Nereis. Revista Iberoamericana Interdisciplinar de Métodos, Modelización y Simulación	5	25-40	Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir"	Valencia (España)	ISSN 1888-8550

Modelización matemática de un caso de explotación sostenible de una especie biológica

Fecha de recepción y aceptación: 14 de noviembre de 2012, 3 de enero de 2013

Juan Luis González-Santander Martínez†* y Germán Martín González†**

† Facultad de Ciencias Experimentales, Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir", Valencia, España
* ** Correspondencia: Facultad de Ciencias Experimentales, Universidad Católica de Valencia "San Vicente Mártir", Calle Guillem de Castro, 94. 46001 Valencia. España. *E-mail*: martinez.gonzalez@ucv

RESUMEN

Se plantea el problema de la introducción de una especie biológica en un ecosistema con vistas a su futura explotación. Para la primera fase de vivero, se ha obtenido un método sencillo para determinar los parámetros de la ecuación logística, que determina el crecimiento de la especie, a partir de dos medidas experimentales del número de ejemplares. Para la segunda fase de explotación, se ha obtenido una expresión para la máxima tasa de explotación (número de ejemplares capturados por unidad de tiempo) con el fin de que esta sea sostenible, es decir, para que la población no se extinga. En caso de que la tasa de explotación sea superior a la máxima que garantiza la sostenibilidad, se ofrece la expresión para el tiempo de extinción de la especie. Asimismo, se ha obtenido una expresión para el tiempo mínimo que ha de tener la fase de vivero para maximizar la tasa de explotación sostenible. Por último, se presentan unos resultados numéricos que ejemplifican los distintos casos con los que nos podemos encontrar.

PALABRAS CLAVE: Ecuación logística, explotación sostenible.

ABSTRACT

We pose the problem of the introduction of a biological species in an ecosystem in order to a future exploitation. For the first vivarium stage, we have obtained a simple method to determine the parameters of the logistic equation, which determines the growth of the species, from two experimental measures of the number of individuals. For the second phase of exploitation, we have obtained an expression for the maximum exploitation rate (number of individuals caught per unit time) for it to be sustainable, that is, the population does not become extinct. In the event that the exploitation rate is higher than the maximum that ensures sustainability, we provide an expression for the time of extinction. It has also obtained an expression for the minimum time that must have the vivarium stage to maximize sustainable harvest rate. Finally, we present numerical results that illustrate the different cases we can find.

KEYWORDS: Logistic equation, sustainable exploitation.

INTRODUCCIÓN

Planteamiento del problema

En un ecosistema (natural o artificial) se introduce un cierto número N_0 de ejemplares de una nueva especie para su futura explotación. A partir del momento en que se introduce la nueva especie, se hacen dos medidas del número de ejemplares en el ecosistema, espaciadas en un mismo tiempo t_m, dando como resultado un número de ejemplares N_1 y N_2 respectivamente. A partir de un cierto momento, después de haber realizado las medidas, se pretende explotar la nueva especie. ¿Cuál es el máximo número de capturas por unidad de tiempo de la nueva especie introducida para que la explotación sea sostenible? ¿Cuál es el tiempo mínimo de vivero que hemos de esperar para poder empezar a explotar la especie de manera que la explotación sea máxima y sostenible?

EVOLUCIÓN DE LA POBLACIÓN EN VIVERO

Parametrización de la ecuación logística a partir de los datos experimentales

Tomemos el origen de tiempos el instante en el que se introduce la nueva especie y sea $t_p > 2t_m$ el instante en el que se empieza a explotar la especie introducida en el ecosistema. Si suponemos un modelo logístico [2] en el crecimiento de la población de la especie antes de que se empiece la explotación, $t \in \left[0, t_p\right]$, tenemos que resolver la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right), \qquad N_\infty, k > 0. \tag{1.1}$$

donde N_∞ se denomina "capacidad de contención" del ecosistema y k la "vitalidad" de la población. La solución de (1.1) es

$$N(t) = \frac{N_\infty}{1 - Ce^{-kt}}, \tag{1.2}$$

La función dada en (1.3) se conoce como *función logística* o *sigmoide* [3]. Sustituyendo en (1.2) los datos del problema planteado (que han de ser constantes positivas): $N(0) = N_0$, $N_1 = N(t_m)$ y $N_2 = N(2t_m)$; tenemos que

$$N_0 = \frac{N_\infty}{1 - C} > 0, \tag{1.3}$$

$$N_1 = \frac{N_\infty}{1 - Cu} > 0, \tag{1.4}$$

$$N_2 = \frac{N_\infty}{1 - Cu^2} > 0, \tag{1.5}$$

donde hemos definido

$$u := \exp\left(-kt_m\right) > 0. \tag{1.6}$$

De este modo, dividiendo (1.3) entre (1.4) y despejando

$$u = \frac{1}{C}\left[1 + \frac{N_0}{N_1}(C - 1)\right], \tag{1.7}$$

y dividiendo (1.3) entre (1.5),

$$\frac{N_0}{N_2} = \frac{1 - Cu^2}{1 - C}. \tag{1.8}$$

Sustituyendo (1.7) en (1.8), llegamos a

$$\frac{N_0}{N_2}(1 - C)C = -\left(\frac{N_0}{N_1}\right)^2 (1 - C)^2 + \left(2\frac{N_0}{N_1} - 1\right)(1 - C). \tag{1.9}$$

Teniendo en cuenta (1.3) es posible dividir en (1.9) por 1 – *C*. Despejando *C* se obtiene

$$C = \frac{N_2 \left(N_0 - N_1\right)^2}{N_0 \left(N_2 N_0 - N_1^2\right)}, \tag{1.10}$$

lo que añade la condición, $N_2 N_0 \neq N_1^2$. Esta condición lo que indica es que la población no sigue un crecimiento exponencial o maltusiano [2], ya que si el crecimiento de la población fuera $N(t) = \alpha \exp(\beta t)$, entonces $N_2 N_0 = N_1^2$. La condición $N_0 \neq 0$ que también impone (1.10) ya ha sido tenida en cuenta en (1.3). Sustituyendo ahora (1.10) en (1.7) y teniendo en cuenta (1.6), resulta que

$$u = \frac{N_0 \left(N_1 - N_2\right)}{N_2 \left(N_0 - N_1\right)} > 0. \tag{1.11}$$

A partir de (1.3), (1.5) y (1.11) se concluye que los datos experimentales N_0, N_1 y N_2, para poderles aplicar un modelo logístico, o bien están en orden creciente: $N_0 < N_1 < N_2$; o bien, en orden decreciente: $N_0 > N_1 > N_2$. Por otro lado, según (1.6) y (1.11), la vitalidad *k* de la población es

$$k = \frac{1}{t_m} \log\left[\frac{N_2 \left(N_0 - N_1\right)}{N_0 \left(N_1 - N_2\right)}\right]. \tag{1.12}$$

Por otro lado, despejando de (1.3),

$$N_\infty = N_0 \left(1 - C\right), \tag{1.13}$$

y sustituyendo (1.10) en (1.13), llegamos a que la capacidad de contención del ecosistema es

$$N_\infty = \frac{N_1 \left[N_0 \left(N_1 - 2N_2\right) + N_2 N_1\right]}{N_1^2 - N_2 N_0}. \tag{1.14}$$

Cabe destacar que las sencillas fórmulas obtenidas en (1.12) y (1.14) para la vitalidad de la población *k* y la capacidad de contención N_∞ se han podido obtener gracias a que el intervalo entre las medidas es el mismo, t_m.

Positividad de la solución

Eliminando *C* de (1.2) y (1.3) llegamos a

$$N(t) = \frac{N_0 N_\infty}{N_0 \left(1 - e^{-kt}\right) + N_\infty e^{-kt}} \tag{1.15}$$

Obsérvese que como $k > 0$ y $t \geq 0$, resulta que

$$0 < e^{-kt} \leq 1 \quad \rightarrow \quad 1 - e^{-kt} \geq 0. \tag{1.16}$$

Ahora bien, como $N_0, N_\infty > 0$, según (1.16), concluimos que

$$N_0 \left(1 - e^{-kt}\right) + N_\infty e^{-kt} > 0 \quad \rightarrow \quad N(t) > 0, \quad t \geq 0, \tag{1.17}$$

es decir, la población evoluciona de tal manera que no se extingue en ningún instante $t \geq 0$. De este modo, como tomando límites en (1.15),

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = N_\infty, \tag{1.18}$$

y como, de acuerdo con (1.17), la población no se extingue o anula en ningún momento, podemos afirmar que N_∞ se corresponde con el número de individuos al que tiende a estabilizarse la población.

EVOLUCIÓN DE LA POBLACIÓN SOMETIDA A EXPLOTACIÓN

Planteamiento de la ecuación diferencial

Cuando empieza la explotación de la especie, $t \in [t_p, +\infty)$, la ecuación (1.1) se convierte en

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right) - m, \qquad N_\infty, k, m > 0, \tag{2.1}$$

donde *m* indica el número de capturas de la especie por unidad de tiempo. Por continuidad de la función *N*(*t*), según (1.2), hay que imponer la condición,

$$N_0^* := N(t_p) = \frac{N_\infty}{1 - C\exp(-kt_p)} > 0, \tag{2.2}$$

donde hemos aplicado (1.17), sabiendo que $t_p > 0$. Haciendo en (2.1) el cambio de variable,

$$\tau = t - t_p \tag{2.3}$$

resulta que según (2.1) y (2.2) la función $N(\tau)$ con $\tau \geq 0$, satisface el siguiente problema de Cauchy,

$$\frac{dN}{d\tau} = kN\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right) - m, \qquad N(0) = N_0^* > 0. \tag{2.4}$$

Resolución de la ecuación diferencial

La ecuación (2.4) se puede escribir de la forma

$$\frac{dN}{d\tau} = -\frac{k}{N_\infty}(N - N_+)(N - N_-), \tag{2.5}$$

donde

$$N_\pm := \frac{1}{2}\left(N_\infty \pm \sqrt{N_\infty^2 - 4\frac{mN_\infty}{k}}\right). \tag{2.6}$$

Separando variables e integrando en (2.5), llegamos a

$$N(\tau)=\frac{N_+-N_-Ke^{-\Delta\tau}}{1-Ke^{-\Delta\tau}}, \tag{2.7}$$

donde K es una constante de integración y, según (2.6), hemos definido,

$$\Delta:=\frac{k}{N_\infty}(N_+-N_-)=\sqrt{k\left(k-\frac{4m}{N_\infty}\right)}, \tag{2.8}$$

teniendo en cuenta que $k, N_\infty > 0$. Podemos expresar (2.7) como

$$N(\tau)=N_-+\frac{N_+-N_-}{1-Ke^{-\Delta\tau}}. \tag{2.9}$$

A semejanza de (1.2), la función dada (2.9) es también de tipo *sigmoide* más una constante. Podemos determinar la constante de integración K dada en (2.14) en términos de la población inicial dada en (2.2), $N_0^* > 0$, de la siguiente manera,

$$N(0)=N_0^*=N_-+\frac{N_+-N_-}{1-K} \quad\rightarrow\quad K=\frac{N_+-N_0^*}{N_--N_0^*} \tag{2.10}$$

Cabe destacar que si la tasa de explotación $m > kN_\infty/4$, resulta que según (2.6) y (2.8), $N_\pm, \Delta \in \mathbb{C}$, por lo que la solución dada en (2.9) aparentemente no sería una función real, lo cual no parece que tenga sentido. Para resolver esta aparente contradicción, en el siguiente apartado ofrecemos una expresión alternativa de la solución (2.9).

Expresión alternativa de la solución

Podemos dar una expresión alternativa de la solución a partir de la siguiente identidad [4, ec. 5.36],

$$\tan(\alpha\tau+\beta)=\frac{\tan\alpha\tau+A}{1-A\tan\alpha\tau}, \qquad A:=\tan\beta. \tag{2.11}$$

De acuerdo con [4, ec. 7.19], resulta que,

$$\tan\alpha\tau=i\frac{1-e^{2i\alpha\tau}}{1+e^{2i\alpha\tau}}, \tag{2.12}$$

de tal manera que sustituyendo (2.12) en (2.11), llegamos a,

$$\tan(\alpha\tau+\beta)=i\frac{1+Be^{2i\alpha\tau}}{1-Be^{2i\alpha\tau}}, \qquad B:=\frac{Ai+1}{Ai-1}. \tag{2.13}$$

Por tanto, podemos dar una expresión alternativa de $N(\tau)$ aplicando (2.13),

$$N(\tau)=\delta-\gamma\tan(\alpha\tau+\beta)=\frac{\delta-i\gamma-(\delta+i\gamma)Be^{2i\alpha\tau}}{1-Be^{2i\alpha\tau}}, \tag{2.14}$$

de tal modo que comparando coeficientes en (2.9) y (2.14), resulta que

$$\begin{cases} 2i\alpha = -\Delta \quad \rightarrow \quad \alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{k\left(\dfrac{4m}{N_\infty} - k\right)}, \\ B = K, \\ \left.\begin{matrix} \delta - i\gamma = N_+ \\ \delta + i\gamma = N_- \end{matrix}\right\rangle \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \delta = \dfrac{1}{2}N_\infty, \\ \gamma = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{4m}{k} - N_\infty\right)N_\infty}, \end{cases} \end{cases} \tag{2.15}$$

donde hemos tenido en cuenta las expresiones (2.6) y (2.8) dadas para $N_\pm$ y Δ respectivamente. Asimismo, la constante β que aparece en (2.14) se puede expresar en términos de la población inicial $N_0^* > 0$,

$$N_0^* = N(0) = \delta - \gamma \tan\beta \quad \rightarrow \quad \tan\beta = \frac{\delta - N_0^*}{\gamma}. \tag{2.16}$$

Propiedades de las expresiones de la solución

Veamos ahora que $N_\pm, \Delta > 0$, siempre y cuando $m < kN_\infty/4$. Efectivamente,

$$m < \frac{kN_\infty}{4} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} k - \dfrac{4m}{N_\infty} > 0, \\ N_\infty - \dfrac{4m}{k} > 0, \end{cases} \tag{2.17}$$

pues k, m, $N_\infty > 0$. Ahora bien, a partir de (2.8) y teniendo en cuenta que k, $N_\infty > 0$ y (2.17), resulta que

$$\Delta := \frac{k}{N_\infty}(N_+ - N_-) = \sqrt{k\left(k - \frac{4m}{N_\infty}\right)} > 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Delta > 0, \\ N_+ > N_-. \end{cases} \tag{2.18}$$

Por otro lado, según (2.17) y teniendo en cuenta que m, k, $N_\infty > 0$,

$$N_\infty^2 > N_\infty^2 - 4\frac{mN_\infty}{k} = N_\infty\left(N_\infty - 4\frac{m}{k}\right) > 0. \tag{2.19}$$

Tomando la raíz cuadrada en (2.19), teniendo en cuenta que $f(x) = \sqrt{x}$ es una función monótona creciente para $x > 0$ (y por tanto, el sentido de la desigualdad se conserva, véase [5]), resulta que

$$N_\infty = |N_\infty| > \sqrt{N_\infty^2 - 4\frac{mN_\infty}{k}} > 0 \quad \rightarrow \quad 2N_- = N_\infty - \sqrt{N_\infty^2 - 4\frac{mN_\infty}{k}} > 0, \tag{2.20}$$

donde hemos tenido en cuenta de nuevo que $N_\infty > 0$ y la definición de N_- dada en (2.6). De este modo, según (2.18) y (2.20),

$$N_+ > N_- > 0. \tag{2.21}$$

Por otro lado, podemos comprobar también que $\alpha,\gamma > 0$ siempre y cuando $m > kN_\infty/4$. Efectivamente,

$$m > \frac{kN_\infty}{4} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{4m}{N_\infty} - k > 0, \\ \dfrac{4m}{k} - N_\infty > 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Ahora bien, de acuerdo con (2.15) y debido a que k, m, $N_\infty > 0$, resulta que

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{k\left(\dfrac{4m}{N_\infty} - k\right)} > 0, \\ \gamma = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{4m}{k} - N_\infty\right)N_\infty} > 0, \\ \delta = \dfrac{1}{2}N_\infty > 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Solución singular

Podemos observar a partir de (2.9) o (2.14) que si $m = kN_\infty/4$, obtenemos una indeterminación. Por ejemplo, si sustituimos $m = kN_\infty/4$ en (2.6), (2.8) y (2.10) resulta que

$$\begin{cases} N_\pm = N_\infty/2, \\ \Delta = 0, \\ K = 1. \end{cases} \tag{2.24}$$

lo cual implica que en (2.9) numerador y denominador se anulan. Para resolver este caso, podemos sustituir $m = kN_\infty/4$ en la ecuación diferencial de partida (2.5),

$$\frac{dN}{d\tau} = -\frac{k}{N_\infty}\left(N - \frac{N_\infty}{2}\right)^2.$$

Integrando, e imponiendo la condición inicial, $N(0) = N_0^*$, llegamos a

$$N(\tau) = \frac{N_\infty}{2} + \frac{(2N_0^* - N_\infty)N_\infty}{k(2N_0^* - N_\infty)\tau + 2N_\infty}. \tag{2.25}$$

Resumen de la solución

Según los resultados presentados hasta ahora, la solución del problema de Cauchy,

$$\frac{dN}{d\tau} = kN\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right) - m, \qquad N(0) = N_0^* > 0, \qquad \tau = t - t_p \geq 0, \tag{2.26}$$

donde todos los parámetros son positivos, $N_\infty, k, m > 0$; se puede expresar desglosándola de la manera que se presenta a continuación, de tal modo que todos los parámetros involucrados sean constantes reales. Esta manera de presentar la solución nos permitirá analizar el problema de la extinción de la población de una manera mucho más conveniente, como se verá en la siguiente sección.

1) *Solución sigmoide*.
Si $m < kN_\infty/4$,

$$N(\tau) = N_- + \frac{N_+ - N_-}{1 - K\exp(-\Delta\tau)}, \tag{2.27}$$

donde,

$$\begin{cases} N_\pm = \dfrac{1}{2}\left(N_\infty \pm \sqrt{N_\infty\left(N_\infty - 4\dfrac{m}{k}\right)}\right), \\ \text{siendo: } N_+ > N_- > 0, \\ \Delta = \sqrt{k\left(k - \dfrac{4m}{N_\infty}\right)} > 0, \qquad K = \dfrac{N_+ - N_0^*}{N_- - N_0^*}. \end{cases} \tag{2.28}$$

2) *Solución trigonométrica*.
Si $m > kN_\infty/4$,

$$N(\tau) = \delta - \gamma\tan(\alpha\tau + \beta), \tag{2.29}$$

donde,

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{k\left(\dfrac{4m}{N_\infty} - k\right)} > 0, \qquad \tan\beta = \dfrac{\delta - N_0^*}{\gamma}, \\ \gamma = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{4m}{k} - N_\infty\right)N_\infty} > 0, \quad \delta = \dfrac{1}{2}N_\infty > 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

3) *Solución singular*.
Si $m = kN_\infty/4$,

$$N(\tau) = \frac{N_\infty}{2} + \frac{\left(2N_0^* - N_\infty\right)N_\infty}{k\left(2N_0^* - N_\infty\right)\tau + 2N_\infty}. \tag{2.31}$$

TIEMPO DE EXTINCIÓN

Solución singular

Supongamos que $m = kN_\infty/4$. Podemos hallar el tiempo de extinción τ_0 a partir de (2.31), resolviendo la siguiente ecuación:

$$N(\tau_0) = \frac{N_\infty}{2} + \frac{\left(2N_0^* - N_\infty\right)N_\infty}{k\left(2N_0^* - N_\infty\right)\tau_0 + 2N_\infty} = 0,$$

lo que nos lleva a

$$\tau_0 = \frac{4N_0^*}{k\left(N_\infty - 2N_0^*\right)}. \tag{3.1}$$

Obsérvese que la población se extinguirá cuando esté sobreexplotada. En este caso, el instante en el que se produzca la extinción t_0 ha de ser posterior al instante en el que comienza la explotación t_p,

$$t_0 > t_p \quad \rightarrow \quad \tau_0 = t_0 - t_p > 0, \tag{3.2}$$

donde hemos aplicado (2.3). Nótese también que según (3.1),

$$\left\{\begin{matrix} m = kN_\infty/4 \\ N_0^* = N_\infty/2 \end{matrix}\right\rangle \quad \rightarrow \quad (\tau_0 \rightarrow \infty), \tag{3.3}$$

es decir, la población no se extingue.

Solución sigmoide

Supongamos que

$$m < kN_\infty/4. \tag{3.4}$$

Podemos hallar el tiempo de extinción τ_0 a partir de (2.27),

$$N(\tau_0) = N_- + \frac{N_+ - N_-}{1 - Ke^{-\Delta\tau_0}} = 0 \quad \rightarrow \quad e^{-\Delta\tau_0} = \frac{\left(N_0^* - N_-\right)N_+}{\left(N_0^* - N_+\right)N_-}, \tag{3.5}$$

donde hemos tenido en cuenta el valor de *K* dado en (2.28). Despejando de (3.5),

$$\tau_0 = -\frac{1}{\Delta}\log\left[\frac{\left(N_0^* - N_-\right)N_+}{\left(N_0^* - N_+\right)N_-}\right]. \tag{3.6}$$

Observemos que como según (2.28), $\Delta > 0$, y como según (3.2), $\tau_0 > 0$, resulta que a partir de (3.5) tenemos que

$$0 < \frac{\left(N_- - N_0^*\right)N_+}{\left(N_+ - N_0^*\right)N_-} < 1. \tag{3.7}$$

De la primera desigualdad de (3.7) resulta que se ha de satisfacer simultáneamente,

$$\left\{\begin{matrix} \left(N_- - N_0^*\right)N_+ > 0 \quad \rightarrow \quad N_0^* < N_- \\ \left(N_+ - N_0^*\right)N_- > 0 \quad \rightarrow \quad N_0^* < N_+ \end{matrix}\right\rangle \quad \rightarrow \quad 0 < N_0^* < N_- < N_+. \tag{3.8}$$

donde hemos aplicado (2.28), $N_+ > N_- > 0$, y donde, obviamente, la población inicial ha de ser positiva, $N_0^* > 0$, (2.26). Por otro lado, notemos que si se cumple (3.8), también se ha de cumplir la segunda desigualdad de (3.7). Efectivamente,

$$\frac{\left(N_- - N_0^*\right)N_+}{\left(N_+ - N_0^*\right)N_-} = 1 + \frac{N_0^*\left(N_- - N_+\right)}{N_-\left(N_+ - N_0^*\right)}. \tag{3.9}$$

Ahora bien, según (3.8),

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} N_0^* > 0 \\ N_+ > N_- \end{array}\right\rangle \to N_0^*\left(N_- - N_+\right) < 0 \\ \left.\begin{array}{l} N_- > 0 \\ N_0^* < N_+ \end{array}\right\rangle \to N_-\left(N_+ - N_0^*\right) > 0 \end{array}\right\rangle \to \frac{N_0^*\left(N_- - N_+\right)}{N_-\left(N_+ - N_0^*\right)} < 0. \tag{3.10}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (3.10) en (3.9), resulta que,

$$\frac{\left(N_- - N_0^*\right)N_+}{\left(N_+ - N_0^*\right)N_-} < 1,$$

como queríamos comprobar. De este modo, podemos concluir que si la población se extingue en un tiempo $\tau_0 > 0$, según (3.8) y la definición de N_- dada en (2.28), la población inicial ha de cumplir que

$$N_0^* < N_- = \frac{1}{2}\left(N_\infty - \sqrt{N_\infty^2 - 4\frac{mN_\infty}{k}}\right) \quad \to \quad N_\infty - 2N_0^* > \sqrt{N_\infty\left(N_\infty - 4\frac{m}{k}\right)} > 0, \tag{3.11}$$

donde la última desigualdad de (3.11) es debida a (3.4). Observemos que para que se cumpla (3.11), necesariamente,

$$N_\infty - 2N_0^* > 0 \quad \to \quad N_0^* < \frac{N_\infty}{2}. \tag{3.12}$$

Elevando al cuadrado en la primera desigualdad de (3.11), teniendo en cuenta la segunda desigualdad de (3.11), el sentido de la desigualdad se conserva (debido a que la función $f(x) = x^2$ es una función monótona creciente para $x > 0$, véase [5]). Por tanto,

$$N_\infty^2 + 4N_0^{*2} - 4N_\infty N_0^* > N_\infty^2 - 4\frac{mN_\infty}{k}, \tag{3.13}$$

y como $k, N_\infty > 0$, resulta que

$$m > kN_0^*\left(1 - \frac{N_0^*}{N_\infty}\right). \tag{3.14}$$

En conclusión, podemos afirmar que si $m < kN_\infty/4$, entonces,

$$\tau_0 > 0 \quad \to \quad \begin{cases} N_0^* < \dfrac{N_\infty}{2}, \\ m > kN_0^*\left(1 - \dfrac{N_0^*}{N_\infty}\right). \end{cases} \tag{3.15}$$

Solución trigonométrica

Supongamos ahora que

$$m > kN_\infty/4. \tag{3.16}$$

Según (2.29), el tiempo de extinción τ_0 vendrá dado por

$$N(\tau_0) = \delta - \gamma \tan(\alpha\tau_0 + \beta) = 0, \tag{3.17}$$

es decir,

$$\tau_0 = \frac{1}{\alpha}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\delta - N_0^*}{\gamma}\right)\right], \tag{3.18}$$

donde hemos tenido en cuenta el valor de $\tan\beta$ dado en (2.30). Observemos que como $N_0^* > 0$ y según (2.30), $\delta, \gamma > 0$, resulta que

$$\frac{\delta}{\gamma} > \frac{\delta - N_0^*}{\gamma} \quad \rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right) > \tan^{-1}\left(\frac{\delta - N_0^*}{\gamma}\right), \tag{3.19}$$

pues $\forall x,\ \tan^{-1} x$ es una función monótona creciente. Por tanto, aplicando (3.19) a (3.18), teniendo en cuenta que según (2.30) $\alpha > 0$, resulta que

$$m > kN_\infty/4 \quad \rightarrow \quad \tau_0 > 0. \tag{3.20}$$

Concluimos entonces que si $m > kN_\infty/4$, la población siempre se extingue.

TASA MÁXIMA DE EXPLOTACIÓN Y TIEMPO DE VIVERO

Consideremos la función

$$f(N_0^*) := kN_0^*\left(1 - \frac{N_0^*}{N_\infty}\right) = -\frac{k}{N_\infty}N_0^{*2} + kN_0^*, \tag{4.1}$$

que es una función parabólica cuyas ramas están hacia abajo (ya que $N_\infty, k > 0$) y cuyo vértice $(N_\infty/2, kN_\infty/4)$ es un máximo absoluto. Por tanto, podemos decir que

$$N_0^* < \frac{N_\infty}{2} \quad \rightarrow \quad f(N_0^*) = kN_0^*\left(1 - \frac{N_0^*}{N_\infty}\right) < k\frac{N_\infty}{4}. \tag{4.2}$$

De acuerdo con la definición dada en (4.1), podemos enunciar un resultado equivalente a (3.15) de la siguiente manera: si $m < kN_\infty/4$, entonces

$$m \le f(N_0^*) \quad \rightarrow \quad \tau_0 \notin \mathbb{R}^+ \text{ (no se extingue)}, \tag{4.3}$$

o bien,

$$N_0^* \geq \frac{N_\infty}{2} \quad \rightarrow \quad \tau_0 \notin \mathbb{R}^+ \text{ (no se extingue)}, \tag{4.4}$$

es decir, en los casos dados en (4.3) y (4.4), la población no se extingue. Definamos ahora $m_{\max}$ como el valor máximo de m para el cual la población no se extingue, (es decir, $\tau_0 \notin \mathbb{R}^+$). De este modo, si no se cumple la condición (4.4), es decir, $N_0^* < N_\infty/2$, entonces (4.3) se puede enunciar como

$$\left\{ \begin{array}{l} m < \dfrac{kN_\infty}{4} \\ N_0^* < \dfrac{N_\infty}{2} \end{array} \right\rangle \quad \rightarrow \quad m_{\max} = f\left(N_0^*\right) < \frac{kN_\infty}{4}, \tag{4.5}$$

donde hemos aplicado (4.2). Observemos que aplicando (3.3) podemos ampliar (4.5) a

$$\left\{ \begin{array}{l} m \leq \dfrac{kN_\infty}{4} \\ N_0^* \leq \dfrac{N_\infty}{2} \end{array} \right\rangle \quad \rightarrow \quad m_{\max} = f\left(N_0^*\right) \leq \frac{kN_\infty}{4}, \tag{4.6}$$

donde según (4.1), $f\left(N_\infty/2\right) = kN_\infty/4$. Observemos ahora que, según (3.20),

$$\tau_0 \notin \mathbb{R}^+ \quad \rightarrow \quad m \leq \frac{kN_\infty}{4}, \tag{4.7}$$

es decir, si no hay extinción de la población, $\tau_0 \notin \mathbb{R}^+$, la tasa de explotación no puede superar $kN_\infty/4$, independientemente del valor de N_0^*. Por tanto, de acuerdo con (4.6) y (4.7), la tasa máxima de capturas por unidad de tiempo, para que no haya sobre-explotación de la especie, viene dada por

$$m_{\max} = \left\{ \begin{array}{ll} kN_0^* \left(1 - \dfrac{N_0^*}{N_\infty}\right), & N_0^* \leq \dfrac{N_\infty}{2}, \\ \dfrac{kN_\infty}{4}, & N_0^* > \dfrac{N_\infty}{2}. \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Observemos que a partir de $N_0^* = N_\infty/2$, la tasa máxima de explotación $m_{\max}$ se mantiene constante. De este modo, si inicialmente introducimos la nueva especie con $N_0 < N_\infty/2$, conviene esperar a que la especie alcance como mínimo una población de $N_\infty/2$, para poder maximizar el número de capturas por unidad de tiempo. Obsérvese que $N_\infty/2$ es el punto de inflexión de $N(t)$ en el modelo logístico (1.1), es decir, el punto en el que la velocidad de crecimiento empieza a disminuir.

Definimos el tiempo de vivero t_v como el tiempo mínimo que hay que esperar para empezar la explotación de manera que esta sea máxima y sostenible,

$$N\left(t_v\right) = \frac{N_\infty}{2}, \quad \forall N_0 < \frac{N_\infty}{2}. \tag{4.9}$$

Podemos despejar de (4.9), teniendo en cuenta (1.15), llegando a,

$$t_v = \frac{1}{k}\log\left(\frac{N_\infty}{N_0} - 1\right). \tag{4.10}$$

Obviamente, cuando $N_0 \geq N_\infty/2$, el tiempo de vivero es nulo,

$$t_v = 0, \quad \forall N_0 \geq \frac{N_\infty}{2}. \tag{4.11}$$

Por tanto, según (4.10) y (4.11) podemos concluir que

$$t_v = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\log\left(\dfrac{N_\infty}{N_0} - 1\right), & N_0 < \dfrac{N_\infty}{2}, \\ 0, & N_0 \geq \dfrac{N_\infty}{2}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Como la explotación debe comenzar después de realizarse la segunda medida de la población $t_p \geq 2t_m$, respetando el tiempo de vivero, $t_p \geq t_v$, resulta que

$$t_p \geq \max\left(t_v, 2t_m\right). \tag{4.13}$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

En la figura 1 se ha representado la evolución de una especie, donde la población inicial y las dos medidas de la población son (puntos rojos sobre la gráfica): $N_0 = 100,\ N_1 = 1000,\ N_2 = 3500,$ con un intervalo entre las medidas de $t_m = 3$. Con estos datos, la vitalidad de la población y la capacidad de contención del ecosistema son, según (1.12) y (1.14),

$$\begin{cases} N_\infty \approx 4462, \\ k \approx 0,8446. \end{cases} \tag{5.1}$$

De acuerdo con (4.12), el tiempo de vivero es $t_v \approx 4,47$, por lo que resulta ser inferior a la duración mínima de la evolución de la población sin explotar, $2t_m = 6$. De este modo, siempre se respeta el tiempo de vivero. El momento en el que empieza a tener lugar la explotación es

$$t_p = 6,6 \tag{5.2}$$

En la figura 1 (izquierda) se ha tomado una tasa de explotación m inferior a la máxima admisible, para que esta sea sostenible,

$$m = 0,9\ m_{\max} \approx 848, \tag{5.3}$$

donde, aplicando (4.8), se ha obtenido

$$m_{\max} \approx 942. \tag{5.4}$$

Como se puede apreciar en la figura 1 (izquierda), la población no se extingue, y de acuerdo con (2.28) se estabiliza en $N_+ \approx 2936$. En la figura 1 (derecha), sin embargo, la tasa de explotación es superior a la máxima admisible dada en (5.4),

$$m = 1{,}1\, m_{\max} \approx 1036. \tag{5.5}$$

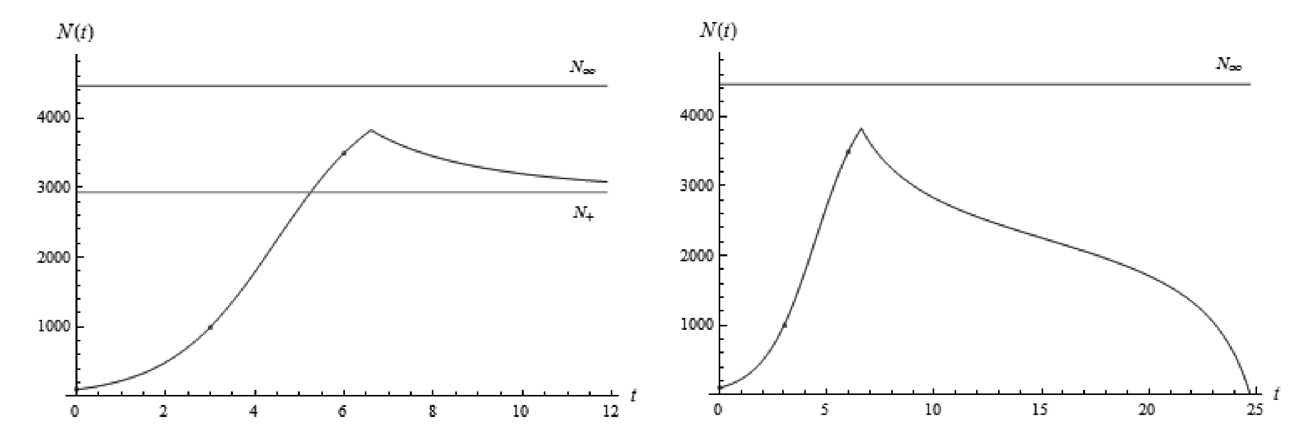

Figura 1. Evolución de la población con $N_0^* > N_\infty/2$, con explotación sostenible (izquierda) y no sostenible (derecha)

De este modo, como

$$m > \frac{kN_\infty}{4} = m_{\max} \approx 942,$$

utilizamos (3.18) y (5.2) para calcular el tiempo que tarda en extinguirse la población:

$$t_0 = \tau_0 + t_p \approx 24{,}72. \tag{5.6}$$

En las figuras 2 y 3, la población inicial y las dos medidas de la población son: $N_0 = 100$, $N_1 = 1000$, $N_2 = 9500$, con un intervalo entre las medidas de $t_m = 3$. Con estos datos, la vitalidad de la población y la capacidad de contención del ecosistema son:

$$\begin{cases} N_\infty \approx 154000, \\ k \approx 0{,}7695. \end{cases} \tag{5.7}$$

En la figura 2 se ha tomado el inicio de la explotación igual al tiempo de duración del tiempo de vivero,

$$t_p = t_v \approx 9{,}54 \tag{5.8}$$

y se ha empezado a explotar al máximo admisible para que haya sostenibilidad,

$$m = m_{\max} \approx 29625, \tag{5.9}$$

estabilizándose la población en $N_+ \approx 77000$. Si no respetamos el tiempo de vivero,

$$t_p \approx 8{,}58 < t_v \approx 9{,}54, \tag{5.10}$$

la tasa máxima de explotación sostenible disminuye:

$$m_{\max} \approx 25969. \tag{5.11}$$

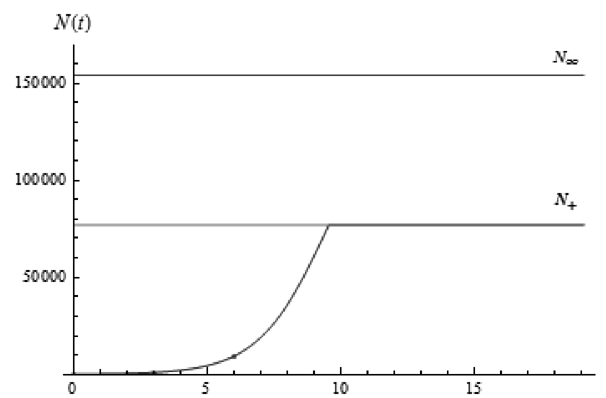

Figura 2. Evolución de la población con explotación máxima sostenible y $N_0^* = N_\infty/2$

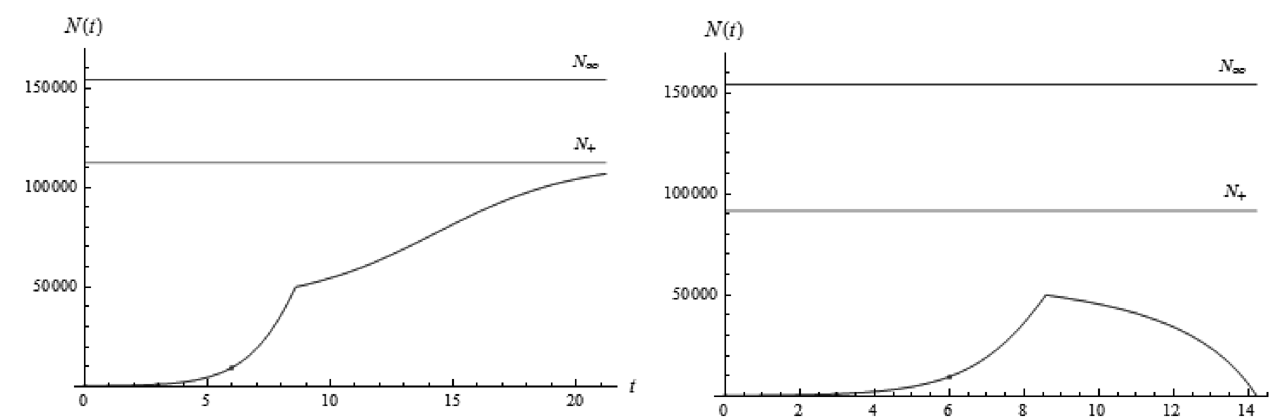

Figura 3. Evolución de la población sin respetar el tiempo de vivero, con explotación sostenible (izquierda) y no sostenible (derecha)

En la figura 3 (izquierda) se ha representado la evolución de la población tomando (5.11) y

$$m = 0{,}9\, m_{\max} \approx 23372, \tag{5.12}$$

estabilizándose la población en $N_+ \approx 112337$. En la figura 3 (derecha), tampoco hemos respetado el tiempo de vivero, tomando de nuevo (5.8); sin embargo, hemos tomado una tasa de explotación superior a la máxima admisible dada en (5.11)

$$m = 1{,}1\, m_{\max} \approx 28566. \tag{5.13}$$

De este modo, como

$$m < \frac{kN_\infty}{4} \approx 29625,$$

utilizamos (3.6) y (5.8) para calcular el tiempo que tarda en extinguirse la población:

$$t_0 = t_p + \tau_0 \approx 14,22. \tag{5.14}$$

Obsérvese que respetando el tiempo de vivero, hemos podido explotar la especie de una manera sostenible a una tasa (5.9) más alta que en (5.13), donde no hemos respetado el tiempo de vivero y la población ha terminado extinguiéndose.

BIBLIOGRAFÍA

1. VERHULST, PIERRE-FRANÇOIS (1838), "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement", *Correspondance mathématique et physique* 10: 113–121.
2. MALTHUS, THOMAS ROBERT (1798), *An Essay on the Principle of Population*, Library of Economics, Liberty Fund, Inc., 2000.
3. WEISSTEIN, ERIC W. "Sigmoid Function." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/SigmoidFunction.html
4. SPIEGEL, MURRAY R., *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, McGraw-Hill, 1982.
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_(mathematics)