УДК 519.95

ЛОГИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЕ НЕЧЕТКИЕ ФОРМУЛЫ

Канд. техн. наук, доц. ГЕРМАН О. В., магистрант ЛИННИК А. А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Работа позволяет подвести логическую основу под использование (нечеткой) условной меры $\mu(a\,|\,b)$, попытки применить которую для формул неклассических логических исчислений можно найти, например, в [1...3]. Характерная их особенность состоит в применении классического вероятностного аналога:

$$\Pi(p \wedge q) = \Pi(p)\Pi(q\,|\,p);$$
$$\Pi(q) = \max(\Pi(p)\Pi(q\,|\,p);\ \Pi(\bar{p})\Pi(q\,|\,\bar{p})), \quad (1)$$

где $\Pi(p)$ – мера возможности формулы p; $\Pi(p)\Pi(q\,|\,p)$ – то же q при условии p [4].

Однако неизвестны логические исчисления и аксиоматии, использующие формулу $\{q\,|\,p\}$, а не меру $\Pi(q\,|\,p)$. Это ограничивает способы реализации механизмов вывода, использующих условные меры, теми, которые проводят вычисления, базируясь на вероятностном аналоге (1).

Правила исчисления условных формул. Начнем с исчисления, применяющего три значения истинности: 0 (ложь), 1 (истина), * (не определено).

Определение 1. Формула $\{a\,|\,b\}$ задается посредством табл. 1. Таким образом, семантика формулы $\{a\,|\,b\}$ такова: формула $\{a\,|\,b\}$ принимает значения формулы a всякий раз, когда b истинна; значение «ложь», если ложна a; значение «не определена» – во всех других случаях.

Табл. 1 не допускает редукции к классическому двухзначному исчислению из-за неопределенности значения $\{a\,|\,b\}$ при $a = 1, b = 0$.

Таблица 1

Таблица истинности трехзначного исчисления

a	b	$a\|b$
0	0	0
0	1	0
0	*	0
1	0	*
1	1	1
1	*	*
*	0	*
*	1	*
*	*	*

Для того чтобы построить нужную аксиоматику для формул, содержащих $\{a\,|\,b\}$, будем использовать вычисления значений формул $a \vee b$, $a\,\&\,b$ и $\bar{a}$ в трехзначной логике [5], реализованные в табл. 2.

Таблица 2

Значения формул в трехзначной логике Лукасевича

a	b	$a\&b$	$a\vee b$	$\bar{a}$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	*	0	*	1
1	1	1	1	0
1	*	*	1	0
*	*	*	*	*

Ниже приводится совокупность аксиом, справедливых для формулы $\{a\,|\,b\}$, с учетом данных табл. 2:

1) $\{a\,|\,true\} = a$;
2) $\{a\,|\,a\} = a$;

3) $\{a \mid b\} \mid b = \{a \mid b\}$;

4) $\overline{\{a \mid b\}} = \{\bar{b} \mid \bar{a}\} \vee \bar{a}$;

5) $\{a \mid b\} \& a = \{a \mid b\}$;

6) $\{a \mid b\} \& b = a \& b$;

7) $\{a \mid a \vee b\} = a$;

8) $\{a \mid b\} \& \{c \mid a\} = \{a \& c \mid b \& a\} = \{a \& c \mid b\}$;

9) $\{a \mid b\} \vee \{c \mid b\} = \{a \vee c \mid b\}$;

10) $\{a \& b \mid c\} = \{a \mid b \& c\} \& b$;

11) $\{a \mid b\} = \{a \mid b \vee \bar{a}\}$;

12) $\{a \mid b\} \& \{c \mid b\} = \{a \& c \mid b\}$;

13) $\{a \mid b\} \& \{c \mid d\} = \{a \& c \mid b \& d\}$;

14) $\{a \mid b\} \vee b = \{a \vee b \mid b\}$;

15) $\{a \mid c \vee d\} = \{a \mid c\} \vee \{a \mid d\}$;

16) $\{false \mid b\} = false$.

Примечания. 1. Чтение формул $\{F|G\}$ не вызывает проблем, если иметь в виду, что F и G – произвольные, правильно записанные формулы исчисления. Поэтому $\{a \& c \mid a \vee b\}$ – это не то же, что $\{a\} \& \{c \mid a \vee b\}$ либо $\{a \& c \mid a\} \vee b$. 2. Каждая из аксиом 1...15 непосредственно проверяется через определение $\{a \mid b\}$ из табл. 1. 3. Очевидно, $a \to b$ и $\{a \mid b\}$ различаются, например, для $b = *$ и $a = 0$ ($a \to b$ равно *, а $\{a \mid b\} = 0$ в этом случае).

Теорема 1. *Формула $\{a \mid b\}$ не выражается посредством только операций $\bar{\ }, \vee, \&$ и переменных a, b с константами false и true.*

Доказательство. Имеется набор $a = 1, b = 0$, на котором $\{a \mid b\}$ равна *, тогда как операции $\bar{\ }, \vee, \&$ на этом наборе не дают значение *.

Значения формулы φ на наборе I будем обозначать как $val(\varphi[I])$ либо $val(\varphi)$, если не важно, о каком наборе идет речь. Кроме того, считаем, что $val(false) = 0$; $val(*) = 0{,}5$ и $val(true) = 1$.

Теорема 2. *Система функций $S = \{\bar{\ }, \vee, \&, \{a|b\}\}$ является замкнутой, но не полной.*

Доказательство. Неполнота устанавливается, например, из невозможности представления в S функции

$$x+1 = \begin{cases} * \text{ при } x = 0; \\ 1 \text{ при } x = *; \\ 0 \text{ при } x = 1 \end{cases}$$

на наборе, состоящем только из «*», так как каждая из функций в S на таком наборе равна *, $x + 1 = 1$.

Функциональная замкнутость означает, что любая суперпозиция функций из S не выходит за пределы S, т. е. снова дает функцию из S. Доказательство проверяется непосредственной, но трудоемкой проверкой.

Из теоремы 2 следует, что не всякое рассуждение с тремя значениями истинности можно формализовать в рассматриваемом исчислении. Функциональная замкнутость, напротив, позволяет строить выводы, оставаясь в пределах рассматриваемого класса функций.

Определение 2. Формула φ определенно следует ($\to$) из формул $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, если на каждом наборе, где $val\{a_1 \& a_2 \& \ldots \& a_n\} \neq$ $\neq 0{,}5 \vee val(\varphi) \neq 0{,}5$ имеет место

$$val\{a_1 \& a_2 \& \ldots \& a_n\} \leq val(\varphi). \qquad (2)$$

Определение 3. Множество формул $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ определенно противоречиво, если $A \to false$.

Лемма 1. $A \to \varphi \equiv A \& \bar{\varphi} \to false.$

Доказательство. Пусть $A \to \varphi$. Тогда $val(A) \leq val(\varphi)$.

Если $val(A) = 0$, то $false \to false$.

Если $val(A) = *$, то $val(A) = *$ и $val(\bar{\varphi}) =$ $= false$.

Если $val(A) = true$, то $val(A) = *$ и $val(\bar{\varphi}) = false$.

Пусть $A \& \bar{\varphi} \to false$. Тогда на любом наборе $val(A) = false \vee val(\bar{\varphi}) = false$. Если $val(A) =$ $= false$, то $val(A) \leq val(\varphi)$, каково бы ни было $val(\varphi)$.

Если $val(\bar{\varphi}) = false$, то $val(A) = *$ и, следовательно, $val(A) \leq val(\varphi)$, каково бы ни было значение $val(A)$. Лемма доказана.

Лемма 1, как и в классическом двухзначном пропозициональном исчислении, указывает на то, что для определения следования нужно попытаться установить противоречивость расширенной системы.

Оказывается, что для этой цели вполне логично ограничиться методом резолюций Робинсона [3].

Теорема 3. *Если* $[A \& \bar{\varphi} \to false]^3$ *в трехзначном пропозициональном исчислении, то* $[A \& \bar{\varphi} \to false]^2$ *в двухзначном, и наоборот.*

Доказательство. Пусть $[A \& \bar{\varphi} \to false]^3$. Тогда $val(A) = false \vee val(\bar{\varphi}) = false$ на любом наборе. Если любой такой набор содержит «*», то это значение можно заменить на «*true*» или «*false*» и при этом по-прежнему $val(A) = false \vee val(\bar{\varphi}) = false$, ибо иначе не имело бы места $[A \& \bar{\varphi} \to false]^3$. А это равносильно условию $[A \& \bar{\varphi} \to false]^2$.

Теперь пусть $[A \& \varphi \to false]^2$. Тогда $val(A) = false \vee val(\varphi) = false$. Заменяя значения формул из A на «*», можно добиться, разве что, $val(A) = *$ и/или $val(\varphi) = *$. При этом наборы, где $val(A) = * \& val(\varphi) = *$, в силу определения 2 не учитываются, поэтому по-прежнему на остающихся трехзначных наборах $val(A) = false \vee val(\varphi) = false$. Теорема доказана.

Итак, нами получены следующие результаты:

1. Введено трехзначное логическое исчисление, содержащее формулу $\{a \mid b\}$, не выражаемую через $\bar{\ }, \vee, \&$.

2. Сформулированы определения выводимости (следования) в таких исчисленьях.

3. Для подобных систем показано, как строить логику вывода.

Практические аспекты использования. Используя правила задания формулы $\{a \mid b\}$, можно получить нечеткую условную меру $\mu(a|b)$ в виде

$$\mu(a \mid b) = \begin{cases} \mu(a \& b), (a \neq 1 \vee b \neq 0) \& (a \neq * \vee b \neq 0); \\ 0{,}5, (a = 1 \& b = 0) \vee (a = * \& b = 0), \end{cases}$$

причем $\mu(0) = 0$, $\mu(*) = 0{,}5$, $\mu(1) = 1$.

Обобщая на непрерывный случай, имеем следующее:

$$\mu(a \mid b) = \begin{cases} 0 \ \text{при}\ \mu(b) = 0; \\ 0{,}5 \ \text{при}\ 0 < \mu(b) < 0{,}5; \\ \dfrac{\mu(a) + \mu(b) - 1}{2\mu(b) - 1} \ \text{при}\ \mu(b) > 0{,}5. \end{cases}$$

Это определение интерпретирует факт, что при стремлении $\mu(b) \to 1$ $\mu(a|b)$ тоже стремится к значению $\mu(a)$. Таким образом, если, например, $\mu(a \mid b) = 0{,}8$ и $\mu(b) = 0{,}6$, то получим $\mu(a) = 0{,}56$. И наоборот, зная $\mu(a \mid b)$ и $\mu(a)$, определяем $\mu(b)$ – нечеткую меру посылки.

Полученные зависимости легко переводятся на многопосылочный случай с использованием формулы Шортлиффа [3]

$$\mu(a \mid b, c) = \mu(a \mid b) + \mu(a \mid c) -$$
$$- \mu(\{a \mid b\} \& \{a \mid c\}) = \mu(a \mid b) + \mu(a \mid c) -$$
$$- \min(\mu\{a \mid b\}; \mu\{a \mid c\}) \ \text{и т. д.}$$

Приведенные результаты могут быть без труда переведены в плоскость практического использования; когда отсутствует статистический материал для использования формулы Байеса, можно опираться на субъективные оценки $\mu(a \mid b)$ и находить нечеткую меру интересующего параметра.

При этом необходимо заранее знать значение меры $\mu(a)$ ($\mu(b)$). Эти значения можно определить на основе известных подходов [3, 6]. Обе техники связывают вычисления нечеткой меры принадлежности с вероятностью (плотностью вероятности). В [6] для этого используется формула

$$\mu(x) = \frac{\rho_X(x)}{\max(\rho_X)},$$

где $\rho_X(x)$ – эмпирическая плотность вероятности распределения случайной величины $x = X$; $\max(\rho_X)$ – максимальное значение плотности вероятности для некоторого X^*.

Способ эмпирического вычисления ρ_X описан в [7].

Для дискретной случайной величины вычисление $\mu(x)$ удобно реализовать на основе метода Яггера [1, 3]. Эксперт формирует множество уровней $A_{0,1}, A_{0,2}, \ldots, A_{1,0}$, в каждый из которых заносит те значения дискретной переменной, которые, с его точки зрения, соответствуют данному уровню. А затем рекурсивно вычисляется величина

$$T_i = T_i + \frac{1}{k},$$

где T_i – эмпирическая частота появления i-го значения дискретной переменной (сначала задают $T_i = 0$); k – количество различных элементов (значений дискретной переменной), попавших в данное множество уровня A_α.

При вычислении T_i просматриваются все множества уровня.

Затем полагаем

$$p(P_i) = \frac{T_i}{M},$$

где M – количество различных множеств уровней (на практике обычно задают $M = 10$).

Наконец, рассчитываем меры принадлежности μ:

$$\mu_1 = n * p(P_1);$$
$$\mu_2 = (n-1) * p(P_2) + p(P_1);$$
$$\ldots$$
$$\mu_k = (n-k+1) * p(P_k) + \sum_{i=1}^{k-1} p(P_i),$$

где n – число различных дискретных значений переменной; μ_i – мера принадлежности, соответствующая множеству A_{α_i}.

Нечеткая мера, соответствующая значению γ дискретной переменной, равна значению μ_j, соответствующему множеству A_{α_j}, с максимальной величиной уровня α_j, которая содержит γ.

ВЫВОД

Таким образом, представленный теоретический материал достаточен для решения общей задачи принятия решений в системах, использующих условные меры.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нечеткие** множества и теория возможностей / Под ред. Р. Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – 404 с.
2. **Vishnyakov V. A., German O. V.** Models and tools of logical inference systems. – M.: Science, 1999. – 374 p.
3. **Герман О. В.** Введение в теорию экспертных систем и обработку знаний. – Мн.: ДизайнПРО, 1995. – 255 с.
4. **Прикладные** нечеткие системы / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др. // Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. – М.: Мир, 1993. – 368 с.
5. **Дискретная** математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. С. В. Яблонского. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
6. **http://zhurnal.gpi.ru**
7. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2002. – 575 с.