Nereis. Revista Iberoamericana Interdisciplinar de Métodos, Modelización y Simulación	3	53-59	Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir"	Valencia (España)	ISSN 1888-8550

Análisis de la fórmula para la calificación de pruebas tipo test multi-respuesta

Fecha de recepción y aceptación: 19 de octubre de 2010, 15 de noviembre de 2010

J. L. González-Santander † y G. Martín†

† Departamento de Ciencias Experimentales y Matemáticas. Facultad de Ciencias Experimentales. Universidad Católica de Valencia, Valencia. martinez.gonzalez@ucv.s y german.martin@ucv.es

ABSTRACT

We evaluate the approach which usually justifies how much has to be subtracted for every incorrect answer in a multiple choice test. We have developed a calculation which takes into account the possibility to blank answer some questions, which is not possible with the usual approach. We show that when the number of questions tends to infinity, both approaches are asymptotically equivalent.

KEYWORDS: *multiple choice tests, central limit theorem.*

RESUMEN

Se trata de evaluar la aproximación del enfoque que habitualmente se utiliza para justificar cuánto ha de restar cada respuesta incorrecta en la calificación de un examen tipo test multi-respuesta. Se ha desarrollado un cálculo que tiene en cuenta la posibilidad de contestar preguntas en blanco, lo cual no es posible con el enfoque habitual. Se comprueba que cuando el número de preguntas tiende a infinito, ambos enfoques son asintóticamente equivalentes.

PALABRAS CLAVE: *test de elección múltiple, teorema del límite central.*

INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que para calificar un examen tipo test no sólo deben contabilizarse las preguntas acertadas, sino también las falladas. Si no se descontara algo de puntuación por pregunta fallada, tendría sentido contestar al azar las preguntas cuya respuesta se desconoce, pues ello no supondría empeorar la nota, y en consecuencia, el alumno podría obtener una sobrenota que se debería al azar y no a sus conocimientos. En este trabajo se pretenden analizar las probabilidades de las distintas calificaciones que se pueden obtener en un examen tipo test multi-respuesta, en el supuesto de que se contesten las preguntas al azar.

MODELO SIMPLIFICADO

Esperanza y varianza en un examen aleatorio sin preguntas en blanco

Supongamos que tenemos un examen tipo test con N preguntas, y n opciones de respuesta por pregunta ($n \neq 1$). Sea c_i la calificación de la i-ésima pregunta, siendo $i \in \{1, 2, ..., N\}$. Supongamos que cada pregunta acertada contabiliza 1 punto y cada pregunta fallada $-1/\alpha$ puntos. Es decir,

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si acierta.} \\ -1/\alpha & \text{si falla.} \end{cases}$$

¿Qué valor ha de tener α para eliminar la sobrenota que se puede obtener respondiendo al azar? Si el alumno respondiera al azar todas las preguntas, la calificación esperable debería ser un cero. Si consideramos c_i como una variable aleatoria discreta, con espacio muestral $E = \{1, -1/\alpha\}$, debería tener la siguiente función de probabilidad,

$$p\left(c_i\right) = \begin{cases} 1/n & \text{si} \quad c_i = 1. \\ 1 - 1/n & \text{si} \quad c_i = -1/\alpha\,. \end{cases} \tag{1}$$

Entonces, el valor esperado de la calificación en una pregunta sería,

$$\mathrm{E}\left(c_i\right) = 1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{-1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{n-1}{\alpha}\right). \tag{2}$$

La calificación C para un examen sería la suma de las calificaciones obtenidas en todas las preguntas, proporcionada a la puntuación máxima del examen, que llamaremos $C_{\max}$. Es decir,

$$C = \frac{C_{\max}}{N} \sum_{i=1}^{N} c_i\,. \tag{3}$$

A partir de (3), el valor esperado para la calificación de un examen sería entonces,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C) &= \frac{C_{\max}}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}(c_i) = \\ &= \frac{C_{\max}}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n}\left(1-\frac{n-1}{\alpha}\right) \\ &= \frac{C_{\max}}{n}\left(1-\frac{n-1}{\alpha}\right).\end{aligned} \qquad (4)$$

Como la calificación esperable para un examen respondido al azar debe ser 0,

$$\mathrm{E}(C) = 0, \qquad (5)$$

de (4) y (5) se deduce que,

$$\alpha = n-1. \qquad (6)$$

Sustituyendo la relación (6) en (2) se obtiene,

$$\mathrm{E}(c_i) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{n-1}{n-1}\right) = 0. \qquad (7)$$

La relación (7) tiene sentido pues hemos supuesto $n \neq 1$.

La varianza de la variable aleatoria c_i vendrá dada por la siguiente relación,

$$\mathrm{Var}(c_i) = \left[1-\mathrm{E}(c_i)\right]^2\frac{1}{n} + \left[-\frac{1}{\alpha}-\mathrm{E}(c_i)\right]^2\left(1-\frac{1}{n}\right). \qquad (8)$$

Teniendo en cuenta lo obtenido en (6) y (7) se obtiene,

$$\mathrm{Var}(c_i) = \frac{1}{n-1}. \qquad (9)$$

Parece razonable asumir la hipótesis de independencia de las variables c_i, ya que se supone que las respuestas son al azar, por lo que,

$$\mathrm{Var}(C) = \frac{C_{\max}^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Var}(c_i) = \frac{C_{\max}^2}{N}\mathrm{Var}(c_i) = \frac{C_{\max}^2}{N(n-1)}. \qquad (10)$$

Intervalos de confianza asintóticos

Debido a que la variable aleatoria C es la suma de N variables independientes, todas con peso 1, por el teorema central del límite (W. Feller, 1996), al hacer que $N \to \infty$, la función de densidad de C será una normal de media μ y desviación típica σ. Es decir,

$$\lim_{N\to\infty} f(C) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(C-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \qquad (11)$$

Además, según (5) y (10),

$$\mu = 0, \quad \sigma = \frac{C_{\max}}{\sqrt{N(n-1)}}. \qquad (12)$$

De (12) se deduce que,

$$\lim_{N\to\infty}\sigma = 0.$$

Por otro lado, la normal se comporta asintóticamente como delta de Dirac (J. Spanier, K. B. Oldam, 1987), por lo que,

$$C \underset{N\to\infty}{\sim} \delta(C). \qquad (13)$$

Según (11), la calificación C sigue asintóticamente una distribución normal. De este modo, para que en el q% de las ocasiones la calificación caiga en el intervalo ($\mu - k\sigma$, $\mu + k\sigma$), la probabilidad asintótica ha de ser (N. N. Lebedev, 1972),

$$P_{\text{asint}}\left(|C-\mu| \le k\sigma\right) = \mathrm{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) = q, \qquad (14)$$

Al despejar k, se obtiene,

$$k = \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}(q) \qquad (15)$$

Crítica al enfoque simplificado

Hasta el momento no se ha considerado la posibilidad de que el examinado deje preguntas en blanco, lo que resulta razonable si se desconoce la respuesta. Para poder analizar el problema bajo la posibilidad de dejar preguntas en blanco, sería necesario conocer $p(c_i = 0)$, lo cual depende de los conocimientos que tenga el alumno. Para sortear esta dificultad, debemos plantear el problema de otra manera.

MODELO EXACTO

Exámenes con preguntas acertadas, falladas y en blanco

Supongamos un examen tipo test, con N preguntas y n opciones por pregunta. Supongamos que en el examen se producen m aciertos, t fallos y b respuestas en blanco. Entonces,

$$N = m + t + b. \qquad (16)$$

Según (16), la calificación de un examen sólo depende de m y t, puesto que N es conocido y fijo. En consecuencia se tendrá,

$$C(m,t) = \frac{C_{\max}}{N}\left(m-\frac{t}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0. \qquad (17)$$

El número de respuestas posibles para cada pregunta es $n + 1$, puesto que, además de las n posibles respuestas para cada pregunta, tenemos la respuesta en blanco. En consecuencia, el número de exámenes que pueden producirse al responder aleatoriamente a todas las preguntas será,

$$N_p = \mathrm{VR}_{n+1}^{N} = (n+1)^N \quad (^*) \qquad (18)$$

* VR_m^n representa las variaciones con repetición de m elementos formando grupos de n.

Si N_b es el número de exámenes con b preguntas en blanco, N_m el número de exámenes con m preguntas acertadas y b en blanco, y N_t el número de exámenes con t preguntas incorrectas, entonces el número de exámenes con m aciertos, t fallos y b respuestas en blanco, que llamamos $N_{b,m,t}$, será,

$$N_{b,m,t} = N_b \cdot N_m \cdot N_t = \binom{N}{b}\binom{N-b}{m}(n-1)^t. \qquad (19)$$

Como b está determinada por N, m y t según (16), tendremos,

$$N_{b,m,t} = \binom{N}{m}\binom{N-m}{t}(n-1)^t, \qquad (20)$$

en donde el paso de (19) a (20) se realiza de la siguiente forma, teniendo en cuenta (16),

$$\begin{aligned}\binom{N}{b}\binom{N-b}{m} &= \frac{N!}{b!(N-b)!}\frac{(N-b)!}{m!(N-b-m)!}\\ &= \frac{N!}{b!(N-m)!}\frac{(N-m)!}{m!(N-b-m)!}\\ &= \frac{N!}{m!(N-m)!}\frac{(N-m)!}{\underbrace{b}_{N-m-t}!\,(\underbrace{N-b-m}_{t})!}\\ &= \frac{N!}{m!(N-m)!}\frac{(N-m)!}{t!(N-m-t)!}\\ &= \binom{N}{m}\binom{N-m}{t}.\end{aligned}$$

Por tanto, de (20) se deduce que dado un examen con N preguntas y n opciones de respuesta, debido a la relación (16), tenemos dos grados de libertad, uno en m y otro en t.

Número de exámenes hasta cierta nota

Sea N_{C_0} el número de exámenes con una calificación inferior a C_0. Nótese que hay muchos exámenes con distinto número de aciertos m, fallos t y preguntas en blanco b, que tienen una calificación inferior a C_0. Hemos de sumar todos estos posibles exámenes, entre ciertos límites de m y t, para obtener N_{C_0}.

$$N_{C_0} = \sum_{m=m_{\min}}^{m_{\max}} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \binom{N}{m}\binom{N-m}{t}(n-1)^t. \qquad (21)$$

Además, el número mínimo de respuestas correctas, para cualquier nota C_0, ha de ser 0,

$$m_{\min} = 0. \qquad (22)$$

Por otro lado, dado un valor de m (número de respuestas correctas), el número máximo de respuestas incorrectas es,

$$t_{\max} = N - m. \qquad (23)$$

Para obtener el número mínimo de respuestas incorrectas, $t_{\min}$, que tiene un examen con una clasificación inferior a C_0,

$$C(m, t) < C_0,$$

podemos usar (17),

$$\frac{C_{\max}}{N}\left(m - \frac{t}{\alpha}\right) < C_0,$$

que despejando se obtiene,

$$t > \alpha\left(m - \frac{NC_0}{C_{\max}}\right).$$

Luego $t_{\min}$ ha de ser,

$$t_{\min} = \left\lfloor \alpha\left(m - \frac{NC_0}{C_{\max}}\right)\right\rfloor + 1, \quad t_{\min} \ge 0. \qquad (24)$$

Por otro lado, tanto $t_{\min}$ como $t_{\max}$ dependen del número de respuestas acertadas m. Podemos usar este hecho para determinar el número máximo de respuestas acertadas $m_{\max}$, pues se ha de cumplir que,

$$t_{\min}(m_{\max}) = t_{\max}(m_{\max}),$$

es decir,

$$\left\lfloor \alpha\left(m_{\max} - \frac{NC_0}{C_{\max}}\right)\right\rfloor + 1 = N - m_{\max}. \qquad (25)$$

Como N y $m_{\max}$ son números enteros, la relación (25) se puede escribir de la siguiente forma,

$$\left\lfloor \alpha\left(m_{\max} - \frac{NC_0}{C_{\max}}\right) + 1 - N + m_{\max}\right\rfloor = 0,$$

es decir,

$$0 < (\alpha+1)m_{\max} - \left(\frac{\alpha C_0}{C_{\max}} + 1\right)N + 1 < 1.$$

Despejando,

$$\frac{N}{\alpha+1}\left(\frac{\alpha C_0}{C_{\max}} + 1\right) - \frac{1}{\alpha+1} < m_{\max} < \frac{N}{\alpha+1}\left(\frac{\alpha C_0}{C_{\max}} + 1\right).$$

Como $\alpha > 0$, entonces $(\alpha + 1)^{-1} < 1$, y por tanto resulta que,

$$m_{\max} = \left\lfloor \frac{N}{\alpha+1}\left(\frac{\alpha C_0}{C_{\max}} + 1\right) - \frac{1}{\alpha+1}\right\rfloor, \quad m_{\max} \ge 0, \qquad (26)$$

donde el número m de respuestas acertadas tiene que ser también un número entero no negativo. Finalmente, usando las relaciones (22), (23), (24) y (26), podemos escribir como,

$$N_{C_0} = \sum_{m=0}^{m_{\max}} \binom{N}{m} \sum_{t=t_{\min}}^{N-m} \binom{N-m}{t} (n-1)^t. \quad (27)$$

Cálculo de probabilidades

Suponiendo que todas las respuestas posibles a un cierto examen tipo test sean equiprobables, entonces, de acuerdo con (18) y (27), la probabilidad de obtener un examen con una calificación inferior a C_0 es,

$$P(C < C_0) = \frac{N_{C_0}}{N_p} = \frac{1}{(n+1)^N} \sum_{m=0}^{m_{\max}} \binom{N}{m} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \binom{N-m}{t} (n-1)^t. \quad (28)$$

Como es habitual, si F es la función de distribución de la variable aleatoria C, entonces,

$$F(C_0) = P(C < C_0).$$

De este modo, tendremos que,

$$\begin{aligned} P(C_0 \le C < C_1) &= P(C < C_1) - P(C < C_0) \\ &= F(C_1) - F(C_0). \end{aligned} \quad (29)$$

Como C es una variable discreta, la diferencia mínima entre dos calificaciones ε viene dada por,

$$\varepsilon = C(m,t) - C(m,t+1) = \frac{C_{\max}}{N\alpha}. \quad (30)$$

Por tanto, podremos determinar la probabilidad de obtener exactamente una determinada nota,

$$\begin{aligned} P(C = C_0) &= P(C_0 \le C < C_0 + \varepsilon) \\ &= P(C < C_0 + \varepsilon) - P(C < C_0). \end{aligned} \quad (31)$$

Función de distribución asintótica

En esta sección vamos a ver el comportamiento asintótico cuando el número de preguntas tiende a infinito, $N \to \infty$, de la función de distribución de probabilidad, a partir de la relación que da la probabilidad exacta (28).

Comportamiento asintótico de la función de distribución en $C_0 \neq 0$

Cuando $C_0 < 0$, teniendo en cuenta (24) y (26), se tiene que,

$$\lim_{N\to\infty} m_{\max} = 0,$$
$$\lim_{N\to\infty} t_{\min} = \infty.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} P(C < 0) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(n+1)^N} \sum_{m=0}^{0} \binom{N}{m} \sum_{t=\infty}^{N-m} \binom{N-m}{t} (n-1)^t \\ &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Por otro lado, cuando $C_0 > 0$, a partir de (24) y (26) resulta que,

$$\lim_{N\to\infty} m_{\max} = \infty,$$
$$\lim_{N\to\infty} t_{\min} = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{N\to\infty} P(C < 0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(n+1)^N} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{N}{m} \sum_{t=0}^{N-m} \binom{N-m}{t} (n-1)^t. \quad (33)$$

Desarrollando el sumatorio interno mediante el binomio de Newton, se obtiene,

$$\lim_{N\to\infty} P(C < 0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(n+1)^N} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{N}{m} n^{N-m}. \quad (34)$$

Obsérvese que como el inverso del factorial de un número negativo es 0, la serie dada en (34) se corta en $m = N$,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} P(C < 0) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(n+1)^N} \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} n^{N-m} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{(n+1)^N}{(n+1)^N} = 1. \end{aligned} \quad (35)$$

donde se ha aplicado de nuevo el binomio de Newton.

A partir de (32) y (35), podemos concluir que asintóticamente la función de distribución $F(C)$ se comporta como una función de Heaviside $H(C)$, (J. Spanier, K. B. Oldam, 1987),

$$F(C) \underset{N\to\infty}{\sim} H(C). \quad (36)$$

Por tanto, la función de densidad $f(C)$ de la variable aleatoria C será una delta de Dirac (J. Spanier, K. B. Oldam, 1987),

$$f(C) = F'(C) \underset{N\to\infty}{\sim} \delta(C),$$

que es un resultado coherente con el obtenido en (13) del modelo simplificado.

La probabilidad asintótica en $C_0 = 0$

Tomando $C_0 = 0$ en (31) y teniendo en cuenta (30), resulta que,

$$P(C = 0) = P\left(C < \frac{C_{\max}}{N\alpha}\right) - P(C < 0). \quad (37)$$

Tomando límites en (37) cuando $N \to \infty$, y teniendo en cuenta (32),

$$\lim_{N\to\infty} P(C=0) = \lim_{N\to\infty} P\left(C < \frac{C_{\max}}{N\alpha}\right). \qquad (38)$$

La relación (38) indica que,

$$C_0 = \lim_{N\to\infty} \frac{C_{\max}}{N\alpha} = 0.$$

Por tanto, según (24) y (26),

$$\lim_{N\to\infty} t_{\min} = \lfloor \alpha m \rfloor, \qquad (39)$$

$$\lim_{N\to\infty} m_{\max} = \lim_{N\to\infty} \left\lfloor \frac{N+1}{\alpha+1} \right\rfloor = \infty. \qquad (40)$$

Al sustituir (39) y (40) en la relación (28), entonces (38) se convierte en,

$$\lim_{N\to\infty} P(C=0) = \lim_{N\to\infty} \mathcal{P}(N,\alpha),$$

en donde se ha definido,

$$\mathcal{P}(N,\alpha) = \frac{1}{(n+1)^N} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{N+1}{\alpha+1} \right\rfloor} \binom{N}{m} \sum_{t=\lfloor \alpha m \rfloor}^{N-m} \binom{N-m}{t} (n-1)^t. \qquad (41)$$

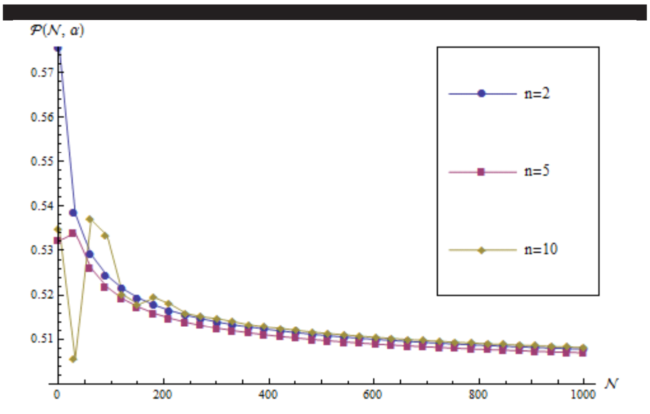

Figura 1. Representación de $\mathcal{P}(N,\alpha)$, con $\alpha = n - 1$, para valores de n = 3, 4, 5.

En la figura 1 se ha representado gráficamente $\mathcal{P}(N,\alpha)$ con respecto a N, tomado $\alpha = n - 1$, que es el valor de α que según el enfoque simplificado equilibra la puntuación del valor del test, (véase (6)). A la vista de la figura 1, se puede conjeturar que,

$$\lim_{N\to\infty} P(C=0) = \frac{1}{2}, \qquad (42)$$

lo que resulta aceptable, ya que para toda distribución simétrica respecto a C = 0, se cumple que,

$$F_{\text{sim}}(C=0) = \frac{1}{2}.$$

Como la distribución de F es normal (asintóticamente), es simétrica, y por tanto,

$$\lim_{N\to\infty} F(C=0) = \frac{1}{2}.$$

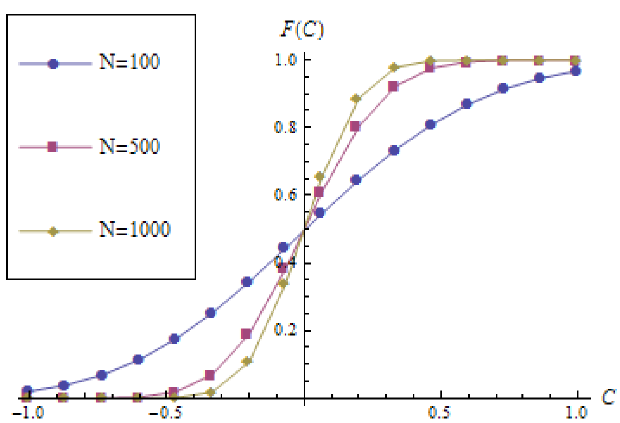

Figura 2. Función de distribución de $F(C)$, para N = 100, 500, 1000, n = 4 y $\alpha = n - 1$.

Como según (36),

$$\lim_{N\to\infty} P(C<0) = 0,$$

podemos concluir (42). En la figura 2, se muestra el comportamiento de la función distribución $F(C)$ con N en un entorno de C = 0. Se puede observar cómo, cuando N va creciendo, $F(C)$ se va asemejando a una función de Heaviside.

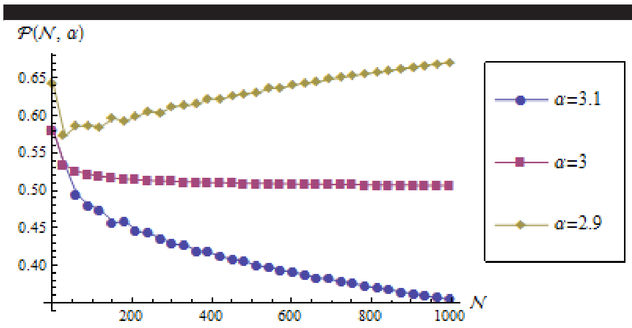

Figura 3. Representación gráfica de $\mathcal{P}(N,\alpha)$, para α = 2,9, 3, 3,1, tomando n = 4.

En la figura 3, se muestra $\mathcal{P}(N,\alpha)$, para distintos valores de α. Se puede observar que una pequeña variación del parámetro α con respecto al valor de $n - 1$ hace que la probabilidad asintótica en C =

0 diverja del valor 1/2. Esto quiere decir que el parámetro α que hace que la distribución F sea asintóticamente simétrica, es el que elimina la sobrenota por acierto al azar.

Evaluación del modelo exacto

En esta sección se evalúa en qué medida la aproximación a la normal es una buena aproximación cuando N toma valores grandes. En la figura 4 se ha obtenido el ajuste de la distribución de probabilidad de la variable C a una curva gaussiana, tomando $N = 100$, $n = 4$, $C_{max} = 10$ y $\alpha = n - 1$. Nótese que la calificación mínima en un examen consiste en tener todas las respuestas incorrectas, es decir,

$$C_{\min} = -\frac{C_{\max}}{3} = -\frac{10}{3}.$$

En esta misma figura 4 se observa que el ajuste es mucho mejor para calificaciones positivas que negativas, existiendo una cierta asimetría en la distribución de los puntos del cálculo exacto.

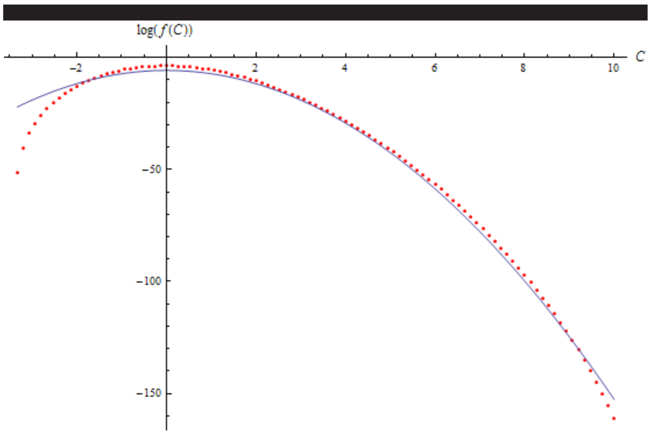

Figura 4. Ajuste de log[f(C)] a una parábola $ax^2 + b$.

Considerando que la gaussiana de ajuste viene dada por la función,

$$f_{\text{fit}}(C) = \frac{1}{\sigma_{\text{fit}}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_{\text{fit}}^2}\right) = \exp\left(aC^2 + b\right), \quad (43)$$

tenemos que,

$$a \approx -1{,}46959,$$
$$b \approx -5{,}72123.$$

Para cuantificar la bondad del ajuste, el coeficiente de determinación R^2 es,

$$R^2 \approx 0{,}988722.$$

que puede ser considerado como un valor excelente.

La desviación típica σ, según (10), es,

$$\sigma = \frac{C_{\max}^2}{\sqrt{N(n-1)}} \approx 0.57735,$$

y según el ajuste sería realizado a los datos del cálculo exacto,

$$\sigma_{\text{fit}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \approx 0.583294,$$

que otra vez debe ser considerado como muy bueno.

Tomando un nivel de confianza q = 95%, según (15), el parámetro k resulta ser,

$$k = \sqrt{2}\,\text{erf}^{-1}(0.95) \approx 1.95996.$$

Por tanto, el intervalo de confianza al 95% vendría dado por,

$$(-k\alpha, k\alpha) = (-1{,}13159, 1{,}13159). \quad (44)$$

Según el cálculo exacto (29), la probabilidad de que la calificación C esté en el intervalo de confianza (44) resulta ser ligeramente mayor que 0,95,

$$P(-k\alpha \le C < k\alpha) \approx 0.96982 > 0.95.$$

Para evaluar en qué medida el intervalo de confianza asintótico se ajusta al real, podemos definir la siguiente tasa r, entre la probabilidad asintótica que ofrece el teorema central del límite (14), y la probabilidad exacta en dicho intervalo (29),

$$r = \frac{P_{\text{asint}}\left(|C| \le k\alpha\right)}{P(-k\alpha \le C < k\alpha)} = \frac{q}{P(-k\alpha \le C < k\alpha)}$$

En la figura 5 se ha representado la gráfica de la tasa r en función de q, tomando N = 100. Se puede observar que como $r < 1$, el intervalo $(-k\alpha, k\alpha)$, determinado con el enfoque aproximado, está ligeramente sobrestimado.

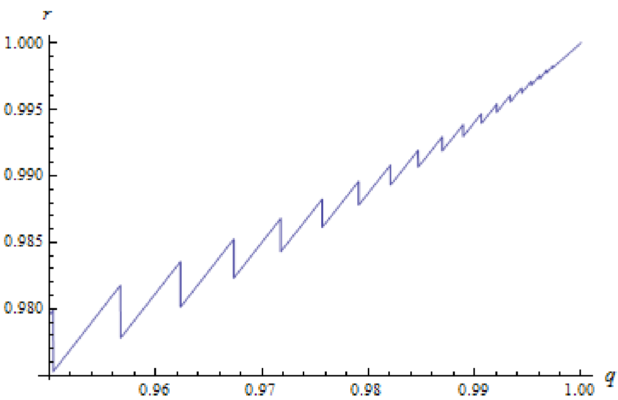

Figura 5. Gráfica de la tasa r en función del nivel de confianza q, tomando N = 100, n = 4 y $\alpha = n - 1$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha abordado el problema de la puntuación en un examen tipo test multi-respuesta, de tal modo que se elimine la posible sobrenota por el acierto al azar en las respuestas. Con un modelo simplificado se concluye que si cada pregunta correcta vale 1 punto hay que descontar $1/(n-1)$ puntos por cada pregunta incorrecta (n, número de opciones por pregunta), para compensar el posible intento de responder al azar las preguntas que no se saben. Este enfoque simplificado no permite plantear el problema con la posibilidad de dejar preguntas en blanco.

Se aborda también el cálculo exacto de la probabilidad de sacar una determinada calificación en un test, suponiendo que todas las maneras de contestarlo son equiprobables. Se ha comprobado que este cálculo exacto coincide con lo predicho por el teorema central del límite, cuando $N \to \infty$, siendo N el número de preguntas del examen. Además, lo que descuenta cada pregunta incorrecta, según el enfoque simplificado, es lo que permite que la distribución exacta de la calificación obtenida al azar sea simétrica cuando $N \to \infty$. Por último, se comprueba que los intervalos de confianza en torno a la calificación más probable, rellenando el examen al azar, están ligeramente sobreestimados, cuando se usa para su obtención el teorema central del límite.

BIBLIOGRAFÍA

FELLER, W., 1996. *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*, Ciudad de México: Limusa, 456p.

SPANIER, J., OLDHAM, K. B., 1987. *An atlas of functions*, New York: Hemisphere Publising Corporation, 700p.

LEBEDEV, N. N., 1972. *Special Functions and their applications*, London: Prentice-Hall, Inc. Dover Publications, 308p.