Следует обратить внимание на необходимость подпрограммы поиска точек пересечения (блоки 4, 16, 22). При повороте ведомого звена на один угловой шаг эта подпрограмма (совместно с комплексами № 2 и № 3) дает увеличение скорости расчета в 2…3 раза.

Приведенные алгоритмы целесообразно использовать в различных программах более высокого уровня для исследований влияния на динамическую нагруженность трансмиссии транспортных средств, погрешностей изготовления зубчатых передач, а также решения вопросов, связанных с конструированием планетарных передач.

УДК 519.10:681.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРУЗОВ В ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЕ

Канд. физ.-мат. наук, доц. КОРЗНИКОВ А. Д., КОРЗНИКОВ В. А.

Белорусский национальный технический университет

Перевозка грузов в современных условиях – экономически важный и сложный процесс, который требует привлечения значительных денежных, материальных и трудовых ресурсов. Кроме того, транспорт не может решать задачу эффективной перевозки, игнорируя интересы грузоотправителей и грузополучателей. В связи с этим возникает необходимость рассматривать грузоотправителей, грузополучателей и транспорт как единую систему с общими целями. Такие системы принято называть логистическими [1].

При моделировании процесса перемещения грузов рассматривается транспортная сеть, причем грузоотправители отождествляются с местом (пунктом) предъявления груза к перевозке, а грузополучатели – с местом (пунктом), куда груз должен быть доставлен. Под транспортной сетью подразумевается сеть, состоящая из совокупности вершин (пунктов) и связывающих их дуг (участков транспортных коммуникаций). Дугам сети приписываются важные характеристики, свойственные реальным звеньям транспортной сети: протяженность, время движения, пропускная способность и т. п. В вершинах сети помещаются все пункты сосредоточения и спроса грузов, транспортных средств. Логистическим транспортным системам (как производственного, так и муниципального типов) присущи особенности: множественность критериев функционирования, многопродуктовость, наличие ограничений на пропускную способность элементов системы. Однако транспортные системы муниципального типа (например, городской пассажирский транспорт) имеют следующие особенности:

- отсутствуют погрузочно-разгрузочные операции;
- отсутствует необходимость в решении задачи управления запасами грузов;
- существуют несколько пунктов отправления и назначения;
- минимизируются затраты, связанные с перемещением определенного количества пассажиров на транспортной сети с множеством источников и стоков, размерами автотранспортного парка.

Если учесть, что городской пассажирский транспорт финансируется из бюджета в любых экономических системах (централизованная экономика, экономика переходного периода, рыночная экономика), то становится ясно, что минимизация затрат, связанных с перемещением пассажиров, является особенно актуальной. Однако эта задача включает комплекс проблем: анализ существующей сети маршрутов; определение пассажиропотоков, обеспечивающих минимальные суммарные затраты по перемещению пассажиров между конечными пунктами в заданных объемах; перераспределение транспортных средств между маршрутами; оптимальное преобразование транспортной сети, связанное с увеличением ее пропускной способности с минимальными затратами.

Классические модели, описывающие элементы транспортного процесса и алгоритмы решения отдельных задач [2...4], не позволяют учитывать характерные особенности функционирования элементов системы в их совокупности, ее многополюсность и множественность критериев эффективности. В качестве полюсов (вершин) в таких системах выступают пункты отправления (источники грузов, как правило, – жилые районы) и пункты назначения (стоки), которыми являются общественные предприятия, торговые центры, правительственные учреждения и т. п. Причем понятно, что вершины (полюса) могут играть роль как источника, так и стока в зависимости от момента времени, на котором рассматривается функционирование транспортной системы. Пропускные способности дуг (магистралей, дорог, улиц) естественным образом определяются количеством транспортных средств, обеспечивающих перемещение по ним груза (пассажиров). Каждой дуге поставлены в соответствие важные характеристики, свойственные реальным звеньям транспортной сети: протяженность (длина дуги) и стоимость перевозки некоторой единицы груза. Ниже приводится сетевая математическая модель, описывающая процесс переноса потоков груза между вершинами сети.

Рассмотрим транспортную сеть $G(V, U)$, состоящую из совокупности вершин (пунктов) V и связывающих их дуг (участков транспортных коммуникаций или дорог) U. В вершинах транспортной сети помещаются все пункты сосредоточения и спроса грузов. Перемещение грузов и движение транспортных средств осуществляется по дугам в соответствии с их направлением. Обозначим через S множество вершин, в которых сосредоточен груз (мы будем называть их источниками), а через T – множество вершин (в дальнейшем – стоки), в которых сосредоточены пункты спроса. Заметим, что в общем случае $T \cap S \neq \varnothing$. Это означает, что некоторые пункты одновременно выступают в качестве источников и стоков. Каждой дуге $(i, j) \in U$ в сети поставлены в соответствие три числа d_{ij}, l_{ij} и c_{ij}. Числа d_{ij}, отвлекаясь от их реальной природы (мощность автомобильного парка, пропускная способность транспортной коммуникации), будем называть пропускной способностью дуги $(i, j) \in U$, l_{ij} – длиной дуги $(i, j) \in U$, а числа c_{ij} – стоимостью переноса единицы груза по дуге $(i, j) \in U$.

Требуется построить потоки переноса груза (пассажиров) из источников в стоки, обеспечив при этом минимальную суммарную стоимость или минимальный объем грузо- или пассажирокилометровой работы.

Построим математическую модель сформулированной задачи. Введем следующие обозначения: a_s – объем груза (пассажиров), который необходимо переместить из источника $s \in S$; b_t – объем груза (пассажиров), который необходимо переместить в сток $t \in T$.

Обозначим через x_{ij} величину потока (дуговой поток), переносимого по дуге (i, j) из вершины i в вершину j.

Ясно, что дуговые потоки не отрицательны и не могут превышать пропускные способности дуг, т. е.:

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}; \qquad \forall (i, j) \in U.$$

Для любой вершины $i \in V$ в сети $G(V, U)$ обозначим через $N(i)$ множество вершин, соседних с вершиной i. Тогда для любой промежуточной вершины сети выполняется естественное условие потока: суммы входящего и выходящего потоков равны, т. е.

$$\sum_{i\in N(l)} x_{il} - \sum_{j\in N(l)} x_{lj} = 0, \qquad \forall l \in V \setminus (T \cup S). \quad (1)$$

Для каждого источника $s \in S$ объем вывозимого груза равен:

$$F_s = \sum_{i\in N(s)} x_{si} - \sum_{j\in N(s)} x_{js} \le a_s, \qquad \forall s \in S \setminus (T \cap S);$$

$$F_l = \sum_{i\in N(l)} x_{li}, \qquad \forall l \in T \cap S. \quad (2)$$

Объем груза P_t, доставляемый в каждый сток $t \in T$, можно рассчитывать по формуле:

$$P_t = \sum_{i\in N(t)} x_{it} - \sum_{j\in N(t)} x_{tj} \le b_t, \qquad \forall t \in T \setminus (T \cap S);$$

$$P_l = \sum_{j\in N(l)} x_{jl}, \qquad \forall l \in T \cap S. \quad (3)$$

Понятно, что суммарный объем груза, перемещаемый из всех источников, должен попасть в стоки и равен

$$\mathrm{v} = \sum_{t\in T} P_t = \sum_{s\in S} F_s. \quad (4)$$

Причем критериями эффективности потока переноса грузов из источников в стоки могут выступать:

- его суммарная максимальность

$$v \to \max; \quad (5)$$

- минимальная суммарная стоимость перемещения грузов

$$z_1 = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij} \to \min; \quad (6)$$

- минимальный объем грузо- или пассажирокилометровой работы

$$z_2 = \sum_{(i,j)\in U} l_{ij} x_{ij} \to \min; \quad (7)$$

- минимизация максимальной длины маршрута переноса потока и др.

Рассмотрим бикритериальную задачу построения максимального (или заданной величины) многополюсного потока минимальной стоимости (грузо- или пассажирокилометровой работы) и опишем алгоритм ее решения.

Пусть в сети $G(V, U)$ выделены некоторое множество вершин $S = \{l_1, ..., l_k, s_{k+1}, ..., s_m\}$, являющихся источниками потока, и множество вершин $T = \{l_1, ..., l_k, t_{k+1}, ..., t_n\}$, являющихся его стоками. Вершины множества $T \cap S$ выступают одновременно в качестве источников и стоков. Реальными объектами такого рода являются, например, крупные пункты пересадки пассажиров (рис. 1).

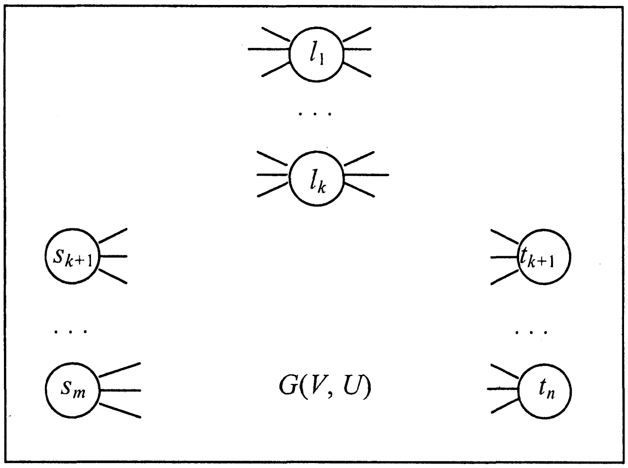

Рис. 1

Для любого многополюсного потока $\{x_{ij}\}_{(i,j)\in U}$ в сети $G(V, U)$ определим модифицированные стоимости следующим образом:

$$c^*_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ если } x_{ij} < d_{ij}; \\ \infty, \text{ если } x_{ij} = d_{ij}; \\ -c_{ij}, \text{ если } x_{ji} > 0, \end{cases} \quad (8)$$

для всех дуг $(i, j) \in U$.

Фундаментальной в теории однополюсных потоков является **теорема 1** [5]. Поток $\{x_{ij}\}_{(i,j)\in U}$ величины v является потоком минимальной стоимости тогда и только тогда, когда сеть с модифицированными стоимостями в качестве длин дуг не содержит ориентированных циклов отрицательной длины.

Заметим, что в случае многополюсных потоков условия теоремы являются необходимыми [6], но недостаточными.

Опишем сведение задачи о многополюсном потоке к задаче об однополюсном потоке минимальной стоимости, для чего построим для сети $G(V, U)$ модифицированную сеть $G(\overline{V}, \overline{U})$.

Каждой вершине l_p, $p = \overline{1,k}$, поставим в соответствие две вершины s_p и t_p, соединив их ориентированной дугой (t_p, s_p), $p = \overline{1,k}$, полагая, что $\overline{S} = (s_1, s_2, ..., s_k, ..., s_m)$ и $\overline{T} = (t_1, t_2, ..., t_k, ..., t_n)$. Все неориентированные и входящие в вершину l_p дуги остаются инцидентными вершине t_p, все выходящие из l_p и неориентированные дуги остаются инцидентными вершине s_p. Величины $d_{s_p t_p}$, $c_{s_p t_p}$, $l_{s_p t_p}$ определяются содержанием моделируемой задачи.

Далее введем две дополнительные вершины s и t, которые будем называть фиктивными поставщиком и потребителем соответственно.

Вершину s соединим ориентированной дугой (s, s_i), $i = \overline{1,m}$, с каждой из вершин множества $\overline{S}$, полагая: $d_{ss_i} = a_{s_i}$ и $c_{ss_i} = l_{ss_i} = 0$.

Каждую вершину множества $\overline{T}$ соединим ориентированной дугой $(t_j, t), j = \overline{1,n}$ с вершиной t, полагая: $d_{t_j t} = b_{t_j}$ и $c_{t_j t} = l_{t_j t} = 0$.

Таким образом, получена сеть $G(\overline{V}, \overline{U})$ (рис. 2) с $|\overline{V}| = |V| + k + 2$ вершинами и $|\overline{U}| = |U| + n + m + k + |U_l|$ дугами, которая называется модифицированной для сети $G(V, U)$. Здесь U_l – множество неориентированных дуг, инцидентных вершинам $l_1, l_2, ..., l_k$.

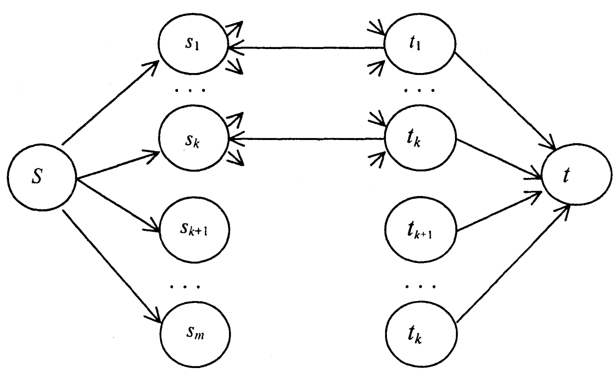

Рис. 2

Следующее утверждение позволяет свести задачу о многополюсном потоке минимальной стоимости в сети $G(V, U)$ к задаче отыскания максимального потока минимальной стоимости из источника S в сток t в однополюсной модифицированной сети $G(\overline{V}, \overline{U})$.

Теорема 2. Поток $\{x_{ij}^{\circ}\}$, $(i, j) \in U$ является максимальным многополюсным потоком минимальной стоимости в сети $G(V, U)$ тогда и только тогда, когда поток $\{\overline{x}_{ij}^{\circ}\}$, $(i, j) \in \overline{U}$ является максимальным потоком минимальной стоимости в модифицированной сети $G(\overline{V}, \overline{U})$.

Здесь

$$
\begin{aligned}
&x_{ij}^{\circ} = \overline{x}_{ij}^{\circ}, (i, j) \in U \bigcup \overline{U}; \\
&x_{ij}^{\circ} = \overline{x}_{it_j}^{\circ} + \overline{x}_{is_j}^{\circ}, x_{ji}^{\circ} = \overline{x}_{t_j i}^{\circ} + \overline{x}_{s_j i}^{\circ}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

для всех $(i, j) \in U_l$.

Доказательство. Заметим вначале, что для любой дуги $(i, j) \in U_l$, $j \in T \bigcap S$ и потока минимальной стоимости $\{\overline{x}_{ij}^{\circ}\}$, если $\overline{x}_{it_j}^{\circ} > 0$, то $\overline{x}_{s_j i}^{\circ} = 0$ и наоборот. Аналогично, если $\overline{x}_{t_j i}^{\circ} > 0$, то $\overline{x}_{is_j}^{\circ} = 0$ и наоборот.

В противном случае дуги (i, t_j), (i, s_j), (t_j, s_j) образуют цикл, и стоимость потока может быть уменьшена.

Необходимость. Пусть $\{x_{ij}^{\circ}\}$, $(i, j) \in U$, – максимальный многополюсный поток минимальной стоимости в сети $G(V, U)$ и пусть $\overline{x}_{it_j}^{\circ} = x_{ij}^{\circ}$, $\overline{x}_{s_j i}^{\circ} = x_{ji}^{\circ}$. Предположим противное, т. е. поток $\{\overline{x}_{ij}^{\circ}\}$ либо не является максимальным, либо его стоимость не минимальна в модифицированной сети $G(\overline{V}, \overline{U})$.

В первом случае существует поток $\{\overline{x}_{ij}\}$ такой, что $\sum_{j=1}^{n} \overline{x}_{t_j t} > \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_{t_j t}^{\circ}$. Но тогда величина многополюсного потока $\{x_{ij}^{\circ}\}$, $(i, j) \in U$, удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i\in N(t_j)} x_{it_j} - \sum_{i\in N(t_j)} x_{t_j t}\right) = \sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{t_j t} > \sum_{j=1}^{n}\bar{x}^{\text{o}}_{t_j t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i\in N(t_j)} x^{\text{o}}_{it_j} - \sum_{i\in N(t_j)} x^{\text{o}}_{t_j t}\right),$$

что противоречит максимальности многополюсного потока $\{\bar{x}^{\text{o}}_{ij}\}$, $(i,j)\in\bar{U}$, в сети $G(V, U)$.

Во втором случае, так как $c_{t_j t} = l_{t_j t} = 0$, $(i,j)\in\bar{U}\setminus U$, существует поток $\{x_{ij}\}$, $(i,j)\in U$, стоимость которого $C\{x_{ij}\}$ меньше стоимости потока $\{x^{\text{o}}_{ij}\}$, $(i,j)\in U$. Полученное противоречие доказывает необходимость условий теоремы.

Достаточность условий доказывается аналогичными рассуждениями.

Таким образом, если в модифицированной сети $G(\bar{V},\bar{U})$ построен максимальный (или заданной величины v) поток $\{\bar{x}_{ij}\}$, $(i,j)\in\bar{U}$, минимальной стоимости (минимальной грузо- или пассажирокилометровой работы), то поток $\{x^{\text{o}}_{ij}\}$, полученный по формулам (9), является максимальным суммарным потоком минимальной стоимости в многополюсной сети. Это дает возможность описать алгоритм, корректность которого вытекает из теоремы 2, построения такого потока.

Начальный шаг. Для сети $G(V, U)$ формируем модифицированную сеть $G(\bar{V},\bar{U})$ и матрицы стоимостей $\|c_{ij}\|_{|\bar{V}|\times|\bar{V}|}$ и пропускных способностей $\|d_{ij}\|_{|\bar{V}|\times|\bar{V}|}$. В сети $G(\bar{V},\bar{U})$ находим максимальный (или заданной величины v) поток $\{\bar{x}_{ij}\}$ из фиктивных источника s в сток t.

Шаг 1. (Общая итерация). а) Формируем вспомогательную матрицу $\|r_{ij}\|_{|\bar{V}|\times|\bar{V}|}$, полагая: $r_{ij} = j$, $i = \overline{1,|\bar{V}|}$, $p = 1$. Для матрицы $\|c_{ij}\|_{|\bar{V}|\times|\bar{V}|}$ находим матрицу $\|c^*_{ij}\|_{|\bar{V}|\times|\bar{V}|}$ модифицированных стоимостей:

$$c^*_{ij} = \begin{cases} c_{ij},\ \bar{x}_{ij} < d_{ij}; \\ -c_{ij},\ \bar{x}_{ji} > 0; \\ \infty,\ \bar{x}_{ij} = d_{ij} \text{ или } i = j. \end{cases}$$

б) Осуществляем тернарную операцию по вершине p над элементами матрицы $\|c^*_{ij}\|$, одновременно изменяя элементы вспомогательной матрицы $\|r_{ij}\|$, полагая:

$$c^*_{ij} := \begin{cases} c^*_{ij}, \text{ если } c^*_{ip} + c^*_{pj} \ge c^*_{ij}; \\ c^*_{ip} + c^*_{pj}, \text{ если } c^*_{ip} + c^*_{pj} < c^*_{ij}; \end{cases}$$

$$r_{ij} := \begin{cases} r_{ip}, \text{ если } c^*_{ip} + c^*_{pj} < c_{ij}; \\ r_{ij}, \text{ если } c^*_{ip} + c^*_{pj} \ge c^*_{ij}. \end{cases}$$

Если все $c^*_{ii} > 0$, $i = \overline{1,|\bar{V}|}$ и $p < |\bar{V}|$, то полагаем $p := p + 1$ и переходим к п. б) шага 1, если $p = |\bar{V}|$, то алгоритм заканчивает работу.

Если существует l, для которого $c^*_{ll} < 0$, то переходим к шагу 2.

Шаг 2. С помощью вспомогательной матрицы $\|r_{ij}\|$ строим цикл отрицательной длины [5]

$$z = \{(l,i_1),(i_1,i_2),\dots,(i_k,l)\}.$$

Вычисляем

$$\delta = \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2),$$

где

$$\varepsilon_1 = \min_{(i,j)\in z^-} x_{ij},\quad \varepsilon_2 = \min_{(i,j)\in z^+}(d_{ij} - x_{ij}).$$

Здесь z^+ – множество прямых (проходимых в направлении потока), а z^- – множество обратных (проходимых в направлении противоположному потоку) дуг отрицательного цикла.

Определяем новый поток меньшей стоимости:

$$x_{ij} := \begin{cases} \bar{x}_{ij} - \delta,\ (i,j)\in z^-; \\ \bar{x}_{ij} + \delta,\ (i,j)\in z^+; \\ \bar{x}_{ij},\quad (i,j)\notin z. \end{cases}$$

Если $p < \left|\overline{V}\right|$, то переходим к п. а) шага 1. Если $p = \left|\overline{V}\right|$, то алгоритм заканчивает работу.

После завершения работы алгоритма в сети построен максимальный (или заданной величины) многополюсный поток минимальной стоимости.

Далее возникают естественные задачи отыскания путей переноса потока минимальной длины или максимальной величины между всеми парами источников и стоков. В частности, для уменьшения порожнего пробега транспортных средств важным является отыскание циклических маршрутов, по которым переносится максимальное количество потока минимальной стоимости. Для решения этих задач проделаем следующее.

Поскольку построенный поток $X^{\text{o}} = \left\{x_{ij}^{\text{o}}\right\}$, $(i, j) \in U$, естественным образом ориентирует каждую дугу $(i, j) \in U$ (если первоначально она не являлась ориентированной), мы можем сформировать матрицу $D(X^{\text{o}}) = \left\|d_{ij}\right\|_{\left|\overline{V}\right| \times \left|\overline{V}\right|}$ пропускных способностей ориентированной сети $G(V, U)$, называемую в дальнейшем матрицей пропускных способностей потока, следующим образом:

$$d_{ij} = \begin{cases} x_{ij}^{\text{o}}, & (i,j) \in U, \ x_{ij} > 0; \\ 0, & (i,j) \notin U \text{ или } x_{ji} > 0, \quad (i,j) \in U. \end{cases}$$

Понятно, что пропускная способность ориентированного пути между любой парой вершин сети или любого ориентированного цикла равна минимальной из пропускных способностей дуг, входящих в этот путь (цикл). Путем (циклом) максимальной пропускной способности между парой вершин является путь (цикл), пропускная способность которого не меньше пропускной способности любого другого пути между этой парой вершин. Таким образом, задача сводится к отысканию циклов и путей максимальной пропускной способности между всеми парами источников и стоков. Опишем алгоритм ее решения.

Вместе с матрицей $D(X^{\text{o}})$ будем рассматривать вспомогательную матрицу

$$\left\|r_{ij}\right\|_{\left|\overline{V}\right| \times \left|\overline{V}\right|},$$

где $r_{ij} = j$, $i = \overline{1, \left|\overline{V}\right|}$, $j = \overline{1, \left|\overline{V}\right|}$.

Тернарной операцией по вершине $p \in U$ над матрицей $D(X^{\text{o}})$ пропускных способностей потока $X^{\text{o}} = \left\{x_{ij}^{\text{o}}\right\}$, $(i, j) \in U$, называется операция:

$$d_{ij} := \begin{cases} d_{ij}, & \text{если } d_{ij} \geq \min\left(d_{ip}, d_{pj}\right); \\ \min\left(d_{ip}, d_{pj}\right), & \text{если } d_{ij} < \min\left(d_{ip}, d_{pj}\right); \end{cases} \qquad (10)$$

$$r_{ij} := \begin{cases} r_{ij}, & \text{если } d_{ij} \geq \min\left(d_{ip}, d_{pj}\right); \\ r_{ip}, & \text{если } d_{ij} < \min\left(d_{ip}, d_{pj}\right). \end{cases} \qquad (11)$$

Теорема 3. Последовательное проведение тернарных операций (10) по вершинам $p = 1, 2, \ldots, |V|$ над матрицей $D(X^{\text{o}})$ пропускных способностей потока X^{o} даст нам матрицу $\left\|d_{ij}\right\|_{\left|\overline{V}\right| \times \left|\overline{V}\right|}$, элемент d_{ij} которой равен максимальной пропускной способности путей между вершинами i и j.

Доказательство. Рассмотрим путь $L = \{(i, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_k, j)\}$ максимальной пропускной способности потока между вершинами i и j такой, что любая дуга (i_l, i_p) этого пути является путем максимальной пропускной способности потока между вершинами i_l и i_p. Пусть i_m – промежуточная вершина этого пути, имеющая наименьший индекс, а i_{m-1}, i_{m+1} – соседние с ней вершины. Тогда в результате выполнения операции (10) по вершине i_m имеем

$$d_{i_{m-1} i_{m+1}} := \min\left(d_{i_{m-1} i_m}, d_{i_m i_{m+1}}\right),$$

и дуга (i_{m-1}, i_{m+1}) заменяется на дугу, пропускная способность которой равна $\min\left(d_{i_{m-1} i_m}, d_{i_m i_{m+1}}\right)$. В результате получим путь той же пропускной способности потока, содержащей на одну вершину меньше. Поскольку на каждом шаге выбираем минимальное значение из пропускных способностей двух дуг, входящих в путь максимальной пропускной способности потока, при проведении операции (10) по промежуточной вершине с наибольшим индексом получим

$$d_{ij} := \min_{(i_m, i_{m+1}) \in L} \left(d_{i_m i_{m+1}} \right).$$

Покажем теперь, что значение элемента r_{ij}, вычисленное по формулам (11), указывает номер первой вершины в пути L максимальной пропускной способности потока. При проведении операции (10) по вершине i_m имеем

$$d_{i_{m-1} i_{m+1}} < \min \left(d_{i_{m-1} i_m}, d_{i_m i_{m+1}} \right),$$

поэтому элемент $r_{i_{m-1} i_{m+1}} = i_m$. Так как дуги (i_{m-1}, i_m) и (i_m, i_{m+1}) – путь максимальной пропускной способности потока между вершинами i_{m-1} и i_{m+1}, следовательно, при дальнейшем осуществлении тернарных операций элементы $r_{i_{m-1} i_m} = i_m$ и $r_{i_m i_{m+1}} = i_{m+1}$ не изменятся. То есть выражение (11) правильно указывает, что в пути максимальной пропускной способности потока из вершины i_{m-1} в вершину i_{m+1}, за вершиной i_{m-1} следует вершина i_m, а за вершиной i_m – вершина i_{m+1}. Заменим теперь исходный путь максимальной пропускной способности потока на другой, той же пропускной способности, но имеющий меньшее число вершин, т. е. введем новую дугу (i_{m-1}, i_{m+1}), пропускная способность которой

$$d_{i_{m-1} i_{m+1}} := \min \left(d_{i_{m-1} i_m}, d_{i_m i_{m+1}} \right).$$

Продолжая подобным образом, получим требуемое доказательство.

Заметим, что после выполнения операций (10) по всем вершинам сети диагональные элементы матрицы $D(X^0)$ указывают максимальную пропускную способность потока по циклам, проходящим через соответствующую вершину.

Путь максимальной пропускной способности потока между любой парой вершин i и j можно найти с помощью вспомогательной матрицы R. Если элемент $r_{ij} = k$, то это означает, что первая промежуточная вершина этого пути имеет индекс k, элемент r_{kj} – индекс второй промежуточной вершины. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден элемент $r_{lj} = j$, который означает, что l – предпоследняя вершина пути. Более того, для любых вершин i и k величина $\min(d_{ik}, d_{ki})$ указывает максимальную пропускную способность цикла, проходящего через эти вершины, а сам цикл получается объединением путей, ведущих из вершины i в вершину k и из k в i.

Таким образом, величина d_{ij} указывает максимальный объем перевозок, осуществляемых непосредственно из вершины i в вершину $j (i \neq j)$ или по циклическому маршруту, проходящему через вершину $i (i = j)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Меламед И. И.** Методы оптимизации в транспортном процессе // ИНТ ВИНИТИ. Сер. Организация управления транспортом. – 1991. – № 10. – 165 с.

2. **Резер С. М., Ловецкий С. Б., Меламед И. Н.** Математические методы оптимального планирования в транспортных системах // ИНТ ВИНИТИ. Сер. Организация управления транспортом. – 1990. – № 9. – 172 с.

3. **Aneja P., Nair K. R. K.** Bicriteria transportaiton problem // Manag. Sci. – 1979. – 25. – № 1. – P. 73–78.

4. **Golden B., Baker E. K.** Future directions in logistics research // Transp. Res. – 1985. – A 19. – № 5–6. – P. 405–409.

5. **Ху Т.** Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974. – 502 с.

6. **Корзников А. Д.** Модели и методы сетевой оптимизации: Отчет о НИР, № г.р. 20012229. – Мн., 2001. – 130 с.