МАТЕМАТИКА

УДК 519.10

НОВЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Канд. физ.-мат. наук, доц. КОРЗНИКОВ А. Д.

Белорусский национальный технический университет

Математические модели широкого круга прикладных проблем могут быть сформулированы в терминах теории графов. В частности, многие такие модели приводят к задаче построения максимального потока в сети с множеством источников и стоков. Известные алгоритмы решения этой задачи основываются на методе расстановки пометок при поиске в сети увеличивающего пути, что предполагает ее графическое представление. Это делает их неудобными для программной реализации. В статье развита идея осуществления тернарных операций над элементами сети [1], на основе чего разработан алгоритм решения задачи о максимальном потоке с рациональными исходными данными, использующий лишь матричное представление сети (матрица пропускных способностей дуг), лишенный указанных выше недостатков, а увеличение потока на каждой итерации на максимально возможную величину приводит к уменьшению их числа.

Пусть сеть $G(V, U)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством дуг $U = \{(i, j)\}$ задана матрицей пропускных способностей дуг $D = \|d_{ij}\|_{n\times n}$, ее элемент d_{ij} равен пропускной способности дуги (i, j), ведущей из вершины i в вершину j. Естественно полагать $d_{ij} = d_{ji}$, если дуга (i, j) неориентирована, отсутствие дуги (i, j) означает, что $d_{ij} = 0$. Обозначим через S и T множество индексов вершин, которые являются источниками и стоками соответственно, а через $a_i, i\in S, b_j, j\in T$ – их мощности (a_i – количество потока, которое может выходить из источника $i\in S$, b_j – количество потока, которое может принять сток $j\in T$). Задача заключается в отыскании максимального суммарного потока из всех источников в стоки, при этом для любой вершины сети, не являющейся источником или стоком величины входящих и выходящих потоков, равны. Таким образом, требуется определить дуговые потоки x_{ij}^o по дугам $(i, j)\in U\ (0\le x_{ij}^o \le d_{ij})$, т. е. потоковую матрицу $X^o = \|x_{ij}^o\|_{n\times n}$, которая дает решение сформулированной выше задачи.

Прежде чем перейти к описанию алгоритма, определим тернарные операции для матрицы $\|d_{ij}\|_{n\times n}$, введенные в [2] для вершин сети. Тернарной операцией над матрицей $\|d_{ij}\|_{n\times n}$ по индексу k называется операция

$$d_{ij} = \max(d_{ij}, \min(d_{ik}, d_{kj})) \text{ для всех } i\ne j\ne k. \quad (1)$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу $R = \|r_{ij}\|_{n\times n}$, элементы которой $r_{ij} = j, i = \overline{1,n}$. Одновременно с выполнением операции (1) изменяются элементы матрицы R по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & \text{если } d_{ij} \ge \min\ (d_{ik}, d_{kj}); \\ r_{ik}, & \text{если } d_{ij} < \min\ (d_{ik}, d_{kj}). \end{cases} \quad (2)$$

Операции (1), (2) являются основой метода построения максимального потока в многополюсной сети. Опишем вначале алгоритм решения задачи, а затем приведем его обоснование.

<u>Подготовительный этап.</u> Для начальной потоковой матрицы $X^o = \|x_{ij}^o\|_{n\times n}$ (как правило, на начало работы алгоритма $x_{ij}^o = 0$, для всех

$i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$) формируем кососимметричную матрицу $X=\left\|x_{ij}\right\|_{n\times n}$, где $x_{ji}=-x_{ij}^{o}$, $x_{ij}=x_{ij}^{o}$, если $x_{ij}>0$, и модифицированную матрицу пропускных способностей $D^{*}=\left\|d_{ij}{}^{*}\right\|_{n\times n}$, полагая $d_{ij}{}^{*}=d_{ij}-x_{ij}^{o},\ i,j=\overline{1,n}.$

<u>Общая итерация.</u> $\overline{D}^{*}=D^{*}$. Осуществляем тернарные операции (1) и (2) над матрицей $\overline{D}^{*}=\left\|\overline{d}_{ij}{}^{*}\right\|_{n\times n}$ последовательно по всем индексам k = 1, 2, …, n.

Если $\max\limits_{\substack{i\in S\\ j\in T}}[\min(a_i,\overline{d}_{ij}{}^{*},b_j)]=0$ – алгоритм заканчивает работу. В противном случае вычисляем

$$\max_{\substack{i\in S\\ j\in T}}[\min(a_i,d_{ij}{}^{*},b_j)]=[\min(a_l,d_{lp}{}^{*},b_p)]=\delta_{lp}>0.$$

С помощью вспомогательной матрицы $R=\left\|r_{ij}\right\|_{n\times n}$ находим путь $L_{lp}=\ (l,i_1),(i_1,i_2),...,$ (i_k,p) , вдоль которого можно увеличить поток на максимально возможную величину δ_{lp}. Здесь $i_1=r_{lp}, i_2=r_{i_1p}, i_3=r_{i_2p},..., p=r_{i_kp}$.

Шаг 1. Полагаем:

$$x_{ij}:=\begin{cases}x_{ij}+\delta_{lp}, x_{ji}-\delta_{lp},\ \ i,j\ \in L_{lp};\\ x_{ij}, \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$d_{ij}{}^{*}:=\begin{cases}d_{ij}{}^{*}-\delta_{lp}, d_{ji}{}^{*}+\delta_{lp},\ \ i,j\ \in L_{lp};\\ d_{ij}{}^{*}, \text{ в остальных случаях,}\end{cases}\qquad(3)$$

$$a_l:=a_l-\delta_{lp},\ b_p:=b_p-\delta_{lp}.$$

Замечание. На самом деле, после общей итерации получено $|S|\times|T|$ увеличивающих путей. Поэтому шаг 1 может быть осуществлен последовательно для всех L_{st} путей $s\in S$, $t\in T,\ \ s,t\ \neq\ l,p$, для которых величина $\min\ a_s,\ \min\limits_{(i,j)\in L_{st}}(d_{ij}),\ b_t\ \ =\delta_{st}>0$. При этом на каждом шаге поток будет увеличен на величину δ_{st}. После этого переходим к общей итерации.

После окончания работы алгоритма мы получим матрицу $X=\left\|x_{ij}\right\|_{n\times n}$, элементы которой x_{ij} равны дуговым потокам по дуге (i, j) (если $x_{ij}<0$, то поток переносится из вершины j в вершину i). Потоковая матрица X^o, которая одновременно и решение задачи линейного программирования, являющейся математической моделью задачи о максимальном потоке, получается из матрицы X следующим образом: $x_{ij}^{o}=\eta\ x_{ij}\ \ x_{ij},\ \ i,j\ =\overline{1,n}$, где $\eta\ \bullet$ – функция Хевисайда. Кроме того, получены пути, по которым переносится поток, максимальный по сравнению с потоками по другим путям, ведущим из источников в стоки.

Обоснуем корректность описанного алгоритма. Заметим вначале, что теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе [3] не имеет места, если мощность источника или стока ограничена даже для задачи с одним источником и стоком. После завершения работы алгоритма имеем $\max\limits_{\substack{i\in S\\ j\in T}}[\min(a_i,\overline{d}_{ij}{}^{*},b_j)]=0.$

Если $a_i=0, i\in S$ или $b_j=0, j\in T$, то ситуация тривиальна (использованы все мощности источников или стоков). Пусть $I=\ i\in S/a_i>0$, $J=\ j\in T/b_j>0$, тогда увеличение потока возможно только из источников множества I в стоки множества J. Но так как $d_{ij}{}^{*}=0\forall i\in I$, $j\in J$, то, как было показано в [2], любой путь, ведущий из источника множества I в сток множества J, содержит дугу, пропускная способность которой равна нулю. Таким образом, увеличение потока невозможно. То есть получен максимальный суммарный поток из источников множества S в стоки множества T, найдена потоковая матрица X^o и получены пути переноса потока с указанием его объема.

Сходимость приведенного алгоритма, если исходные данные – целые числа (задача с рациональными исходными данными легко сводится к целочисленному случаю), легко следует из следующих соображений. Любой поток, полученный в процессе работы алгоритма, определяет базисное решение соответствующей задачи линейного программирования. В силу унимодулярности матрицы ограничений последней, поток, полученный на каждой итерации, будет целочисленным [4], а следовательно, величина увеличения потока – целое число. Поскольку величина потока ограничена (пропускной способностью любого разреза), алгоритм сходится за конечное число итераций.

Проиллюстрируем работу алгоритма на следующем примере. Рассмотрим задачу построения многополюсного потока в сети, заданной матрицей пропускных способностей дуг

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 15 & 20 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 8 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 15 & 8 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 0 & 5 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 10 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

где вершины $S = 1, 2$ являются источниками потока, а множество вершин $T = 6, 7$ – стоками. Мощность источника 2 ограничена и равна a_2 = 30 единиц. Сеть, заданная матрицей D, изображена на рис. 1 (числа около дуг – их пропускные способности).

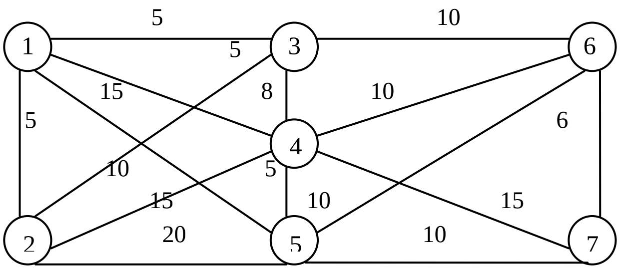

Рис. 1

Полагаем элементы потоковой матрицы $X^o = \left\| x_{ij}^o \right\|_{7\times 7}$ равными нулю. Тогда $D^* = D$.

Общая итерация. $\overline{D}^* = D^*$. Осуществив тернарные операции (1) и (2) над матрицей $\overline{D}^* = \left\| \overline{d}_{ij}^{\ *} \right\|$, получаем:

$$\overline{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 10 & 15 & 15 & 10 & 15 \\ 15 & 0 & 10 & 15 & 20 & 10 & 15 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 10 & 0 & 15 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 10 & 15 & 0 & 10 & 15 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 \\ 15 & 15 & 10 & 15 & 15 & 10 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\delta_{17} = \max_{\substack{i\in S \\ j\in T}} [\min(a_i, \overline{d}_{ij}^{\ *}, b_j)] = \overline{d}_{17}^{*} = 15 > 0.$$

Находим путь L_{17}: $r_{17} = 5$, $r_{57} = 2$, $r_{27} = 4$, $r_{47} = 7$, $L_{17} =$ $1,5$, $5,2$, $2,4$, $4,7$.

Шаг 1. Полагаем

$$x_{15} := x_{52} := x_{24} := x_{47} := 0 + 15 := 15;$$
$$x_{74} := x_{42} := x_{25} := x_{51} := 0 - 15 := -15;$$

$$d_{15}^* := d_{24}^* := d_{47}^* := 15 - 15 := 0;\ d_{52}^* := 5;$$
$$d_{74}^* := d_{42}^* := d_{51}^* := 15 + 15 := 30;$$
$$d_{25}^* := d_{25}^* + 15 := 20 + 15 := 35;$$
$$a_1 := a_1 - \delta_{17} = \infty - 15 = \infty;$$
$$b_7 := b_7 - \delta_{17} = \infty - 15 = \infty.$$

Далее последовательно для путей:

$L_{27} =$ $2,4$, $4,7$; $L_{16} =$ $1, 5$, $5, 6$; $L_{26} =$ $2, 3$, $3, 6$

находим:

$$\delta_{27} = \min_{(i,j)\in L_{27}} (a_2, d_{24}^*, d_{47}^*, b_7) = \min\ (30, 0, 0, \infty) = 0;$$
$$\delta_{16} = \min_{(i,j)\in L_{16}} (a_1, d_{15}^*, d_{56}^*, b_6) = \min\ (\infty, 0, 10, \infty) = 0;$$
$$\delta_{26} = \min_{(i,j)\in L_{26}} (a_2, d_{23}^*, d_{36}^*, b_6) = \min\ (30, 10, 10, \infty) = 10 > 0.$$

Шаг 1. Полагаем:

$$x_{23} := x_{23} + \delta_{26} = 10;\ x_{36} := x_{36} + \delta_{26} = 10;$$
$$x_{63} := x_{63} - \delta_{26} = -10;\ x_{32} := x_{32} - \delta_{26} = -10;$$
$$d_{23}^* := d_{23}^* - \delta_{26} = 0; \quad d_{36}^* := d_{36}^* - \delta_{26} = 0;$$
$$d_{63}^* := d_{63}^* + \delta_{26} = 20; \quad d_{32}^* := d_{32}^* + \delta_{26} = 20;$$
$$a_2 := a_2 - 10 = 20;\ b_6 := b_6 - 10 = \infty.$$

Матрица X имеет вид:

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 15 & -15 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0\\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15\\ -15 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полагаем $r_{ij} := j,\ \ i, j = \overline{1,7}.$

Общая итерация. $\overline{D}^* = D^*$. После осуществления операций (1), (2) над матрицей $\overline{D}^* = \left\| \overline{d}_{ij}{}^* \right\|$ и матрицей $R = \left\| r_{ij} \right\|$ получаем:

$$\overline{D}^*=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5\\ 30 & 0 & 10 & 10 & 35 & 10 & 10\\ 20 & 20 & 0 & 10 & 20 & 10 & 10\\ 30 & 30 & 10 & 0 & 30 & 10 & 10\\ 30 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 & 10\\ 20 & 20 & 20 & 10 & 20 & 0 & 10\\ 30 & 30 & 10 & 30 & 30 & 10 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 2 & 2\\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 2 & 2\\ 1 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7\\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем $\max\limits_{\substack{i\in S\\ j\in T}}[\min(a_i, \overline{d}_{ij}{}^*, b_j)] = \delta_{26} = 10 > 0.$

Находим путь $L_{26} = \ \ 2, 5\ ,\ 5, 6\ \ .$

Шаг 1. По формулам (3) пересчитываем элементы:

$$x_{25} := x_{25} + 10 = -15 + 10 = -5;$$
$$x_{56} := x_{56} + 10 = 0 + 10 = 10;$$
$$x_{52} := x_{52} - 10 = 15 - 10 = 5;$$
$$x_{65} := x_{65} - 10 = 0 - 10 = -10;$$
$$d^*_{25} := d^*_{25} - \delta_{26} = 35 - 10 = 25;$$
$$d^*_{52} := d^*_{52} + \delta_{26} = 15;$$
$$d^*_{56} := d^*_{56} - \delta_{26} = 10 - 10 = 0;$$
$$d_{65} := d^*_{65} + \delta_{26} = 10 + 10 = 20;$$
$$a_2 := a_2 - \delta_{26} = 20 - 10 = 10;$$
$$b_6 := b_6 - \delta_{26} = \infty - 10 = \infty.$$

Последовательно для путей:

$L_{27} = \ \ 2, 5\ ,\ 5, 7\ \ ;$ $L_{16} = \ \ 1, 4\ ,\ 4, 6\ \ ;$ $L_{17} = \ \ 1, 2\ ,\ 2, 5\ ,(5,7)$ находим

$$\delta_{27} = \min\,(a_2, d_{25}{}^*, d_{57}{}^*, b_7) = \min\,(10, 25, 10, \infty) = \\ = 10 > 0.$$

Шаг 1. По формулам (3) пересчитываем компоненты матриц D^* и X:

$$x_{25} := x_{25} + \delta_{27} = -5 + 10 = 5;$$
$$x_{57} := x_{57} + \delta_{27} = 0 + 10 = 10;$$
$$x_{52} := x_{52} - \delta_{27} = 5 - 10 = -5;$$
$$x_{75} := x_{75} - \delta_{27} = 0 - 10 = -10;$$
$$d_{25}{}^* := d_{25}{}^* - \delta_{27} = 25 - 10 = 15;$$
$$d_{57}{}^* := d_{27}{}^* - \delta_{27} = 10 - 10 = 0;$$
$$d_{52}{}^* := d_{52}{}^* + \delta_{27} = 15 + 10 = 25;$$
$$d_{75}{}^* := d_{72}{}^* + \delta_{27} = 10 + 10 = 20;$$
$$a_2 := a_2 - \delta_{27} = 10 - 10 = 0;$$
$$b_7 := b_7 - \delta_{27} = \infty - 10 = \infty;$$

$$\delta_{16} = \min_{(i,j)\in L_{16}}(a_1, d^*_{ij}, b_6) = \min\,(a_1, d^*_{14}, d^*_{46}, b_6) = \\ = \min\,(\infty, 5, 10, \infty) = 5 > 0.$$

Шаг 1:

$$x_{14} := x_{14} + \delta_{16} = 0 + 5 = 5;$$
$$x_{46} := x_{46} + \delta_{16} = 0 + 5 = 5;$$
$$x_{41} := x_{41} - \delta_{16} = -5;$$
$$x_{64} := x_{64} - \delta_{16} = 0 - 5 = -5;$$
$$d_{14}{}^* := d_{14}{}^* - \delta_{16} = 5 - 5 = 0;$$
$$d_{46}{}^* := d_{46}{}^* - \delta_{16} = 10 - 5 = 5;$$
$$d_{41}{}^* := d_{41}{}^* + \delta_{16} = 5 + 5 = 10;$$
$$d_{64}{}^* := d_{64}{}^* + \delta_{16} = 10 + 5 = 15;$$
$$a_1 := a_1 - \delta_{16} = \infty - 5 = \infty;$$
$$b_6 := b_6 - \delta_{16} = \infty - 5 = \infty;$$

$$\delta_{17} = \min\,(a_1,\ d_{12}^*,\ d_{25}^*, d_{57}^*) =$$
$$= \min\,(\infty,\ 5, 15, 0,\ \infty) = 0.$$

Получена новая матрица X

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ -5 & -15 & 0 & 0 & 0 & 5 & 15 \\ -15 & -5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -5 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полагаем $r_{ij}^* := j,\ i, j = \overline{1,7}$. Переходим к общей итерации. После осуществления третьей общей итерации получим матрицы:

$$\overline{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 15 & 0 & 5 & 5 & 15 & 5 & 5 \\ 15 & 20 & 0 & 8 & 15 & 5 & 5 \\ 15 & 30 & 8 & 0 & 15 & 5 & 5 \\ 30 & 25 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 20 & 20 & 20 & 15 & 20 & 0 & 6 \\ 20 & 30 & 8 & 30 & 20 & 6 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $a_2 = 0$, то $\max\limits_{\substack{i \in S \\ j \in T}}[\min\,(a_i, \overline{d}_{ij}^{\,*}, b_j)] =$ $= \overline{d}_{16}^* = \overline{d}_{17}^* = 5 > 0.$ С помощью матрицы R находим путь $L_{17} = \ 1, 3\ ,\ 3, 4\ ,\ 4, 6\ ,\ 6, 7\ .$

Шаг 1. По формулам (3) пересчитываем элементы потоковой матрицы X, матрицы модифицированных пропускных способностей D^* и мощности a_1, a_2, b_6, b_7.

Для пути $L_{16} = \ 1, 3\ ,\ 3, 4\ ,\ 4, 6\ $ величина

$$\delta_{16} = \min\,(a_1, d_{13}^*, d_{34}^*, d_{46}^*, b_6) =$$
$$= \min\,(\infty, 0, 3, 0, \infty) = 0.$$

Матрица X имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -10 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 \\ -5 & -15 & -5 & 0 & 0 & 10 & 15 \\ -15 & -5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -10 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полагая $r_{ij} := j,\ i, j = \overline{1,7}$, переходим к общей итерации, после осуществления которой получаем:

$$\overline{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 20 & 0 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 30 & 13 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 30 & 25 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 0 & 1 \\ 20 & 30 & 13 & 30 & 20 & 11 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Так как $\max\limits_{\substack{i \in S \\ j \in T}}[\min\,(a_i, \overline{d}_{ij}^{\,*}, b_j)] = 0$, то полученный двухполюсной поток является максимальным. Сеть с найденным потоком изображена на рис. 2. Первое число – пропускная способность дуги, второе – дуговой поток.

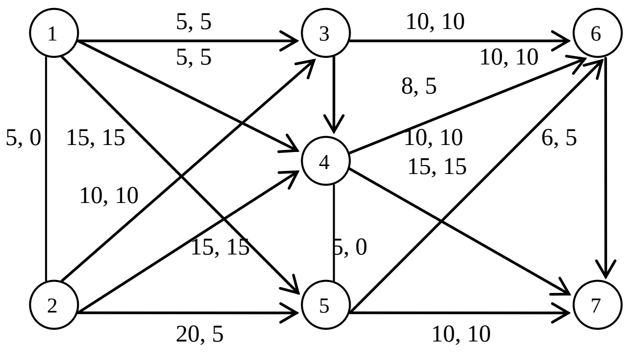

Рис. 2

Потоковая матрица

$$X^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку элементы $\overline{d}_{ij}^* = 0;\ i = 1,\ 2;\ j = 6,\ 7,$ то величину потока нельзя увеличить, даже если мощности источников и стоков будут не ограничены. Это означает, что любой путь, ведущий из источника в сток, содержит дугу с нулевой пропускной способностью («насыщенную» дугу). Множество таких дуг образует минимальный разрез $R, \overline{R}$, отделяющий источники от стоков. В случае необходимости, минимальный разрез $R, \overline{R}$ легко находится с помощью матрицы $\overline{D}^*$. Действительно, вершины множества S и все вершины j, для которых хотя бы для одного $i \in S, \overline{d}_{ij}^* > 0$, относятся к множеству R, остальные $(\overline{d}_{ij}^* = 0\ \ \forall i \in S)$ – к множеству $\overline{R}$. В рассматриваемом примере $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\overline{R} = \{6, 7\}$, минимальный разрез $R, \overline{R}$ ={(3, 6), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7)} имеет пропускную способность, равную 55 единиц и равную величине максимального суммарного потока из источников $S = \{1, 2\}$ в сток $T = \{6, 7\}$.

ВЫВОД

Разработан новый алгоритм нахождения максимального потока в многополюсной сети, который основан лишь на матричном ее описании и не требует графического представления последней. В силу этого программная реализация данного алгоритма является очень простой, и он может быть использован при решении широкого круга проблем, математические модели которых могут быть сформулированы в терминах теории графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Floyd, R. W.** Aigorithm 97: Shortest Path. Communication of ACM / R. W. Floyd – 1962. – № 5 (6). – 345 p.
2. **Корзников, А. Д.** Моделирование и оптимизация процесса перемещения грузов в логистической транспортной системе / А. Д. Корзников, В. А. Корзников // Вестник БНТУ. – 2003. – № 6. – С. 54–60.
3. **Форд, Л. Р.** Потоки в сетях / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. – М.: Мир, 1963. – 276 с.
4. **Veinott, A. F.** Integer Extrime Points / A. F. Veinot, Jr. and G. B. Dantzig // SIAM. Revjew. – 1968. – No 10 (3). – P. 371–372.

Поступила 22.04.2013

УДК 517.977

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СУЩЕСТВЕННО РАЗНОТЕМПОВЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Канд. физ.-мат. наук, доц. КОПЕЙКИНА Т. Б.[1], ГРЕКОВА А. В.[2]

[1]Белорусский государственный технологический университет,
[2]Белорусский национальный технический университет

В [1] была рассмотрена проблема управляемости разнотемповой сингулярно возмущенной динамической системы (РСВДС):

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1u; \\ \mu\,\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2u; \\ \mu^2\dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3u, \end{cases} \tag{1}$$