Edisi Juli 2015 Volume IX No. 2 | ISSN 1979-8911

TEOREMA TITIK TETAP BANACH

Esih Sukaesih

Abstrak

Ruang Banach menjamin setiap barisan akan konvergen ke vektor di ruang tersebut. Barisan iterasi yang kontraktif menjamin bahwa barisan tersebut akan konvergen ke suatu titik. Kedua hal di atas yang menjamin keberadaan titik tetap pada operator kontraktif di ruang Banach. Selain menunjukkan titik tetap pada ruang Banach, akan diberikan juga beberapa aplikasi titik tetap. ***Kata-kata kunci:*** *ruang metrik lengkap, operator kontraktif*

Pendahuluan

Teorema titik tetap pertama kali diperkenalkan oleh L. E. J. Brouwer pada tahun 1912 yakni pemetaan kontinu T pada bola tutup satuan di R^m mempunyai paling sedikit satu titik tetap, yakni titik x_0 sehingga $Tx_0 = x_0$. Teorema titik tetap Brouwer digunakan oleh G. D. Birkho dan O. D. Kellog pada tahun 1922 untuk membuktikan teorema keberadaan titik tetap dalam teori persamaan differensial. Pada waktu yang sama, S. Banach menemukan menemukan teorema kontraksi titik tetap atau lebih umum dikenal sebagai Teorema Titik Tetap Banach.

Berikut ini diperkenalkan beberapa definisi dalam metrik.

Definisi [6] Ruang metrik $(X; d)$ adalah himpunan X dan metrik pada X didefinisikan sebagai fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$, yang memenuhi:

1. $d(x; x) = 0$ untuk setiap $x \in X$, dan $d(x; y) > 0$ untuk setiap $x, y \in X$, dengan $x \neq y$.
2. $d(x; y) = d(y; x)$ untuk setiap $x, y \in X$.
3. $d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

 ISSN 1979-8911

Definisi [7] Barisan bilangan real (barisan di $\mathbb{R}$) adalah fungsi yang terdefinisi pada bilangan asli $\{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$ dengan range pada himpunan bilangan real.

Definisi [6] Barisan (x_n) disebut konvergen ke $x \in X$ jika $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Ditulis $(x_n) \to x$.

Definisi [6] Barisan (x_n) di ruang metrik $X = (X; d)$ disebut barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk bilangan asli $m, n > N$ berlaku $d(x_n; x_m) < \varepsilon$.

Atau dapat dituliskan, (x_n) adalah barisan Cauchy jika $\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

Teorema [6] Setiap barisan konvergen adalah barisan Cauchy.

Definisi [6] Ruang metrik X disebut ruang metrik lengkap (ruang Banach) jika setiap barisan Cauchy di X merupakan barisan konvergen di X.

Definisi [7] Misal himpunan $X \subseteq R$ dan misal fungsi $f: X \to \mathbb{R}$. Jika terdapat konstanta k sehingga $d(f(u); f(v)) \leq kd(u; v)$ untuk setiap $u, v \in X$, maka f disebut fungsi Lipshitz. Jika $k \in (0,1)$ maka f disebut fungsi kontraktif.

Definisi [7] Titik tetap fungsi $f : X \to X$ adalah peta $x \in X$ yang dipetakan ke dirinya sendiri, yakni,

$$Tx = x$$

peta x oleh T adalah x.

Titik Tetap Banach

Teorema titik tetap Banach merupakan suatu prosedur untuk menyatakan keberadaan dan ketunggalan titik tetap suatu pemetaan, yang disebut iterasi. Dengan metode ini untuk sembarang x_0 dalam suatu himpunan didefinisikan barisan rekursif $x_0, x_1, x_2, \ldots$ yakni

$$x_{n+1} = Tx_n$$

dengan $n = 1,2,\ldots,$ sehingga diperoleh

$$x_1 = x_0$$

ISSN 1979-8911

$$x_2 = Tx_1$$

$$x_3 = Tx_2$$

$$\vdots$$

Berikut ini merupakan teorema titik tetap Banach.

Teorema Teorema Titik Tetap Banach. [1] Misal $X = (X; d)$ adalah ruang metrik, dengan $X \neq \emptyset$. Jika X lengkap dan $T : X \to X$ adalah operator kontraktif pada X, maka T mempunyai tepat satu titik tetap.

Bukti.

Pertama; kita konstruksi barisan (x_n). Pilih sebarang $x_0 \in X$ dan didefinisikan barisan iterasi (x_n) dengan x_0, $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2, \dots$

Barisan tersebut merupakan barisan dari pemetaan x_0 terhadap T.

Kedua: akan ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy, sehingga konvergen dalam ruang lengkap X. Karena T merupakan pemetaan yang kontraktif maka memenuhi

$$d(Tx;\ Ty) \leq \alpha d(x;\ y) \text{ dengan}$$

$$\alpha \in (0,1)$$

dan memenuhi iterasi barisan x_n sehingga diperoleh

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1})$$

$$\leq \alpha d(x_m, x_{m-1})$$

$$= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2})$$

$$\leq \alpha^2 d(x_m, x_{m-1})$$

$$\vdots$$

$$\leq \alpha^m d(x_0, x_1)$$

Untuk $n > m$ dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga diperoleh

$$d(x_m;\ x_n) = d(Tx_{m-1};\ Tx_{n-1})$$

$$\leq d(Tx_{m-1}; Tx_m) + d(Tx_m; Tx_{m+1}) + \cdots + d(Tx_{n-2}; Tx_{n-1})$$

$$\leq \alpha^{m-1} d(x_0, x_1) + \alpha^m d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n-2} d(x_0, x_1)$$

$$= (\alpha^{m-1} + \alpha^m + \cdots + \alpha^{n-2}) d(x_0, x_1)$$

$$= \alpha^{m-1}(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-m-3}) d(x_0, x_1)$$

$$= \alpha^{m-1} \frac{1-\alpha^{n-m-2}}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

karena $\alpha \in (0,1)$, dan $1 - \alpha^{n-m-2} < 1$ sehingga diperoleh

 ISSN 1979-8911

$$d(x_m;\, x_n) < \frac{\alpha^{m-1}}{1-\alpha} d(x_0, x_1).$$

Pada ruas kanan, $\alpha \in (0{,}1)$ dan $d(x_0, x_1)$ tetap, sehingga dapat kita ambil pada ruas kanan sekecil mungkin dengan m yang cukup besar (dan $n > m$). Ini menunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy.

Ketiga, akan ditunjukkan kekonvergenan pada ruang lengkap. Karena (x_n) adalah barisan Cauchy pada ruang X yang lengkap maka (x_n) adalah barisan yang konvergen dan (x_n) konvergen ke suatu titik di X. Misalkan $x \in X$ sehingga (x_n) konvergen ke x.

Keempat, akan ditunjukkan bahwa $\lim(x_n) = x$ adalah titik tetap dari pemetaan T. Dengan pertidaksamaan segitiga diketahui bahwa $d(x;\, Tx) \leq d(x; x_n) + d(x_n;\, Tx)$ dan diketahui bahwa $d(Tx;\, Ty) \leq \alpha d(x;\, y)$ sehingga

$$d(x;\, Tx) \leq d(x; x_n) + d(x_n;\, Tx)$$

$$= d(x; x_n) +$$

$d(Tx_{n-1};\, Tx)$

$$\leq d(x; x_n) +$$

$\alpha d(x_{n-1};\, Tx)$

dan jumlah sebelah kanan dapat dibuat sekecil mungkin untuk

$\varepsilon > 0$ karena $(x_n) \to x$. Dapat disimpulkan bahwa $(x; Tx) = 0$, akibatnya $x = Tx$. Ini menunjukkan bahwa x adalah titik tetap Tx.

Kelima, akan ditunjukkan bahwa T tidak mempunyai titik tetap lain. Misalkan T mempunyai dua titik tetap x dan x' sehingga $Tx = x$ dan $Tx' = x'$. Oleh karena itu

$$d(x, x') = d(Tx, Tx') \leq \alpha d(x, x')$$

hal tersebut hanya mungkin untuk $d(x; x') = 0$ karena $\alpha \in (0{,}1)$. Jadi $x = x'$.□

Akibat (Iterasi, batas error). Misal ruang metrik X, dan $X \neq \emptyset$. Misal X adalah ruang lengkap dan misal $T: X \to X$ adalah operator kontraktif pada X. Misal untuk sebarang $x_0 \in X$ didefinisikan barisan (x_n) dengan

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2 = T^2x_0, \ldots, x_n = T^nx_0, \ldots$$

konvergen ke tepat satu titik x di T. Dan mempunyai estimasi error prior (selanjutnya disebut estimasi prior)

$$d(x_m; x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

dan estimasi error posterior (selanjutnya disebut estimasi posterior)

$$d(x_m; x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m)$$

Bukti.

Diketahui sebarang $x_0 \in X$ dengan

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2 = T^2x_0, \ldots, x_n = T^nx_0, \ldots$$

dengan T adalah operator kontraktif pada X, yang memenuhi $d(Tx; Ty) \leq \alpha d(x; y)$.

Akan ditunjukkan (x_n) adalah barisan Cauchy.

$$d(x_{m+1}, x_m) = d(Tx_m, Tx_{m-1}) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1})$$

$$= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2})$$

$$\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2})$$

$$\vdots$$

$$\leq \alpha^m d(x_1, x_0)$$

Untuk $n > m$, dengan pertidaksamaan segitiga diperoleh

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} d(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^{n-1} d(x_1, x_0)$$

$$= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_1, x_0)$$

$$= \alpha^m (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-m-1}) d(x_1, x_0)$$

$$= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

karena $\alpha \in (0,1)$, akibatnya $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Sehingga diperoleh,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

Pada ruas kanan, $\alpha \in (0,1)$ dan $d(x_1, x_0)$ tetap, sehingga dapat kita ambil pada ruas kanan sekecil mungkin dengan m yang cukup besar (dan $n > m$). Ini menunjukkan bahwa (x_n)

 ISSN 1979-8911

adalah Cauchy. Untuk $n \to \infty$ maka diperoleh

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

Untuk estimasi posteri or, karena $\alpha \in (0{,}1)$ diperoleh

$$d(x_m, x) \leq \alpha d(x_{m-1}, x)$$

$$\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m).\square$$

Teorema (Kontraksi pada bola) [1] Misal T adalah pemetaan di ruang metrik X ke dirinya sendiri ($T : X \to X$). Misal T adalah operator konstraktif pada bola tertutup $Y = \{x: d(x, x_0) \leq r\}$, yakni T yang memenuhi $d(Tx; Ty) \leq \alpha d(x;\ y)$ untuk semua $x, y \in Y$, lebih jauh, asumsikan bahwa

$$d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r.$$

Maka barisan iterasi

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, x_3 = Tx_2 = T^2x_0, \ldots, x_n = T^n x_0, \ldots$$

konvergen ke suatu $x \in Y$, yang merupakan titik tetap dari T dan merupakan titik tetap tunggal di Y.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa (x_n) untuk semua n dan x yang berada di Y. Misal $m = 0$ dengan $d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$ dan dengan mengganti n ke m dan gunakan $d(x_0, Tx_0) < (1-\alpha)r$ diperoleh

$$d(x_0, x_m) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

$$\leq \frac{1}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

$$< \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha)r = r$$

Karena semua x_n berada di Y. Begitu juga $x \in X$ karena $x_n \to x$ dan Y tertutup.$\square$

Lema (Kekontinuan) [1] Pemetaan kontraksi T pada ruang metrik X adalah pemetaan kontinu.

Bukti.

Misalkan $T : X \to X$ adalah operator kontraktif pada ruang metrik X. dan misal $x_n \to x$ di X. Maka untuk suatu $\alpha < 1$,

$$d(Tx_n, Tx) \leq \alpha d(x_{n-1}, x)$$

karena $x_n \to x$ di X, sehingga $d(x_{n-1}, x) \to 0$ jika $n \to \infty$. Berarti $Tx_n \to Tx$, sehingga T kontinu di X.□

Untuk menggunakan teorema Banach, diperlukan ruang metrik lengkap dan pemetaan kontraktif. Misalkan himpunan X dari semua urutan- n bilangan real, ditulis

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n), \quad z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n),$$

dan seterusnya. Pada X didefinisikan metrik d dengan

$$d(x, z) = \max_i |\xi_i - \zeta_i|. \quad (1)$$

$X = (X, d)$ lengkap.

Pada X didefinisikan $T: X \to X$ dengan

$$y = Tx = Cx + b \qquad (2)$$

dengan $C = (c_{jk})$ adalah matrik real tetap $n \times n$ dan $b \in X$ adalah vektor tetap. Untuk selanjutnya vektor adalah vektor kolom.

Persamaan (1) dapat dinyatakan dalam komponennya dengan cara

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\xi_k + \beta_i \qquad j = i, \dots, n,$$

dengan $b = (\beta_i)$. Misalkan $w = (\omega_i) = Tz$, jadi dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$d(y, w) = d(Tx, Tz) = \max_i |\eta_i - \omega_i|$$

$$= \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi_k - \zeta_k) \right|$$

$$\le \max_i |\xi_i - \zeta_i| \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|$$

$$= d(x, z) \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|.$$

Perhatikan bahwa pertidaksamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk $d(y, w) \le \alpha d(x, z)$, dengan

$$\alpha = \max_j \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|. \qquad (3)$$

Teorema (Persamaan linear) [1] Jika suatu sistem

$$x = Cx + b \quad (C = (c_{jk}), b \text{ tentu}) \qquad (4)$$

dari n persamaan linear dengan $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ yang belum diketahui memenuhi

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{jk}| < 1 \quad (j = 1, \dots, n) \qquad (5)$$

ISSN 1979-8911

mempunyai tepat satu solusi x. Solusi tersebut dapat diperoleh dengan limit dari barisan iterasi $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$, dengan sebarang $x^{(0)}$ dan

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b \quad m = 0,1, \dots . \qquad (6)$$

Batas galat

$$d(x^{(m)}, x) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}). \qquad (7)$$

Kondisi (5) adalah syarat cukup untuk kekonvergenan. Ini merupakan criteria jumlah baris karena melibatkan jumlah baris dengan menjumlahkan nilai mutlak dari setiap unsur baris dari baris C. Jika (1) digantikan dengan metrik yang lain, maka akan diperoleh kondisi yang berbeda.

Suatu sistem dari n persamaan linear dengan n variabel yang tidak diketahui, biasanya ditulis sebagai

$$Ax = c \qquad (8)$$

dengan A adalah matrik persegi n baris. Banyak metode iterasi untuk persamaan (8) dengan $\det A \neq 0$ yakni salah satunya dengan mentransformasikan $A = B - G$ dengan matrik nonsingular B yang bersesuaian. Maka (8) menjadi

$$Bx = Gx + c$$

atau

$$x = B^{-1}(Gx + c).$$

Ini memberikan iterasi (4.6) dengan

$$C = B^{-1}G, \quad b = B^{-1}c. \qquad (9)$$

Perhatikan pada dua metode standar, iterasi Jacobi, dan iterasi Gauss-Seidel, yang sering digunakan dalam aplikasi Matematika.

Iterasi Jacobi

Metode iterasi ini didefinisikan dengan

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(\gamma_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{jk} \xi_k^{(m)} \right)$$

$$j = 1, \dots, n \qquad (10)$$

dengan $c = (\gamma_j)$ dalam (8) dan diasumsikan $a_{jj} \neq 0$ untuk $j = 1, \dots, n$. Iterasi ini diharapkan dapat menyelesaikan persamaan ke j dalam persamaan (8) untuk ξ_j. Persamaan (10) dapat ditulis dalam bentuk (6) dengan

$$C = -D^{-1}(A - D), \quad b = D^{-1}c \qquad (11)$$

dengan $D = \mathrm{diag}(a_{jj})$ adalah matrik diagonal dengan unsur tak nol adalah diagonal utama dari A.

Kondisi (5) diaplikasikan pada C di persamaan (11) merupakan syarat cukup kekonvergenan dari iterasi Jacobi. Karena C dalam (11) cukup sederhana, persamaan (5) dapat dinyatakan dalam unsur-unsur A. Hasil dari criteria jumlah baris untuk iterasi Jacobi

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left|\frac{a_{jk}}{a_{jj}}\right| < 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

atau

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|a_{jk}| < |a_{jj}|, \quad j = 1, \dots, n. \ (12^*)$$

Ini menjamin kekonvergenan untuk diagonal utama dari A. Metode iterasi Jacobi adalah metode koreksi simultan.

Iterasi Gauss-Seidel

Metode iterasi Gauss-Seidel adalah metode koreksi berturutan. Metode ini didefinisikan dengan

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(\gamma_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}\xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}\xi_k^{(m)}\right) \quad (13)$$

dengan $j = 1, \dots, n$ dan diasumsikan $a_{jj} \neq 0$ untuk setiap j.

Matrik (3) dapat dituliskan dalam bentuk

$$A = -L + D - U$$

dengan D adalah iterasi Jacobi dan L, U adalah matrik segitiga bawah dan matrik segitiga atas dengan unsur diagonal utama semuanya nol. Jika persamaan (13) dikalikan dengan a_{jj} , maka diperoleh solusi sistem dalam bentuk

$$Dx^{(m+1)} = c + Lx^{(m+1)} + Ux^{(m)}$$

atau

$$(D - L)x^{(m+1)} = c + Ux^{(m)}.$$

Kalikan dengan $(D - L)^{-1}$ sehingga persamaan (6) berbentuk

$$C = (D - L)^{-1}U, \quad b = (D - L)^{-1}c \ . \ (14)$$

Persamaan (5) diaplikasikan ke C dalam persamaan (14) adalah syarat cukup kekonvergenan iterasi Gauss-Seidel.

Misalkan persamaan diferensial biasa eksplisit dengan orde pertama

$$x' = f(t, x) \text{ dengan nilai awal } x(t_0) = x_0 \quad (15)$$

dengan t_0 dan x_0 adalah bilangan real tertentu.

Contoh 1. Teorema titik tetap Banach pada persamaan linear.

Misal sistem persamaan linear

$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 4$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 4$$

$$\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 4$$

Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{1}{8}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

sehingga persamaan matrik di atas memenuhi kondisi (4.5), yakni

$$\sum_{k=1}^{3}|c_{1k}| = \left|\frac{2}{8}\right| + \left|\frac{1}{8}\right| + \left|\frac{1}{8}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{3}|c_{2k}| = \left|\frac{1}{8}\right| \left|\frac{2}{8}\right| + + \left|\frac{1}{8}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1\ ,$$

dan

$$\sum_{k=1}^{3}|c_{3k}| = \left|\frac{1}{8}\right| + \left|\frac{1}{8}\right| + \left|\frac{2}{8}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1.$$

Sehingga diperoleh $\alpha = \frac{1}{2}$

dengan $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) Akan digunakan metode iterasi Jacob,yakni

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(\gamma_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} a_{jk}\xi_k^{(m)}\right)$$

diperoleh hasil iterasi pada tabel berikut:

Iterasi ke-m	$\xi_1^{(m)}$	$\xi_2^{(m)}$	$\xi_3^{(m)}$
0	0	0	0
1	2	2	2
2	0	0	0
3	2	2	2
4	0	0	0

Tabel 1. Iterasi Jacob

Perhatikan dari table di atas diperoleh hasil iterasi yang divergen, sehingga kita tidak bisa menentukan solusi dari sistem persamaan linear di atas.

(b) Akan digunakan metode iterasi Gauss-Seidel

$$\xi_j^{(m+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(\gamma_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}\xi_k^{(m+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}\xi_k^{(m)}\right)$$

diperoleh hasil iterasi pada tabel berikut:

Iterasi ke- m	$\xi_1^{(m)}$	$\xi_2^{(m)}$	$\xi_3^{(m)}$
0	0	0	0
1	2	1	0.5

2	1.25	1.125	0.8125
3	1.03125	1.078125	0.945313
4	0.988281	1.033203	0.989258
5	0.98877	1.010986	1.000122
6	0.994446	1.002716	1.001419
7	0.997932	1.000324	1.000872
8	0.999402	0.999863	1.000367
9	0.999885	0.999874	1.000121
10	1.000003	0.999938	1.000029

Tabel 2. Iterasi Gauss-Seidel

Perhatikan bahwa hasil iterasi setiap unsur dari x masing-masing konvergen $\xi_1{}^{(m)} \to 1$, $\xi_2{}^{(m)} \to 1$, dan $\xi_2{}^{(m)} \to 1$. Jadi dapat disimpulkan bahwa solusi dari sistem persamaan di atas adalah

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema (Teorema keberadaan dan ketunggalan Picard pada Persamaan Diferensial Biasa)[1] Misalkan f adalah persamaan kontinu pada persegi

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

dan untuk suatu $a \in \mathbb{R}$ dan $b \in \mathbb{R}$, sehingga R terbatas, misalkan

$$|f(t, x)| \leq c \text{ untuk semua } (t, x) \in R. \quad (16)$$

Misalkan bahwa f memenuhi kondisi Lipschitz pada R yang bersesuaian dengan (4.15), yakni terdapat konstanta k (konstanta Lipschitz) sehingga untuk $(t;\ x), (t;\ v) \in R$

$$|f(t, x) - f(t, v)| \leq k|x - v|.$$

Maka nilai awal dari masalah (15) mempunyai solusi tunggal. Solusi ini berada pada interval $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, dengan

$$\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}.$$

Bukti.

Misal $C(J)$ adalah ruang metrik dari semua fungsi kontinu bernilai real pada interval $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ dengan metrik d didefinisikan dengan

$$d(x; y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

sehingga $C(J)$ adalah lengkap. Misal $\tilde{C}$ adalah subruang dari $C(J)$ yang memuat semua fungsi $x \in C(J)$, yang memenuhi

$$|x(t) - x_0| \leq c\beta.$$

Sehingga $\tilde{C}$ adalah ruang lengkap.

Dengan mengintegrasikan diperoleh (15) yang dapat ditulis dalam bentuk $x = Tx$, diketahui $T : \tilde{C} \to \tilde{C}$ didefinisikan dengan

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \qquad (17)$$

T terdefinisi untuk setiap $x \in \tilde{C}$, karena $c\beta < b$ c, sehingga jika $x \in \tilde{C}$, maka $\tau \in J$ dan $(\tau, x(\tau)) \in R$ dan integral (17) ada karena f kontinu pada R.

Akan diperlihatkan bahwa T memetakan $\tilde{C}$ ke dirinya sendiri, dapat digunakan (17) dan (4.15), sehingga diperoleh

$$|Tx(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau\right|$$
$$\leq c|t - tx_0| \leq c\beta.$$

Akan ditunjukkan bahwa T kontraksi pada $\tilde{C}$. Dengan kondisi Lipshitz ,

$$|Tx(t) - Tv(t)|$$
$$= \left|\int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))]\, d\tau\right|$$
$$\leq |t - t_0| \max_{\tau \in J} k|x(\tau) - v(\tau)|$$
$$\leq k\beta d(x, v).$$

Karena ruas kanan tidak bergantung pada t, maka bisa kita peroleh nilai maksimum dari ruas kiri yakni

$|Tx - Tv| \leq \alpha d(x; v)$ dengan $\alpha = k\beta$

dengan $\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}$) diperoleh $\alpha = k\beta < 1$, sehingga T kontraktif pada $\tilde{C}$. Teorema titik tetap Banach menyatakan bahwa T mempunyai titik tetap tunggal $x \in \tilde{C}$, yakni, sebuah fungsi kontinu di x pada J yang memenuhi $x = Tx$. Dengan $x = Tx$ dan persamaan (4. 17) diperoleh

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

Karena $(\tau, x(\tau)) \in R$ dengan f kontinu, (18) dapat dideferensialkan. Berarti x terdeferensialkan dan memenuhi (15). Sebaliknya, setiap solusi (15) harus memenuhi (18). □

Teorema Banach mengakibatkan solusi x dari (15) adalah

limit dari barisan $\{x_0, x_1, \ldots\}$ diperoreh iterasi Picard

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))\, d\tau \quad (19)$$

dengan $n = 0,1,2, \ldots$.

Selanjutnya akan dipaparkan Teorema titik tetap Banach sebagai syarat dari keberadaan dan ketunggalan untuk persamaan integral. Persamaan integral dalam bentuk

$$x(t) - \mu \int_{a}^{b} k(t, \tau) x(\tau)\, d\tau = v(t) \quad (20)$$

ISSN 1979-8911

disebut persamaan Fredholm bentuk kedua, dengan $[a,b]$ adalah interval, x adalah fungsi yang tidak diketahui pada $[a,b]$, μ dalah parameter. Kernel k dari persamaan adalah fungsi yang terdefinisi pada $G = [a,b] \times [a,b]$, dan v adalah fungsi pada $[a,b]$.

Persamaan integral yang akan dibahas adalah persamaan integral yang berada pada ruang $C[a,b]$ yakni ruang semua fungsi kontinu yang terdefinisi pada interval $J = [a,b]$ dengan metrik

$$d(x,y) = \max_{t\in J}|x(t) - y(t)| \quad (21)$$

Untuk mengaplikasikan teorema titik tetap Banach maka ruang $C[a,b]$ harus lengkap. Asumsikan bahwa $v \in C[a,b]$ dan k kontinu pada G. Maka k adalah fungsi terbatas pada G, misalkan

$|k(t,\tau)| \leq c$ untuk setiap $(t,\tau) \in$.(22)

Persamaan (20) dapat dituliskan ke dalam bentuk $x = Tx$ yakni

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\, d \quad . \quad (23)$$

Karena v dan k kontinu, persamaan (23) mendefinisikan operator $T: C[a,b] \to C[a,b]$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa dengan μ menjadikan T kontraktif. Dari persamaan (21) menjadi persamaan (22) diperoleh

$$d(Tx,Ty) = \max_{t\in J}|Tx(t) - Ty(t)|$$

$$\max_{t\in J}\left|v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau - \left(v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau)y(\tau)\, d\tau\right)\right|$$

$$= \max_{t\in J}\left|\mu \int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau - \mu \int_a^b k(t,\tau)y(\tau)\, d\tau\right|$$

$$= |\mu| \max_{t\in J}\left|\int_a^b k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau - \int_a^b k(t,\tau)y(\tau)\, d\tau\right|$$

$$\leq |\mu| \max_{t\in J} \int_a^b |k(t,\tau)x(\tau) - k(t,\tau)y(\tau)| d\tau$$

$$\leq |\mu| \max_{t\in J} \int_a^b |cx(\tau) - cy(\tau)| d\tau$$

$$= |\mu| c \max_{t\in J} \int_a^b |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau$$

$$\leq |\mu| c \max_{t\in J} |x(\tau) - y(\tau)| \int_a^b d\tau$$

$$= |\mu| c d(x,y)(b-a)$$

Hal ini dapat ditulis dalam bentuk $d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y)$, dengan

 ISSN 1979-8911

$$\alpha = |\mu| c(b-a).$$

Perhatikan bahwa T merupakan kontraktif ($\alpha < 1$) jika

$$|\mu| \leq \frac{\alpha}{c(b-a)}. \qquad (24)$$

Teorema titik Tetap Banach memberikan teorema berikut ini.

Contoh 2. Teorema titik tetap Banach pada persamaan diferensial.

Misalkan persamaan differensial $y' = y - 1$ dengan nilai awal $y(0) = 2$.

Akan diselesaikan dengan metode iterasi Picard dengan $x_0 = 0$ dan $y_0(x_0) = 2$, sehingga diperoleh

$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt$

dengan $f(t, y_n(t)) = y_n(t) - 1$.

Diperoleh:

$$y_1(t) = 2 + \int_0^x (2-1)\, dt$$

$$= 2 + \int_0^x 1\, dt$$

$$= 2 + x$$

$$y_2(t) = 2 + \int_0^x (2 + x - 1)\, dt = 2 + \int_0^x (1 + x)\, dt$$

$$= 2 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_3(t) = 2 + \int_0^x \left(2 + x + \frac{1}{2}x^2 - 1\right) dt$$

$$= 2 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) dt = 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3$$

$$y_4(t) = 2 + \int_0^x \left(2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 - 1\right) dt$$

$$= 2 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3\right) dt$$

$$= 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4$$

Barisan iterasi di atas akan konvergen ke $1 + e^x$, sehingga dapat disimpulkan bahwa solusi dari $y' = y - 1$ dengan nilai awal $y(0) = 2$ adalah $1 + e^x$.

Teorema (Persamaan integral Fredholm)[1]. Misalkan k dan v pada persamaan Fredholm (20) kontinu pada $J \times J$ dan $J = [a, b]$, dan asumsikan bahwa μ memenuhi (24) dengan c terdefinisi pada (22). Maka (20) mempunyai solusi tunggal x di J.

Fungsi x ini adalah limit dari barisan iterasi $\{x_0, x_1, \dots\}$, dengan x_0 adalah sebarang fungsi kontnu pada J dan untuk $n = 0,1,2,\dots,$

$$x_{n+1}(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t,\tau)x_n(\tau)\, d\tau. \quad (25)$$

Misalkan persamaan integral Volterra

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau = v(t). \quad (26)$$

Perbedaan antara persamaan (20) dan (26) adalah batas atas dalam persamaan (20) adalah konstan b, sedangkan pada persamaan (26) adalah varibel. Faktanya, tanpa restriksi pada μ diperoleh teorema keberadaan dan ketunggalan.

Teorema (Persamaan integral Volterra)[1]. Misalkan v pada persamaan (4.26) merupakan fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan kernel k kontinu pada daerah R dalam bidang-$t\tau$ dengan $a \le \tau \le t, a \le t \le b$. Maka persamaan (26) mempunyai solusi tunggal x pada $[a,b]$ untuk setiap μ.

Bukti.

Perhatikan bahwa persamaan (26) dapat dituliskan $x = Tx$ dengan $T: C[a,b] \to C[a,b]$ didefinisikan sebagai

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau \quad (27)$$

Karena k kontinu pada R dan R adalah tertutup dan terbatas, k adalah fungsi terbatas pada R, misalkan,

$$|k(t,\tau)| \le c \qquad \text{untuk setiap } (t,\tau) \in R.$$

Dengan (21), diperoleh untuk setiap $x, y \in C[a,b]$

$$|Tx(t) - Ty(t)|$$

$$= \left| v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau - \left(v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)y(\tau)\, d\tau \right) \right|$$

$$= \left| \mu \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau - \mu \int_a^t k(t,\tau)y(\tau)\, d\tau \right|$$

$$= \left| \mu \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau - \int_a^t k(t,\tau)y(\tau)\, d\tau \right|$$

ISSN 1979-8911

$$\leq |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau)x(\tau)\, d\tau - \int_a^t k(t,\tau)y(\tau)\, d\tau \right|$$

$$= |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau)\big(x(\tau) - y(\tau)\big)\, d\tau \right|$$

$$\leq |\mu| c \left| \int_a^t \big(x(\tau) - y(\tau)\big)\, d\tau \right|$$

$$= |\mu| c d(x,y) \int_a^t d\tau$$

$$= |\mu| c d(x,y)(t-a).$$

Akan ditunjukkan dengan induksi bahwa $|T^m x(t) - T^m y(t)| \leq |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y)$. (29)

Untuk $m = 1$ diperoleh pertidaksamaan (28). Asumsikan pertidaksamaan (29) berlaku untum m, dari pertidaksamaan (27) diperoleh

$$|T^{m+1}x(t) - T^{m+1}y(t)|$$

$$= \left| v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)x^{m+1}(\tau)\, d\tau - \left(v(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau)y^{m+1}(\tau)\, d\tau \right) \right|$$

$$= \left| \mu \int_a^t k(t,\tau)x^{m+1}(\tau)\, d\tau - \mu \int_a^t k(t,\tau)y^{m+1}(\tau)\, d\tau \right|$$

$$= |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau)x^{m+1}(\tau)\, d\tau - \int_a^t k(t,\tau)y^{m+1}(\tau)\, d\tau \right|$$

$$= |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau)\big(x^{m+1}(\tau) - y^{m+1}(\tau)\big)\, d\tau \right|$$

$$= |\mu| \left| \int_a^t k(t,\tau)\big(T^m x(\tau) - T^m y(\tau)\big)\, d\tau \right|$$

$$\leq |\mu| c \left| \int_a^t \big(T^m x(\tau) - T^m y(\tau)\big)\, d\tau \right| \quad (4.28)$$

$$\leq |\mu| c \left| \int_a^t |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!} d(x,y)\, d\tau \right|$$

$$= |\mu| c |\mu|^m c^m d(x,y) \left| \int_a^t \frac{(t-a)^m}{m!}\, d\tau \right|$$

$$= |\mu|^{m+1} c^{m+1} \frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x,y)\ .$$

Jadi terbukti bahwa pertidaksamaan (29) berlaku untuksetiap $m \in \mathbb{N}$.

Dengan menggunakan $t - a \leq b - a$ pada ruas kanan pertidaksamaan (29) dan nilai maksimum untuk $t \in J$ akan tercapai, sehingga akan diperoleh

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha_m d(x,y)$$

dengan

$$\alpha_m = |\mu|^m c^m \frac{(t-a)^m}{m!}.$$

Untuk μ tetap dan m yang cukup besar maka akan diperoleh $\alpha_m < 1$. Berarti T^m adalah pemetaan kontraktif pada $C[a,b]$. Akibat dari teorema akan diperoleh lema berikut ini.

Lema (Titik Tetap)[1]. Misal $T: X \to X$ adalah pemetaan pada ruang metrik lengkap $X = (X, d)$, dan misal T^m adalah pemetaan kontraktif pada X untuk suatu bilangan bulat positif m. Maka T mempunyai titik tetap.

Bukti.

Asumsikan bahwa $B = T^m$ adalah pemetaan kontraktif pada X. Dengan teorema titik tetap Banach, pemetaan ini B mempunyai tetap satu titik tetap $\hat{x}$, yakni $B\hat{x} = \hat{x}$. Berarti $B^n\hat{x} = \hat{x}$. Teorema Banach juga mengakibatkan bahwa

$$B^n x \to \hat{x} \quad \text{jika } n \to \infty.$$

Khususnya $x = T\hat{x}$, karena $B^n = T^{mn}$, maka diperoleh

$$\hat{x} = \lim_{n\to\infty} B^n x$$
$$= \lim_{n\to\infty} B^n T\hat{x}$$
$$= \lim_{n\to\infty} TB^n\hat{x}$$
$$= \lim_{n\to\infty} T\hat{x}$$
$$= T\hat{x}.$$

Ini menunjukkan bahwa $\hat{x}$ adalah titik tetap dari T. Karena setiap titik tetap dari T juga merupakan titik tetap dari B, Perhatikan bahwa T tidak bisa memiliki titik tetap lebih dari satu. □

Contoh 3. Teorema titik tetap Banach pada persamaan integral.

Diketahui $f(x) = \sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} + \int_0^x x^2 y f(y)\, dy$, dan $f_0(x) = \sin(\pi x^2)$.

Akan ditentukan solusi dari persamaan di atas dengan metode iterasi

$$f_{n+1}(x) = \sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} + \int_0^x x^2 y f_n(y)\, dy.$$

Sehingga diperoleh barisan sebagai berikut:

$$f_1(x) = \sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} + \int_0^x x^2 y f_0(y)\, dy$$
$$= \sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} + \int_0^x x^2 y \sin(\pi y^2)\, dy$$
$$= \sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} + x^2 \int_0^x y \sin(\pi y^2)\, dy$$

$= \sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} + x^2 \frac{1}{2\pi}(1 -$

$\cos(\pi x^2))$

$= \sin(\pi x^2) + x^2\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\right) -$

$x^2 \frac{1}{2\pi}\cos(\pi x^2)$

$f_2(x) =$

$\sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} + \int_0^x x^2 y f_1(y)\, dy$

$=$

$\sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} +$

$\int_0^x x^2 y\left(\sin(\pi y^2) +\right.$

$y^2\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\right) -$

$\left.y^2 \frac{1}{2\pi}\cos(\pi y^2)\right) dy$

$=$

$\sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} +$

$x^2 \int_0^x \left(y \sin(\pi y^2) +\right.$

$y^3\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\right) -$

$\left.y^3 \frac{1}{2\pi}\cos(\pi y^2)\right) dy$

$=$

$\sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} +$

$x^2\left\{-\frac{1}{8\pi^3}(-4\pi^2 - 2 +\right.$

$4\pi^2 \cos(\pi x^2) + x^4\pi^2 +$

$\left.2x^2\pi \sin(\pi x^2) + 2\cos(\pi x^2))\right\}$

$= \sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} - \frac{x^2}{8\pi^3}(-4\pi^2 - 2 +$

$4\pi^2 \cos(\pi x^2) + x^4\pi^2 +$

$2x^2\pi \sin(\pi x^2) + 2\cos(\pi x^2))$

$f_3(x) =$

$\sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} +$

$\int_0^x x^2 y f_2(y)\, dy$

$=$

$\sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} +$

$\int_0^x x^2 y(\sin(\pi y^2) - \frac{y^2}{\pi} -$

$\frac{y^2}{8\pi^3}(-4\pi^2 - 2 + 4\pi^2\cos(\pi y^2) +$

$y^4\pi^2 + 2y^2\pi \sin(\pi y^2) +$

$2\cos(\pi y^2)))\, dy$

$=$

$\sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} +$

$x^2 \int_0^x y(\sin(\pi y^2) - \frac{y^2}{\pi} -$

$\frac{y^2}{8\pi^3}(-4\pi^2 - 2 + 4\pi^2\cos(\pi y^2) +$

$y^4\pi^2 + 2y^2\pi \sin(\pi y^2) +$

$2\cos(\pi y^2)))\, dy$

 ISSN 1979-8911

$=$

$\sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} +$

$x^2\Big\{-\frac{1}{64\pi^6}(-32\pi^5 - 16\pi^3 -$

$24\pi + 32\pi^5\cos(\pi y^2) +$

$8y^4\pi^5 - 4y^4\pi^3 +$

$16y^2\pi^4(\sin(\pi y^2) +$

$16\pi^3\cos(\pi y^2) + y^8\pi^5 -$

$8y^4\pi^3\cos(\pi y^2) +$

$24y^2\pi^2(\sin(\pi y^2)) +$

$24\pi\cos(\pi y^2)\Big\}$

$=$

$\sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi} +$

$x^2\Big\{-\frac{1}{64\pi^6}(-32\pi^5 - 16\pi^3 -$

$24\pi + 32\pi^5\cos(\pi x^2) +$

$8x^4\pi^5 - 4x^4\pi^3 +$

$16x^2\pi^4(\sin(\pi x^2) +$

$16\pi^3\cos(\pi x^2) + x^8\pi^5 -$

$8x^4\pi^3\cos(\pi x^2) +$

$24x^2\pi^2(\sin(\pi x^2)) +$

$24\pi\cos(\pi x^2)\Big\}$

Perhatikan untuk $|x| \le 1$, barisan $\{f_n(x)\}$ akan konvergen ke $f(x) = \sin(\pi x^2) - \frac{x^2}{\pi}$.

Contoh 4. Teorema titik tetap Banach pada persamaan integral.

Diketahui $f(x) = -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2 f(y)\,dy$, dan $f_0(x) = \sqrt{x}$.

Akan ditentukan solusi dari persamaan di atas dengan metode iterasi

$$f_{n+1}(x) = -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2 f_n(y)\,dy.$$

Sehingga diperoleh barisan sebagai berikut:

$$f_1(x) = -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2 f_0(y)\,dy$$

$$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2\sqrt{y}\,dy$$

$$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{7}x^2x^{\frac{7}{2}}$$

$$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{7}x^{\frac{11}{2}}$$

$f_2(x) =$

$-\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2 f_1(y)\,dy$

$=$

$-\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} +$

$\int_0^x x^2y^2\left(-\frac{2}{7}y^2 + \sqrt{y} +\right.$

$\left.\frac{2}{7}y^{\frac{11}{2}}\right)dy$

$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + x^2\int_0^x \left(-\frac{2}{7}y^4 +\right.$

$\left.y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}y^{\frac{15}{2}}\right)dy$

$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + x^2\left(-\frac{2}{35}x^5 +\right.$

$\left.\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{119}x^{\frac{17}{2}}\right)$

$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} - \frac{2}{35}x^7 + \frac{2}{7}x^{\frac{11}{2}} +$

$\frac{4}{119}x^{\frac{21}{2}}$

$f_3(x) =$

$-\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2 f_2(y)\,dy$

$=$

$-\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} +$

$\int_0^x x^2y^2\left(-\frac{2}{7}y^2 + \sqrt{y} -\right.$

$\left.\frac{2}{35}y^7 + \frac{2}{7}y^{\frac{11}{2}} + \frac{4}{119}y^{\frac{21}{2}}\right)dy$

$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + x^2\int_0^x \left(-\frac{2}{7}y^4 +\right.$

$y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{35}y^9 + \frac{2}{7}y^{\frac{15}{2}} +$

$\left.\frac{4}{119}y^{\frac{25}{2}}\right)dy$

$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + x^2\left(-\frac{2}{35}x^5 +\right.$

$\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{350}x^{10} + \frac{4}{119}x^{\frac{17}{2}} +$

$\left.\frac{8}{3213}x^{\frac{27}{2}}\right)$

$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} - \frac{2}{35}x^7 + \frac{2}{7}x^{\frac{11}{2}} -$

$\frac{2}{350}x^{12} + \frac{4}{119}x^{\frac{21}{2}} + \frac{8}{3213}x^{\frac{31}{2}}$

$f_4(x) =$

$-\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + \int_0^x x^2y^2 f_3(y)\,dy$

$=$

$-\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} +$

$\int_0^x x^2y^2\left(-\frac{2}{7}y^2 + \sqrt{y} -\right.$

$\frac{2}{35}y^7 + \frac{2}{7}y^{\frac{11}{2}} - \frac{2}{350}y^{12} +$

$\left.\frac{4}{119}y^{\frac{21}{2}} + \frac{8}{3213}y^{\frac{31}{2}}\right)dy$

$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + x^2\int_0^x \left(-\frac{2}{7}y^4 +\right.$

$y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{35}y^9 + \frac{2}{7}y^{\frac{15}{2}} - \frac{2}{350}y^{14} +$

$\left.\frac{4}{119}y^{\frac{25}{2}} + \frac{8}{3213}y^{\frac{35}{2}}\right)dy$

$$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} + x^2\left(-\frac{2}{35}x^5 + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{350}x^{10} + \frac{4}{119}x^{\frac{17}{2}} - \frac{2}{5250}x^{15} + \frac{8}{3213}x^{\frac{27}{2}} + \frac{16}{118881}x^{\frac{37}{2}}\right)$$

$$= -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x} - \frac{2}{35}x^7 + \frac{2}{7}x^{\frac{11}{2}} - \frac{2}{350}x^{12} + \frac{4}{119}x^{\frac{21}{2}} - \frac{2}{5250}x^{17} + \frac{8}{3213}x^{\frac{31}{2}} + \frac{16}{118881}x^{\frac{41}{2}}$$

Perhatikan untuk $|x| \leq 1$, barisan $\{f_n(x)\}$ akan konvergen ke $f(x) = -\frac{2}{7}x^2 + \sqrt{x}$.

Kesimpulan

Titik tetap operator dapat ditentukan dengan cara membentuk barisan iterasi yang kontraktif,. Barisan kontraktif dapat diperoleh jika operator bersifat kontraktif, dan teorema titik tetap Banach menjamin bahwa titik tetap ada dan tunggal. Keberadaan dan ketunggalan titik tetap tersebut dapat diaplikasikan pada sistem persamaan linear, persamaan differensial dan integral.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada DIPA-BOPTAN UIN SGD Bandung yang telah memberikan bantuan penelitian kepada penulis.

Referensi

[1.] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications*,(1978).

[2.] Fell, D.A., “Metabolic Control Analysis: a survey of its theoretical and experimental development”, *Biochem. J*. 286 (1992), 313-330.

[3.] Heinrich, R. dan Rapoport, S.M., Metabolic regulation and mathematical models, *Prog. Biophys. Molec. Biol*. 32 (1977),1-82.

[4.] Shifton, D.C., *An introduction to Metabolic Control Analysis*, Deanna C, Shifton, 2007.

[5.] Einar Hille, *Method in Classical and Functional Analysis*, Addison-Wesley Publising Company, 1972.

[6.] Casper Goffman and George Pedrick, *First Course in Functional Analysis*, Prentice hall, India, 1974.

ISSN 1979-8911

Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis 4th Edition*, John Willes and Sons Inc, 2011.

Esih Sukaesih*
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Gunung Djati Bandung
esih.yjf@gmail.com

*Corresponding author