСВДС пятого порядка с двумя рациональными степенями малого параметра μ, $\mu\in(0,\mu^0]$, $\mu^0<<1$:

$$\begin{cases} \dot{x}=-2x+y_1-z_2+3u; \\ \mu^{1/3}\dot{y}_1=x+z_1+u; \quad \mu^{1/3}\dot{y}_2=y_2-z_2; \\ \mu^{2/5}\dot{z}_1=x+y_1-u; \quad \mu^{2/5}\dot{z}_2=-x+z_1+u. \end{cases}$$

Рассматриваемая система принимает вид (2), где $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $A_{11}=(-2)$; $A_{12}=(1\ \ 0)$; $A_{13}=(0\ \ -1)$; $B_1=(3)$; $A_{21}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A_{31}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $A_{32}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_{33}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Полагая $\nu=\sqrt[15]{\mu}$; $\alpha'=5$; $\beta'=6$, перейдем к целым степеням малого параметра. Начальные условия: $x(0,\nu)=x_0$; $y(0,\nu)=y_0$; $z(0,\nu)=z_0$, где $y_0=\begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}$; $z_0=\begin{pmatrix} z_{01} \\ z_{02} \end{pmatrix}$. Перейдя к определяющим уравнениям (8) и вычислив компоненты X_k^i, Y_k^i, Z_k^i решения с начальными условиями (9), получим

$$rank\begin{pmatrix} X_k^i & & \\ Y_k^{i+5}, & k=\overline{1,5}; & i=\overline{0,6\ k-1} \\ Z_k^{i+6} & & \end{pmatrix}=5.$$

Следовательно, по теореме 1 рассматриваемая система полностью управляема при любом $\mu\in(0,\mu^0]$, $\sqrt[15]{\mu^0}<<1$.

ВЫВОД

Впервые исследована проблема управляемости существенно разнотемповых сингулярно возмущенных динамических систем, т. е. систем трех дифференциальных уравнений, в которые малый параметр входит с различными степенями в качестве множителя при производных. Использование метода определяющих уравнений [7], разработанного в [1, 2] для таких систем, позволило, не решая сложную систему дифференциальных уравнений, получить эффективные алгебраические условия полной, относительной управляемости РСВДС, выраженные непосредственно через их параметры. Рассмотренный пример РСВДС пятого порядка с рациональными степенями малого параметра иллюстрирует эффективность предлагаемого метода исследования управляемости.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Копейкина, Т. Б.** Управляемость разнотемповых сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений / Т. Б. Копейкина // Труды БГТУ. Физ.-мат. науки и информатика. – 2011. – № 6. − С. 7−11.

2. **Копейкина, Т. Б.** О критериях управляемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем / Т. Б. Копейкина // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 71–82.

3. **Копейкина, Т. Б.** Об управляемости активной подвески большегрузного автомобиля / Т. Б. Копейкина // Проблемы управления и приложения (техника, производство, экономика): тез. докл. Междунар. науч.-технич. конф., Минск, 16–20 мая 2005 г. / Бел. нац. техн. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: Р. Ф. Габасов [и др.]. – Минск: БНТУ, 2006. – С. 42–44.

4. **Salman, M. A.** Reduced order design of active suspension control / M. A. Salman, A. Y. Lee, N. M. Boustany // Transaction of the ASM. Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control. – 1990. – Vol. 112, № 4. – P. 604–610.

5. **Курина, Г. А.** О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем / Г. А Курина // Математические заметки. – 1992. – Т. 52, вып. 4. – С. 56–61.

6. **Калман, Р. Е.** Об общей теории систем управления / Р. Е. Калман // Труды I Междунар. конгресса ИФАК по автоматическому управлению. – М.: Наука, Изд-во АН СССР, 1961. – С. 521–547.

7. **Габасов, Р.** Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

Поступила 29.06.2012