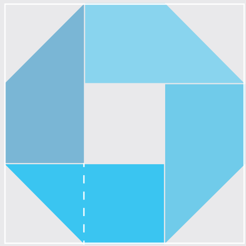
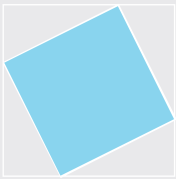
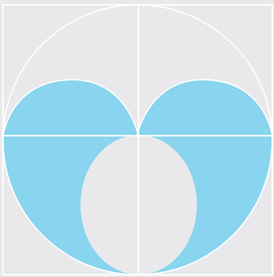
# Estrategias para el Desarrollo del Pensamiento en base a la Resolución de Problemas Matemáticos







Ayala Orlando
Posso Miguel
López Raimundo

Tomo I

# Estrategias para el Desarrollo del Pensamiento en base a la Resolución de Problemas Matemáticos

# Créditos

Revisión Pares
Marcos Rapahel Benítez Aldáz
Universidad Técnica de Ambato
marcosrbenitez@uta.edu.ec

Luis Leonardo Guerrero Garcés
Universidad Técnica de Ambato
ll.guerrero@uta.edu.ec

Diseño de Portada: Henry Pineda
Diagramación: Henry Pineda
Universidad Técnica del Norte
Facultad de Educación, Ciencia y Tecnología (FECYT)
Decano: Dr. Raimundo López
Subdecana: Dra. Alexandra Mina

Julio 2017

ISBN: 978-9942-984-63-0

9 789942 984630

# Introducción

La capacidad del hombre para solucionar problemas se puede considerar como la columna vertebral de la enseñanza de la matemática; esta caracteriza a una de las conductas más inteligentes del hombre y que más utilidad práctica tiene, ya que en la vida cotidiana estamos obligados a resolver problemas.

En este libro se ha recopilado y creado suficientes ejemplos y problemas significativos empleando un lenguaje sencillo y de manera iconográfica los mismos que están encuadrados en variadas estrategias heurísticas para desarrollar el pensamiento mediante la resolución de problemas matemáticos. El propósito principal de este trabajo investigativo es permitir al lector la superación de las dificultades al momento de enfrentarse a un problema, mediante la resolución de los ejercicios planteados en el texto, donde no entra en juego los procesos algorítmicos como habitualmente se resuelven los problemas.

En las últimas décadas se ha acentuado la preocupación de que la resolución de problemas matemáticos sea aplicada como una actividad de pensamiento, debido a que es frecuente que los maestros trabajen en sus aulas problemas rutinarios que distan mucho de estimular el esfuerzo cognitivo y creativo de los educandos.

Esperamos que el presente libro pueda contribuir al desarrollo del pensamiento de los educandos y a enriquecer o complementar la compleja labor del proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas, desde posturas que facilitan que el estudiante desarrolle habilidades del pensamiento creativo e imaginativo, que le permitan resolver problemas de manera autónoma.

Los autores

# Presentación

La Universidad Técnica del Norte (UTN) y en particular la Facultad de Educación, Ciencia y Tecnología, se complace en presentar este texto de autoría de tres destacados docentes investigadores de nuestra Facultad. Obra en la que de una manera didáctica y cronológica se presenta una serie de problemas que permiten al usuario de este texto, desarrollar la inteligencia sobre la base dela resolución de problemas matemáticos planteados.

Este texto con seguridad, será de uso cotidiano, de manera curricular y extracurricular, para docentes y estudiantes de los últimos años de educación básica, como de bachillerato y universidad, ya que el desarrollo de la inteligencia y de las destrezas lógico matemáticas, actualmente se ha convertido en un eje transversal en todo proceso de enseñanza aprendizaje.

Otro público meta de esta obra serán aquellos jóvenes que están cursando el último año de bachillerato y se preparan para rendir las pruebas de ingreso al sistema de Educación Superior en el Ecuador, ya que uno de los ejes o temáticas que tienen que aprobar es el razonamiento lógico matemático, que sin lugar a dudas, es donde más dificultades tienen nuestros bachilleres.

Otra de las virtudes del texto, es el hecho de que este ha sido elaborado, desde una perspectiva multidisciplinar, ya que intervienen en su elaboración: un docente cuya especialidad es las matemáticas, un segundo docente especializado en desarrollo de la inteligencia y un tercero cuya experticia es el diseño y la pedagogía. Con lo expresado en este párrafo, se está dando testimonio práctico de un trabajo en equipo, tendencia que la UTN viene promoviendo constantemente, de tal manera que todas las acciones investigativas, tengan este componente inter y multidisciplinar.

Finalmente, mi agradecimiento a los docentes de la FECYT que, con esfuerzo y sacrificio personal, siguen permanentemente aportando con la producción científica de la facultad y por comprometerse decidídamente a la solución de problemas que la sociedad demanda, ya que esta es la función y compromiso de nuestra gloriosa universidad.

Msc. Alexandra Mina Páez
SUBDECANA DE LA FECYT

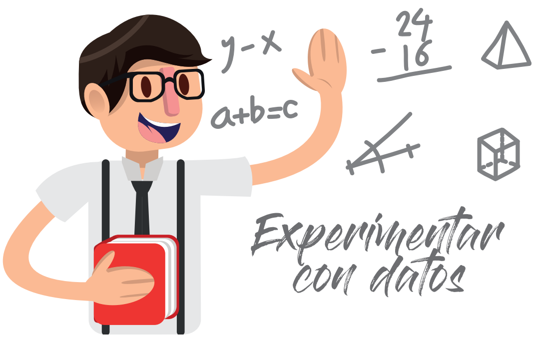
# Indice

# Capítulos

# EXPERIMENTAR CON LOS DATOS DEL PROBLEMA

Para resolver este tipo de problemas, utilizando esta estrategia, se debe experimentar con los datos del problema, para esto es necesario:

* Elegir de forma adecuada la operación a efectuarse;
* Establecer asociaciones entre parejas, filas y columnas de números,
* Disponer los números de acuerdo a ciertas condiciones,
* Buscar el valor de una variable siguiendo una lógica, etc.




## EJEMPLOS

**1.** Encontrar un número de dos dígitos que cumpla la relación de igualdad.

( ■●+1) / 2 = ●■

### a) COMPRENDER EL PROBLEMA

Leamos nuevamente el enunciado del problema.

### b) CREAR UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Seleccionamos la estrategia. En este caso experimentar con los datos del problema.

### c) PONER EN PRÁCTICA EL PLAN

En este ejercicio lo que se trata es de encontrar un número de dos dígitos que al sumarle 1 y dividir el resultado entre 2, le dé el mismo número pero volteado.

$$(\boxed{7}\,3+1)/2 = 3\,\boxed{7}$$

## d) EXAMINAR LO HECHO

El número de dos cifras buscado, debe ser un número impar puesto que éste aparece sumado a la unidad, lo cual le transforma en un número par para que sea divisible para dos.

**2.** Acomoda los números: 19, 21, 35, 42, 58, 65, 79, 81, en cuatro grupos de dos números cada uno, de manera que la suma de los dos números de cada grupo, sea igual para los cuatros grupos.

**Resolución:**

G: Grupo
$G_1$: 42 y 58 → 42 + 58 = 100.
$G_2$: 19 y 81 → 19 + 81 = 100.
$G_3$: 21 y 79 → 21 + 79 = 100.
$G_4$: 35 y 65 → 35 + 65 = 100.

**3.** Formar con los números: 6, 10, 14, 15, 21, 35, tres grupos de dos números cada uno, de manera que si multiplicamos los dos números de cada grupo, el resultado sea igual para todos los grupos.

**Resolución:**

G: Grupo
$G_1$: 6 y 35 → 35 x 6 = 210.
$G_2$: 10 y 21 → 21 x 10 = 210.
$G_3$: 14 y 15 → 14 x 15 = 210.

**4.** Formar con los números: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 28, 30, 35, tres grupos de tres números cada uno, de manera que si multiplicamos los tres números de cada grupo, el resultado sea el mismo para los tres grupos.

**Resolución:**

G: Grupo
$G_1$: 3, 8 y 35 → 3 x 8 x 35 = 840.
$G_2$: 4, 7 y 30 → 4 x 7 x 30 = 840.
$G_3$: 5, 6 y 28 → 5 x 6 x 28 = 840.

**5.** Colocar los dígitos: 2 y 2, 3 y 3, 4 y 4, 5 y 5, 6 y 6 en los recuadros, de manera que cada dígito igual, esté separado de acuerdo al número.

(El 2 debe estar separado por 2 cuadrados, el 3 por tres cuadrados).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

**Resolución:**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 5 | 2 | 4 | 3 | 2 | 6 | 5 | 4 |

**6.** Colocar los números del 1 al 8 en cada casillero de la figura, de tal manera que los números no estén correlativos, (es decir 1 y 2 juntos).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Resolución:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | 5 | |
| 7 | 1 | 8 | 2 |
| | 4 | 6 | |

**7.** Tres números enteros. Si se suman, dan el mismo resultado que si se multiplican. ¿Cuáles son los números?

**Resolución:**

1, 2 y 3

$1+2+3=1\times2\times3$

**8.** En la siguiente suma, tachar 9 cifras, de tal manera que al sumar las columnas nos dé como resultad 1111.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & 1 \\ & 3 & 3 & 3 \\ & 5 & 5 & 5 \\ + & 7 & 7 & 7 \\ & 9 & 9 & 9 \\ \hline \end{array}$$

**Resolución:**

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & 1 & 1 \\
 & & \cancel{3} & 3 & \cancel{3} \\
+ & & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} \\
 & & \cancel{7} & 7 & \cancel{7} \\
 & & 9 & \cancel{9} & \cancel{9} \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

**9.** Utilizando cuatro veces el número 4 y las cuatro operaciones, formar los números del 0 al 10.

**Ejemplo:**

$$\frac{4}{4} - \frac{4}{4} = 0.$$

**Resolución:**

$$\frac{44}{44} = 1 \qquad \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2 \qquad \frac{4+4+4}{4} = 3$$

$$4 + \frac{4-4}{4} = 4 \qquad \frac{4x4+4}{4} = 5 \qquad 4 + \frac{4+4}{4} = 6$$

$$\frac{44}{4} - 4 = 7 \qquad \frac{4x4}{4} + 4 = 8 \qquad 4 + 4 + \frac{4}{4} = 9$$

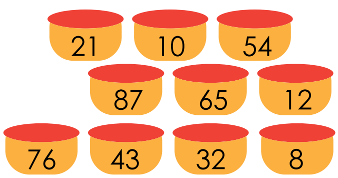
$$\frac{44-4}{4} = 10$$

**10.** Utilizar ocho veces el 8, de manera que la suma dé 1000.

**Resolución:**

$$888+88+8+8+8=1000$$

**11.** Entre los números que se dan a continuación. ¿Qué número no se debe sumar para que el resultado sea 400?



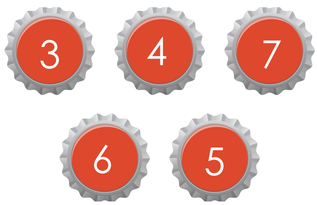
**Resolución:**

Inicialmente, debemos sumar todos los números así:

$$87+76+65+54+43+32+21+12+10+8=408$$

Consecuentemente, el número que no debemos sumar es el 8.

**12.** Entre los números que aparecen en las tapas. ¿Qué tapa se debe retirar para que su producto sea 945?




**Resolución:**

Como el resultado es un número impar, la tapa que se debe retirar es la 4 por ser número par.

$$3\times5\times7\times9=945$$

**13.** Utilizando todos los números dados y las operaciones de suma, resta y multiplicación, encontrar el número encerrado en el círculo.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 17 |

**Resolución:**

Aquí, conviene jugar con las operaciones indicadas, incluyendo todos los números y tomando en cuenta el orden jerárquico de las operaciones, de manera que podamos acercarnos más al número encerrado en el círculo.

$$6\times8-7\times5+4.$$

En este caso primero efectuamos los productos.

$$48-35+4.$$

Por último, sumando y restando nos queda 17.

**14.** Colocar el mismo número en los recuadros en blanco para que se cumpla la operación suma.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 4 & \square \\
+ & 2 & \square & 8 \\
 & \square & 5 & \square \\
\hline
 & 7 & \square & 4
\end{array}
$$

**Resolución:**

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 4 & \boxed{\mathbf{3}} \\
+ & 2 & \boxed{\mathbf{3}} & 8 \\
 & \boxed{\mathbf{3}} & 5 & \boxed{\mathbf{3}} \\
\hline
 & 7 & \boxed{\mathbf{3}} & 4
\end{array}
$$

**15.** Colocar el mismo número en los recuadros en blanco para que se cumpla la operación producto.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 0 & \square \\
\times & & & \square & \boxed{1} \\
\hline
 & & 1 & 0 & \square \\
 & \square & 2 & \square & \\
\hline
 & \square & 3 & \square & \square
\end{array}
$$

**Resolución:**

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 0 & \boxed{\mathbf{5}} \\
\times & & & \boxed{\mathbf{5}} & \boxed{1} \\
\hline
 & & 1 & 0 & \boxed{\mathbf{5}} \\
 & \boxed{\mathbf{5}} & 2 & \boxed{\mathbf{5}} & \\
\hline
 & \boxed{\mathbf{5}} & 3 & \boxed{\mathbf{5}} & \boxed{\mathbf{5}}
\end{array}
$$

**16.** Aquí, hay cinco igualdades a las que les falta dos tarjetas para que se cumplan. Colócalas en su lugar.

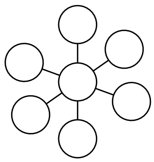
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -10 | X 2 | X 2 | -6 | ÷7 | +6 | +9 | ÷3 | -8 | X3 |

47_______________ = 27
91_______________ = 19
24_______________ = 42
81_______________ = 84
11_______________ = 93

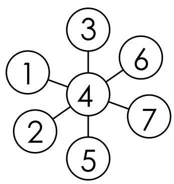
**Resolución:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 117 | -8 | X3 | = | 93 |
| 47 | -10 | X2 | = | 27 |
| 91 | ÷7 | +6 | = | 19 |
| 24 | X2 | -6 | = | 42 |
| 81 | +9 | ÷3 | = | 84 |

**17.** En el interior de cada círculo, escriba los dígitos del 1 al 7, sin que los números se repitan, de manera que la suma de cualquier hilera resulte ser la misma.



**Resolución:**




3 + 4 + 5 = 12
6 + 4 + 2 = 12
7 + 4 + 1 = 12

**18.** En cada casillero del rectángulo mostrado en la figura, colocar las cifras del 1 al 9 sin repetir, de manera que todas las sumas de los números dispuestas en filas, columnas y diagonales den 15.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

**Resolución:**

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

**Columna**

2 + 9 + 4 = 15
7 + 5 + 3 = 15
6 + 1 + 8 = 15

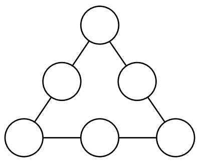
**Fila**

2 + 7 + 6 = 15
9 + 5 + 1 = 15
4 + 3 + 8 = 15

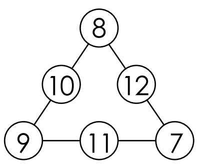
**Diagonal**

2 + 5 + 8 = 15
6 + 5 + 4 = 15

**19.** En cada círculo del triángulo que se muestra en la figura, colocar cifras del 7 al 12 sin repetir los números, de manera que la suma de las cifras de cada lado sea la misma.

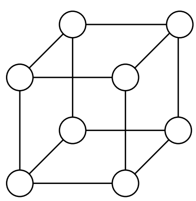


**Resolución:**

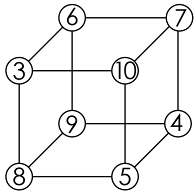



8 + 10 + 9 = 27
8 + 12 + 7 = 27
9 + 11 + 7 = 27

**20.** En cada círculo del cubo mostrado en la figura, colocar los números del 3 al 10 sin repetir, de manera que, la suma de los cuatro números de cada cara sea igual a 26.



**Resolución:**




**21.** Completar en los recuadros en blanco los números correspondientes, de manera que el producto de los números contiguos sea igual al de la parte superior.

| | | |
|---|---|---|
| | 48 | |
| 6 | | |
| | 2 | |

**Resolución:**

| | | |
|---|---|---|
| | 48 | |
| 6 | **8** | |
| **3** | 2 | **4** |

**Primer paso**

6 x 8 = 48

**Segundo paso**

3 x 2 = 6

2 x 4 = 8

**22.** Completar los recuadros en blanco por el número correspondiente, de manera que, la suma de los números contiguos sea igual al de la parte superior.

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| 3/9 | | |
| | | 4/9 |

**Resolución:**

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | |
| 3/9 | 6/9 | |
| 1/9 | 2/9 | 4/9 |

**Primer paso**

3/9+6/9=1

**Segundo paso**

4/9+2/9=6/9

**Tercer paso**

2/9+1/9=3/9

**23.** Calcular la suma de las cifras que van en los recuadros en blanco, de manera que cada recuadro represente un dígito diferente.

$$\begin{array}{rcccc} & & \square & \square & \square \\ \times & & & & 7 \\ \hline & \square & 9 & 4 & 2 \end{array}$$

## Resolución

* Para esto, debemos ir probando un número que multiplicado por 7 termine en 2, así:

$$\begin{aligned} 7 \times 1 &= 7 \\ 7 \times 2 &= 14 \\ 7 \times 6 &= 42 \end{aligned}$$

* El siguiente número ocurre si el número buscado es cero.

$$7 \times 0 + 4 = 4$$

Finalmente, buscamos un número que multiplicado por 7 termine en 9, puesto que en el producto anterior no llevó nada. Entonces esto será posible si el número es 7.

$$7 \times 7 = 49$$

Reconstruyendo el producto nos queda:

$$\begin{array}{rcccc} & & \boxed{7} & \boxed{0} & \boxed{6} \\ \times & & & & 7 \\ \hline & \boxed{4} & 9 & 4 & 2 \end{array}$$

Por tanto la suma de sus cifras es: $7 + 0 + 6 + 4 = 17$

**24.** Las letras de cada circunferencia, representan a los números del 1 al 9, donde:

$g > c$
$g \times c = e$
$a + i = e$
$f \div c = d$
$g^2 = h$
$a + b + c = 14$

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

¿ Qué número representa cada letra?

## Resolución

Como $g \times c = e$ se dan las siguientes posibilidades:

$4 \times 2 = 8$ y $3 \times 2 = 6$ (no se consideran con 1, porque se repetiría 2 veces el mismo número, ni números mayores porque su producto sería mayor de 9).

Por tanto, $g$ podría tomar valores de 2, 3 y 4.

Pero además se sabe que $g > c$ por tanto, $g$ podría tomar valores de 4 y 3.

Por otra condición del problema, se sabe que $g^2$ es igual a $h$ si $g = 4$ entonces $h = 16$ no cumple la condición del problema; pero si $g = 3$ entonces $h = 9$. Consecuentemente, el valor de $c$ es 2 y el de $e$ es 6.

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c=2 |
| d | e=6 | f |
| g=3 | h=9 | i |

- * Como $a + i = e$, se excluye las posibilidades $3 + 3$ y $4 + 2$ porque no pueden repetirse los mismos números, por tanto nos queda la posibilidad de 5 y 1.
- * $a$, debe tomar el valor de 5 para que la primera fila sume 14, si a toma el valor de 1, $b$ tendría que valer 11 ya que el valor de $c$ es 2 lo cual rompe con las condiciones del problema, con esto tenemos que el valor de $i = 1$
- * Como $a + b + c = 14$ por lo tanto, $b$ vale 7.

| | | |
|---|---|---|
| a=5 | b=7 | c=2 |
| d | e=6 | f |
| g=3 | h=9 | i=1 |

Se sabe además que $f \div c = d$, al ser c un número par, para que el resultado sea un número entero $f$ también debe ser par, se excluye el 4 porque su cociente sería 2 y se repetiría el número, por tanto $f$ debe ser 8 y consecuentemente, $d$ es 4.

| | | |
|---|---|---|
| a=5 | b=7 | c=2 |
| d=4 | e=6 | f=8 |
| g=3 | h=9 | i=1 |

**25.** Las letras de cada circunferencia representan a los números del 1 al 9.

Donde:

$2h = f$
$c^2 = a$
$d \times f = e$

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| d | e | f |
| g | h | i |

* Los valores a, e, i, son números consecutivos.
* La suma de la columna izquierda es mayor que cualquier otra fila o columna.
* ¿Qué número representa cada letra?
*

**Resolución:**

* Como la suma de la columna izquierda es mayor, a debe tomar el máximo valor de los cuadrados de un número ya que $c^2 = a$ por tanto, $c = 3$ y $a = 9$.
* Como a, e, i son números consecutivos, por tanto: $e = 8$, $i = 7$.

| | | |
|---|---|---|
| a=9 | b | c=3 |
| d | e=8 | f |
| g | h | i=7 |

* Como $d \times f = e$; por la condición del problema, d debe tomar el mayor valor posible, por lo tanto $d = 4$ y $f = 2$.
* Como $2h = f$ por tanto $h = 1$.

| | | |
|---|---|---|
| a=9 | b | c=3 |
| d=4 | e=8 | f=2 |
| g | h=1 | i=7 |

* g, por estar en la columna de la izquierda, debe tomar el mayor valor de los números que faltan, por tanto g = 6 y consecuentemente, b = 5.

| | | |
|---|---|---|
| a=9 | b=5 | c=3 |
| d=4 | e=8 | f=2 |
| g=6 | h=1 | i=7 |

**26.** Colocar un número en cada cuadrado, teniendo en cuenta que:

* 1 , 5 y 8, están en la horizontal superior.
* 3 , 4 y 9, están en la horizontal inferior.
* 1 , 3 , 4 , 6 , 7 y 8, no están en la vertical izquierda.
* 2 , 4 , 5 , 7 , 8 y 9, no están en la vertical derecha.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

## Resolución

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 8 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 4 | 3 |

**27.** Los resultados de las operaciones, están escritos en forma desordenada en los rectángulos de la parte lateral derecha, con esta información: determinar el valor de A.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A ÷ 3 | = | ? | 4 |
| A + 6 | = | ? | 60 |
| A x 5 | = | ? | 18 |
| A - 4 | = | ? | 8 |

**Resolución**

12 ÷ 3 = 4
12 + 6 = 18
12 x 5 = 60
12 - 4 = 8

Por tanto A = 12.

**28.** Sabiendo que AB x 9= 333, donde cada letra representa una cifra diferente y no igual a cero. Determinar el valor de cada letra.

**Resolución:**

Buscamos un número tal que:
9 x B termine en 3.
9 x 4 no termine en 3.
9 x 7 = 63 si cumple, termina en 3.
Por tanto: B = 7

De igual manera, buscar un número tal que:
9 x A + 6 = 33
9 x 2 + 6 = 24 no cumple
9 x 3 + 6 = 33 si cumple
Por tant A = 3

En este caso, AB, representa el número 37.

**29.** Sabiendo que: ABCDE x 7 = 111111, donde cada letra representa una cifra diferente y no igual a cero. Determinar el valor de cada letra.

**Resolución:**

Al igual que en el caso anterior, tenemos que ir dando valores a cada letra, de manera que multiplicando por 7, termine en 1; o multiplicado por 7 y sumado lo que lleva, termine en 1. En este caso la solución es A = 1; B = 5; C = 8; D =7 y E = 3.

**30.** En los espacios en blanco, escribir un número entre 1 y 9 para que verifique los resultados que aparecen en la última fila y columna, como resultado de operar tanto en forma horizontal como vertical.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | | + | | =6 |
| x | | x | | x | ÷ |
| | - | | x | | =3 |
| - | | + | | - | + |
| | - | | ÷ | | |
| =3 | + | =7 | - | 4 | = |

**Resolución**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | + | 1 | + | 3 | =6 |
| x | | x | | x | ÷ |
| 5 | - | 1 | x | 2 | =3 |
| - | | + | | - | + |
| 7 | - | 6 | ÷ | 2 | 4 |
| =3 | + | =7 | - | 4 | =6 |

**Observación:** En éste tipo de ejercicios podrían aparecer otras combinaciones diferentes a las que se presenta en la presente solución.

**31.** En las figuras que se muestran a continuación, sustituir por números, de tal manera que se verifique las igualdades dadas.

27 + △ = □

□ ÷ 5 = ⏢

⏢ * △ = 18

**Resolución**

27 + △3 = □30

□30 ÷ 5 = ⏢6

⏢6 * △3 = 18

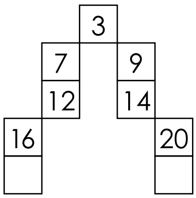
**32.** En cada casillero del cuadrado que se muestra a continuación, colocar las cifras del 1 al 9 sin repetirse, de tal manera que los números que se encuentran en la segunda fila y columna sean el promedio al sumar sus cifras de los  extremos, tanto en sentido vertical, horizontal y diagonalmente.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

**Resolución:**

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 8 | 7 |
| 6 | 5 | 4 |
| 3 | 2 | 1 |

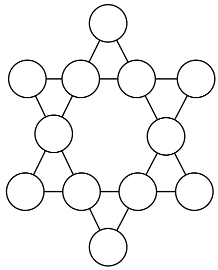
**33.** En el siguiente gráfico, encuentre los números que hacen falta:



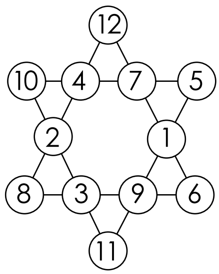

**Resolución**

* Si dibujamos una cuadricula de 5x5 y numeramos de forma consecutiva del 1 al 25, formamos con los casilleros una especie de pirámide, llegamos a la conclusión que los números que faltan son 21 y 25.
* Otra forma de analizar el ejercicio es observar que cuando desciende en forma diagonal por la izquierda, aumenta 4 unidades, y por la derecha 6 unidades, en cambio cuando baja en forma vertical, aumenta 5 unidades.
* Por tanto, los números buscados son 21 y 25.

**34.** En el interior de los círculos de la estrella, colocar los números del 1 al 12 de manera que cada hilera de 4 números sume 26 y a su vez, los vértices del hexágono interior también sume 26.



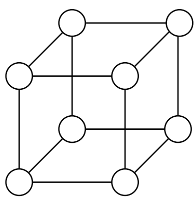
## Resolución



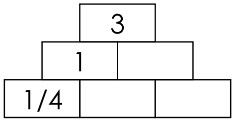

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Hallar E – P si: P2E + 5E1 + 425 = 1312

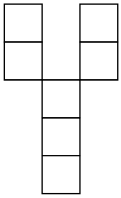
**2.** En cada círculo del cubo mostrado en la figura, colocar los números del 1 al 8, sin repetir, de manera que la suma de los cuatro números de cada cara, sea igual a 18.



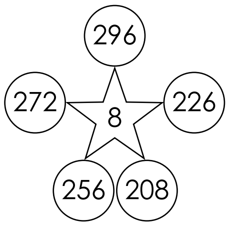
**3.** Completar en las cuadrículas en blanco con el número correspondiente, de manera que la suma de los 2 números contiguos, sea igual al de la parte superior.




**4.** Colocar las cifras del 1 al 7 en el siguiente tablero, de manera que dos números consecutivos no estén juntos ni vertical, ni horizontal, ni diagonalmente.



**5.** Cada punta de la estrella tiene un número, uno de ellos no tiene que estar ahí. El número del centro te ayudará a encontrarlo.



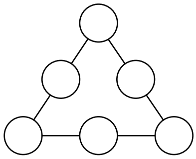

**6.** Utilizando las cuatro operaciones formar el número 30 con los números 2, 6, 7, 15, 18 y 21. Los números, no pueden repetirse y además debe utilizar todos.

**7.** Escribir en los casilleros en blanco, números dígitos, de manera que lleguen a los resultados que aparecen al final de cada fila y columna.

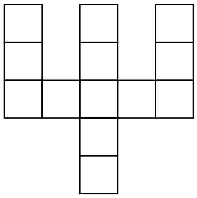
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | - | | + | | = | 4 |
| - | | + | | + | | |
| | + | 1 | - | | = | 6 |
| + | | - | | - | | |
| | + | | - | 3 | = | 3 |
| = | | = | | = | | |
| 4 | | 6 | | 3 | | |

**8.** Colocar los dígitos 2 y 2, 3 y 3, 4 y 4, 5 y 5, 6 y 6 en los recuadros, de manera que cada dígito esté separado de acuerdo al número (el 2 debe estar separado por 2 recuadros, el 3 por 3 recuadros).

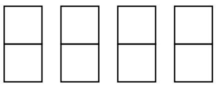
**9.** Colocar los números 3, 4, 5, 6, 7, 8, de tal manera que la suma de cada lado dé 18.



**10.** En el interior de cada recuadro de la figura escribir los números del 1 al 13, de tal manera que la suma de las barras verticales y horizontales sea la misma.

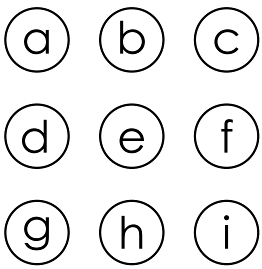


**11.** Colocar las cifras del 1al 8 en cada cuadradito, sin repetir. De manera que la suma de cada rectángulo dé el mismo resultado.



**12.** Las letras de cada circunferencia representan los números del 1 al 9. Donde:

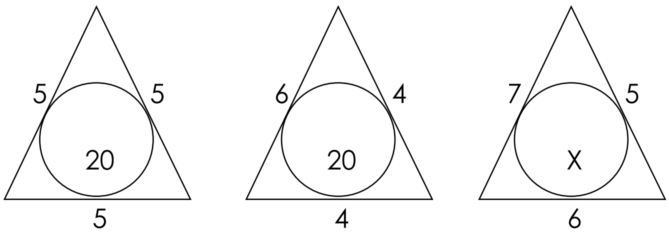
$aei = ceg$
$b+c = d+g = 11$
$b+e = h$



**13.** Coloca los números del 1 al 9, tomando en cuenta que no puede repetir ningún número en cada una de las diferentes filas y columnas.

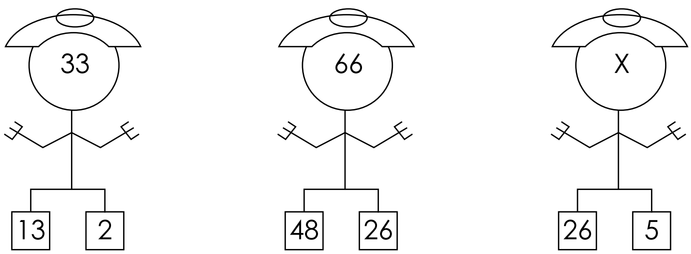
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 9 | | 3 | |
| 9 | | | 3 | 8 | 5 | | | 4 |
| 3 | 1 | | 4 | | | 2 | | |
| | | | | | | 5 | | 3 |
| 5 | | 1 | | | | 7 | | 6 |
| 2 | | 4 | 7 | 5 | | | | |
| | | 3 | | | 7 | | 6 | 1 |
| 1 | | | 6 | 3 | 2 | | | 5 |
| | 5 | | 8 | 9 | | | | |

**14.** En los siguientes ejercicios utilizando las operaciones básicas. Hallar el término que falta:



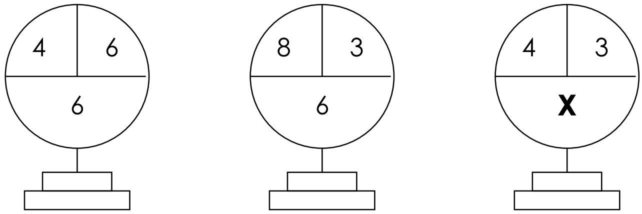

A) 20 B) 29 C) 30 D) 39

**15.** En los siguientes ejercicios utilizando las operaciones básicas. Hallar el término que falta:



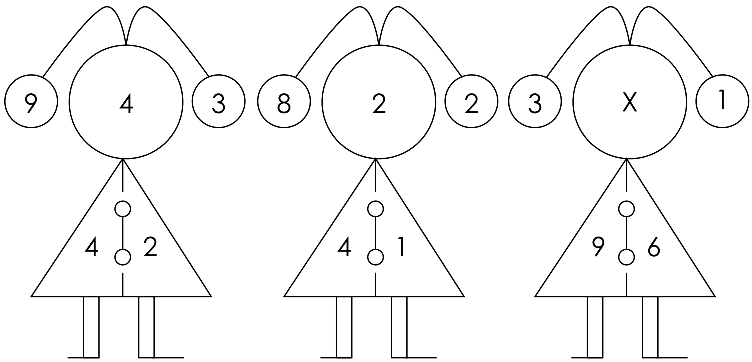

A) 23 B) 77 C) 99 D) 63

**16.** En los siguientes ejercicios utilizando las operaciones básicas. Hallar el término que falta



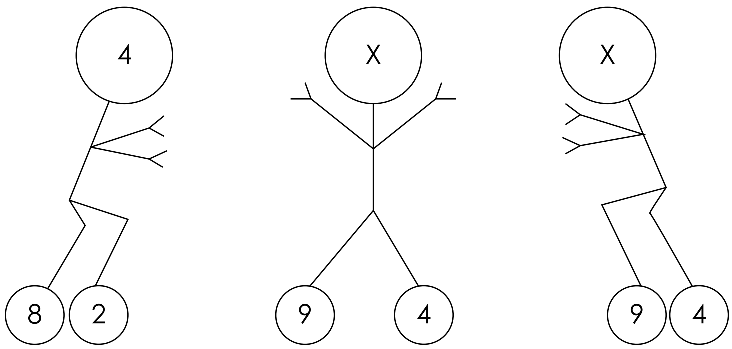

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8

**17.** En los siguientes ejercicios utilizando las operaciones básicas. Hallar el término que falta



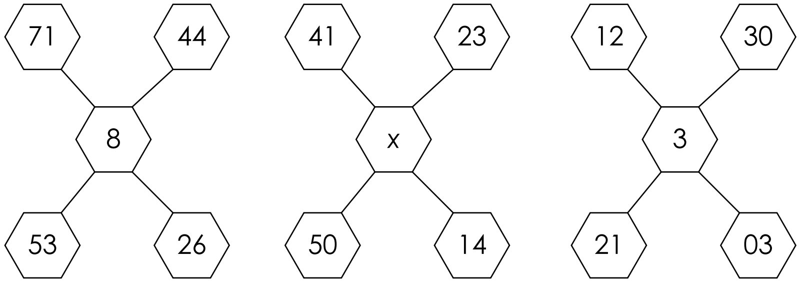

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9

**18.** En los siguientes ejercicios utilizando las operaciones básicas. Hallar el término que falta



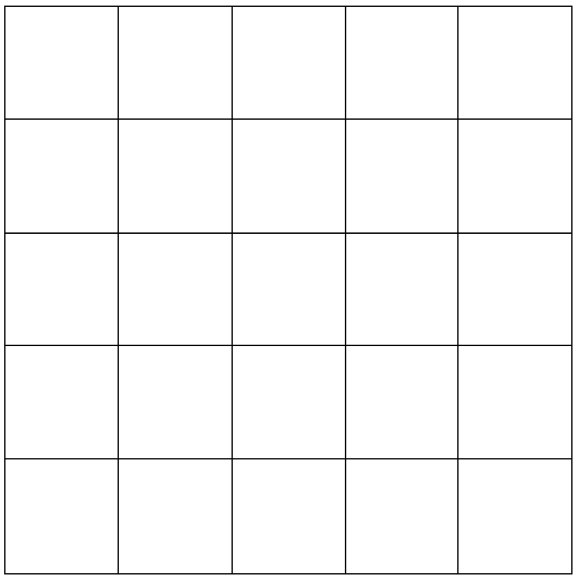

A) 4 B) 6 C) 8 D) 9

**19.** Encuentre el número que falta.




A) 8 B) 7 C) 6 D) 5

**20.** Coloque los números del 1 al 5, (5 veces cada uno) en las cuadriculas de la figura de tal manera que en cada fila horizontal, vertical y diagonal no hayan dos números iguales.



# INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Los enunciados más significativos en matemática, son los enunciados generales. Por ello, en algunos problemas, a veces es necesario experimentar con varios casos particulares y tras la observación, encontrar algunos patrones o regularidades que conducen al descubrimiento de leyes generales.

El razonamiento inductivo consiste en analizar casos particulares, es decir, realizar experiencias sencillas pero con las mismas características del problema original para conseguir resultados que al ser relacionados nos permitan llegar a una conclusión, que lo llamaremos, caso general.

El razonamiento inductivo, se caracteriza por permitir llegar a una conclusión general mediante una conjetura a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos. La conjetura puede ser verdadera o falsa.

Nuestros antepasados utilizaron experiencias particulares para programar sus siembras en épocas de lluvia y esto nos dice que es importante relacionar adecuadamente experiencias particulares para llegar a una conclusión.

**EJEMPLOS.-**

**1.** Hallar la última cifra de $3^{100}$

## a. COMPRENDER EL PROBLEMA

Puedes replantear el problema con potencias más simples

## b. CREAR UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Seleccionamos la estrategia. En este caso de razonamiento inductivo, la misma que nos permite observar los patrones numéricos.

## c. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN

Para saber en qué cifra termina $3^{100}$ iniciamos experimentando con algunos casos particulares :

| | | |
|---|---|---|
| $3^1 = \mathbf{3}$ | $3^5 = 24\mathbf{3}$ | $3^9 = 1968\mathbf{3}$ |
| $3^2 = \mathbf{9}$ | $3^6 = 72\mathbf{9}$ | $3^{10} = 5904\mathbf{9}$ |
| $3^3 = 2\mathbf{7}$ | $3^7 = 218\mathbf{7}$ | $3^{11} = 17714\mathbf{7}$ |
| $3^4 = 81$ | $3^8 = 656\mathbf{1}$ | $3^{12} = 53144\mathbf{1}$ |

Obsérvese la presencia de una regularidad o patrón, las cifras terminales presentan una secuencia en grupos de cuatro: 3; 9; 7: 1.

La serie que se formarían con los exponentes sería
1, 5, 9, 13, 17, … (la potencia termina en 3)
2, 6, 10, 14, 18, … (la potencia termina en 9)
3, 7, 11, 15, 19… (la potencia termina en 7)
4, 8, 12, 16, 20… (la potencia termina en 1)

Es decir que al elevar el 3 a un número múltiplo de 4, el resultado termina en 1. Como 100 es múltiplo de 4, podemos afirmar que la última cifra de $3^{100}$ será 1.

## d. EXAMINAR LO HECHO

Si observamos las series de los exponentes de 1 y 3, tenemos que son series formadas por números impares, por tanto, excluimos estas posibilidades ya que 100 es un número par. Se podría considerar la serie de exponente 2 por ser una serie formada por números pares, pero esta serie pasa por los números 10, 30, 50, 70, 90, 94, 98 por tanto, excluimos también esta posibilidad. En consecuencia, concluimos que $3^{100}$ la última cifra, termina en 1.

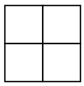
**2.** Deducir la fórmula para calcular el área de un cuadrado.

### Casos Particulares

### CASO 1

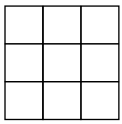
*L* = 1 *Número de cuadraditos 1*

### CASO 2



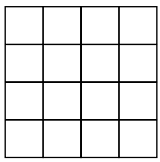
*L* = 2 *Número de cuadraditos 4*

### CASO 3



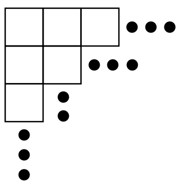
*L* = 3 *Número de cuadraditos 9*

### CASO 4



*L* = 4 *Número de cuadraditos 16*

### Caso General



*L* = n *Número de cuadraditos* $n^2$

Si establecemos analogías entre las medidas de los lados del cuadrado y el número de cuadraditos que aparecen en cada cuadrado, nos podemos dar cuenta que el área de un cuadrado está dada por la magnitud del lado elevado al cuadrado.

| L | $L^2$ | $A = l^2$ |
|---|---|---|
| 1 | $1^2$ | 1 |
| 2 | $2^2$ | 4 |
| 3 | $3^2$ | 9 |
| 4 | $4^2$ | 16 |
| • | • | • |
| • | • | • |
| • | • | • |
| $n$ | $n^2$ | $n^2$ |

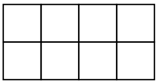
$\boxed{A = l^2}$

Fórmula

**3.** Deducir la fórmula para calcular el área de un rectángulo.

## Casos Particulares

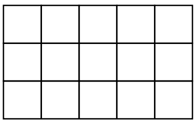
### CASO 1



*a* = 2 *Número de cuadraditos 8*

*L* = 4

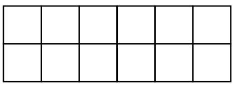
### CASO 2



*a* = 3 *Número de cuadraditos 15*

*L* = 5

### CASO 3



*a* = 2 *Número de cuadraditos 12*

*L* = 6

## Caso General

Si establecemos una analogía entre las dimensiones del rectángulo y el área, llegamos a la conclusión que el área del rectángulo está dada por el producto del largo (L) por el ancho (a).

| L | a | A = L x a |
|---|---|---|
| 4 | 2 | 8 |
| 5 | 3 | 15 |
| 6 | 2 | 12 |
| • | • | • |
| • | • | • |
| • | • | • |
| *p* | *q* | *p* x *q* |

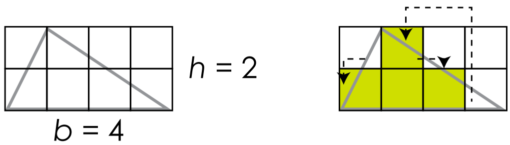
$\boxed{A = Lxa}$

Fórmula

**4.** Deducir la fórmula, para calcular el área de un triángulo.

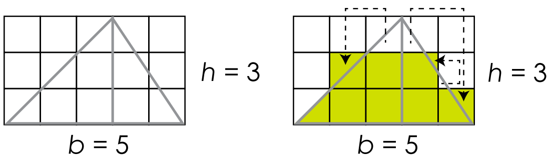
## Casos Particulares

### CASO 1



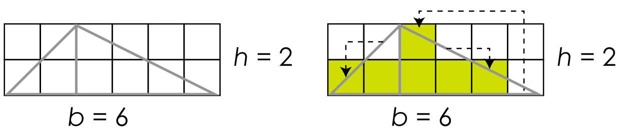

Por traslado de regiones
A = 4 cuadraditos

### CASO 2




Por traslado de regiones
A = 7.5 cuadraditos

### CASO 3




Por traslado de regiones
A = 6 cuadraditos

## Caso General

Del análisis de los casos anteriores, se concluye que el área del triángulo es igual al producto de la base (b) por la altura (h) dividido entre 2.

En las gráficas se puede observar que el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo

| b | n | $A = \frac{b \times h}{2}$ |
|---|---|---|
| 4 | 2 | 4 |
| 5 | 3 | 7.5 |
| 6 | 2 | 6 |
| • | • | • |
| • | • | • |
| • | • | • |
| $p$ | $q$ | $\frac{p \times q}{2}$ |

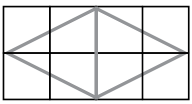
$$\boxed{A = \frac{b \times h}{2}}$$

Fórmula

**5.** Deducir la fórmula para calcular el área de un rombo.

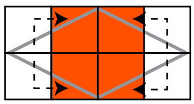
## Casos Particulares

### CASO 1



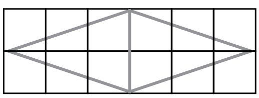
$d = 2$

$D = 4$



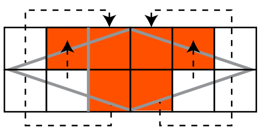
Por traslado de regiones
A = 4 cuadraditos

### CASO 2



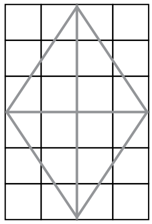
$d = 2$

$D = 6$



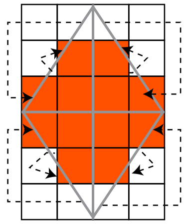
Por traslado de regiones
A = 6 cuadraditos

## CASO 3



*D* = 6

*d* = 4



Por traslado de regiones
A = 12 cuadraditos

## Caso General

Del análisis anterior, se puede establecer que el área de un rombo es el producto de la diagonal mayor (D) por la diagonal menor (d) dividido entre 2.

En la gráfica, se puede observar que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo

| D | d | $A = \frac{D \times d}{2}$ |
|---|---|---|
| 4 | 2 | 4 |
| 5 | 2 | 6 |
| 6 | 4 | 12 |
| • | • | • |
| • | • | • |
| • | • | • |
| *p* | *q* | $\frac{p \times q}{2}$ |

$$\boxed{A = \frac{D \times d}{2}}$$

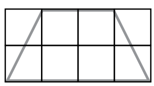
Fórmula

**6.** Deducir la fórmula para calcular el área de un trapecio.

## Casos Particulares

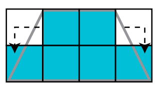
## CASO 1

*b* = 2



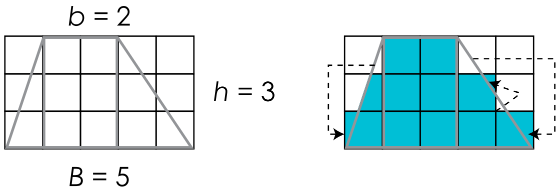
*h* = 2

*B* = 4



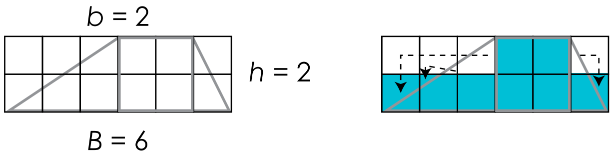
Por traslado de regiones
A = 6 cuadraditos

## CASO 2




Por traslado de regiones
A = 10.5 cuadraditos

## CASO 3




Por traslado de regiones
A = 8 cuadritos

## Caso General

Para deducir la fórmula, se hace necesario establecer combinaciones con los datos acotados en cada figura, de manera que al operar, dé como resultado el número de cuadraditos que aparece bajo la región del trapecio.

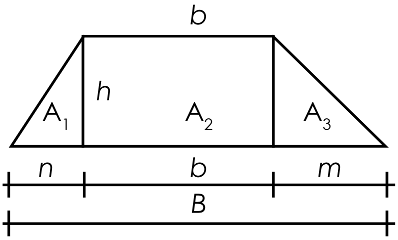
Es decir, el área del trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases (B base mayor y b base menor) multiplicado por la altura.

| B | b | h | B+b | (B+b)h | $A = \frac{(B \times b)h}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 2 | 6 | 12 | 6 |
| 5 | 2 | 3 | 7 | 21 | 10.5 |
| 6 | 2 | 2 | 8 | 16 | 8 |
| • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • | • |
| $p$ | $q$ | $r$ | $p+q$ | $(p+q)r$ | $\frac{(p+q)r}{2}$ |

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Fórmula

Aunque también se puede deducir haciendo uso de las fórmulas del triángulo y el rectángulo analizadas anteriormente.




$A_t = A_1 + A_{2+} + A_3$ El todo es igual a la suma de las partes

$A_t = \frac{n * h}{2} + b * h + \frac{m * h}{2}$ Fórmulas para calcular el área de un triángulo y un rectángulo

$A_t = \frac{n * h + 2b * h + m * h}{2}$ Mínimo común denominador

$A_t = \frac{h(n + 2b + m)}{2}$ Fctor común monomio

$A_t = \frac{h[n + b + m) + b]}{2}$ Propiedad asociativa y desdoblando 2b

$\boxed{A = \frac{(B + b)h}{2}}$ Cambio de variable

**7.** Calcular mentalmente $(185)^2$

## Resolución

Consideramos tres casos del cuadrado de un número que termina en “5”.

## Caso 1

$(25)^2 = 625$
*Eliminando el 5, del número 25 nos queda el 2
* Multiplicar el número 2 por el número que le sigue 2 x 3 = 6
* Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 6 obteniéndose:
$(25)^2 = 625$

## Caso 2

$(45)^2 = 2025$

* Eliminando el 5, del número 45 nos queda 4
* Multiplicar el número 4 por el número que le sigue 4 x 5=20
* Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 20 obteniéndose:

$(45)^2 = 2025$

## Caso 3

$(75)^2 = 5625$

* Eliminando el 5, del número 75 nos queda 7
* Multiplicar el número 7 por el número que le sigue 7 x 8= 56
* Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 56 obteniéndose:

$(75)^2 = 5625$

## Caso General

$(185)^2= 34225$

* Eliminando el 5, del número 185 nos queda 18
* Multiplicar el número 18 por el número que le sigue

$18 \times (10 + 9) = 180 + 162 = 342$

* Finalmente, se le agrega el número 25 a la derecha de 342 obteniéndose:

$(185)^2= 34225$

**8.** Utilice el razonamiento inductivo para determinar el resultado de $(11111111)^2$

## Resolución

El cuadrado de un número formado sólo por cifras uno, puede ser analizado de la siguiente manera.

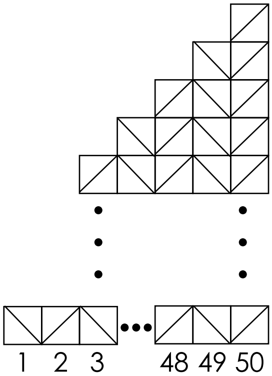
| | | |
|---|---|---|
| $(1)^2 = 1$ | una cifra 1 | caso 1 |
| $(11)^2 = 121$ | dos cifras 1 | caso 2 |
| $(111)^2 = 12321$ | tres cifra 1 | caso 3 |
| $(1111)^2 = 1234321$ | cuatro cifras 1 | caso 4 |
| $(11111111)^2 = 1234567\underline{\mathbf{8}}7654321$ | ocho cifras 1 | caso 8 |

Número de cifras uno

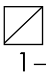
Como podemos observar, se obtiene escribiendo la serie natural, desde uno hasta el número de cifras uno (8) y luego regresando hasta uno.

**Nota.-** “Esto se cumple hasta nueve cifras uno.

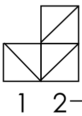
**9.** ¿Cuántos triángulos hay en total en la siguiente figura?



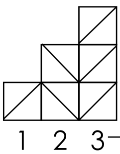

* Veamos qué sucede en tres casos particulares.



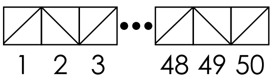

$\longrightarrow 2(1) = 2$




$\longrightarrow 2(1 + 2) + 1 = 7$




$\longrightarrow 2(1 + 2 + 3) + \underbrace{(1 + 2)}_{-1} = 15$




$\longrightarrow 2(1 + 2 + 3 + ... + 50) + \underbrace{(1 + 2 + 3 + ... + 49)}_{-1}$

$$= 2\left(\frac{50 * 51}{2}\right) + \frac{49 * 50}{2} = 3775$$

## PROBLEMAS SOBRE CIFRAS TERMINALES

En esta parte, nos interesa conocer en qué cifra termina un número que está elevado a un cierto exponente (n) entero positivo

## Caso 1

"Para números que terminan en 0, 1, 5, 6."

$(\ldots 0)^n = \ldots 0$

$(\ldots 1)^n = \ldots 1$

$(\ldots 5)^n = \ldots 5$

$(\ldots 6)^n = \ldots 6$

## Ejemplos

**10.** En qué cifra termina$(26)^7$

$(26)^7 = (\ldots 6)^7 = \ldots 6$

$(26)^7 = 8031810176$ (Comprobación)

**11.** En qué cifra termina $2005^{3005}$

$2005^{3005} = (\ldots 5)^n = \ldots 5$

## Caso 2

"Para números que terminan en 4 ó 9".

$$\left.\begin{array}{l} 4^1 = 4 \\ 4^2 = 16 \\ 4^3 = 64 \\ 4^4 = 256 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ldots 4)^{par} = \ldots 6 \\ (\ldots 4)^{impar} = \ldots 4 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 9^1 = 9 \\ 9^2 = 81 \\ 9^3 = 729 \\ 9^4 = 6561 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ldots 9)^{par} = \ldots 1 \\ (\ldots 9)^{impar} = \ldots 9 \end{array}$$

## Ejemplos

**12.** En qué cifra termina $(14)^8$

$(14)^8 = (\ldots 4)^{par} = \ldots 6$

$(14)^8 = 1475789056$ (Comprobación)

**13.** En qué cifra termina $(2004)^{3005}$

$(2004)^{3005} = (\ldots 4)^{impar} = \ldots 4$

**14.** En qué cifra termina $19^7$

$19^7 = (\ldots 9)^{impar} = \ldots 9$

$19^7 = 893871739$ (Comprobación)

**15.** En qué cifra termina$3019^{1004}$

$3019^{1004} = (\ldots 9)^{par} = \ldots 1$

## Caso 3

Para números que terminan en 2, 3, 7 ó 8 como:

$$\left.\begin{array}{l} 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \\ 2^3 = 8 \\ 2^4 = 16 \end{array}\right\} (\ldots 2)^4 = \ldots 6$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^5 = 32 \\ 2^6 = 64 \\ 2^7 = 128 \\ 2^8 = 256 \end{array}\right\} \text{“Cada grupo de cuatro } (4^*) \text{ la última cifra se repite”}$$

## Ejemplos

**16.** En qué cifra termina $(13)^7$

$3^1 = 3$ $\quad$ $3^5 = 243$
$3^2 = 9$ $\quad$ $3^6 = 729$
$3^3 = 27$ $\quad$ $3^7 = 2187$
$3^4 = 81$ $\quad$ $3^8 = 6561$
$13^7 = (\ldots 3)^{4^*+3} = (\ldots 3)^3 = \ldots 7$
$13^7 = 62748517$ (Comprobación)

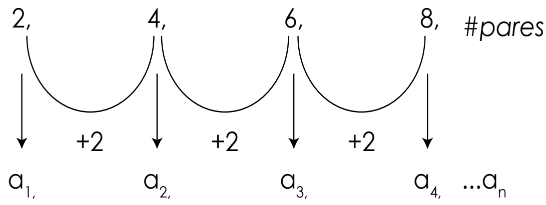
**17.** En qué cifra termina $2008^{3008}$

$8^1 = 8$ $\quad$ $8^5 = 32768$
$8^2 = 64$ $\quad$ $8^6 = 262144$
$8^3 = 512$ $\quad$ $8^7 = 2097152$
$8^4 = 4096$ $\quad$ $8^8 = 16777216$
$2008^{3008} = (\ldots 8)^{4^*+4} = (\ldots 8)^4 \ldots 6$
$3008/4 = 752$ $\quad$ $3008 = 4^* + 4$

**18.** Indicar la ley de formulación en:

2, 4, 6, 8, …

**Resolución**




**Casos Particulares**

**Caso 1**

$a_1 = 2(1) = 2$

**Caso 2**

$a_2 = 2(2) = 4$

**Caso 3**

$a_3 = 2(3) = 6$

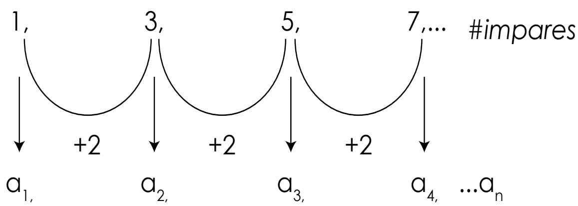
**Caso General**

$a_n = 2n$ Ley de Formulación

**19.** Indicar la ley de formulación en:

1, 3, 5, 7,…

**Resolución**



## Casos Particulares

**Caso 1**

$a_1 = 2(1) - 1 = 1$

**Caso 2**

$a_2 = 2(2) - 1 = 3$

**Caso 3**

$a_3 = 2(3) - 1 = 5$

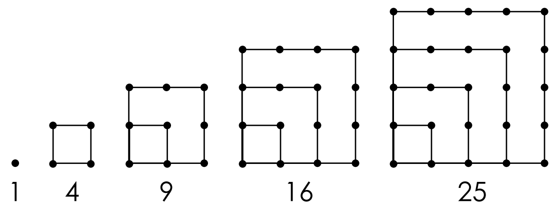
**Caso 4**

$a_4 = = 2(4) - 1 = 7$

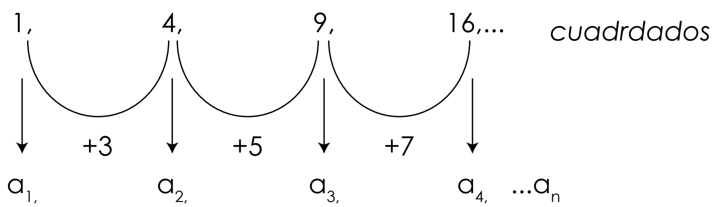
**Caso General**

$a_n = 2n - 1$ Ley de formulación

**20.** Indicar la ley de formulación de la serie gráfica que se muestra a continuación:




## Resolución




## Casos Particulares

**Caso 1**

$a_1 = 1^2 = 1$

**Caso 2**

$a_2 = 2^2 = 4$

**Caso 3**

$a_3 = 3^2 = 9$

**Caso 4**

$a_4 = 4^2 = 16$

**Caso General**

$a_n = n^2$ Ley de formulación

**21.** Indicar la ley de formulación en:

1, 8, 27, 64,…

**Resolución:**

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 8, & 27, & 64,\ldots & \textit{cubos} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_{1,} & a_{2,} & a_{3,} & a_{4,} \ \ldots a_n & \end{array}$$

**Casos Particulares**

**Caso 1**

$a_1 = 1^3 = 1$

**Caso 2**

$a_2 = 2^3 = 8$

**Caso 3**

$a_3 = 3^3 = 27$

**Caso 4**

$a_4 = 4^3 = 64$

**Caso General**

$a_n = n^3$ Ley de formulación

**22.** Indicar la ley de formulación en:

2, 4, 8, 16,…

**Resolución:**

$$\begin{array}{ccccc} 2, & 4, & 8, & 16,\ldots & \textit{Potencias de 2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_{1,} & a_{2,} & a_{3,} & a_{4,}\ \ldots a_n & \end{array}$$

**Casos Particulares**

**Caso 1**

$a_1 = 2^1 = 2$

**Caso 2**

$a_2 = 2^2 = 4$

**Caso 3**

$a_3 = 2^3 = 8$

**Caso 4**

$a_4 = 2^4 = 16$

**Caso General**

$a_n = 2^n$ Ley de formulación

**23.** Indicar la ley de formulación en:

1, 3, 7, 15,…

### Resolución

$$\begin{array}{ccccccccc}
1, & & 3, & & 7, & & 15,\ldots & & \\
\downarrow & +2 & \downarrow & +4 & \downarrow & +8 & \downarrow & & \\
a_{1,} & & a_{2,} & & a_{3,} & & a_{4,} & \ldots a_n &
\end{array}$$

### Casos Particulares

### Caso 1

$a_1 = 2^1 - 1 = 1$

### Caso 2

$a_2 = 2^2 - 1 = 3$

### Caso 3

$a_3 = 2^3 - 1 = 7$

### Caso 4

$a_4 = 2^4 - 1 = 15$

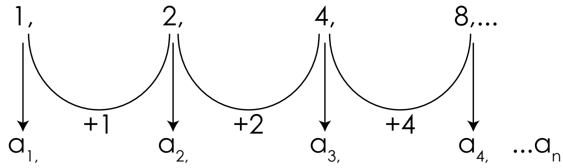
### Caso General

$a_n = 2^n - 1$

**24.** Indicar la ley de formulación de la siguiente serie:

1, 2, 4, 8, …

**Resolución:**




**Casos Particulares**

**Caso 1**

$a_1 = 2^1 / 2 = 1$

**Caso 2**

$a_2 = 2^2 / 2 = 2$

**Caso 3**

$a_3 = 2^3 / 2 = 4$

**Caso 4**

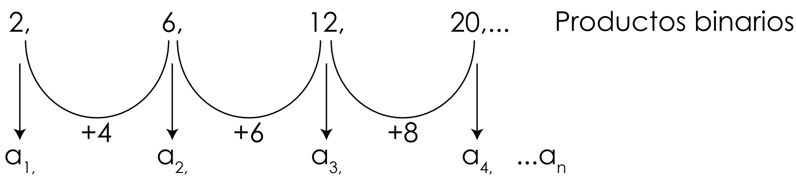
$a_4 = 2^4 / 2 = 8$

**Caso General**

$a_n = 2^n / 2 = 2^{n-1}$ Ley de Formulación

**25.** Indicar la ley de formulación de la siguiente serie: 2, 6, 12, 20,…

**Resolución:**



## Casos Particulares

### Caso 1

$a_1 = 1 \times 2 = 2$

### Caso 2

$a_2 = 2 \times 3 = 6$

### Caso 3

$a_3 = 3 \times 4 = 12$

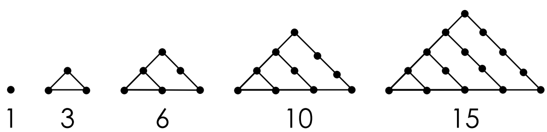
### Caso 4

$a_4 = 4 \times 5 = 20$

### Caso General

$a_n = n(n + 1)$ Ley de formulación

**26.** Indicar la ley de formulación de la serie formada por números triangulares que se muestra a continuación:




### Resolución:

1, 3, 6, 10,... # Triangulares

+2 +3 +4

$a_{1}, a_{2}, a_{3}, a_{4}, \ldots a_n$

## Casos Particulares

### Caso 1

$a_1 = (1 \times 2) / 2 = 1$

### Caso 2

$a_2 = (2 \times 3) / 2 = 3$

### Caso 3

$a_3 = (3 \times 4) / 2 = 6$

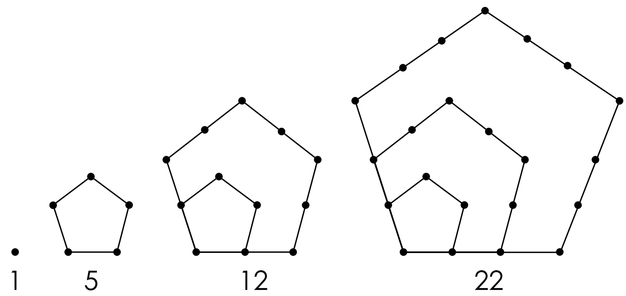
### Caso 4

$a_4 = (4 \times 5) / 2 = 10$

### Caso General

$a_n = n(n + 1) / 2$ Ley de formulación

**27.** Identificar la ley de formulación de la serie:




### Resolución

### Casos Particulares

### Caso 1

Para $n = 1$
$a_1 = 1(3*1-1)/2 = 1.$

### Caso 2

Para $n = 2$
$a_2 = 2\ (3*2-1)/2 = 5.$

**Caso 3**

Para $n = 3$
$a_3 = 3\ (3*3-1)/2 = 12.$

**Caso 4**

Para n = 4
$a_4 = 4\ ((3*4-1)/2) = 22.$

**Caso General**

Para **n** términos

$a_n = n(3n - 1)/2$ Ley General

**28.** Encontrar la ley general para hallar la suma de los << n >> primeros números naturales.

**Resolución:**

$S = 1+2+3+4+...+ n$

Siendo **n**: número de sumandos.

**Casos Particulares**

**Caso 1**

Para n = 1
1 = 1 = (1(1+1))/2

**Caso 2**

Para n = 2
1 + 2 = 3 = (2(2+1))/2

**Caso 3**

Para n = 3
1 + 2 + 3 = 6 = (3(3+1))/2

**Caso 4**

Para $n = 4$
$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = (4(4+1))/2$

**Caso General**

Para **n** términos $1 + 2 + 3 + 4 + \dots n = n(n+1)/2$ Ley General

Es decir, la fórmula para calcular la suma de los "n" primeros números naturales, está dada por:

$S = n(n + 1)/2$ Fórmula

**29.** Encontrar la fórmula para hallar la suma de los "n" primeros números naturales impares.

**Resolución**

$S = 1+3+5+7+\dots+2n - 1$
Siendo n: número de sumandos.

**Casos Particulares**

**Caso 1**

Para $n = 1$
$1 = 1 = 1^2$

**Caso 2**

Para $n = 2$
$1 + 3 = 4 = 2^2$

**Caso 3**

Para $n = 3$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

**Caso 4**

Para $n = 4$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

## Caso General

Para $n$ términos

¿Hay una característica en los resultados 1, 4, 9 y 16? Usted no dudará en conjeturar que cada uno es un cuadrado perfecto y es también probable que piense que cada uno es el cuadrado del número de términos que se han sumado, con esto se ha descubierto la ley de formulación para sumar números impares positivos.

$1 + 3 + 5 + 7 + ...+ 2n - 1 = n^2$ Ley General
$S = n^2$ Fórmula

**30.** Deducir la fórmula para hallar la suma de los << n >> primeros números naturales pares.

## Resolución:

$2 + 4 + + 6 + 8 + ... + 2n$
Siendo ***n***: número de sumandos

## Casos Particulares

## Caso 1

Para $n$=1
$2 = 2 = 1(1+1)$

## Caso 2

Para $n = 2$
$2 + 4 = 6 = 2(2+1)$

## Caso 3

Para $n = 3$
$2 + 4 + 6 = 12 = 3(3+1)$

## Caso 4

Para n = 4
$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4(4+1)$

**Caso General**

Para *n* sumandos
$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n = n(n+1)$ Ley General

Es decir, la fórmula para calcular la suma de los << n >> primeros números naturales pares, está dado por la fórmula:

$S = n(n + 1)$

**31.** Hallar la suma de: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3$

**Resolución:**

Para encontrar una fórmula que nos permita calcular la suma de cubos, analicemos 4 casos particulares.
**Casos Particulares**

**Caso 1**

$1^3 = 1 = 1^2$

**Caso 2**

$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$

**Caso 3**

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2$

**Caso 4**

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2$

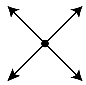
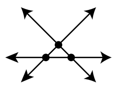
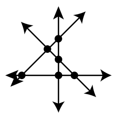
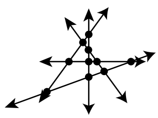
**Caso General**

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$ Ley General

La ley general nos dice que: "la suma de los **n** primeros cubos es igual al cuadrado de la suma de sus bases". $S = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$
**32.** Hallar el máximo número de puntos de corte para << n >> rectas secantes.

## Resolución:

### Casos Particulares

| Casos | Gráfico | # Rectas Secantes (n) | Máximo número de puntos de corte | Análisis |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  | 2 | 1 | $1 = \frac{2(2-1)}{2}$ |
| 2 |  | 3 | 3 | $3 = \frac{3(3-1)}{2}$ |
| 3 |  | 4 | 6 | $6 = \frac{4(4-1)}{2}$ |
| 4 |  | 5 | 10 | $10 = \frac{5(5-1)}{2}$ |

El máximo número de puntos de corte (*P max*) de << n >> rectas secantes es:

$P_{max} = n(n-1)/2$ Fórmula

## OBSERVACIÓN:

Nótese que en la columna de la derecha se forma una serie.

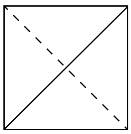
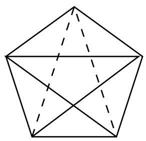
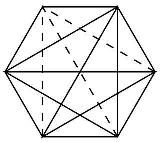
1, 3, 6, 10, 15, 21,

Es decir, con 6 rectas habrían 15 puntos de corte, con 7 rectas habrían 21 puntos de corte y así continuaría la serie.

**33.** Descubrir la fórmula para hallar el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de << n >> lados.

## Resolución

## Casos Particulares

| Casos | Polígono | # de lados (n) | # de diagonales de un vértice | Total # de diagonales | Análisis |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 |  | 4 | 1 | 2 | $2 = \frac{4\,(4-3)}{2}$ |
| 2 |  | 5 | 2 | 5 | $5 = \frac{5\,(5-3)}{2}$ |
| 3 |  | 6 | 3 | 9 | $9 = \frac{6\,(6-3)}{2}$ |

## Caso General

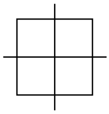
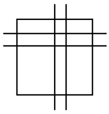
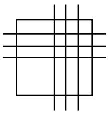
$\#D = n(n - 3) / 2$ Fórmula

De un vértice, se pueden trazar ($n$ - 3) diagonales, luego de ***n*** vértices se trazan $n(n-3)$ diagonales, pero debemos dividir entre 2 porque una misma diagonal se está considerando 2 veces.

**34.** Deducir la fórmula para hallar los puntos de corte de << n >> rectas secantes a un cuadrado.

## Resolución:

## Casos Particulares

| Casos | Gráfico | # de rectas secantes (n) | # de puntos de corte | Análisis |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  | 1 | 5 | 5 = 1 x 5 = 1(1 + 4) |
| 2 |  | 2 | 12 | 12 = 2 x 6 = 2(2 + 4) |
| 3 |  | 3 | 21 | 21 = 3 x 7 = 3(3 + 4) |

## Gaso General

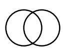
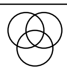
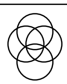
Para << n >> rectas secantes en un cuadrado.

F = $n(n + 4)$ Fórmula

**35.** Deducir una fórmula para hallar el máximo número de puntos de corte de << n >>circunferencias secantes.

## Resolución

## Casos Particulares

| Casos | Gráfico | # de circunferencias (n) | # de puntos de corte | Análisis |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  | 2 | 2 | 2 = 2(1) = 2(2 -1) |
| 2 |  | 3 | 6 | 6 = 3(2) = 3(3 - 1) |
| 3 |  | 4 | 12 | 12 = 4(3) = 4(4 -1) |

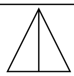
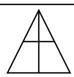
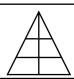
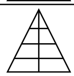
### Caso General

Para << n >> circunferencias secantes.
Pc = $n(n - 1)$ Fórmula

**36.** Deducir por inducción, la ley de formulación para determinar la cantidad de triángulos que se pueden formar en un triángulo cortado por << n >> secantes.

### Resolución

### Casos Particulares

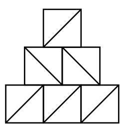
| Casos | Figura | # de secantes (n) | # de triángulos | Análisis |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  | 1 | 3 | 3 = 3 x 1 |
| 2 |  | 2 | 6 | 6 = 3 x 2 |
| 3 |  | 3 | 9 | 9 = 3 x 3 |
| 4 |  | 4 | 12 | 12 = 3 x 4 |

### Caso General

F = $3n$ Fórmula

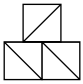
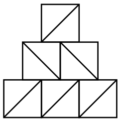
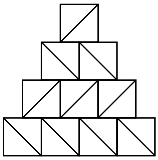
Como podemos observar, al número de triángulos que se pueden contar en cada figura, se tiene que multiplicar la constante 3 (serie de múltiplos de 3) por el número de rectas secantes que cortan al triángulo.

**37.** Descubrir la fórmula para contabilizar el número de triángulos simples formados en una pirámide de << n >> cuadrados de base (ver figura).



## Resolución

### Casos Particulares

| Casos | Figura | # de triágulos simples | Análisis |
|---|---|---|---|
| 1 |  | 2 | 2 = 1 x 2 = 1(1 + 1) |
| 2 |  | 6 | 6 = 2 x 3 = 2(2 + 1) |
| 3 |  | 12 | 12 = 3 x 4 = 3(3 + 1) |
| 4 |  | 20 | 20 = 4 x 5 = 4(4 + 1)<br>↓<br># de cuadrados base |

### Caso General

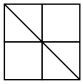
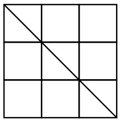
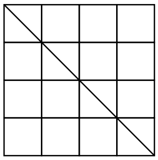
F = n (n + 1) Fórmula

Si quisiéramos contar el número de triángulos en una pirámide que tenga como base 40 cuadrados sería una tarea demasiada tediosa. Es por ello que conviene establecer la ley de formulación.

**38.** Encontrar la fórmula para determinar la cantidad de triángulos que se pueden contar en un cuadrado compuesto por cuadrículas al trazar su diagonal principal.

**Resolución**

### Casos Particulares

| Casos | Figura | # de triágulos simples | Análisis |
|---|---|---|---|
| 1 |  | 2 | 2 = 1(1 + 1) |
| 2 |  | 6 | 6 = 2(2 + 1) |
| 3 |  | 12 | 12 = 3(3 + 1) |
| 4 |  | 20 | 20 = 4 (4 + 1)<br>↓<br># de cuadrados por lado |

### Caso General

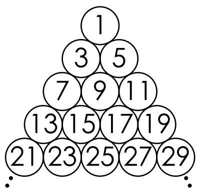
F = n (n + 1) Fórmula

Observación: El número de triángulos que se pueden contar en cada una de las figuras forma la serie.

$$\begin{array}{ccccccccc} 2, & & 6, & & 12, & & 20, & & 30, \\ & +4 & & +6 & & +8 & & +10 & \end{array}$$

Es decir, en un cuadrado de 5 cuadraditos de lado se podrán contar 30 triángulos.

**39.** Descubrir la fórmula para calcular la suma de los números de la enésima fila en la siguiente pirámide formada por esferas que contienen números impares.



## Resolución

### Casos Particulares

| Casos | Fila | Suma | Análisis |
|---|---|---|---|
| 1 | $F_1$ | 1 = 1 | $1 = 1^3$ |
| 2 | $F_2$ | 8 = 3+5 | $8 = 2^3$ |
| 3 | $F_3$ | 27 = 7+9+11 | $27 = 3^3$ |
| 4 | $F_4$ | 64 = 13 + 15 + 17 + 19 | $64 = 4^3$ |

### Caso General

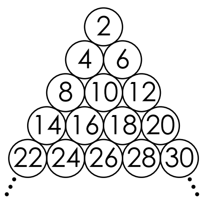
$Sn = n^3$ Fórmula

Como podemos observar los resultados de cada fila son cubos perfectos.

**Solución Particular:** Si quisiéramos encontrar la suma de los números de la fila 20 sería:

$S_{20} = 20^3 = 8000$

**40.** Deducir la fórmula para calcular la suma de la << n >>-sima-fila en la siguiente pirámide formada por esferas que contienen números pares.



**Resolución**

**Casos Particulares**

| Casos | Fila | Suma | Análisis |
|---|---|---|---|
| 1 | $F_1$ | 2=2 | $2=1x2=1x(1^2+1)$ |
| 2 | $F_2$ | 10=4+6 | $10=2x5=2x(2^2+1)$ |
| 3 | $F_3$ | 30=8+10+12 | $30=3x10=3x(3^2+1)$ |
| 4 | $F_4$ | 68=14+16+18+20 | $68=\underset{\downarrow}{4}x17=4x(4^2+1)$<br># de términos |

**Caso General**

$Sn = n(n^2 + 1)$ *n: # de términos*

**Solución Particular:** La suma de los números de la fila 10 es:

$F_{10} = 10(10^2 + 1)=1010$

**41.** Aplicando la propiedad log $a.b = log\ a + log\ b$. Deducir la fórmula del logaritmo de una potencia.

**Resolución**

**Caso 1**

$log\ 5^2 = log(5 \times 5) = log\ 5 + log\ 5 = 2\ log5$

**Caso 2**

$log\ 5^3 = log(5 \times 5 \times 5) = log\ 5 + log\ 5 + log\ 5 = 3log5$

**Caso 3**

$log\ 5^4 = log(\ 5 \times 5 \times 5 \times 5) = log5 + log5 + log5 + log5 = 4log5$

## Caso General

Después de examinar los patrones que se van creando, se puede generalizar para el caso de cualquier $a > 0$.

$$\log a^n = n.\log a$$

**42.** El siguiente mosaico, corresponde al diseño de un embaldosado de una sala de uso múltiple tal como la que se muestra en las figuras que se presentan a continuación. Cuando se hayan colocado 81 baldosas rojas ¿Cuántas baldosas blancas se requerirán?

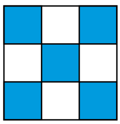


Fig. 1

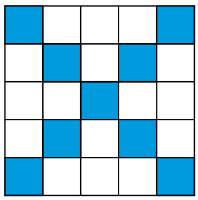


Fig. 2

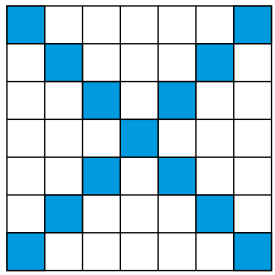


Fig. 3

## Resolución

En base a las figuras anteriores, observemos que se puede formar una serie numérica tomando en cuenta los cuadraditos que aparecen pintados de color rojo y los que aparecen sin pintar (blanco).

**Rojo:** 5, 9, 13, …

**Blanco:** 4, 16, 36,…

En base a las series numéricas anteriores, escribamos el término general de cada serie

| | Rojo | Blanco |
|---|---|---|
| Fig. 1 | $a_1 = 4(1) + 1 = 5$ | $a_1 = (2 * 1)^2 = 4$ |
| Fig. 2 | $a_2 = 4(2) + 1 = 9$ | $a_2 = (2 * 2)^2 = 16$ |
| Fig. 3 | $a_3 = 4(3) + 1 = 13$ | $a_3 = (2 * 3)^2 = 36$ |
| Fig. n | $a_n = 4n + 1$ | $a_n = 4n^2$ |

$a_n = 4n + 1$
$81 = 4(n) + 1$
$n = 20$(fig. 20)
$a_n = 4n^2$
$a_{20} = 4 * 20^2 = 1600$ Baldosas

**43.** ¿Qué número sigue en la serie?

27, 23, 19, 15, ____

## Resolución

Cuando la disminución es leve en la serie, se trata de una resta; en este caso al número base restamos 4.

27, 23, 19, 15, <u>11</u>,
-4 -4 -4 -4

**44.** ¿Qué número sigue en la serie?

17, 24, 31, 38, ____

## Resolución

Cuando el aumento es leve en la serie, se trata de una suma; en este caso al número base sumamos 7.

17, 24, 31, 38, <u>45</u>,
+7 +7 +7 +7

**45.** ¿Qué número sigue en la serie?

20000, 4000, 800, 160, ____

### Resolución

Cuando la disminución es fuerte en la serie, se trata de una división; en este caso al número base se divide entre 5.

$$20000,\ 4000,\ 800,\ 160,\ \underline{32}$$
$$\div 5 \quad \div 5 \quad \div 5 \quad \div 5$$

**46.** ¿Qué número sigue en la serie?

6, 24, 96, 384, ____

### Resolución

Cuando el aumento es fuerte en la serie, se trata de una multiplicación; en este caso al número base se multiplica por 4.

$$6,\ 24,\ 96,\ 384,\ \underline{1536}$$
$$*4 \quad *4 \quad *4 \quad *4$$

**47.** ¿Qué número sigue en la serie?

4, 6, 12, 14, 28, ____

### Resolución.

En este caso, en el primer ciclo la serie aumenta de manera suave y en el segundo ciclo de manera fuerte, por lo tanto, concluimos que se trata de una suma y un producto.

$$4,\ 6,\ 12,\ 14,\ 28,\ \underline{30},$$
$$+2 \quad *2 \quad +2 \quad *2 \quad +2$$

**48.** ¿Qué número sigue en la serie?

741, 247, 246, 82, 81, ____

### Resolución

Como se observa, la serie disminuye de manera fuerte en el primer ciclo y de manera suave en el segundo ciclo, lo que nos conduce a pensar que se trata de una división y una resta.

741, 247, 246, 82, 81, 27,

÷3 -1 ÷3 -1 ÷3

**49.** ¿Qué número sigue en la serie?

3, 10, 17, 22, 27, 30, ____

### Resolución.

La serie va aumentando suave y cada dos ciclos más suave.

3, 10, 17, 22, 27, 30, 33,

+7 +7 +5 +5 +3 +3

Lo que nos hace suponer que se trata de una suma en orden decreciente.

**50.** ¿Qué número sigue en la serie?

2, 6, 24, 120, ____

### Resolución

La serie va aumentando, pero cada vez más fuerte.

2, 6, 24, 120, 720,

*3 *4 *5 *6

Lo que nos hace suponer que se trata de un producto.

**51.** ¿Qué número sigue en la serie?

3, 7, 12, 19, 29, ____

## Resolución

En algunas ocasiones, la regla computacional no se la puede identificar de manera directa, se hace necesario volver a analizar la nueva serie que aparece en la parte inferior para encontrar el patrón de referencia.

3, 7, 12, 19, 29, <u>43</u>
+4 +5 +7 +10 +14
+1 +2 +3 +4

**52.** ¿Qué número sigue en la serie?

1, 7, 25, 61, 121, ____

## Resolución

A partir del primer análisis parecería no existir un patrón de referencia, en muchos de los casos se hace necesario seguir analizando los sub niveles hasta encontrar la regla computacional.

1, 7, 25, 61, 121, <u>211</u>
+6 +18 +36 +60 +90
+12 +18 +24 +30
+6 +6 +6

**53.** ¿Qué número sigue en la serie?

17, 15, 14, 13, 11, 11, ____

## Resolución

En este caso hay que analizar la serie saltando un término. Puesto que si analizamos de forma continua no vamos a poder encontrar una regularidad

-2 -2
17, 15, 14, 13, 11, 11, <u>8</u>
-3 -3 -3

**54.** ¿Qué número sigue en la serie?

15, 14, 7, 21, 25, 24, ____

### Resolución

Como se puede observar en esta serie, con los números del 1 al 4 van realizándose las cuatro operaciones.

15, 14, 7, 21, 25, 24, 12
-1 ÷2 *3 +4 -1 ÷2

**55.** ¿Qué número sigue en la serie?

2, 7, 22, 67, ____

### Resolución.

Analizando la serie, concluimos que aumenta 5 unidades a partir del número base y luego va triplicándose a partir de las 5 unidades del número base.

2, 7, 22, 67, 202
+5 +15 +45 +135
*3 *3 *3

**56.** ¿Qué número sigue en la serie?

2, 7, 27, 136, ____

### Resolución:

2 * 3 + 1 = 7
7 * 4 - 1 = 27
27 * 5 + 1 = 136
136 * 6 - 1= 8 15
2, 7, 27, 136, 815

**57.** ¿Qué número sigue en la serie?

1, 2, 3,1, 4, 9,1, 8, ____

**Resolución:**

$1^1, 2^1, 3^1, 1^2, 2^2, 3^2, 1^3, 2^3, 3^3$
1, 2, 3, 1, 4, 9,   1, 8, 27

**58.** ¿Qué número sigue en la serie?

29, 3, 32, 4, 36, 5, 41, 6 ____

**Resolución**

+1 +1 +1
29, 3, 32, 4, 36, 5, 41, 6, <u>47</u>
+3 +4 +5 +6

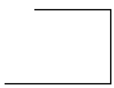
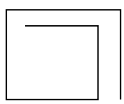
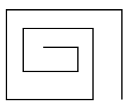
**59.** ¿Qué número sigue en la serie?

3, 13, 53, 213, ____

**Resolución.**

3 13 53 213 853
+10 +40 +160 +640
*4 *4 *4

**60.** Determinar cuántos segmentos rectos se necesitarán para formar la figura número 10.

| Fig.- 1 | Fig.- 2 | Fig.- 3 | Fig.- 4 | ... | Fig.- 10 |
|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  | ... | ... |

**Resolución**

Una aplicación del razonamiento inductivo son los patrones numéricos, los mismos que nos permiten predecir “lo que viene después” en una lista de números.

En nuestro ejemplo, si elaboramos un cuadro con la información dada nos queda:

| Figura | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de Segmentos | 1 | 3 | 6 | 10 | ... | ... |

Del número de segmentos se deduce la serie:

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55

+2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10

Aplicando el método de sumas sucesivas podemos determinar que la Figura Nº 10 tiene 55 segmentos

**61.** ¿Qué letra sigue en la serie B, D, G, K,…?

**Resolución.**

"La serie inicia en "B" y se desplaza "2" letras hacia adelante, luego se desplaza "3" letras hacia adelante, "4" letras hacia adelante y consecuentemente para encontrar la siguiente letra de la serie habría que desplazarse 5 letras hacia delante, con lo cual llegamos a la letra O.

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R T U V W X Y Z

2 3 4 5

**62.** ¿Qué letra sigue en la serie A, E, D, H, G,…?

**Resolución.**

"La serie inicia en "A" y se desplaza "4" letras hacia adelante, luego regresa "1" letra y continua la serie literal con este patrón".

**A** B C **D** **E** F **G** **H** I J **K** L M N

4 4 4

Consecuentemente, la siguiente letra de la serie sería la **K**.

**63.** Señale los dos elementos que faltan en la sucesión:

1, C, 4, G, 8, L, __, _

## Resolución

Si vamos dando valores a cada una de las letras del abecedario la letra C tomaría el valor de 3, la letra G tomaría el valor de 7, la letra L tomaría el valor de 12, consecuentemente, nuestra serie estaría formada de la siguiente manera:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 4, | 7, | 8, | 12, | 13, | 18 |
| | ↓ | | ↓ | | ↓ | | ↓ |
| 1, | C, | 4, | G, | 8, | L, | 13, | Q |

Observemos en la serie numérica que se va sumando 2 para el segundo término, 1 para el tercer término, 3 para el cuarto término, 1 para el quinto término, 4 para el sexto término, 1 para el séptimo término y 5 para el octavo término.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

En los ejercicios del 1 al 4, observar la lista de igualdades que se presentan para predecir cuál será el resultado de la operación que se indica al final de cada ejercicio.

**1.** 15873 x **7** = 111111
15873 x **14** = 222222
15873 x **21** = 333333
15873 x **28** = 444444
. . .
. . .
. . .
**15873 x 56 = ...**

**2.** (**1** x 9) + 2 = 11
(**12** x 9) + 3 = 111
(123 x 9) + 4 = 1111
(**1234** x 9) + 5 = 11111
. . .
. . .
. . .
**(12345678 x 9) + 9 =…**

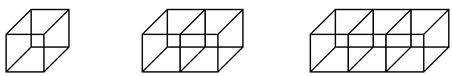
**3.** 37 x **3** = 111
37 x **6** = 222
37 x **9** = 333
37 x **12** = 444
. . .
. . .
. . .
37 x **24** =…

**4.** $1^2 + 1 = 2^2 - 2$
$2^2 + 2 = 3^2 - 3$
$3^2 + 3 = 4^2 - 4$
. . .
. . .
. . .
$8^2 + 8 = \ldots$

**5.** ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer el nombre María usando letras vecinas?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | A |
| | | | Í | A |
| | | R | Í | A |
| | A | R | Í | A |
| M | A | A | Í | A |

**6.** ¿Cuántos palitos se requieren para formar la figura 40?



?
…

Fig.- 1 Fig.- 2 Fig.- 3 Fig.- 40

**7.** ¿Cuál es el número que sigue en la serie?

2, 4, 6, 36, 42, __

**8.** ¿Cuál es el número que sigue en la serie?

2, 6, 11, 18, 28, __

**9.** Escribir la siguiente letra de la serie:

A, H, G, M, K, O, __

**10.** ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**11.** ¿De cuántas maneras es posible responder un examen de 10 preguntas tipo verdadero-falso?

---

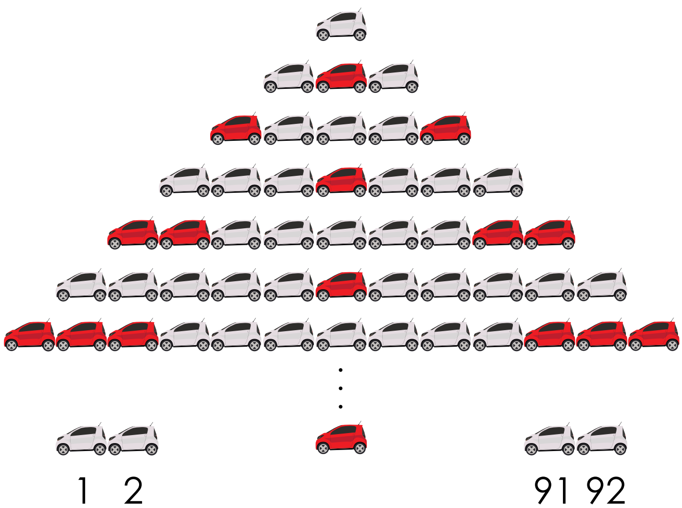
**12.** En la siguiente multiplicación. ¿Cuál es la suma de las cifras del producto?

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & \star & \star & 1 \\
 & & & \star & \star \\
\hline
 & \star & 4 & 4 & \star \\
\star & 4 & 4 & \star & \\
\hline
\star & 6 & 8 & 6 & \star
\end{array}
$$

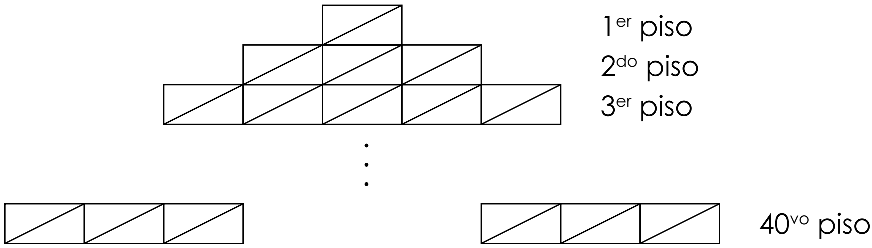
**13.** Sumar:

$$S = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2000}}$$

**14.** ¿Cuántos carritos de color rojo hay en total en la siguiente figura?



**15.** ¿Cuántos triángulos se pueden contar en total en la figura formada por cuarenta pisos.




**16.** Hallar la suma de las cifras del producto indicado.

$$P = \underbrace{2222 \ldots 22}_{99 \text{ cifras}} \times \underbrace{9999 \ldots 998}_{100 \text{ cifras}}$$

**17.** Observe la lista de igualdades que se presentan a continuación, si es una regularidad, establecer una ley general:

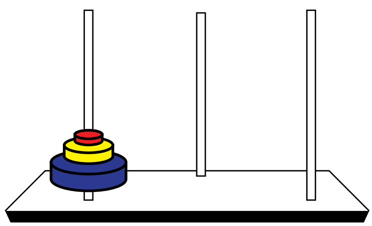
$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$
$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$
$$4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2$$

**18.** ¿Qué fórmula puede deducir al multiplicar cuatros números naturales consecutivos?

Ejemplo

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$
$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

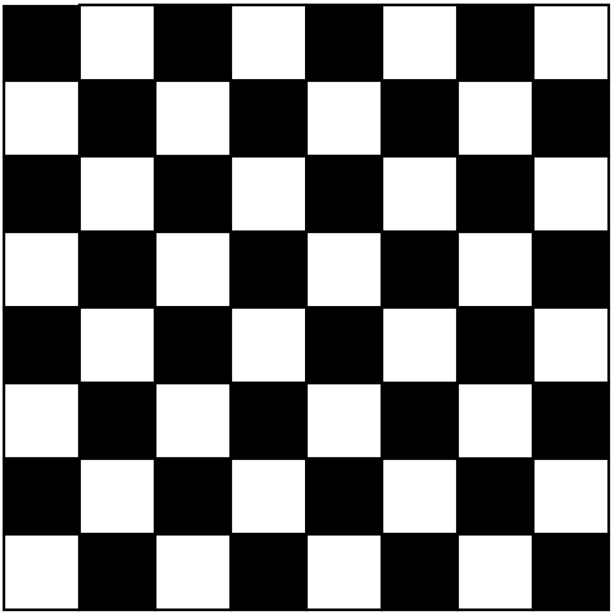
**19.** Se desea trasladar los "n" discos de la primera varilla a la tercera, tal como se muestra en el gráfico. ¿Cuántos movimientos como mínimo se debe hacer, tomando en cuenta que un disco grande no se puede colocar sobre un pequeño.



**20.** Halle la suma de todos los números del siguiente arreglo numérico.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | ... | ... | 20 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | ... | ... | 21 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | ... | ... | 22 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | ... | ... | 23 |
| ⋮ | | | | | | ⋮ |
| ⋮ | | | | | | ⋮ |
| 20 | 21 | 22 | 23 | ... | ... | 39 |

**21.** ¿Cuántos triángulos se podrán contar en total al trazar la diagonal principal de un tablero de ajedrez?



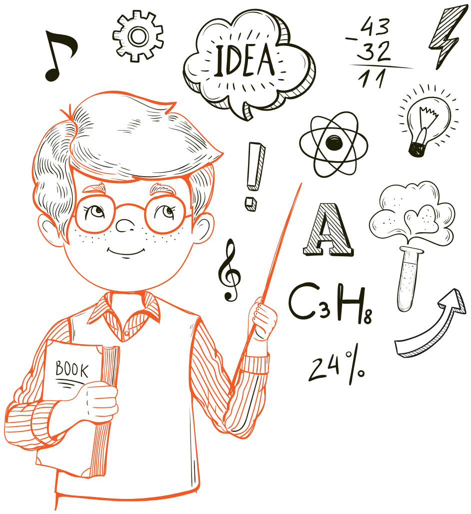
**22.** Calcular el valor de:

$$M = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{100 \times 101}$$

# RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

El razonamiento deductivo consiste en aplicar una ley ya demostrada a ciertos casos particulares, y es la base de las demostraciones matemáticas. Demostrar una propiedad es deducir a partir de otras anteriormente ya demostradas.

Este tipo de razonamiento garantiza la verdad de la conclusión si la información de la que se parte es verdadera.




**EJEMPLO.-**

**1.** ¿Cuántos divisores tiene el número 600?

**a. COMPRENDER EL PROBLEMA**

¿Qué quiero saber?

**b. CREAR UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA**

Seleccionamos la estrategia, en este caso emplear el razonamiento deductivo.

**c. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN**

Expresemos 600 en función de sus factores primos:

$600 = 2^3 * 5^2 * 3$

Dado el número:

$N = a^{\alpha} * b^{\beta} * c^{\gamma}$

La cantidad de divisores (cd) del número compuesto está dada por la fórmula:
$cd(N) = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

Consecuentemente en nuestro caso sería:

$cd(600) = (3+1)(2+1)(1+1) = 24$ divisores

## d. EXAMINAR LO HECHO

Para verificar el resultado, se debe establecer todas las combinaciones posibles entre los factores primos de 600 para poder determinar los 24 divisores.

**2.** Si $m^2 = 2$, ¿Cuál es el valor de $(m+1)(m-1)$?

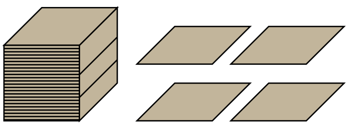
### Resolución

$(m + 1)(m - 1) = m^2 - 1$
Como $m^2 = 2$ por tanto
$m^2 - 1 = 2 - 1 = 1$

**3.** .Deducir la fórmula para calcular el volumen de un prisma:

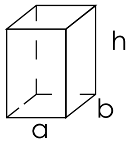
### Resolución

Para comprender de manera práctica la fórmula, consideremos que tenemos un montón de placas rectangulares muy delgadas, (se considera despreciable su espesor) del mismo tamaño, apiladas una sobre otra, tal como se muestra en la figura.



Como podemos observar, la acumulación de placas forma un cuerpo volumétrico cuya altura corresponderá al número total de placas.

Por tanto, el volumen de un prisma es el producto del área de la base por la altura.




$V = A_b.h$
$V = a.b.h$

Es lógico pensar que si el área de una figura plana es el producto de 2 dimensiones, el volumen de un cuerpo debe ser el producto de las 3 dimensiones. Desde luego, cualquier cara del prisma puede considerarse como base y por ende vamos a obtener el mismo volumen.

**4.** Hallar la suma de $(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 1000)$

**Resolución.**

La fórmula para hallar la suma de los "n" primeros términos de los números naturales es:

$S = n(a+u) / 2$

Donde:

a = primer término
n = número de términos
u = último término

Aplicando esta fórmula en el problema, tenemos que:

$S = n(a+u)/2$
$S = 1000(1 + 1000) / 2 = 500.500$

**5.** Calcular: $\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\ldots}}}$

**Resolución.**

Por regla de radicales sabemos que: $\sqrt[n]{A\sqrt[n]{A\sqrt[n]{A\ldots}}} = \sqrt[n-1]{A}$

En el ejercicio propuesto tenemos que:

$$\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\ldots}}} = \sqrt[3-1]{16} = \sqrt[2]{16} = \sqrt[2]{2^4} = 4$$

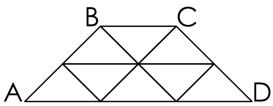
**6.** La suma de dos números es 164 y su cociente es 3. Hallar dichos números:

**Resolución**

$a + b = 164$
$a/b = 3$
$a = 3b$

| | |
|---|---|
| $3b + b = 164$ | $a = 3b$ |
| $4b = 164$ | $a = 3\ (41)$ |
| $b = 41$ | $a = 123$ |

**7.** La figura está formada por triángulos equiláteros y el área del polígono ABCD es $32\sqrt{3}$ cm². Hallar su perímetro.




**Resolución**

Por tanto el área de un triángulo equilátero es $32\sqrt{3}\ /\ 8\ = 4\sqrt{3}$

Al sustituir el valor del área en la fórmula $A = L^2\sqrt{3}\ /\ 4$ nos queda

$$32\sqrt{3}/8 = L^2\sqrt{3}\ /\ 4$$

De donde $L = 4$

Por lo tanto, el perímetro del trapecio sería $P = 8L$

$P = 8(4) = 32$ cm

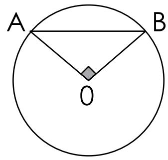
**8.** Calcular el valor de la expresión que se indica a continuación haciendo uso de los productos notables y propiedades de los exponentes.

$$E = \sqrt[4]{1 + 26\ (\ 3^3 + 1\ )(3^6 + 1)}$$

**Resolución**

$$E = \sqrt[4]{1 + (\ 3^3 - 1\ )(3^3 + 1)\ (3^6} + 1)$$
$$E = \sqrt[4]{1 + (\ 3^6 - 1\ )(3^6 + 1)}$$
$$E = \sqrt[4]{1 + 3^{12} - 1} = \sqrt[4]{3^{12}} = 27$$

**9.** El centro del círculo es O y OA es perpendicular a OB. Si el área del triángulo es $a^2$. ¿Cuál es el área del círculo?




### Resolución

$$A = (b \times h) / 2 \qquad A_{\odot} = \pi r^2$$
$$a^2 = (r \times r)/ 2 \qquad A_{\odot} = \pi \, 2a^2$$
$$r^2 = 2a^2$$

**10.** El largo de un rectángulo está dado por la expresión $3x+2y$ y su perímetro $10x + 6y$. Determinar el ancho en término de $x$ e $y$.

### Resolución

$P = 2 (L + a)$
$a = (P/2) - L$
$a = (10x + 6y)/2 - (3x + 2y)$
$a = 5x + 3y - 3x - 2y$
$a = 2x + y$

**11.** Si $a = \sqrt{7} - \sqrt{5}$; $b = \sqrt{3} - \sqrt{7}$ y $c = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Halle A
Si $A = (a^2 / bc + b^2/ac + c^2/ab)^5$

### Resolución.

$$a = \sqrt{7} - \sqrt{5}$$
$$b = \sqrt{3} - \sqrt{7}$$
$$\underline{c = \sqrt{5} - \sqrt{3}}$$
$$a + b + c = 0$$

Sabemos que si $a + b + c = 0 \rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$A = (a^2/bc + b^2/ac + c^2/ab)^5 = ((a^3 + b^3 + c^3)/abc)^5 = (3abc)/abc)^5 = 3^5 = 243$

**12.** Sumar los números irracionales $\sqrt{2}$ + $\sqrt{8}$ aplicando los dos algoritmos descubiertos por el célebre sabio indio Bashkará (siglo XII )

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ y $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+1\right)^{2}}$

**Resolución.**

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2+8+2\sqrt{2\cdot 8}}=\sqrt{18}$$
$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2\left(\sqrt{\frac{8}{2}}+1\right)^{2}}=\sqrt{2\cdot 9}=\sqrt{18}$$

**13.** Calcular el área de un círculo cuyo radio es de 3 cm, aplique la fórmula más conocida como de Rhind que utilizaban las antiguas civilizaciones según hallazgos encontrados en los papiros de Ahmés. $A = ((8/9)\ d)^2$

**Resolución.**

$A = (8 * 6/9)^2$

$A = 28.44\ cm^2$

**14.** Sabiendo que: El valor de las carteras A y B juntas es \$15, el valor de las carteras B más C es \$17 y ninguna letra es 7 ni mayor que 9.Hallar el valor de la cartera B


**Resolución:**

Se deduce que la diferencia de precio ente las cartera C y A es de \$2.Por las condiciones del problema se deduce que la cartera A cuesta \$6, la cartera C \$8 y consecuentemente la cartera B \$9

**15.** Si, $\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}$

Calcular $\sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}}$

## Resolución

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} \quad \text{(1) Hipótesis}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = z \qquad \text{(2) Tesis}$$

Multiplicando las ecuaciones 1 y 2 nos queda:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}}\right) = 2z\sqrt{y}$$

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{y}}\right)^2 - \left(\sqrt{x-\sqrt{y}}\right)^2 = 2z\sqrt{y}$$

$x + \sqrt{y} - x + \sqrt{y} = 2z\sqrt{y}$ Propiedad de los exponentes

$2 \quad \sqrt{y} = 2z\sqrt{y}$ Reducción de términos semejantes

$2 = 2z$ Simplificado

$z = 1$

**16.** Si, $a - b = b - c = \sqrt[3]{3}$ . Calcular el valor de:

$E = ((a - b)^3 + (b - c)^3 + (a - c)^3)/30$

## Resolución

$$\begin{array}{l} a - b = \sqrt[3]{3} \\ \underline{b - c = \sqrt[3]{3}} \\ a - c = 2\sqrt[3]{3} \end{array}$$

$$E = \frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 + \left(2\sqrt[3]{3}\right)^3}{10} \text{ Sustitución}$$

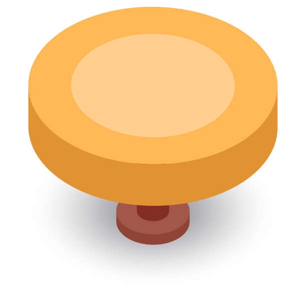
$$E = \frac{3 + 3 + 8 \times 3}{30} = \frac{30}{30} = 1$$

**17.** Un mago desea cubrir completamente una mesa de forma circular con un mantel. Escriba la expresión algebraica que comprenda el área total del mantel (se considera despreciable el espesor del tablero).

Área del tablero
$A = \pi r^2$

Área de la parte lateral
$A = 2\pi rh$

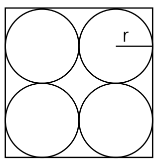
Área total del mantel
$A_t t = \pi r^2 + 2\pi rh$
$A_t = \pi r(r + 2h)$



**18.** Andrés tiene una placa de oro de forma cuadrada. Él está analizando qué es más conveniente; si hacer una sola medalla de forma circular o hacer cuatro medallas de forma circular. Demuestra mediante procesos de cálculo en cuál de las dos opciones usa más oro.

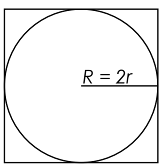
## Resolución

## Caso 1




$A_s = A_{\square} - 4A_{\odot}$
$A_s = l^2 - 4(\pi r^2)$
$A_s = 16\ r^2 - 4\pi r^2$
$A_s = 4r^2\ (4 - \pi)$

## Caso2




$A_s = A_{\square} - A_{\odot}$
$A_s = l^2 - \pi R^2$
$A_s = 16\ r^2 - \pi(2r)^2$
$A_s = 16\ r^2 - 4\pi r^2$
$A_s = 4r^2\ (4 - \pi)$

En los dos casos utiliza la misma cantidad de material, pero al ser de oro, considerando el costo de comercialización, sería recomendable hacer las 4 medallas circulares.

**19.** Calcular el valor de $E = (6 \clubsuit 4) \clubsuit (10 \clubsuit 7)$, si:

$$m \clubsuit n = \begin{cases} m - n, \text{ si } m > n \\ m + n, \text{ si } m < n \end{cases}$$

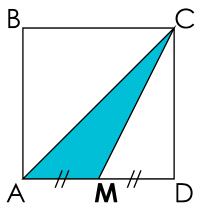
## Resolución

$E = (6 - 4) \clubsuit (10 - 7) \rightarrow m > n$

$E = 2 \clubsuit 3 \rightarrow m < n$

$E = 2 + 3 = 5$

**20.** Hallar el área sombreada del triángulo que se muestra en la siguiente figura, en donde el lado del cuadrado ABCD mide X cm.




## Resolución

El área del triángulo sombreado es igual a la mitad del área del cuadrado menos el área del triángulo MDC.

$A_s = x^2/2 - ((x/2)x)/2 = x^2/2 - x^2/4$ Aplicando las fórmulas

Por tanto: $A_s = x^2/4$

**21.** Si $a - b = 1$ y $ab = 6$, calcular el valor numérico de $a^3 - b^3$

## Resolución

$a-b = 1$ Por hipótesis

$(a-b)^3 = 1$ Elevando al cubo ambos miembros

$a^3 -3a^2 b + 3ab^2 - b^3 = 1$ Desarrollando el binomio

$a^3 - b^3 -3 ab(a - b) = 1$ Factorando

$a^3 - b^3 - 3(6)(1) = 1$ Por hipótesis

$a^3 - b^3 = 19$

**22.** Si $a/2 = b/6 = c/8$ y $a + b + c = 24$ probar que $a + b = c$

## Resolución

Como la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, podemos establecer las siguientes relaciones de proporcionalidad:

$(a + b + c)/(2 + 6 + 8) = a/2 = b/6 = c/8$

Por hipótesis $a + b + c = 24$

$24/16 = a/2 \rightarrow a = 3$
$24/16 = b/6 \rightarrow b = 9$
$24/16 = c/8 \rightarrow c = 12$

Con los valores calculados vemos que se verifica la igualdad $a + b = c$

**23.** Transformar $\sqrt{21 + 4\sqrt{27}}$ en la expresión equivalente $\sqrt{12} + 3$

## Resolución

Por fórmula sabemos que:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(a + c)/2} \pm \sqrt{(a - c)/2} \text{ con } c = \sqrt{a^2 - b}$$

Siempre que $a^2 - b$ sea un cuadrado perfecto

$$\sqrt{21 + 4\sqrt{27}} = \sqrt{21 + \sqrt{4^2 \times 27}} = \sqrt{21 + \sqrt{432}}$$

$a^2 - b = 21^2 - 432 = 9$ Cuadrado perfecto

Para esto calculemos primeramente C

$$C = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{21^2 - 432} = \sqrt{9} = 3$$

Aplicando la fórmula

$$\sqrt{21 + \sqrt{432}} = \sqrt{(21 + 3)/2} + \sqrt{(21 - 3)/2}$$

$$\sqrt{21 + \sqrt{432}} = \sqrt{12} + 3$$

**24.** Calcular la raíz cuadrada aproximada de $\sqrt{26}$ , utilice la fórmula que aparece en una tableta 1600 A.C. en Yale usando la fórmula:

$$(a^2 + h)^{1/2} = a + h/2a$$

## Resolución

$$\sqrt{26} = (5^2 + 1)^{1/2} = 5 + 1/10 = 5.1$$

**25.** Multiplicar 21*17 aplicando la fórmula algebraica que utilizaron los babilonios

$$a * b = ((a + b)^2 - a^2 - b^2)/2$$

$$21 * 17 = ((21 + 17)^2 - 21^2 - 17^2)/2 = 714/2 = 357$$

$$a * b = (a + b)^2/4 - (a - b)^2/4$$

$$21 * 17 = (21 + 17)^2/4 - (21-17)^2/4 = 361 - 4 = 357$$

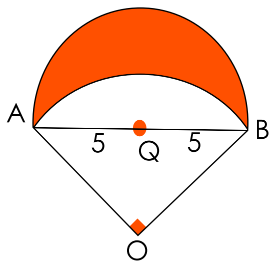
## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** La suma de dos números es 60, su cociente es 3 y el residuo es 4. Hallar dichos números.

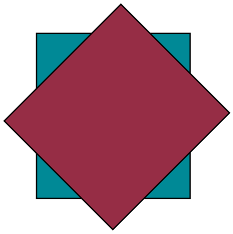
**2.** La diferencia de dos números es 150, y el cociente es 7. Hallar dichos números.

**3.** La diferencia de dos números es 21, el cociente es 4 y su residuo es 3. Hallar dichos números

**4.** Calcular el área de la región sombreada sabiendo que: el arco AB ha sido trazado con el radio OA y la semicircunferencia AB con el radio QA.



**5.** Sobre una mesa cuadrada de lado 1m se encuentra un mantel cuadrado también de lado 1m, el cual cubre la mesa completamente. Este se rota un ángulo de 45º alrededor del punto de intersección de las diagonales. Hallar el área de los retazos de mantel que cuelgan de la mesa.



**6.** Un vendedor recarga el precio de sus artículos en un 25% de su precio de costo ¿Qué descuento debería hacer para no ganar ni perder?

**7.** Si, $a - b = b - c = d\sqrt{3}$ calcular el valor de

$$E = \frac{((a-c)^3 + (b-c)^3 + (a-b)^3)}{10\sqrt{3}}$$

**8.** Suponga que $ab = a^2 + c$ y $a - b = c$, entonces a =?

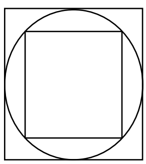
**9.** ¿Para qué ángulo " x" es $\tan(20^0 - x) = \cot(6x + 20^0)$?

**10.** Los números: log 10 ; $\log(2^x - 28)$ ; $\log(8.2^x - 24)$ forman en ese orden una progresión aritmética .Calcular el valor de "x"

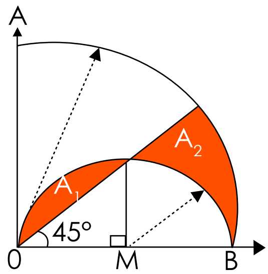
**11.** Si la magnitud de la diagonal de un cuadrado es $\sqrt{2}\,x$. Expresar el área del cuadrado en término de x.

**12.** Si $a + b = 2$ ; $a^2 + b^2 = 10$. Halle $a^5 + b^5$

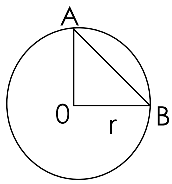
**13.** En la siguiente figura: si el área del cuadrado pequeño es $5cm^2$, emplea un método rápido para hallar el área del cuadrado grande.



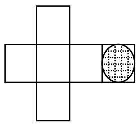
**14.** En la siguiente figura: calcule el área de la región sombreada "$A_1$", si el área de la región sombreada "$A_2$" es de $4cm^2$.



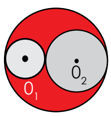

**15.** Calcular el área del círculo que se muestra en la figura, si $AB = 10\sqrt{2}$ y $\pi = 3.14$



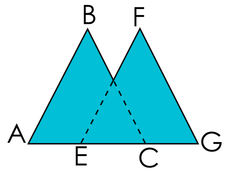

**16.** Si el perímetro de la figura formada de cuadraditos es de 56 cm, hallar el perímetro del círculo inscrito en uno de los cuadraditos.



**17.** En la figura que se muestra, los círculos son tangentes, el círculo de centro $O_2$ tiene un radio tres veces mayor que el círculo de centro $O_1$. ¿Cuál es el valor del radio del círculo más grande, si el radio del círculo $O_2$ es 3cm?




**18.** El triángulo equilátero ABC está sobrepuesto al triángulo equilátero EFG, los mismos que son congruentes. Si AE=EC=CG=6cm. Calcular el perímetro de la figura formada en línea continua.




**19.** Tres números en progresión aritmética creciente dan por producto 15795, el menor es 15. ¿Cuál es la suma?

**20.** Los números: sen$\theta$/6 ; cos $\theta$ ; tan $\theta$ de la sucesión corresponden a una progresión geométrica . Hallar el valor de " $\theta$" en el primer cuadrante.

**22.** Hallar la medida del ángulo A de un triángulo ABC, conociendo que $m\measuredangle C = 2m \measuredangle A$ ; $3b = 2\sqrt{3}\ c$

**23.** La suma de dos números es 134 y su diferencia es 8. Hallar dichos números.

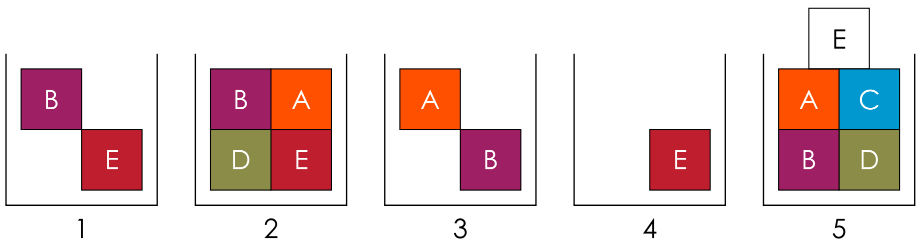
**24.** Si a/b +b/a = 2. Hallar $M = (a^2 + b^2)/ab + (3a + 9b)/(2a - b)$

**25.** ¿Para qué ángulo agudo x es sen (4x+20) = cos3x?

**26.** Calcular *Sen* 80° - *Cos* 10°sin hacer uso de medios digitales.

**27.** Hallar el valor de la expresión: $(\tan 70^0 - \tan 10^0)/(1 + \tan 70^0 \tan 10^0)$ sin calculadora.

**28.** Rosa tiene 5 cajas que contienen algunas cartas marcadas con las letras A, B, C, D y E, Como se muestra en la figura. Ella quiere eliminar cartas de las cajas de manera que, al final de cada caja contenga una sola carta, y que ningún par de cajas contenga cartas marcadas con la misma letra. ¿Qué letra tendrá la carta que quedará en la caja 5?



# HACER UN DIBUJO QUE REPRESENTE EL ANUNCIADO

Para resolver un problema, en muchos de los casos se hace necesario utilizar un gráfico, los gráficos pueden representar objetos concretos, lugares o situaciones y se utilizan para facilitar la visión de un hecho.

Esta estrategia de utilizar un dibujo y volcar en el los datos del problema nos ayuda a comprender mejor el enunciado del mismo.

A veces, una imagen vale más que mil palabras, en el dibujo o esquema que hagas debes incorporar los datos más relevantes y prescindir de lo demás, no necesitas hacer un dibujo muy preciso, el objetivo es que sirva de apoyo para avanzar en la solución del problema, aquí juega un papel muy importante la imaginación y la creatividad del individuo

## EJEMPLOS.

**1.** Un queso y una leche cuestan $3, un queso y tres leches cuestan $4.50. ¿Cuánto cuesta un queso?

### a. COMPRENDER EL PROBLEMA

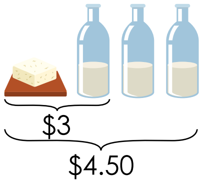
Lea nuevamente el enunciado del problema

### b. CREAR UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Buscamos posibles estrategias. En este caso seleccionamos la estrategia de hacer un dibujo.

## c. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN

Aplicamos la estrategia de utilizar un dibujo:




El precio de dos leches es $4.50 - $3 = $1.50

Por tanto: una leche cuesta $0.75 y consecuentemente, el precio del queso es: $3 - $0.75 = $2.25

## d. EXAMINAR LO HECHO

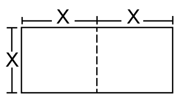
Un queso y una leche cuestan $3 = $2.25 + $0.75
Un queso y tres leches cuestan $4.50 = $2.25 + $2.25

**2.** Si la longitud de un rectángulo es el doble de su ancho y su perímetro es 24cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

### Resolución:

Esquematizando, correspondería dibujar el largo del rectángulo, el doble de su ancho. Si al ancho notamos con x, el largo sería 2x.

a = x, l = 2x




Como sabemos, el perímetro es la longitud del contorno de la figura. En este caso por ser rectángulo seria:

| | | |
|---|---|---|
| P = 2l + 2a | 24 = 4X + 2X | X = 4 |
| 24 = 2(2X) + 2X | 24 = 6x | |

Consecuentemente: l = 2(4) = 8cm y el a = 4cm.

**3.** Por dos panes y un plátano se paga 65 centavos; por un pan y dos plátanos se paga 55 centavos. ¿Cuánto cuesta un pan?

**Resolución:**

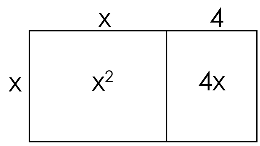
65 centavos    55 centavos

De las gráficas, se deduce que la diferencia de precio entre un pan y un plátano es de 10 centavos, 65 - 55 = 10 centavos.

Empleando la técnica del tanteo inteligente, se llega a la conclusión que cada pan tiene un costo de 25 centavos y un plátano 15 centavos.

**4.** La longitud de un rectángulo es 4cm mayor que su ancho y el área es 60cm$^2$. Calcular las dimensiones del rectángulo.

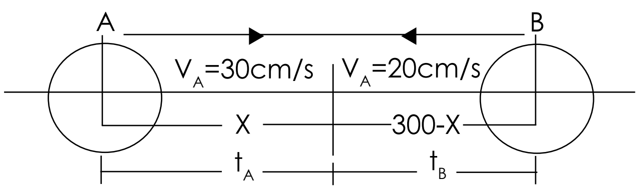
**Resolución**




| | |
|---|---|
| $a\,L = A$ | $x - 6 = 0$ |
| $x(x + 4) = 60$ | $x = 6$ |
| $x^2 + 4x - 60 = 0$ | Ancho = x = 6cm |
| $(x + 10)(x - 6) = 0$ | Largo = x+4 = 6+4 = 10cm |

**5.** Sobre un mismo plano horizontal están dos esferas separadas por una distancia de 300cm. En un instante dado, se hacen avanzar simultáneamente una contra otra a velocidades de 30 cm/s y 20 cm/s respectivamente. ¿En qué tiempo y a qué distancia de la primera se chocan?

**Resolución:**



En el esquema gráfico, asumimos que las dos esferas se van a chocar en un punto P y consideramos que x es la distancia recorrida por la esfera A y consecuentemente 300 - x es la distancia recorrida por la esfera B.

Dado que las esferas parten simultáneamente, el tiempo que transcurre hasta encontrarse es el mismo, por tanto:

$t_A = t_B$
$X_A/V_A = X_B/V_B$
$X/30 = (300-x)/20$

Resolviendo la ecuación tenemos que:

$2x = 900 - 3x$
$5x = 900$
$x = 180$

Es decir:

$X_A = 180cm$

Ahora calculemos el tiempo transcurrido:

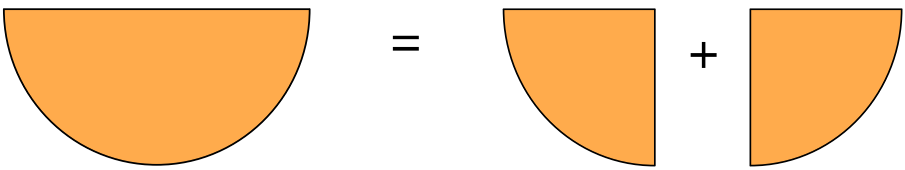
$$t = \frac{X_A}{V_A} = \frac{180\ cm}{30\ cm/s}$$
$$t = 6s$$

Con estos resultados, sabemos que las esferas se chocan a 6s y a 180cm del punto de partida de la esfera A.

**6.** Una madre  quiere repartir medio queso a sus dos hijos. ¿Cuánto recibe cada uno?

## Resolución

Para comprender mejor el problema esbocemos un pequeño gráfico:



Cada uno recibirá la cuarta parte de queso, es decir:

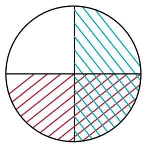
$1/2 \div 2 = 1/4$.

Si el resultado de dividir 1/2 entre 2 es 1/4 es obvio entender que la fracción 1/2 se ha multiplicado por el inverso de 2.

$1/2 \div 2 = 1/2 \times 1/2 = 1/4$.

Es decir que la división se transforma en producto al invertir el quebrado divisor.

Gráficamente, el producto de 1/2 x 1/2 = 1/4 representa la zona de doble rayado.

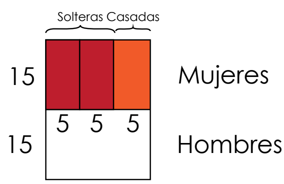


**7.** A un seminario de física asistieron 30 profesores, de los cuales: la mitad son mujeres y de ellas, la tercera parte son casadas. ¿Cuántas mujeres solteras asistieron al seminario?

## Resolución

Para comprender de mejor manera el problema representemos gráficamente:


De las 15 mujeres, necesitamos ubicar las dos terceras partes que son solteras pues sabemos que la tercera parte son casadas.



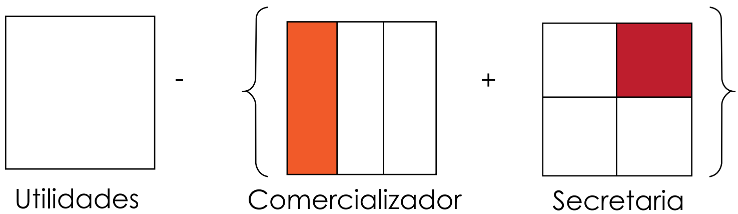
Observando el gráfico, concluimos que son diez las mujeres solteras. Todo este proceso se reduce a un producto de fracciones:

30 x 1/2 x 2/3 = 10

**8.** Un pequeño comerciante reparte las utilidades de su negocio de la siguiente manera: al comercializador le entregó la tercera parte de sus utilidades, a la secretaria la cuarta parte de sus utilidades y al contador el resto. ¿Cuánto le correspondió al contador?

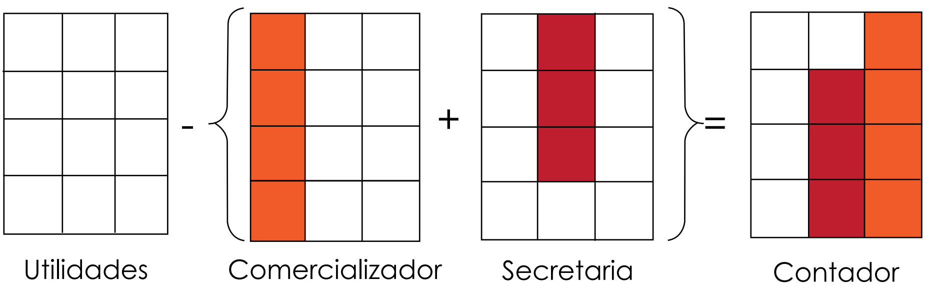
## Resolución

Para saber cuánto le corresponde al contador, debemos restar del total de las utilidades la suma de las utilidades que le tocó a la secretaria y al comercializador.
Para visualizar mejor observemos el problema en forma gráfica:




1-(1/3+1/4)

Para seguir resolviendo en forma gráfica podemos hacer uso de las fracciones equivalentes. De tal forma que todos tengan el mismo denominador. (Fracciones homogéneas).




$$\frac{12}{12}-\left(\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\right)=\frac{5}{12}$$

Por tanto, el contador recibe los 5/12 de las utilidades.

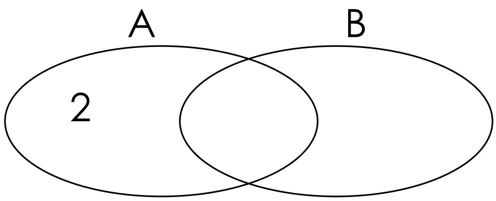
**9.** Determinar los elementos de los conjuntos A y B, sabiendo que:

$A \Delta B = \{2,5,7\}$
$A - B = \{2\}$
$A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$

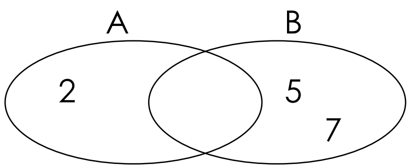
## Resolución

Para esto, vamos a ubicar los elementos del conjunto de cada uno de los operadores indicados en un diagrama.

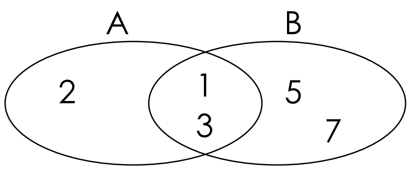
Esto es; para $A - B = \{2\}$




Como $A \Delta B = \{2,5,7\}$. Por tanto, los elementos que pertenecen solo al conjunto B son 5 y 7.



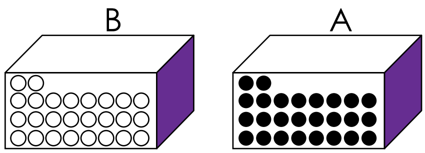

Finalmente, como $A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$, se deduce que los elementos de la intersección son 1 y 3.



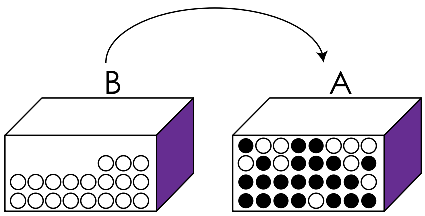

Con este diagrama, podemos escribir los elementos de los dos conjuntos. $A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,3,5,7\}$

**10.** Un niño tiene dos cajas, una contiene bolas blancas y otra contiene bolas negras. Toma diez bolas blancas y las revuelve con las negras. Después, toma diez bolas de la revoltura y las pone en la caja de las bolas blancas. Si la caja que contenía bolas blancas ahora tiene 4 bolas negras, ¿cuántas bolas blancas hay en la caja de bolas negras?

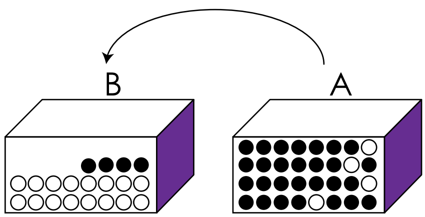
## Resolución




Aquí, se pasan 10 bolas blancas de la caja B a la caja A



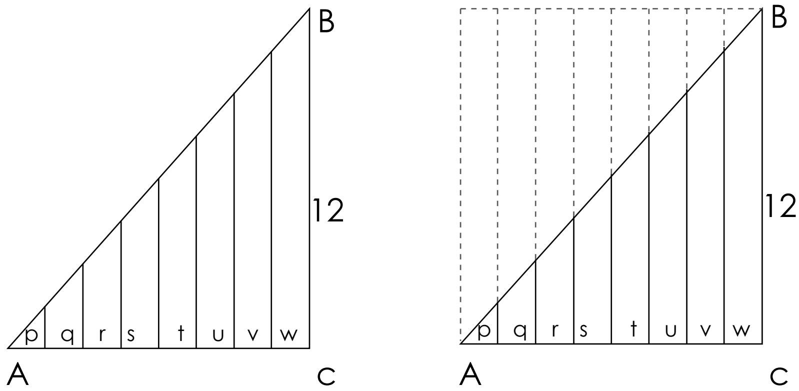

Ahora, se pasan 10 bolas de la revoltura de la caja A a la caja B




Como se sabe que en la caja B ahora hay 4 bolas negras, se deduce que seis de las diez bolas eran blancas, consecuentemente nos quedarían 4 bolas blancas en la caja de las bolas negras.

**11.** El cateto AC del triángulo rectángulo ACB se divide en 8 partes iguales. Por los puntos de división, se trazan 8 segmentos paralelos al cateto BC que mide 12cm. Hallar la suma de los 8 segmentos.

## Resolución




Si los 8 segmentos fueran de la longitud del segmento BC, la suma sería 8 * 12 = 96cm. Pero como se observa en la figura de la derecha, en la cual hemos trazado líneas auxiliares para formar un rectángulo, dichas longitudes se reduce a la mitad, como se explica a continuación:

* La longitud de los segmentos w y p forman un segmento igual a BC.
* La longitud de los segmentos v y q forman un segmento igual a BC.
* La longitud de los segmentos u y r forman un segmento igual a BC.
* La longitud de los segmentos t y s forman un segmento igual a BC.

Es decir, tendríamos cuatro segmentos de la longitud del segmento BC.

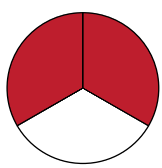
4 * 12 = 48cm

O lo que es lo mismo: p + q + r + s + t + u + v + w = (12(8))/2 = 48 cm.

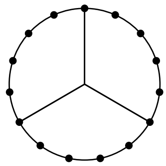
**12.** Encuentre el resultado del producto 2/3*4/5 utilizando fracciones circulares.

## Resolución

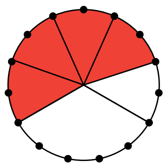
Primero representamos la fracción 2/3 utilizando fracciones circulares.



Ahora, volvemos a dividir a cada tercio en 5 partes iguales.



Finalmente, corresponde hacer un corte cada dos marcas para dividir los dos tercios en cinco partes iguales y tomar las cuatro quintas partes de las dos terceras partes, lo que nos da como resultado 8/15.



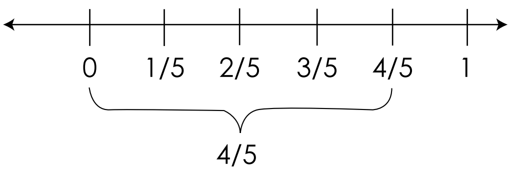
8/15

$$\frac{2}{3} * \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

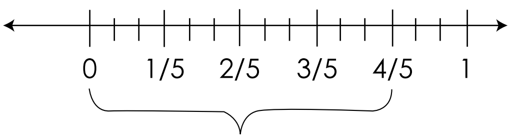
**13.** Encuentre el resultado del producto 4/5 * 2/3 utilizando la recta numérica.

## Resolución

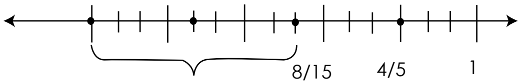
Para esto, vamos a considerar una unidad de medida arbitraria a la cual la vamos a dividir en 5 partes iguales, de las cuales vamos a tomar 4 de ellas.




Ahora, volvemos a dividir en 3 partes iguales cada quinto del segmento.



Finalmente, tomemos las dos terceras partes de los cuatro quintos, para lo cual marcamos con un punto cada cuatro marcas ($12 \div 3 = 4$), lo que nos da como resultado 8/15.

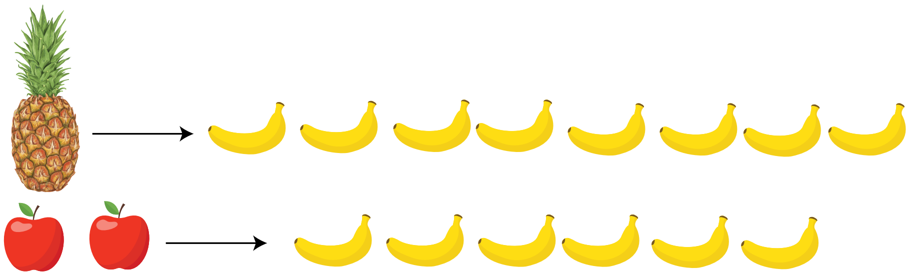



Las 2/3 de los 4/5
4/5 * 2/3 = 8/15

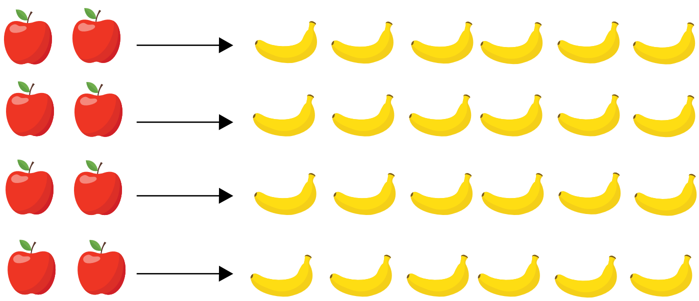
**14.** Por 1 piña, me dan 8 plátanos; por 2 manzanas, recibo 6 plátanos.

¿Cuántas piñas debo dar por 8 manzanas?

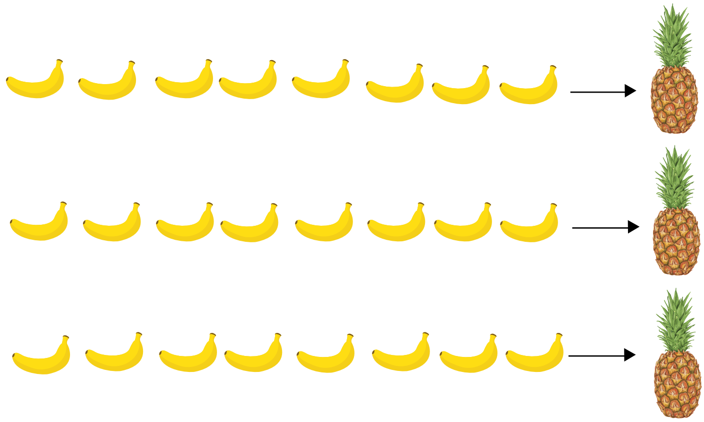
## Resolución



Como sabemos la equivalencia de las piñas en plátanos, debemos buscar el equivalente de las 8 manzanas en plátanos.



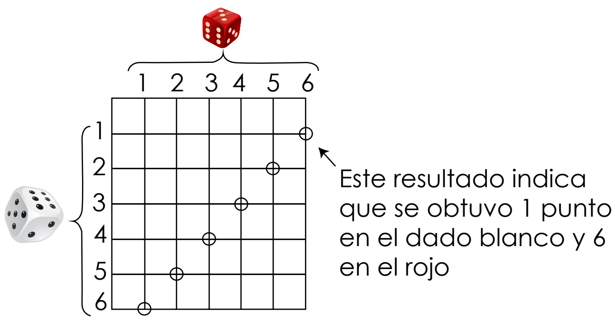
Es decir, por 8 manzanas debo recibir 24 plátanos. Ahora, si con los 24 plátanos formamos montoncitos de 8 que equivale a una piña, nos queda:



Por tanto: Debo dar tres piñas.

**15.** Si se lanza dos dados uno de color blanco y otro de color rojo, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 puntos en total?

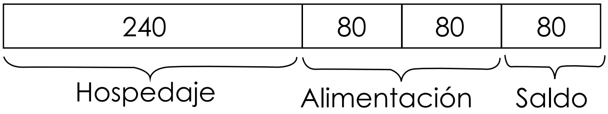
## Resolución




Casos totales n(Ω) = 6 x 6 = 36
Casos a favor nA = {(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)} = 6
Luego:
P=(n(A))/(n(Ω))=6/36=1/6

**16.** Sandra quien salió de paseo ha gastado la mitad del dinero que llevaba en hospedaje y las dos terceras partes de lo que le queda en alimentación. Si aún le quedan $80 ¿Cuánto dinero llevaba?

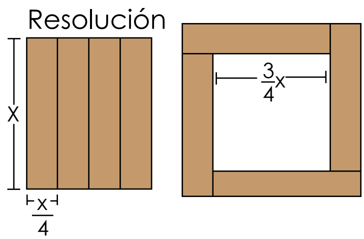
### Resolución




Por tanto tenía $480

**17.** Un cuadrado fue dividido en 4 rectángulos congruentes, y reagrupados de manera que formen un cuadrado con un espacio cuadrado en el medio. ¿Cuál es el área de dicho espacio expresado en forma algebraica?

### Resolución

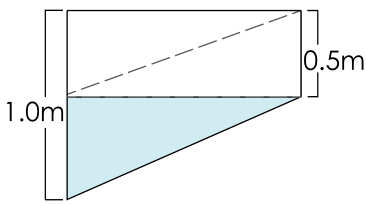



$A = 3x/4 * 3x/4$
$A = 9x^2/16$

**18.** En una piscina para niños de pendiente uniforme la parte más profunda mide 1.0m y la parte más baja 0,50m.Si la piscina tarda 90min en llenarse completamente a una presión constante. ¿Qué tiempo tardara en alcanzar 0,5m de profundidad? ¿Cuál es la altura que alcanzara en 1h?

### Resolución

Para resolver este ejercicio dibujaremos la piscina realizando un corte transversal.



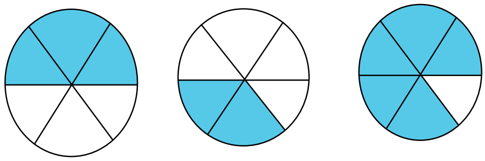

Si en el trapecio trazamos líneas auxiliares observamos que la figura queda dividida en 3 partes iguales. Por tanto el tiempo que tarda en alcanzar los 0,5m de profundidad es la tercera parte del tiempo, esto es 30 min.

La altura que alcanzara en 1h será la correspondiente al triángulo más la mitad del rectángulo, esto es 0,75m.

**19.** Sumar 1/2+1/3 gráficamente

## Resolución

Para sumar fracciones en forma gráfica es preciso llevar ambas fracciones al mismo denominador. Así:

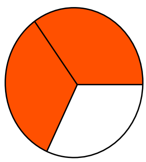


3/6 + 2/6 = 5/6

**20.** A cuántos grados equivale las 3/4 partes de las 2/3 partes de un círculo

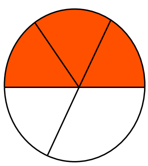
## Resolución

Dibujemos las 2/3 partes de un círculo



$$\frac{2}{3}360° = 240°$$

Ahora se debe dividir las 2/3 partes en 4 partes y tomar 3



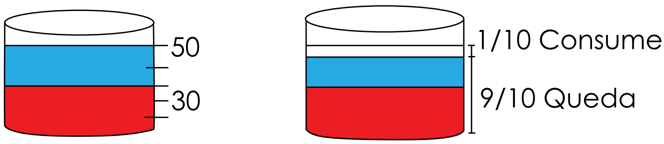
$$\frac{2}{3}x\frac{3}{4}x360° = 180°$$

**21.** Fidel mezcla en un tanque 30 L de pintura con 20 L de agua. Luego de consumir 5 l se da cuenta que falta más pintura y agrega 3 L ¿Cuántos litros de cada componente hay en la nueva mezcla?

## Resolución

(consumo )/(total mezcla) = 5/50 = 1/10

Significa que consumió la décima parte de la primera mezcla, por tanto nos queda las 9/10 partes.



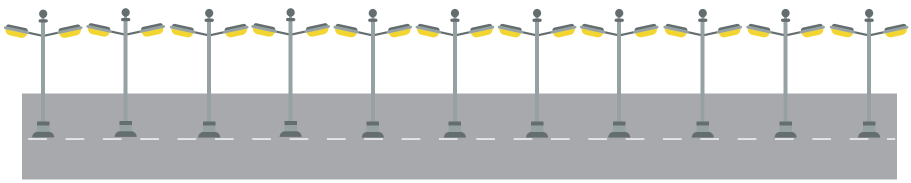

El número de litros de cada componente de la nueva mezcla es

(9/10) × 30 = 27 L pintura
(9/10) × 20 = 18 L agua

Como se agregó 3 L de pintura en la nueva mezcla 27 + 3 = 30 L de pintura.

**22.** ¿Cuánto postes serán necesarios colocar en una avenida de 1 km de largo. Si la distancia entre poste y poste es 100m?

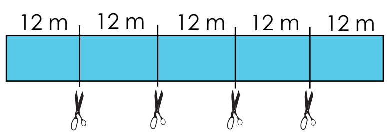
## Resolución



\# Postes = (longitud total )/(Longitud entre poste y poste) + 1
\# Postes = (1000/100) + 1 = 10 + 1 = 11 Postes

**23.** Cuántos cortes se deben hacer para dividir una pieza de tela de 60 m en pedazos de 12 m

## Resolución

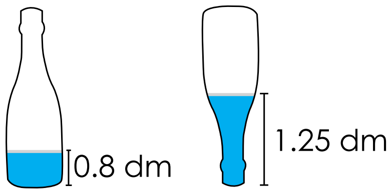



\# de Cortes = (longitud total)/(logitud de un pedazo) -1
\# de Cortes = 60/12 -1 = 5 - 1 = 4´

**24.** En una botella se vierte 1 litro de leche alcanzando una altura de 0.8 dm. Si tapamos la botella e invertimos alcanza una altura de 1.25 dm. Expresar las alturas dadas en forma de fracciones y establecer una comparación entre las mismas.

## Resolución.

Para esto hagamos un dibujo




Expresando los números decimales en fracciones nos queda:

0.8 = 8/10 = 4/5
1.25 = 1 1/4 = 5/4

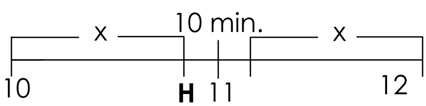
Comparando las fracciones podemos ver claramente que la una fracción es el inverso de la otra.

Éste problema nos permite comprender que al igual que se puede invertir un objetos, en nuestro caso se pudo observar una variación de nivel por la estructura de la botella, las fracciones también se los puede invertir, transformándose de fracción propia a fracción impropia.

**25.** Guadalupe pregunto a Sandra ¿Qué hora es? Sandra responde "Ya pasaron las 10 h y falta poco para las 11 h. Además dentro de 10 minutos faltará para el medio día la misma cantidad de minutos que había desde las 10 h ¿Qué hora era?

## Resolución

Para esto representemos gráficamente la información dada en un gráfico

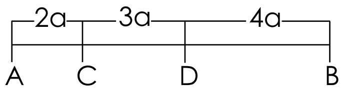



A partir del gráfico podemos escribir la ecuación
x + 10´ + x = 120´
x = 55 min.
Por tanto la hora es 10h 55 min

**26.** Se tiene un segmento $\overline{AB}$ de 45 cm de longitud, el cual se divide en 3 partes. La razón entre el primero y segundo segmento es 2/3 y la razón entre el primero y tercer segmento es 1/2. Calcular la longitud del segmento menor

## Resolución

Grafiquemos la información dada utilizando un segmento

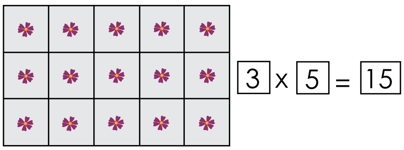



$2a + 3a + 4a = 45$ Hipótesis
$a = 5$
$AC = 2a = 10$ Longitud del segmento menor

**27.** Multiplicar $3 \times 5$ utilizando una gráfica

## Resolución.

Como los factores son 3 y 5 vamos a dibujar un rectángulo interlineado con éstas dimensiones tal como se muestra en la figura.

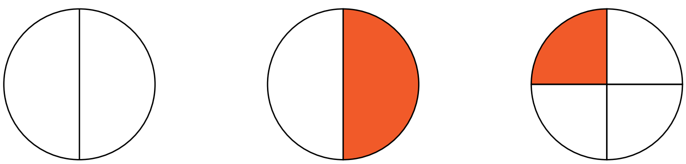



Obsérvese que existen tres filas con cinco elementos en cada fila lo cual nos da como resultado 15 elementos

**28.** ¿Cómo se puede repartir 3 panes entre 4 personas en partes iguales?

## Resolución.

Para comprender la solución del problema bosquejemos un gráfico tal como se muestra a continuación



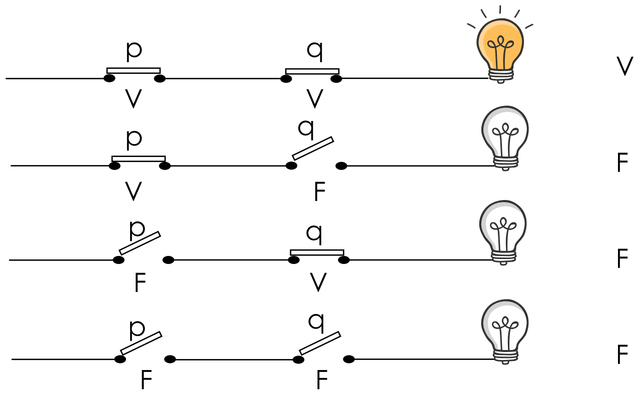
Aquí se puede apreciar claramente que cada persona recibe 3/4 = 1/2 + 1/4

Cabe indicar que pueden existir otras formas de partición.

**29.** Asociar las proposiciones p y q con el conector lógico "y" para elaborar la tabla de valores de la conjunción.

## Resolución

Para entender de manera objetiva los valores de verdad al asociar las proposiciones p y q, elaboramos un gráfico de una conexión eléctrica en serie donde las proposiciones p y q están dadas por los interruptores

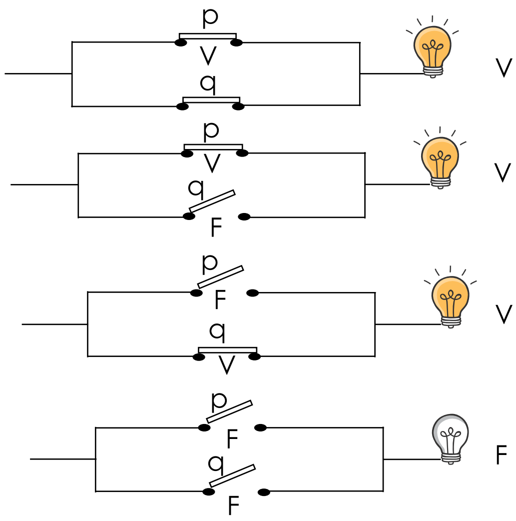



Esto nos indica que la proposición p ∧ q es verdadera si y sólo si ambas proposiciones son verdaderas.La explicación a nuestro gráfico es que si tanto el interruptor p como el q están cerrados entonces el foco se enciende en los otros casos el foco no se enciende

**30.** Asociar las proposiciones p y q con el conector lógico "o" para elaborar la tabla de valores de la disyunción

## Resolución

Para entender de manera objetiva los valores de verdad al asociar las proposiciones p y q, elaboramos un gráfico de una conexión eléctrica en paralelo donde las proposiciones p y q están dadas por los interruptores



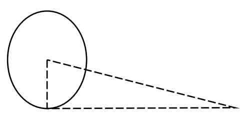

Esto nos indica que la proposición p ∨ q es falsa si y sólo si ambas proposiciones son falsas. La explicación a nuestro gráfico es que si tanto el interruptor p como el q están abiertos entonces el foco no se enciende en los otros casos el foco se enciende

**31.** Arquímedes establece una relación entre el área de un círculo y el área de un triángulo rectángulo con un cateto igual al radio y el otro cateto igual al perímetro del círculo. A partir de este principio deducir la ecuación del área de un círculo

## Resolución

Los griegos empezando con los pitagóricos, idearon un álgebra geométrica para resolver problemas algebraicos por procedimientos geométricos.

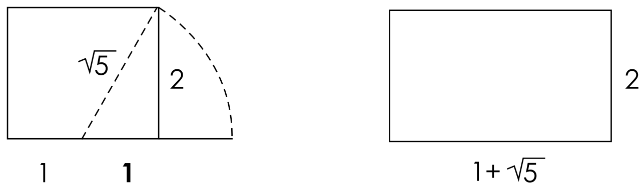
Haciendo uso de la fórmula para calcular el área de triángulo nos queda



$A = (b.h)/2$
$A = (L_c .r)/2$
$A = (2\pi r.r)/2$
$A = \pi r^2$

**32.** A partir de un cuadrado de lado 2 cm construir un rectángulo áureo. Explicar el proceso de construcción y comprueba qua la relación por cociente entre el largo y el ancho es aproximadamente 1.618034 = ϕ

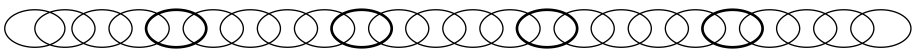
## Resolución




**33.** Se tiene 6 trozos de cadenas de 4 eslabones cada uno, y se desea obtener una sola cadena de 24 eslabones. ¿Cuál será la mínima cantidad de eslabones qué será necesario abrir y volver a cerrar?

## Resolución

Desarmando un eslabón tenemos cuatro argollas las mismas que nos sirven para unir los cinco eslabones restantes tal como se muestra en la figura

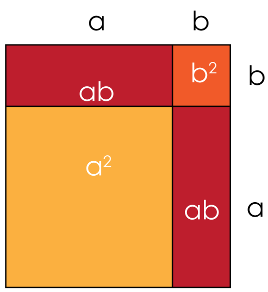


Consecuentemente la mínima cantidad de eslabones que hay que abrir y cerrar son 4

**34.** Representar geométricamente y algebraicamente el desarrollo del siguiente binomio $(a+b)^2$

## Resolución

Si sustituimos L por a+b, como el binomio se encuentra elevado al cuadrado, la gráfica resulta ser un cuadrado tal como se muestra en la figura



Algebraicamente tenemos

$A = l^2$
$a^2 + ab + ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

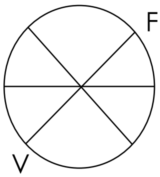
**35.** Guadalupe, Sandra, Ana, Rocío, Fidel y Víctor se sientan alrededor de una mesa circular en seis sillas distribuidas simétricamente. Se sabe que:

a. Sandra no se sienta junto a Fidel ni frente a Rocío
b. Fidel se sienta frente a Víctor
c. Rocío se sienta junto y a la derecha de Víctor
d. Ana no está junto a Víctor
¿En qué lugar se sienta Guadalupe?

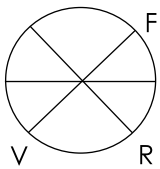
## Resolución

En este tipo de problemas es importante esquematizar la información dada, localizando primero los datos que son más evidentes. Así:

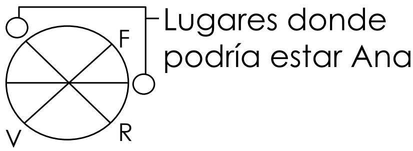
b) Fidel se sienta frente a Víctor



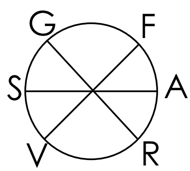

c) Rocío se sienta junto y a la derecha de Víctor



d) Ana no está junto a Víctor




a) Sandra no se sienta junto a Fidel ni frente a Guadalupe

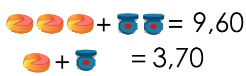



Por tanto Guadalupe se encuentra entre Sandra y Fidel y al frente de Rocío.

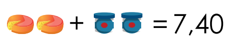
**36.** Si el costo de3 quesos y 2 manjares de leche es de \$9.6 y el costo de 1 queso y un manjar de leche es de \$ 3.2 .Determinar el costo de cada producto.

## Resolución

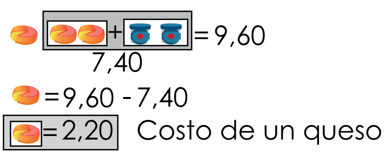
Representando gráficamente nos queda



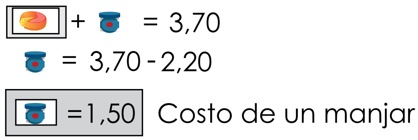

Consecuentemente




Agrupando nos tenemos

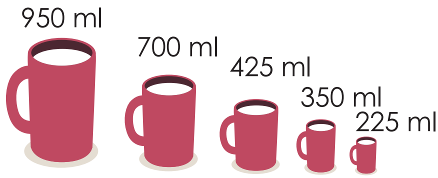


Por tanto el costo del manjar es

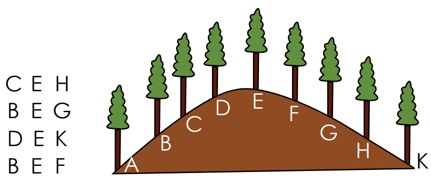



## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Cada una de estas cinco tasas están llenas o con café, o con chocolate, o con leche. Hay una cantidad total de chocolate igual al doble de la cantidad total de café. Ninguna de las tres bebidas está repartida en tres tazas ¿Qué taza contiene leche?




**2.** Cuando María se pasea por la colina, María desciende más rápido de lo que sube. A lo largo del camino están marcados los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, K, los mismos que se encuentran señalizados al pie del árbol y espaciados de forma equidistante. Entre las trayectorias que se indican a continuación ¿Cuál le tomará a María el menor tiempo?




**3.** William a la edad de 4 años media 0.9 m ,a la edad de los 5 años 0.95 m ,a la edad de los 6 años 1.1 m y a la edad de los 7 años 1.29 m. ¿Cuánto creció William entre los seis y siete años? ¿y Cuántos entre los 4 y 6 años?

**4.** Un libro y un esferográfico cuestan \$12 , dos esferográficos y un libro cuestan \$15 ¿Cuánto cuesta un libro?

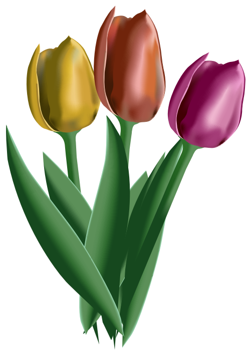
**5.** Un niño compra chocolates a 3 por \$2 y los vende a 4 por \$3. Para ganar \$1. ¿Cuántos chocolates debe vender?

**6.** En un curso de 30 estudiantes, 13 leen "El Comercio", 12 leen "El Hoy" y 7 no leen ninguno de éstos periódicos. ¿Cuántos estudiantes leen ambos periódicos a la vez?

**7.** Las rectas AB y CD se cortan en el punto "O" la bisectriz del ángulo ∡AOC forma con el rayo $\overrightarrow{OB}$ un ángulo de 150°. Calcular m∡BOD

**8.** Un pintor mezcla en un tanque 15 litros de pintura con 12 litros de agua .Cuando lleva consumido 18 litros de la mezcla ¿cuántos litros de pintura quede en el tanque.

**9.** Dos ramilletes de flores cuesta \$3.6. ¿Cuánto se deberá pagar por 3 ramilletes de flores



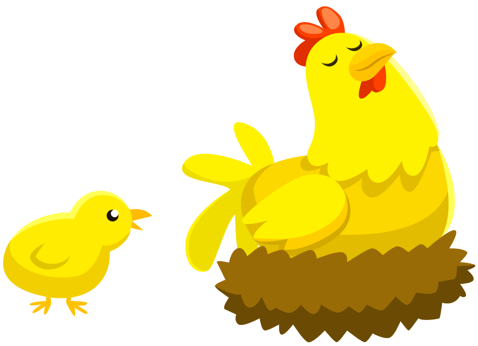
**10.** Seis hermanos van a comprar un terreno en partes iguales. A última hora dos de ellos desisten y esto hace que cada uno de los otros tenga que aportar \$ 7500 más ¿Cuál es el valor del terreno?

**11.** Por la compra de una camiseta, un pantalón y una chaqueta se paga \$250. Se sabe que el pantalón costó \$25 más que la camisa y \$50 menos que la chaqueta ¿Cuánto costó el pantalón?

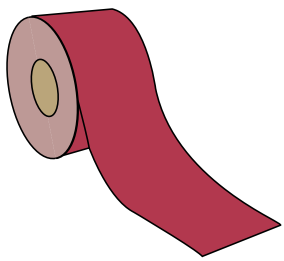
**12.** El perímetro de un terreno de forma rectangular es 168m. Si el largo es el triple del ancho. Hallar las dimensiones del terreno.

**13.** De una torta, Edison se come la mitad, María Elena la sexta parte y Andrea la tercera parte ¿Qué parte de la torta quedó?

**14.** Sandra ha comprado un pollo y una gallina por $24, el pollo le ha costado la tercera parte de lo que le ha costado la gallina ¿ Cuál es el precio del pollo?

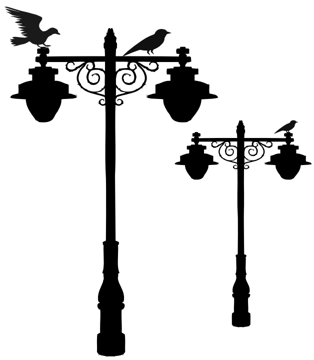


**15.** Después de vender los 3/5 de una pieza de tela me quedan 40m ¿Cuál era la longitud de la pieza?



**16.** Si en una competencia de ciclismo el que va primero ha recorrido los 3/5 de la trayectoria y el último ha recorrido 100 km que es la tercera parte, Hallar la diferencia entre el primero y el último ciclista

**17.** Cuando se posan una paloma en cada poste hay tres palomas volando, pero cuando en cada poste se posan dos palomas quedan tres postes libres ¿Cuántas palomas hay?



**18.** Tatiana requiere poner césped en el patio de su casa de manera que quede sin cubrir una franja de 50 cm en el contorno del patio con el fin de pavimentar. Si se trata de un patio rectangular de 7 m de largo por 5m de ancho ¿Cuántos metros cuadrados de césped necesita adquirir?

**19.** Rosa recorre una distancia de 950 m para ir de su casa a la escuela pasando primero por delante de una farmacia y después por delante de una papelería. Si desde su casa a la farmacia hay 250m y desde la papelería a la escuela hay 150 m más que desde su casa a la farmacia. ¿Qué distancia hay entre la farmacia y la papelería?

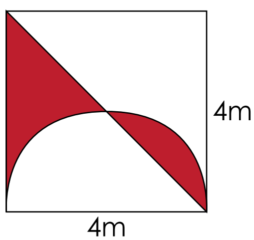
**20.** Edison es 54 cm más alto que Juan, Andrea mide 1.56 m, y es 1 cm más alta que María y 11 cm más baja que Rodrigo, Juan es 37 cm más bajo que Rodrigo ¿Cuánto mide Edison?

# TRASLADO DE REGIONES

Esta estrategia es utilizada en geometría para calcular áreas de regiones sombreadas donde no se puede aplicar fórmulas en forma directa por no tener formas definidas. Aquí juega mucho la creatividad y la imaginación del individuo para establecer un plan que le lleve a la solución del problema, realizando trazos auxiliares sobre la gráfica tal que le permita formar figuras congruentes y mediante traslado de regiones podamos formar figuras geométricas bien definidas donde se puede aplicar una fórmula para su proceso de cálculo.

## EJEMPLOS

1. Hallar el área de la región sombreada



## a. COMPRENDER EL PROBLEMA

Visualizar cuidadosamente el problema planteado

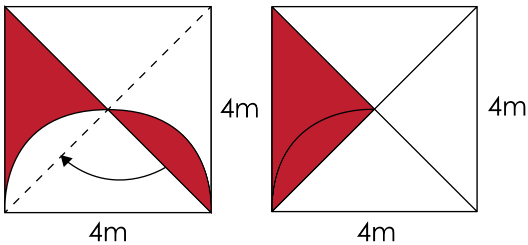
## b. CREAR UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Buscamos las posibles estrategias. En este caso traslado de regiones

## c. PONER EN MARCHA EL PLAN

Como no vamos a encontrar una fórmula para hallar el área de la región sombreada, mediante construcciones auxiliares y traslado de regiones podemos formar una figura geométrica que sea fácil de calcular el área.

Así

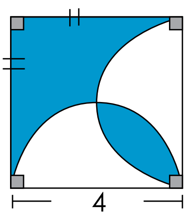



$A_s$: área sombreada
$A_t$: área total
$A_s = A_t/4 = l^2/4 = 4^2/4 = 4m^2$

## d. EXAMINAR LO HECHO

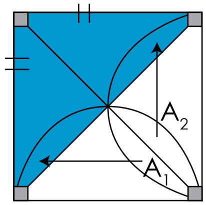
Como el área del cuadrado es $16m^2$ y el área sombreada se reduce a la cuarta parte del mismo, consecuentemente el área de la región sombreada es $4m^2$.

**2.** Hallar el área de la región sombreada.



**Resolución:**

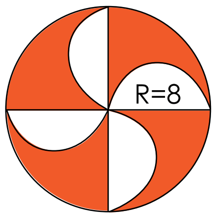
Trazamos las diagonales en el cuadrado



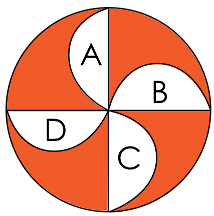

$$A=\frac{4x4}{2}==8u^2$$

Obsérvese que las regiones $A_1$ y $A_2$ al ser trasladadas hasta las posiciones que indican las flechas, encajan de forma exacta por ser regiones congruentes, por tanto el problema se reduce a calcular el área de un triángulo.

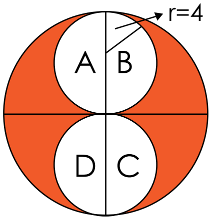
**3.** Hallar el área de la región sombreada.




**Resolución:**



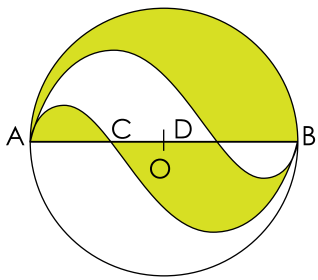

Si trasladamos el semicírculo B al extremo derecho del semicírculo A y el semicírculo D al extremo izquierdo del semicírculo C tendríamos dos círculos inscritos con formas bien definidas para poder aplicar la fórmula correspondiente



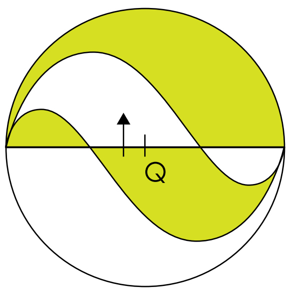

De esta manera el área sombreada de la nueva figura es:

$A_s = \pi R^2 - 2(\pi r^2)$
$A_s = \pi(R^2 - 2r^2)$
$A_s = \pi[8^2 - 2(4^2)]$
$A_s = 32\pi \quad U^2$

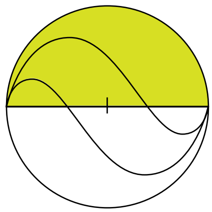
**4.** Hallar el área de la región sombreada, si la longitud de la circunferencia mide $20\pi$




**Resolución:**




Si trasladamos la región Q de la parte inferior a la parte superior del círculo tal como indica la flecha, vemos que el área sombrada es un semicírculo .Calculando nos queda:



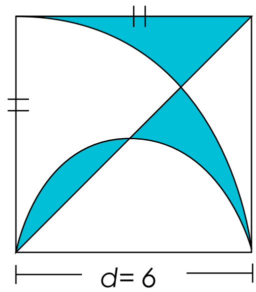
$$LC = 2\pi r \rightarrow 20\pi = 2\pi r \rightarrow r = 10$$

$$A_S = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$A_S = \frac{\pi(10)^2}{2}$$

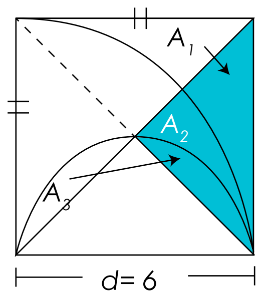
$$A_S = 50\pi$$

**5.** Hallar el área de la región sombreada.




**Resolución:**

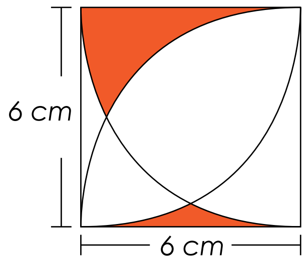
Observe en el gráfico que se muestra a continuación que al trazar la otra diagonal en el cuadrado las regiones $A_1$ y $A_3$ pueden ser trasladadas convenientemente a las posiciones que indican las flechas por ser regiones congruentes.




De la grafica se desprende que el área de la región sombreada se reduce a la cuarta parte del área de un cuadrado por lo tanto.

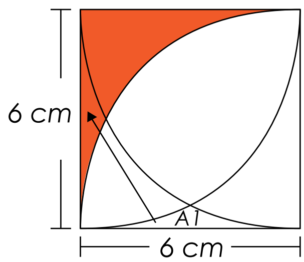
As = 6x6/4 = 9cm$^2$

**6.** Hallar el área de la región sombreada.



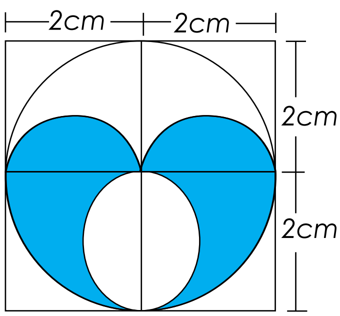

## Resolución:

Si trasladamos la región $A_1$ hasta la posición que indica la flecha, el área sombreada es una figura definida, la misma que puede ser calculada de la siguiente manera.



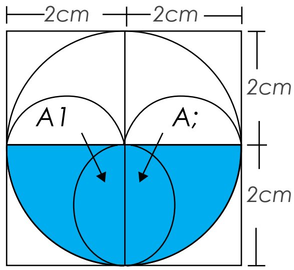

$A_s$ = Área del cuadrado - 1/4 del área del círculo de radio 6.
$A_s = l^2 - \pi r^2/4$
$A_s = 6^2 - \pi 6^2/4$
$A_s = 36 - 9\pi$
$A_s = 7.72\ cm^2$

**7.** Hallar el área de la región sombreada.



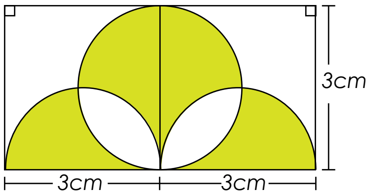
## Resolución

Trasladando las áreas $A_1$ y $A_2$ hasta las posiciones que indican las flechas por ser regiones congruentes, tenemos que el área sombreada se reduce a la mitad del área del círculo de radio 2cm.



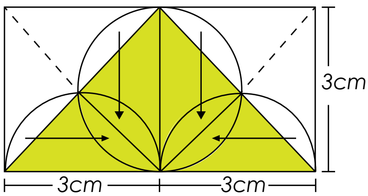

$A_s = (r^2\ \pi)/2$
$A_s = (2^2\ \pi)/2$
$A_s = 6.28\ cm^2$

**8.** Hallar el área de la región sombreada.



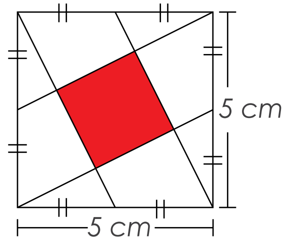

## Resolución:

Si trazamos las diagonales en los dos cuadrados y trasladamos las áreas como indican las flechas, veremos que el área sombreada se reduce a calcular el área del triángulo.




$A_s = (bxh)/2$
$A_s = (6 \text{ x } 3)/2$
$A_s = 9cm^2$

**9.** Hallar el área de la región sombreada.




## Resolución:

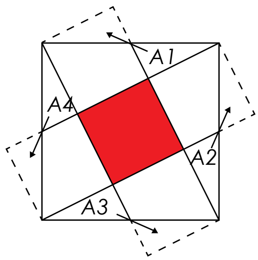
Si trasladamos las áreas $A_1, A_2, A_3$ y $A_4$ hasta las posiciones que indican las flechas, resulta que el área del cuadrado original será equivalente al área de 5 cuadraditos. Consecuentemente podemos escribir que

$A_t = 5A_s$

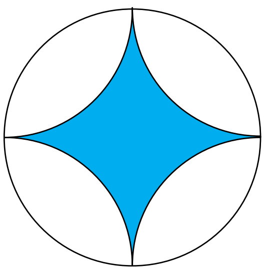
Por lo tanto el área sombreada es

$A_s = A_t/5$

$A_s = 5^2/5 = 25/5 = 5cm^2$

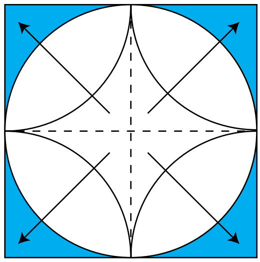



**10.** Hallar el área de la región sombreada si r = 3cm.



## Resolución

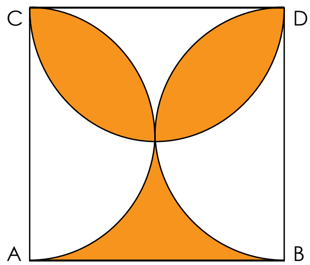
Si trazamos un cuadrado circunscrito al círculo y dividimos en cuatro cuadrantes, trasladando las regiones como indica la flecha su área sombreada resulta ser el área del cuadrado restado el área del círculo.



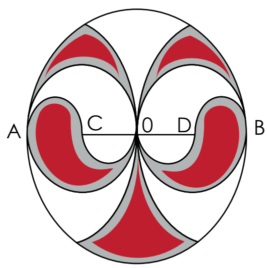
$$A_s = L^2 - \pi r^2$$
$$A_s = 6^2 - \pi 3^2$$
$$A_s = 9(4 - \pi)$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

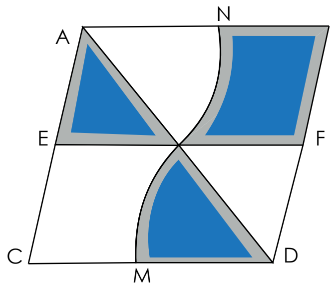
**1.** Hallar el área de la región sombreada de la figura, si: ABCD es un cuadrado y $\overline{AB}$ = 4cm



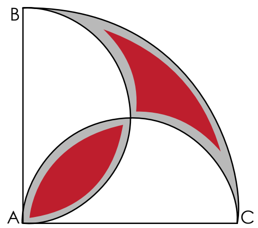

**2.** Hallar el área de la región sombreada si el diámetro $\overline{AB}$ = 8cm; C y D puntos medios de los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ respectivamente.



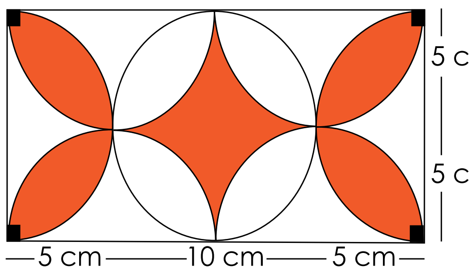
**3.** $\Delta ACD$ y $\Delta ADB$ triángulos equiláteros; M, N, F y E puntos medios de los lados del paralelogramo ABDC; $\overline{AD} = 3cm$. Hallar el área de la región sombreada.



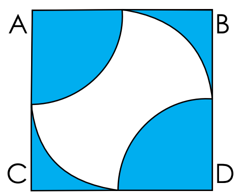

**4.** Hallar el área de la región sombreada, sabiendo que:
$\overline{AB} = \overline{AC} = 2\sqrt{2}$ ; $\overline{AB} \perp \overline{AC}$



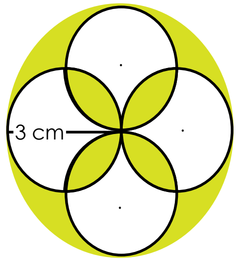

**5.** Hallar el área  de la región sombreada.



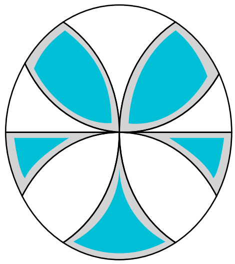

**6.** Hallar el área de la región sombreada; Si ABDC es un cuadrado de lado 4cm



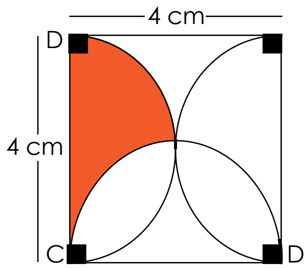
**7.** Hallar el área de la región sombreada; Si el radio del círculo, circunscrito mide 3cm.



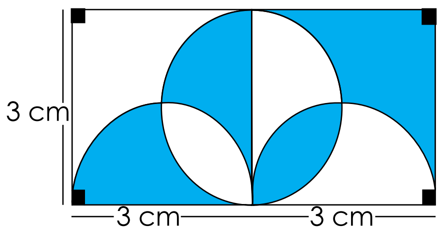

**8.** Hallar el área de la región sombreada; Si r = 5cm.



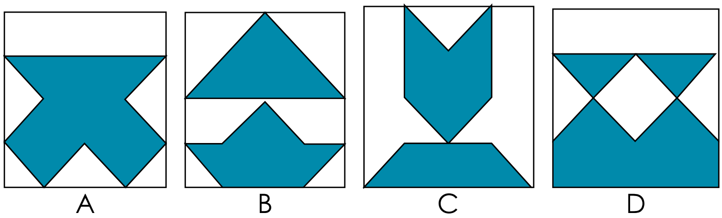
**9.** Hallar el área de la región sombreada.



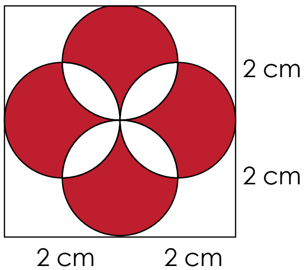

**10.** Hallar el área de la región sombreada.



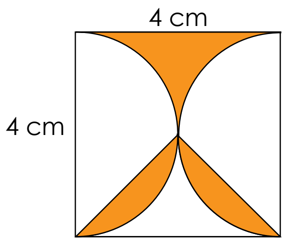
**11.** En las figuras que se muestran a continuación la única que tiene un área sombreada distinta es



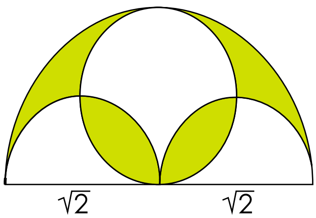

**12.** Hallar el área de la región sombreada.



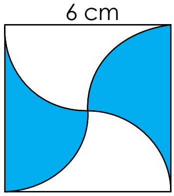

**13.** Hallar el área de la región sombreada



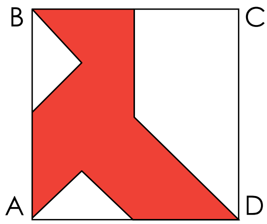

**14.** Hallar el área de la región sombreada



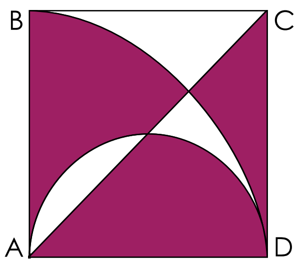
**15.** Hallar el área de la región sombreada



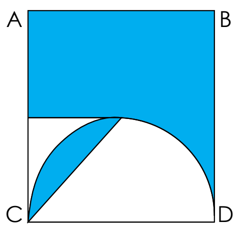

**16.** Hallar el área de la región sombreada donde ABCD es un cuadrado de lado l = 4 cm



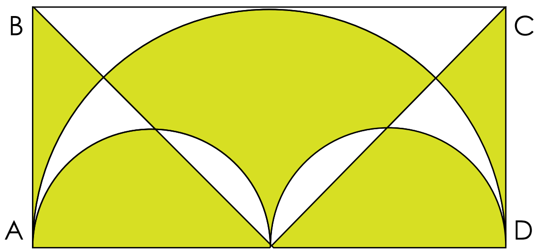

**17.** Calcular el área de la región sombreada si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 10 cm



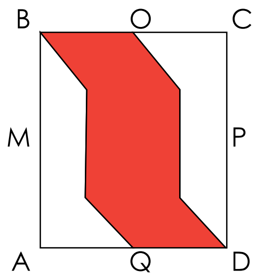

**18.** Calcula el lado del cuadrado ABCD si el área sombreada es 90 $cm^2$



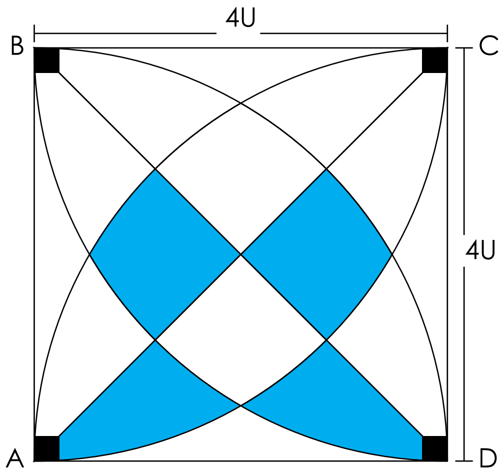
**19.** Calcular el área de la región sombreada de la figura. Si $\overline{BC} = 8cm$ y $\overline{AB} = 4cm$




**20.** Si M, O, P, Q, puntos medios del cuadrado ABCD. Calcular el lado del cuadrado si el área sombreada es $18cm^2$




**21.** Calcular el área de la región sombreada de la figura.

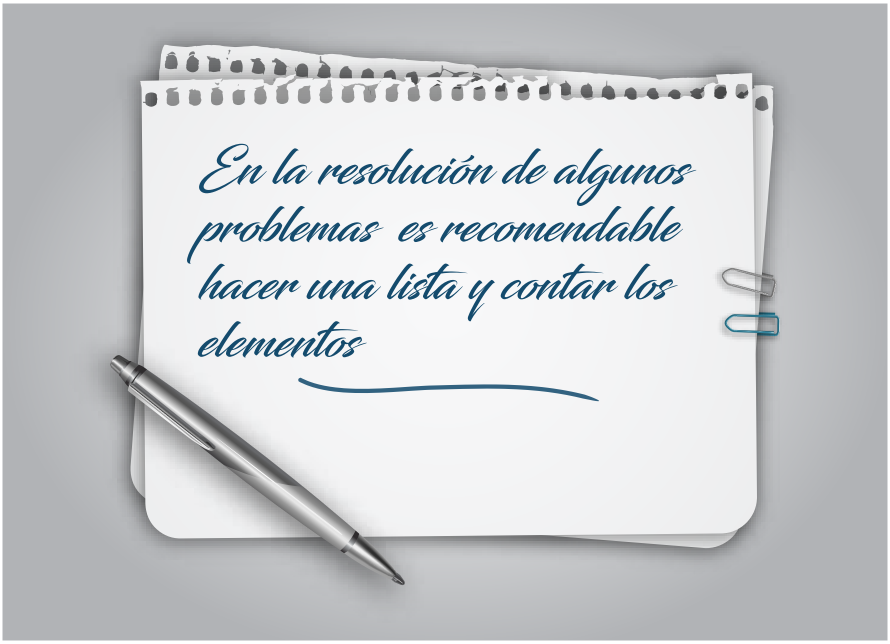


# HACER UNA LISTA

En la resolución de algunos problemas es recomendable hacer una lista y contar los elementos. Lo importante en este caso es organizar la información con mucho cuidado para no omitir ninguna opción

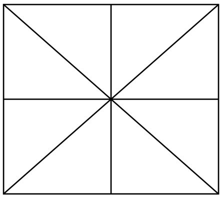
Esta estrategia nos permite examinar todas las posibilidades que presenta el problema, se trata de contar sistemática y ordenadamente para obtener el resultado.

Cuando enlistamos los elementos de cuerpos volumétricos, la capacidad visual espacial del observador permitirá determinar los resultados de forma objetiva.




## EJEMPLOS

**1.** ¿Cuántos triángulos como máximo se puede contar en la figura?



## a. COMPRENDER EL PROBLEMA

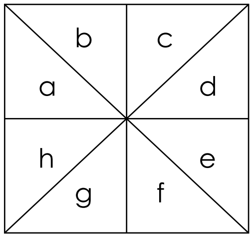
Examinar todas las posibilidades

## b. CREAR UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Buscamos la estrategia, en este caso hacer un recuento o lista

## c. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN

Para poder contar sistemática y ordenadamente vamos a contar por regiones

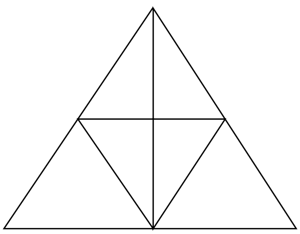



| Número de Regiones | Triángulos | Total Parciales |
|---|---|---|
| una | a, b, c, d, e, f, g, h | 8 |
| dos | bc, de, gf, ah, | 4 |
| cuatro | habc, gfed, bcde, ahgf, | 4 |
| **Total** | | **16 triángulos** |

## d. EXAMINAR LO HECHO

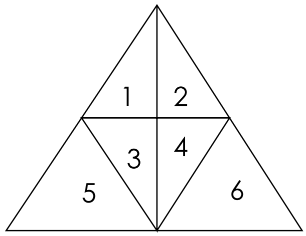
Volvemos a contar visualmente teniendo el cuidado de no repetir y considerar todas las posibilidades.

**2.** El logotipo de una empresa tiene el diagrama que se muestra a continuación. ¿Cuántos triángulos aparecen en la figura?



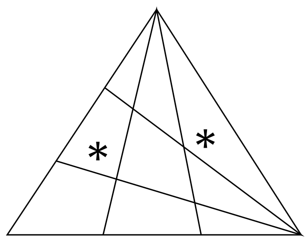
## Resolución

Para poder contar de manera ordenada conviene numerar las regiones.

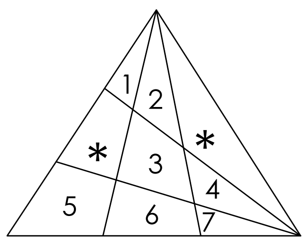



| Número de Regiones | Triángulos | Total Parciales |
|---|---|---|
| 1 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 | 6 |
| 2 | 12, 34, 13, 24 | 4 |
| 3 | 135, 246 | 2 |
| 6 | 123456 | 1 |
| **Total** | | **13 triángulos** |

**3.** En la figura ¿Cuántos triángulos que no contengan asteriscos se pueden contar?



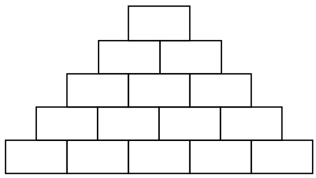

## Resolución




Al igual que el caso anterior procedemos a numerar cada una de las regiones y elaboramos una tabla para hacer el recuento de una manera ordenada.

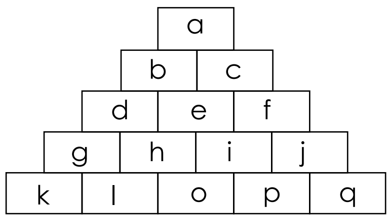
| Número de Regiones | Triángulos | Total Parciales |
|---|---|---|
| 1 | 1, 2, 4, 7 | 4 |
| 2 | 12, 23, 34, 47, 67 | 5 |
| 3 | 236, 567 | 2 |
| 4 | 3467 | 1 |
| **Total** | | **12 triángulos** |

**4.** Hallar el total de rectángulos en la figura.



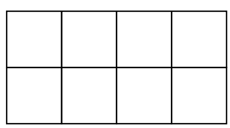
## Resolución

Al igual que los casos anteriores para poder contar de manera ordenada conviene identificar con una letra cada uno de los rectángulos y elaborar una tabla.




| Número de Regiones | Rectángulos | Total Parciales |
|---|---|---|
| 1 | a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, o, p, q | 15 |
| 2 | bc, de, ef, gh, hi, ij, kl, lo, op, pq | 10 |
| 3 | def, ghi, hij, klo, lop, opq | 6 |
| 4 | ghij, klop, lopq | 3 |
| 5 | klopq | 1 |
| **Total** | | **35 rectángulos** |

**5.** En la hoja cuadriculada ¿Cuántos cuadriláteros no son cuadrados?



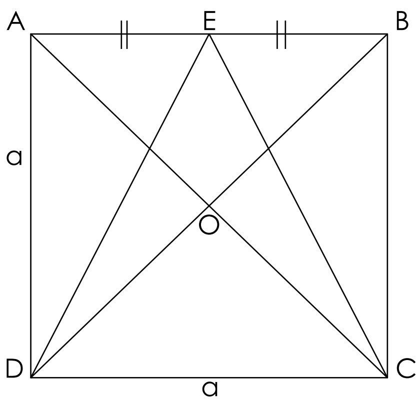
## Resolución

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |

En el gráfico el único cuadrilátero que no es cuadrado sería el rectángulo, consecuentemente en este caso se debe contar el total de rectángulos que existen en la figura, para lo cual numeramos las regiones y elaboramos una tabla.

| Número de Regiones | Rectángulos | Total Parciales |
|---|---|---|
| 2 | 12, 23, 34, 56, 67, 78, 15, 26, 37, 48 | 10 |
| 3 | 123, 234, 567, 678 | 4 |
| 4 | 1234, 5678 | 2 |
| 6 | 123567, 234678 | 2 |
| 8 | 12345678 | 1 |
| **Total** | | **19 rectángulos** |

**6.** La figura, ABCD es un cuadrado hallar el número de triángulos isósceles que se pueden contar.

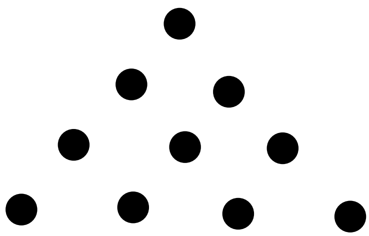



## Resolución

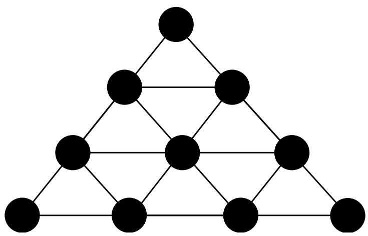
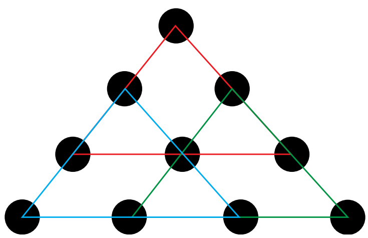
Para poder contar el número de triángulos isósceles; procedemos a identificar con letras mayúsculas los vértices que son de nuestro interés en la figura.

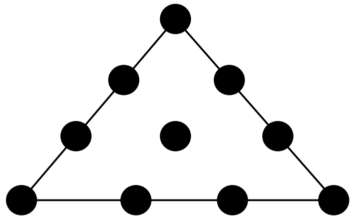
| Triángulos | Total Parciales | Justificación |
|---|---|---|
| ΔADC<br>ΔABC<br>ΔDBA<br>ΔDCB | 4 | Los dos lados corresponden a los lados del cuadrado por lo cual se forman triángulos rectángulos isósceles. |
| ΔAOD<br>ΔDOC<br>ΔCOB<br>ΔBOA | 4 | Como las diagonales de un cuadrado se bisecan en el punto medio consecuentemente los 4 triángulos que se forman con vértice común en O son isósceles |
| ΔDEC | 1 | Puesto que los triángulos DAE y CBE son congruentes (L.A.L). Por lados homólogos $\overline{DE} = \overline{CE}$. Con lo cual se forma el triángulo isósceles DEC. |
| **Total** | **9 triángulos isósceles** | |

**7.** Con base en los puntos que aparecen en la figura ¿cuántos triángulos equiláteros puedes formar?

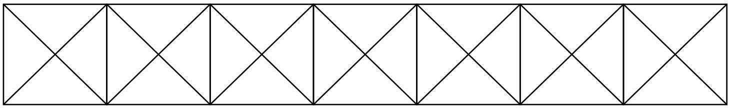


## Resolución

| # de Puntos | Gráfico | # Triángulos |
|---|---|---|
| Uniendo 3 puntos |  | 9 |
| Uniendo 6 puntos |  | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| Uniendo 9 puntos |  | 1 |
| **Total** | | **13** |

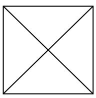
**8.** ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

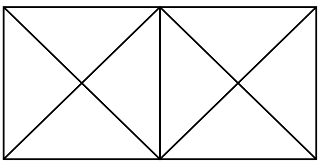


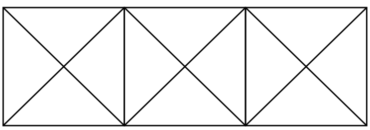
## Resolución.

### Plan A

Considerando los tres casos más sencillos, tenemos el siguiente:

| **a. Caso 1** | |
|---|---|
|  | De 1 triángulo = 4<br>De 2 triángulos = 4<br>Total 8 = 10 x 1 – 2 |

| **b Caso 2** | |
|---|---|
|  | De 1 triángulo = 8<br>De 2 triángulos = 8<br>De 4 triángulos = 2<br>Total 18 = 10 x 2 - 2 |

| **c. Caso 3** | |
|---|---|
|  | De 1 triángulo = 12<br>De 2 triángulos = 12<br>De 4 triángulos = 4<br>Total 28 = 10 x 3 – 2 |

### d. Caso General

Consecuentemente para la figura representada será

10 x 7 – 2 = 68

## Plan B

Con los resultados anteriores se puede escribir la serie y para determinar su resultado buscamos el patrón numérico

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N° de casos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | _ _ _ _ _ |
| N° de triángulos | 8 | 18 | 28 | 38 | 48 | 58 | 68 | _ _ _ _ _ |
| | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | | |

**9.** Supongamos que se lanza simultáneamente una moneda y un dado ¿Cuántos resultados diferentes pueden ocurrir?

## Resolución

## Plan A

Enlistando los resultados posibles tenemos que:

C1, C2, C3, C4, C5, C6
S1, S2, S3, S4, S5, S6

Donde C: Caras y S: sello

Del análisis se tiene que pueden ocurrir 12 resultados diferentes

## Plan C

Aplicando el principio básico de probabilidades, el espacio muestral de los dos experimentos es:

$E_1$: Moneda (c, s) → 2 resultados diferentes
$E_2$: Dado (1, 2, 3, 4, 5, 6) → 6 resultados diferentes

Consecuentemente el número total de maneras diferentes que puede ocurrir este hecho es 2*6 = 12

**10.** ¿De cuántas maneras diferentes es posible responder una evaluación de 3 preguntas tipo verdadero - falso?

## Resolución

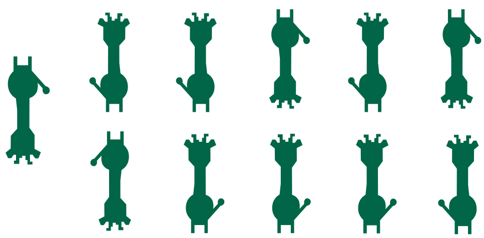
Enlistando las maneras posibles como puede responder un estudiante a cada pregunta resulta:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | V | V | V | V | F | F | F | F |
| 2) | V | V | F | F | V | V | F | F |
| 3) | V | F | V | F | F | V | F | V |

8 maneras

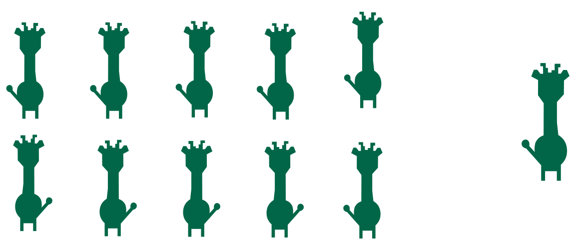
Consecuentemente podría responder de 8 maneras diferentes

**11.** Indique cuántas siluetas tienen igual disposición que el modelo que se muestra en la parte lateral izquierda.



## Resolución

Si hacemos girar todas las siluetas que aparecen invertidas incluida la del modelo tenemos la siguiente figura.



Por tanto se pueden contar 6 siluetas iguales al modelo

**12.** En las siguientes figuras indique cuántas de estas cumplen con la condición de estar sombreado exactamente los 3/5.

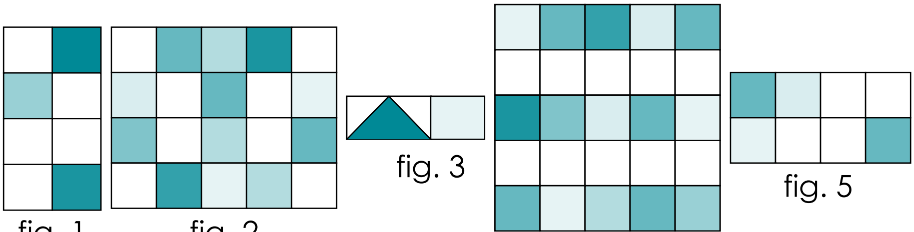


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4 fig. 5

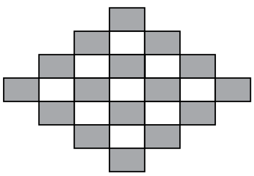
## Resolución.

Obsérvese que en la fig. 2 aparece sombreados 12 cuadraditos de los 20, igualmente en la fig. 4 aparecen sombreados 15 cuadraditos de los 25. Por tanto existen 2 figuras que cumplen la condición de estar sombreados exactamente los 3/5

**13.** La siguiente figura muestra la disposición de los bloques claros y obscuros que fueron utilizados para construir el altar patrio. ¿Cuántos bloques obscuros se utilizaron para armar esta estructura?

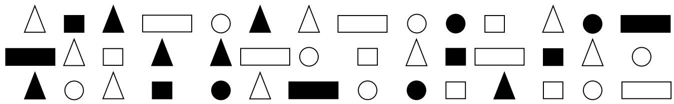
## Resolución

Como se puede observar en la figura existen dos pisos de bloques obscuros y claros. Que observados desde la parte superior se podría apreciar la siguiente figura.



Por tanto el número de bloques obscuros utilizados para la construcción de esta estructura son 16

**14.** Observa los dibujos que aparecen a continuación

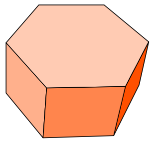


a. ¿Cuántos triángulos blancos existen? 8

b. ¿Cuántos cuadrados se encuentran seguidos inmediatamente de un círculo? 3

c. ¿Cuántos triángulos negros encuentran delante suyo un rectángulo blanco? 2

**15.** En el cuerpo volumétrico que se muestra a continuación ¿cuántos pares de caras son paralelos?



## Resolución

En las caras laterales tenemos tres pares y la base con la tapa forman otro par, por tanto hay 4 pares de caras paralelas

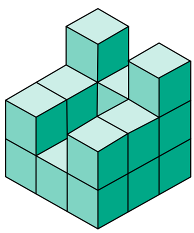
**16.** ¿Cuántos divisores tiene la expresión $x^2y$?

## Resolución

De forma análoga a casos anterior aplicando la fórmula se tiene que:

Número de divisores = $(2 + 1)\ (1 + 1) = 6$
Los 6 divisores son: $1, x, y, xy, x^2, x^2 y$

**17.** Cuántos cubos pequeños faltan para acabar de formar un cubo grande.



**Resolución**

Obsérvese que el cubo tiene 3 cubitos por cada arista consecuentemente el cubo grande estaría formado por 27 cubos pequeños, en éste caso el número de cubitos pequeños que faltan es 9

**18.** Un señor tiene monedas de 5c,10c, 25c y 50c ¿Cuántas cantidades podría formar utilizando únicamente dos monedas?

**Resolución**

Enlistando todas las posibilidades tenemos:

| | | |
|---|---|---|
| 5 + 10 = 15 | 10 + 25 = 35 | 25 + 50 = 75 |
| 5 + 25 = 30 | 10 + 50 = 60 | |
| 5 + 50 = 55 | | |

Podríamos formar 6 cantidades diferentes. Nótese que cuando realizamos combinaciones no interesa el orden en que se colocan los objetos

**19.** Un señor tiene monedas de 5c,10c 25c y 50c ¿De cuántas maneras se puede colocar las monedas utilizando únicamente dos monedas?

**Resolución**

Enlistando todas las posibilidades tenemos

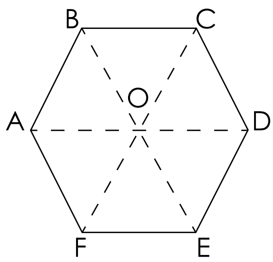
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5-10 | 10-5 | 10-25 | 25-10 | 25-50 | 50-25 |
| 5-25 | 25-5 | 10-50 | 50-10 | | |
| 5-50 | 50-5 | | | | |

Se podrían colocar de 12 maneras diferentes. Nótese que cuando realizamos permutaciones nos interesa el orden en que están colocados los objetos.

**20.** En un hexágono regular trazar las diagonales paralelas a los lados del polígono. ¿Cuántos cuadriláteros congruentes se pueden contar?

**Resolución**

Para resolver el problema tracemos el gráfico correspondiente

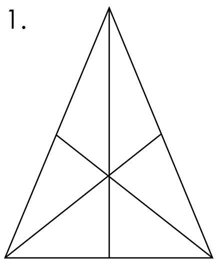


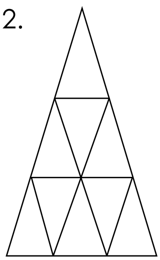

Se pueden contar 12 cuadriláteros congruentes los mismos que se indican a continuación con su correspondiente acotamiento.

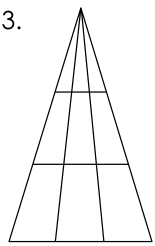
FABO, EDCO, ABCO, DCBO, AFEO, DEFO ,FABC, FEDC, EFAB, EDCB, ABCD, AFED

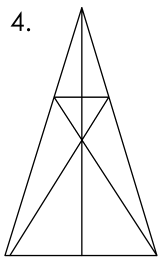
## PROBLEMAS PROPUESTOS

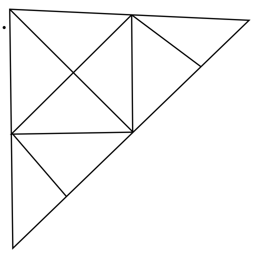
Determinar la cantidad de triángulos en las siguientes figuras.

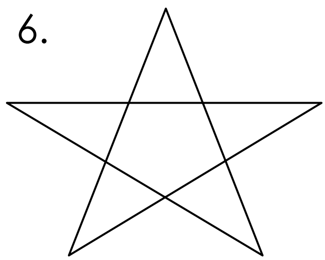
1.


2.


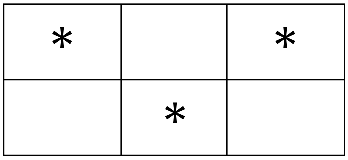
3.


4.


5.


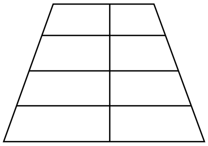
6.


**7.** Hallar el número de cuadriláteros que contenga un solo asterisco, en la figura.

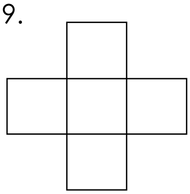


Determinar la cantidad de cuadriláteros en las siguientes figuras.

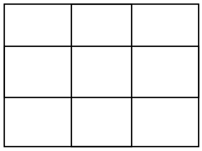
8.



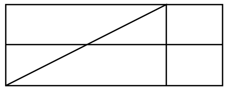
9.



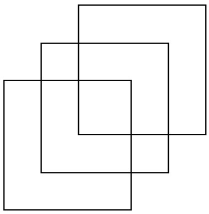
10.



11.



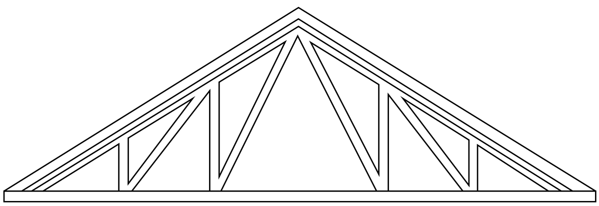
**12.** ¿Cuántos cuadrados hay en la siguiente figura?



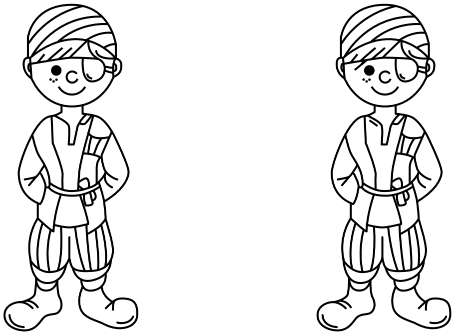
**13.** ¿De cuántas maneras diferentes es posible responder un examen de 5 preguntas de tipo verdadero - falso?

**14.** ¿De cuántas maneras puede ser respondido un examen de 5 preguntas de opción múltiple con cuatro alternativas para cada pregunta?

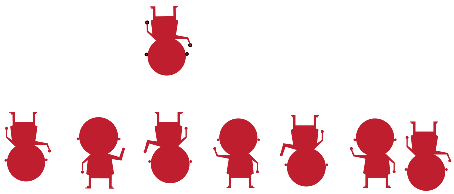
**15.** ¿Cuántos triángulos tiene la armadura de la siguiente cubierta?



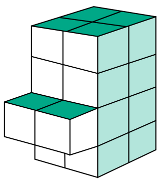
**16.** Encontrar cuántas diferencias existen entre las dos siluetas que se muestran a continuación.



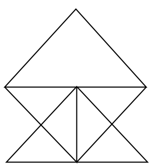
**17.** Indique cuántas siluetas tienen igual disposición que el modelo que se muestra en la parte superior.



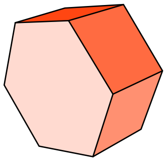
**18.** ¿Cuántos cubos hay en la figura?



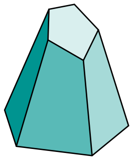
**19.** Determine ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



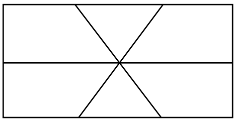
**20.** ¿Cuántas aristas hay en el siguiente cuerpo volumétrico que se muestra a continuación?



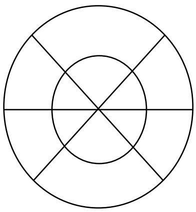
**21.** ¿Cuántos vértices se pueden contar en el siguiente cuerpo volumétrico?



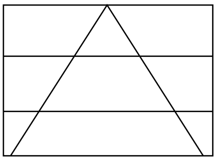
**22**. Cuántos cuadriláteros hay en la figura.



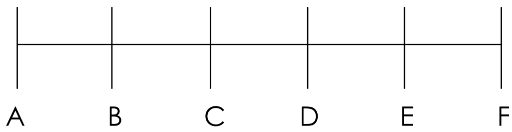
**23.** ¿Cuántos semicírculos hay en la siguiente figura?



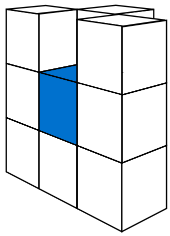
**24.** ¿Cuántos trapecios hay en la siguiente figura.



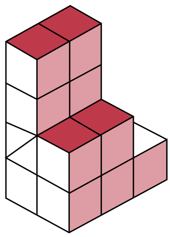
**25.** A Juan le ofrecen $2 por cada segmento que encuentre en la siguiente figura ¿Cuánto le dieron si encontró los 2/3 del total de segmentos?



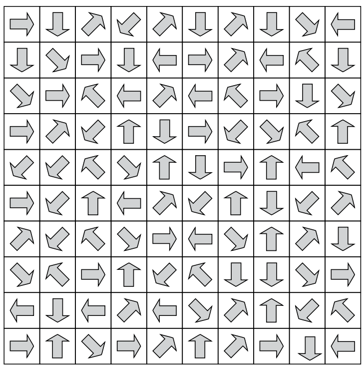

**26.** Cuántos cubitos tocan el cubito gris que se encuentra en el centro



**27.** Cuántos cubos pequeños faltan para acabar formar un cubo grande.



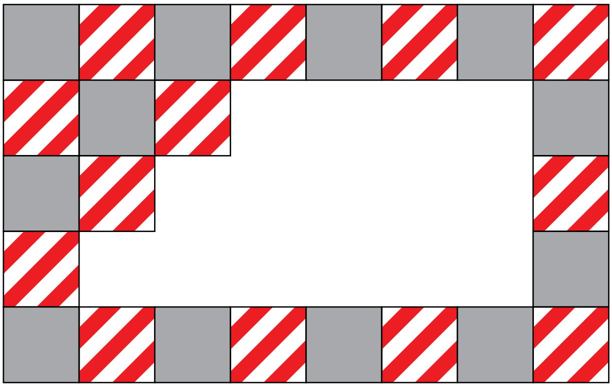
**28.** Cuántas casillas están señaladas por 3 flechas dirigidas a una misma posición.



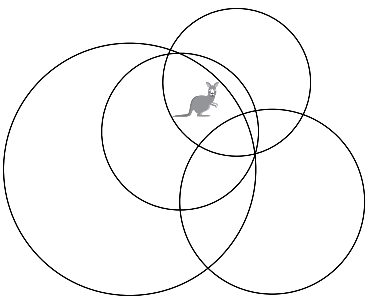
**29.** Dos caminos unen la ciudad A y B, cuatro unen a B y C y cinco unen a las ciudades C y D. Para movilizarse de A a D. ¿Cuántas rutas diferentes son posibles contar?

**30.** Ximena y su hermano Jorge fueron a comprar gaseosas, el mesero les ofrece las siguientes posibilidades: tamaño del vaso grande o pequeño; tipo de bebida light o normal; sabor de la bebida manzana, freza o naranja ¿Cuántas posibilidades le ofrecen en este servicio?

**31.** Se construyó un piso intercalando dos clases de cerámica: una gris y la otra rayada, pero se desprendieron algunas baldosas como se muestra en la figura. ¿Cuántos mosaicos grises se desprendieron?



**32.** Adentro de cuántos círculos está el canguro?



# HACER UN DIAGRAMA

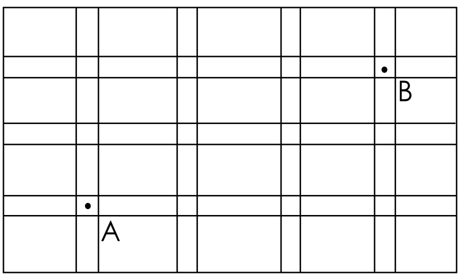
En muchos problemas, para llegar a la solución hay que organizar los datos y realizar un esquema apropiado.

Los diagramas en muchos de los casos nos ayudan mostrándonos todos los caminos que se pueden seguir para alcanzar el resultado.

Para resolver algunos problemas hay que construir un diagrama que nos lleve a visibilizar de mejor manera la solución del problema.

## EJEMPLO

**1.** La siguiente cuadricula representa las calles de una ciudad en las que solo se puede circular en el sentido norte y este ¿De cuántas formas diferentes se puede viajar de la esquina A la esquina B?



## a. COMPRENDER EL PROBLEMA

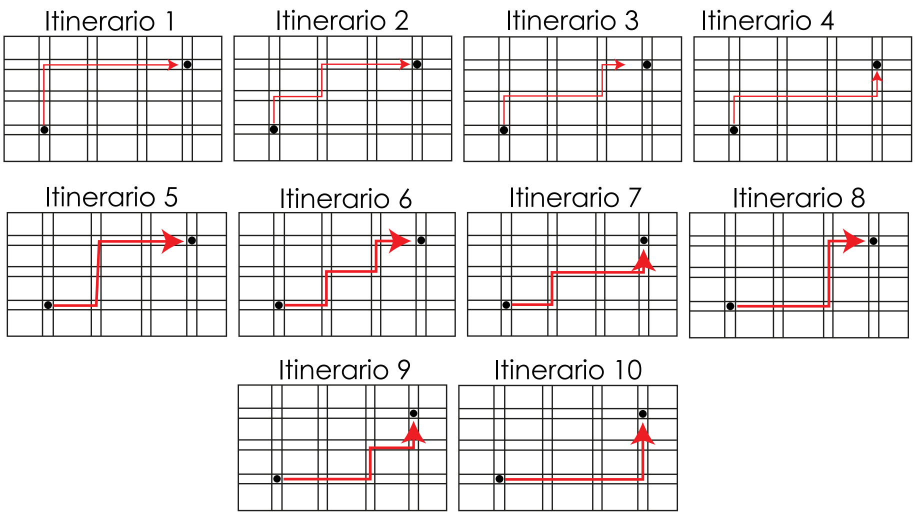
¿Qué queremos encontrar?

## b. CREAR UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Seleccionamos la estrategia, en este caso hacer un diagrama

## c. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN

En este ejercicio ponemos en juego nuestro ingenio y creatividad buscando los posibles caminos para trasladarnos desde el punto A hasta el punto B

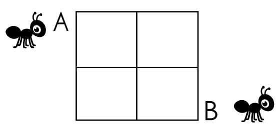



Solución: Se puede viajar de 10 formas diferentes

## d. EXAMINAR LO HECHO

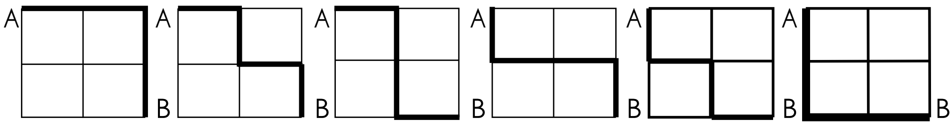
Al ser un problema donde se emplea un esquema gráfico, es fácil visualizar todas las rutas que podemos emplear para trasladarnos desde el punto A hasta el punto B con las condiciones que se establecen en el problema

**2.** ¿De cuántas maneras puede ir una hormiga de A a B, utilizando caminos diferentes, sin retroceder, subir, ni recorrer diagonalmente?



**Resolución**

Para esto esquematicemos el recorrido de la hormiga con una línea de mayor espesor



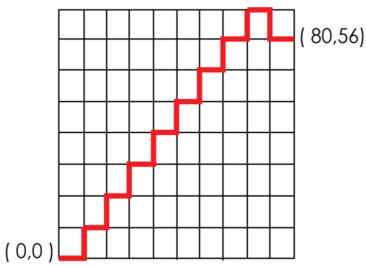

La hormiga puede utilizar 6 caminos diferentes

**3.** Un abogado desea trasladarse desde la Corte Suprema de Justicia de Quito, que se encuentra en las coordenadas (0,0) a la Fiscalía General del Estado, que está en las coordenadas (80,56). Para esto debe recorrer tramos tanto horizontales como verticales de igual longitud y en cuyos extremos existen coordenadas enteras ¿Cuál es el mínimo número de tramos que puede tener el camino?

**Resolución:**

En este tipo de problemas se hace necesario utilizar un diagrama.

Pero para pre diseñar el recorrido cuya condición es recorrer tramos tanto horizontales como verticales de igual longitud se hace necesario conocer el divisor común y que sea máximo ya que otra condición es que estos desplazamientos se realicen utilizando el menor número de tramos. Ahora nos corresponde esquematizar el problema en cuestión utilizando un sistema de referencia, tomando en cuenta todas las especificaciones y el divisor común máximo que en este caso es 8 (longitud de cada tramo)

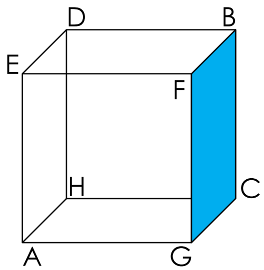



Por tanto el mínimo número de tramos que puede tener el camino es 19. Cabe señalar que puede haber otros diagramas que nos lleven al mismo resaltado pero no menores a los 19 tramos

**4.** ¿Cuántos caminos diferentes de tres aristas existen en el cubo de la figura para ir del vértice A al vértice B sin pasar 2 veces por la misma arista?

## Resolución

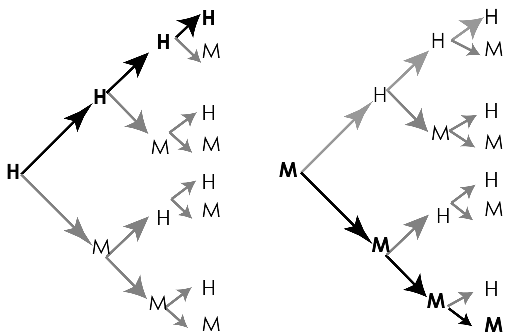
Camino 1 : A E D B
Camino 2 : A E F B
Camino 3 : A H D B
Camino 4 : A H C B
Camino 5 : A G F B
Camino 6 : A G C B
Solución: 6 rutas diferentes




**5.** Un matrimonio planifica tener 4 hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que sean todos del mismo sexo?

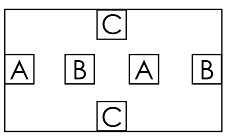
## Resolución

Haciendo un diagrama tenemos

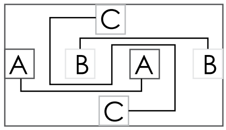



p = Número De Casos Favorables/Número De Casos Posibles
p = 2/16 = 1/8 = 0.125
P = 12.5%

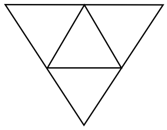
**6.** Trazar caminos para unir los tres pares de letras semejantes, de tal manera que no se crucen los caminos y sin salirse del recuadro.



### Resolución

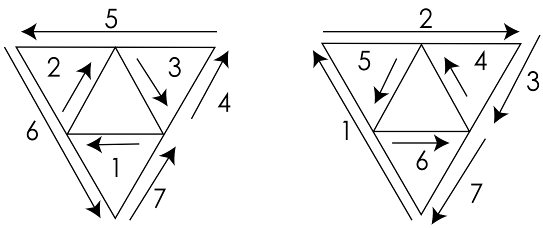



**7.** Concéntrate en esta figura y luego traza la misma sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea. Hazlo de dos formas diferentes



### Resolución

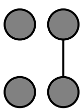
Dos de estos caminos son:




**8.** Multiplicar mentalmente 39 x 48

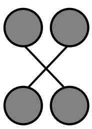
### Resolución

Para multiplicar cantidades de dos cifras de una manera rápida y segura sigamos los trazos que se indican en cada uno de los diagramas de la parte izquierda y realicemos las operaciones correspondientes que se indican en la parte derecha pero mentalmente.



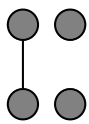
39
48
...2

8 x 9 = 72
Levamos 7



39
48
..72

(4 x 9) + (8 x 3) + 7= 67
Levamos 6



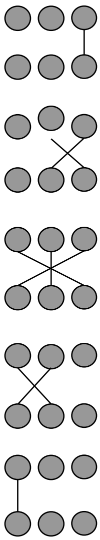
39
48
1872

(4x3) + 6 = 18

**9.** Multiplicar mentalmente 342 x 567

**Resolución.**

Para multiplicar cantidades de tres cifras, al igual que en el caso anterior realicemos las operaciones correspondientes que se indican en la parte derecha pero mentalmente siguiendo el diagrama que se indica en la parte izquierda



342   7 x 2 = 14
567   Llevamos 1
....4

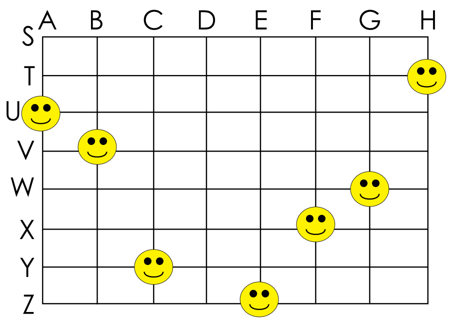
342   ( 6 x 2 ) + ( 7 x 4 ) + 1 = 41
567   Llevamos 4
...14

342   ( 7 x 3 ) + ( 6 x 4 ) + ( 5 x 2 )+ 4 = 59
567   Llevamos 5
..914

342   ( 6 x 3 ) + ( 5 x 4 ) + 5 = 43
567   Llevamos 4
..3914

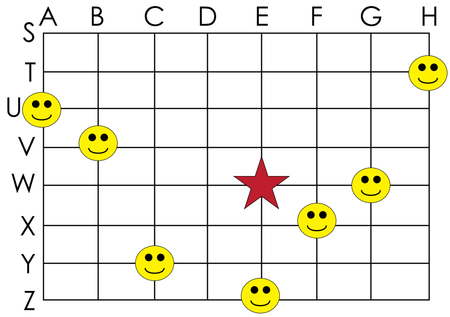
342
567   5 x 3 +4 = 19
193914

**10.** Los puntos indican las posiciones donde se encuentra un grupo de policías cumpliendo la tarea de dar seguridad a una ciudad. El comandante del grupo tiene conocimiento que en pocos minutos se producirá un atentado a un empresario, por lo que tiene que reunirles de manera urgente a toda la tropa para el operativo correspondiente. ¿En qué esquina debe reunirles a todos para que les quede más cerca?.



## Resolución

Para poder determinar la esquina donde se deben reunir los policías se debe trazar un sistema de referencia desde la persona que se encuentra más cerca del centro. En este caso el punto se encuentra entre las calles W y E, como se ilustra en el siguiente gráfico.

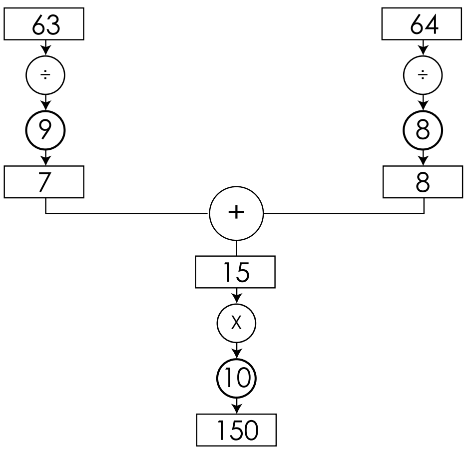



Si se hubiesen reunido entre las calles V y E habrían recorrido en total 28 cuadras. Pero como se pide determinar el punto que quede más cerca para todos, se deben encontrar entre las calles W y E con esto en total habrían recorrido 27 cuadras.

**11.** Utilice un diagrama para explicar el proceso de cálculo de las operaciones que se indican a continuación considerando el signo de agrupación y su jerarquía.

$10 \times [(63 \div 9 + 64 \div 8)]$

## Resolución

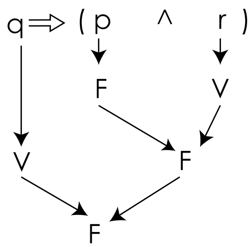


Obsérvese que por jerarquía primero efectuamos las divisiones, luego sumamos estos resultados parciales y multiplicamos por en número que antecede al paréntesis.

**12.** Sabiendo que la proposición p es falso, q es verdadero y r es verdadero. Cuál es el valor de verdad de la proposición q => (p ∧ r).

## Resolución

Tenemos:

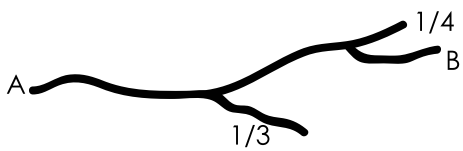



Luego la proposición: q => (p ∧ r), es falsa.

**13.** Un río comienza en las alturas de un nevado, y a cierta distancia la corriente se separa en dos. Uno de los cauces se lleva 1/3 de la corriente, y el segundo cauce se lleva el resto. Este segundo cauce se vuelve a dividir en dos, un cauce se lleva 1/4 parte de la corriente y el otro cauce se lleva el resto. ¿Qué fracción de la corriente principal lleva este cause?

## Resolución

Para resolver el problema se hace necesario bosquejar un diagrama a fin de visualizar de manera objetiva el problema en cuestión.




Para conocer la fracción que circula por el ramal B tendríamos que efectuar la siguiente operación

$$1 - (1/3 + 2/3 \times 1/4) = 1 - 1/2 = 1/2$$

Para comprender mejor el problema imaginemos que en la parte A lleva un volumen de agua de 120 litros, consecuentemente por la ramificación 1/3 fluirán 40 litros y por la otra ramificación 2/3 fluirán 80 litros, de éstos por el ramal 1/4 fluirán 20 litros y por el ramal B fluirán 60 litros que representa la mitad del volumen inicial

**14.** Factorizar $8x^2 - 22x + 15$ empleando el criterio del aspa simple

## Resolución

$$8\,x^2 - 22\,x + 15 = (4x - 5)(2x - 3)$$

$$\begin{array}{lll} 4x & -5 & = -10x \\ 2x & -3 & = -12x \\ & & \quad -22x \end{array}$$

**15.** Factorizar $9x^2 + 11xy + 2y^2 + 26x + 5y - 3$ empleando el criterio del aspa doble.

$$9x^2 + 11xy + 2y^2 + 26x + 5y - 3 - (9x + 2y - 1)(x + y + 3)$$

$$\begin{array}{lll} 9x & 2y & -1 \\ 1x & 1y & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (9x)(3) = 27x \\ (x)(-1) = \underline{-x} \\ 26x \end{array}$$

**16.** Calcular el valor del determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

## Resolución

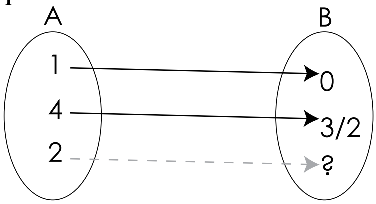
Para resolver un determinante de orden $2 \times 2$ se multiplican los elementos de la diagonal principal $(3 \times 4)$ y se resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria $(5 \times 2)$, según se expresa en el siguiente diagrama

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} - \\ + \end{array} = (3)\,(4) - (5)\,(2) = 2$$

**17.** La relación f: R → R definida por f(x) = (x-1)/(x-2) es f una función?

## Resolución

Si esquematizamos en un diagrama sagital la relación dada, dando valores arbitrarios a << x >> nos queda:




f(x) no es una función, puesto que no existe imagen en para x = 2

Es decir f(x) no es una función de R → R, pero si es función de R - {2} → R

**18.** Si $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ y $B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

Hallar A × B si es posible.

## Resolución

El producto A×B existe cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B, por tanto procede realizar el producto indicado, para lo cual utilizaré un diagrama.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando los elementos de la primera fila de A y la primera columna de B produce 9

$$\begin{aligned} &(-4)\ (-2) = 8 \\ &(-1)(7) = -7 \\ &(2)(4 = \underline{\ \ 8} \\ &\qquad\quad 9 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando los ementos de la segunda fila de A y la primera columna de B produce 54

$(3)(-2) = -6$
$(8)(7) = 56$
$(1)(4) = \underline{\ 4\ }$
$\qquad\quad 54$

De forma análoga se procede para los otros casos
Multiplicando la primera fila de A por la segunda columna de B produce -16

$(-4)(1) + (-1)(0) + (2)(-6) = -16$

Multiplicando la segunda fila de A por la segunda columna de B produce -3

$(3)(1) + (8)(0) + (1)(-6) = -3$

Por tanto

$$A \times B = \begin{bmatrix} 9 & -16 \\ 54 & -3 \end{bmatrix}$$

**19.** Averiguar que fracción es la mayor

3/4, 5/6, 2/3, y 3/5

## Resolución

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| 3/4, | 5/6, | 2/3, y | 3/5 |

Comparamos A y B, por el método de aspa

$$\overset{\textbf{A}}{\frac{3}{4}} \qquad \overset{\textbf{B}}{\frac{5}{6}} \rightarrow 18 < 20$$

La fracción B es mayor que la fracción A. Comparamos B y C por el método del aspa

$$\overset{\textbf{B}}{\frac{5}{6}} \quad \overset{\textbf{C}}{\frac{2}{3}} \rightarrow 15 > 12$$

La fracción B también es mayor que la fracción C
Finalmente comprobamos la fracción mayor con la fracción D

$$\overset{\textbf{B}}{\frac{5}{6}} \quad \overset{\textbf{D}}{\frac{3}{5}} \rightarrow 25 > 18$$

Se deduce que la fracción B = 5/6 es la mayor de todas

**20**. Dividir ( $x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 8)/(x - 2)$

## Resolución

Aplicando el método de Ruffini, se puede apreciar fácilmente el proceso empleado utilizando un diagrama de flechas como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{c|ccccc}
x - 2 = 0 & 1 & -2 & -1 & 6 & -8 \\
x = 2 & & 2 & 0 & -2 & 8 \\
\hline
x & \underbrace{1 \quad 0 \quad -1 \quad 4}_{q(x)} & & & & \underbrace{0}_{R(x)}
\end{array}$$

$q(x) = x^3 - x + 4$
$R(x) = 0$

**21.** Operar $4/5 \div 7/13$

## Resolución

Esta división se arregla de la siguiente manera

Medios $\dfrac{\dfrac{4}{5}}{\dfrac{7}{13}}$ Extremos

$$\frac{\text{producto de extremos}}{\text{producto de medios}} = \frac{4 \times 13}{5 \times 7} = \frac{52}{35}$$

**22**. En la tabla se registra el costo según el número de libros adquiridos.

| | Libros | Costos | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | |
| | 2 | 10 | |
| | 3 | 15 | |
| x3 | 4 | 20 | x3 |
| | 5 | 25 | |
| | 6 | 30 | |
| | 7 | x | |

| | Libros | Costos | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | |
| | 2 | 10 | |
| | 3 | 15 | |
| ÷3 | 4 | 20 | ÷3 |
| | 5 | 25 | |
| | 6 | 30 | |
| | 7 | x | |

Observando los datos de la tabla se tiene que: si triplica el número de libros de 2 a 6 su costo también se triplica de \$10 a \$30 . Si observamos en sentido inverso de abajo hacia arriba vemos que, si el número de libros se reduce a la tercera parte de 6 a 2 su valor también se reduce a la tercera parte de \$30 a \$10.Es decir las dos magnitudes aumentan o disminuyen en la misma proporción.

Esto nos dice que existe una relación de proporcionalidad directa entre las dos magnitudes, lo cual nos permite establecer igualdades efectuando el producto cruz entre los elementos de una fila con los de otra fila, como veremos a continuación:

| Libros | Costos |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 10 |
| 3 | 15 |
| 4 | 20 |
| 5 | 25 |
| 6 | 30 |
| 7 | x |

$5 \times 10 = 2 \times 25$

| Libros | Costos |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 10 |
| 3 | 15 |
| 4 | 20 |
| 5 | 25 |
| 6 | 30 |
| 7 | x |

$4 \times 25 = 5 \times 20$

| Libros | Costos |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 10 |
| 3 | 15 |
| 4 | 20 |
| 5 | 25 |
| 6 | 30 |
| 7 | x |

$1 \times 15 = 3 \times 15$

Así podríamos establecer múltiples igualdades.

Si el problema ahora es determinar el costo de 7 libros conociendo el costo de 3 libros que es de $15.

El proceso para resolver sería el siguiente:

| Libros | Costos |
|---|---|
| 3 | 15 |
| 7 | x |

$$3\,(x) = 15\,(7)$$
$$x = \frac{15\,(7)}{3}$$
$$x = \$35$$

Como se conoce el producto de una diagonal resulta fácil encontrar mentalmente el número desconocido ya que el producto de la otra diagonal es la misma.

**23.** En la tabla se registra el número de trabajadores y los días que se emplean para hacer una determinada obra.

| | Trabajadores | Días | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 120 | |
| x2 | 3 | 40 | ÷2 |
| | 6 | 20 | |
| | 8 | 15 | |
| | 12 | 10 | |
| | 10 | x | |

| | Trabajadores | Días | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 120 | |
| | 3 | 40 | |
| ÷4 | 6 | 20 | x4 |
| | 8 | 15 | |
| | 12 | 10 | |
| | 10 | x | |

Observando los datos de la tabla se tiene que si la una magnitud se duplica de 3 a 6 la otra disminuye a la mitad de 40 a 20 .Si observamos en sentido inverso de abajo hacia arriba veremos que si la una variable se hace cuatro veces menor de 12 a 3 la otra se hace 4 veces mayor de 10 a 40.

Esto nos dice que existe una relación de proporcionalidad inversa entre las dos magnitudes, lo cual nos permite establecer igualdades efectuando el producto en forma horizontal entre los elementos de una misma fila, como veremos a continuación:

| Trabajadores | Días |
|---|---|
| 1 | 120 |
| 3 ↔ | 40 |
| 6 | 20 |
| 8 ↔ | 15 |
| 12 | 10 |
| 10 | x |

$$3 \times 40 = 8 \times 15$$

| Trabajadores | Días |
|---|---|
| 1 | 120 |
| 3 | 40 |
| 6 ↔ | 20 |
| 8 | 15 |
| 12 ↔ | 10 |
| 10 | x |

$$6 \times 20 = 12 \times 10$$

Así podríamos establecer múltiples igualdades.

Si el problema ahora es determinar cuántos días se demoran 10 trabajadores conociendo que 3 trabajadores se demoran 40 días en hacer una obra.

El procedimiento es el siguiente:

| Trabajadores | Días |
|---|---|
| 3 ⟷ | 40 |
| 10 ⟷ | x |

$$3\,(40) = 10\,(x)$$

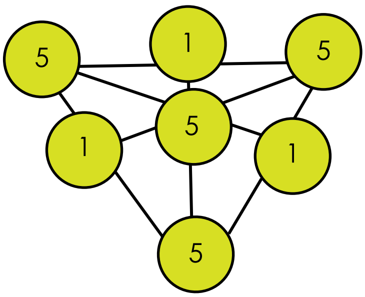
$$x = \frac{3\,(40)}{10}$$

$$x = 12 \text{ días}$$

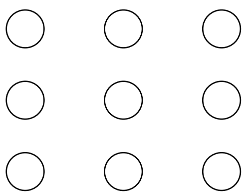
Como se conoce el producto de una horizontal resulta fácil encontrar mentalmente el otro número desconocido ya que el producto de la otra horizontal es el mismo.

**24.** Tengo 4 monedas de 5ctv y 3 monedas de 1ctv. Las quiero colocar de modo tal que se formen 6 líneas rectas de 3 monedas cada una, y que en cada línea haya una moneda de 1ctv y 2 monedas de 5ctv.

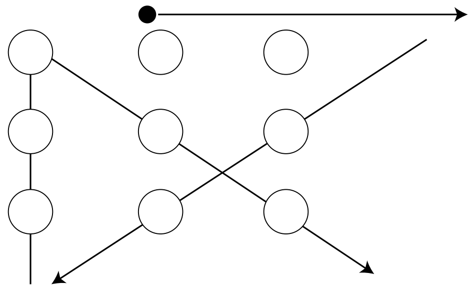
**Resolución:**



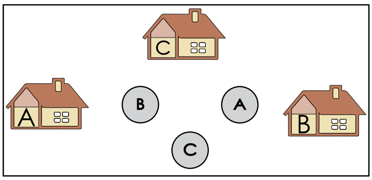

**25.** Unir los 9 círculos mostrados en la figura con únicamente 4 rectas con la condición de no levantar el lapicero, ni regresar, por el mismo sitio.



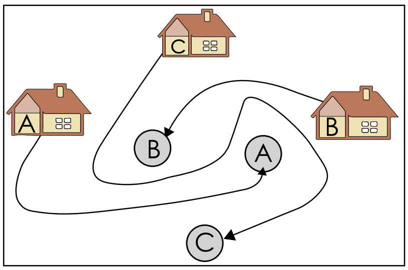
**Resolución:**



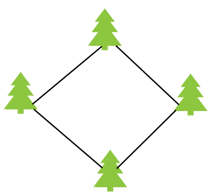
**26.** Tres casas de un condominio (ver figuras) cercadas completamente tienen que sacar los desagües a los pozos, A, B y C respectivamente de tal manera que no se crucen las tuberías entre sí. ¿Cómo sería esta instalación?




**Resolución:**

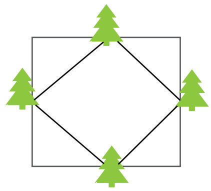



**27.** La figura representa una cancha de fútbol con cuatro árboles en sus esquinas.

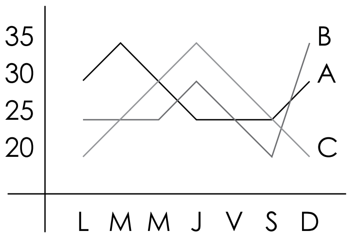


Buscar una estrategia para aumentar el tamaño de la cancha al doble, sin quitar ningún árbol y de tal manera que no quede ningún árbol en las esquinas.

## Resolución



**28.** El gráfico muestra las temperaturas de 3 ciudades A, B y C dutnte una semana ¿Qué ciudad tubo durante la semana el promedio de temperatura mas alta?

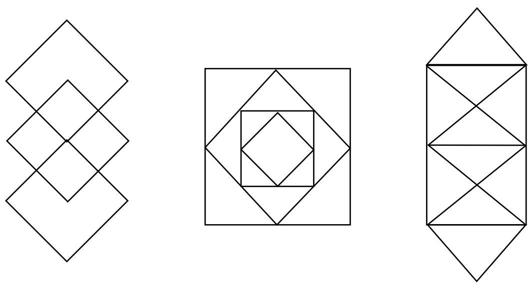



## Resolución

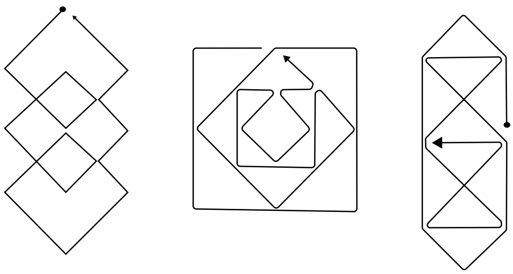
A = $28{,}5^0$

**29.** ¿Puedes dibujar estas figuras sin levantar el lápiz del papel?

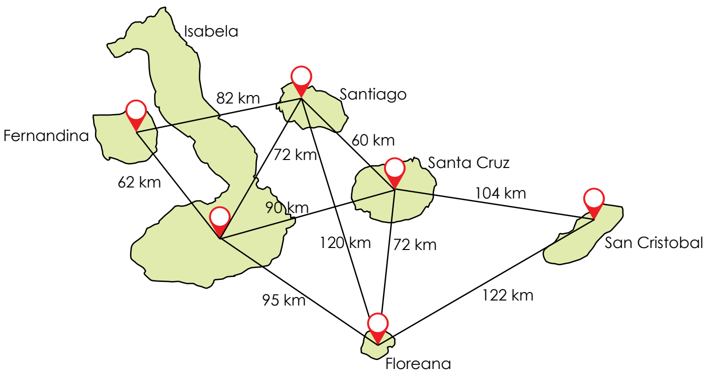
No está permitido volver a repasar ninguna línea pero sí puedes cruzar sobre ellas.



## Resolución



**30.** ¿Cuál es la ruta más corta para visitar todas islas Galápagos sin pasar dos veces por la misma isla?



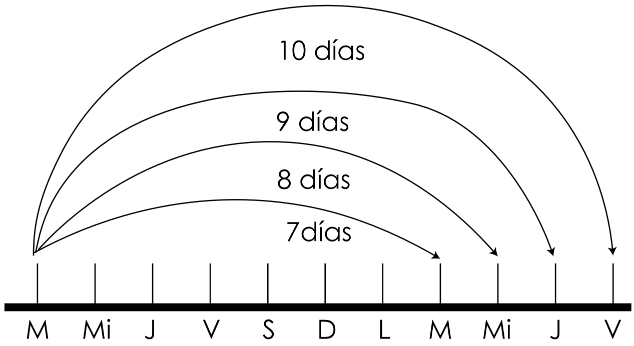

## Resolución

Fernandina - Isabela - Santiago - Santa Cruz - Floreana - San Cristobal 62 Km + 72 Km + 60 Km + 72 Km + 122Km = 388 Km

**31.** Si hoy es martes ¿Qué día será dentro de 150 días?

## Resolución

Para resolver el problema esbocemos un gráfico.



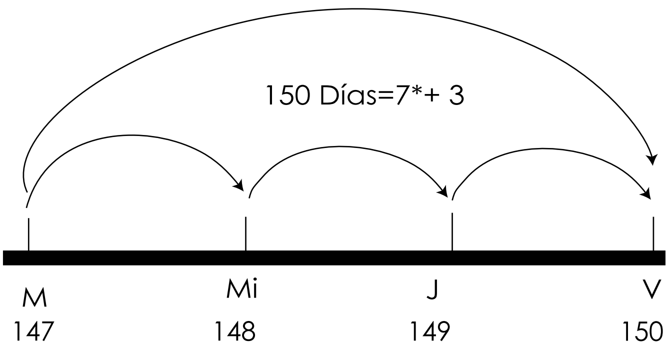

| # de días transcurridos | forma 7* + k | día | observación |
|---|---|---|---|
| 7 días | 7* + 0 | Martes | se repite el mismo día |
| 8 días | 7* + 1 | Miércoles | avanza un día más |
| 9 días | 7* + 2 | Jueves | avanza dos días más |
| 10 días | 7* + 3 | Viernes | avanza tres días más |

En nuestro problema

$$\begin{array}{r|l} 150 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & \;21 \end{array}$$

21 * 7 = 147 Después de 147 días será martes

Por lo tanto si avanzamos 3 días más. Llegamos al día viernes.



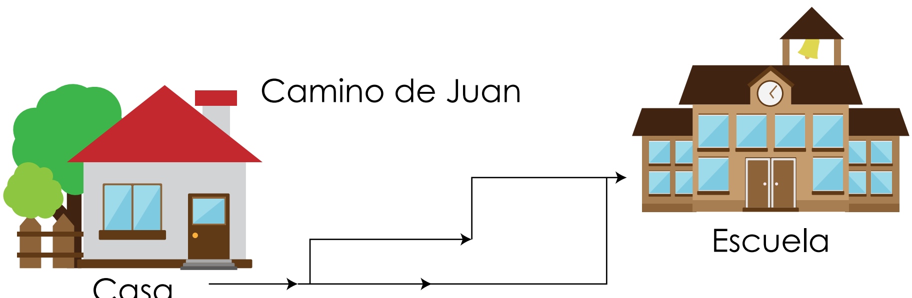

**32.** Se tienen dos recipientes de 3 y 5 litros ¿Cómo se podría medir exactamente 4 litros de agua utilizando los dos 2 envaces que no tienen graduación?


## Resolución

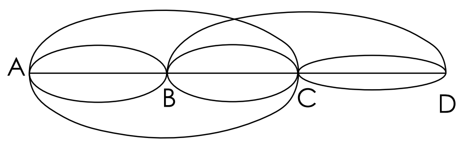
| Jarras / # de vaciadas | J1 (5L) | J2 (3L) |
|---|---|---|
| Llenamos J1 | 5 | ------- |
| Vaciamos por completo Ji en J2 | 2 | 3 |
| Desechamos los 3L de J2 | 2 | ------- |
| Vaciamos J1 en J2 | ------- | 2 |
| Llenamos J1 | 5 | 2 |
| Vaciamos J1 en J2 | 4 | 3 |

## PROBLEMAS PROPUESTOS

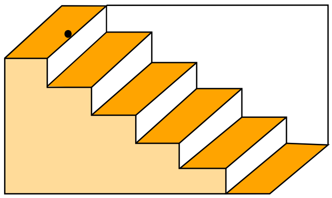
**1.** Rodrigo y Juan van de su casa a la escuela empleando caminos diferentes ¿Cuál es el camino de mayor longitud?




**2.** ¿De cuántas maneras diferentes podrá viajar una persona de A a D sin retroceder?



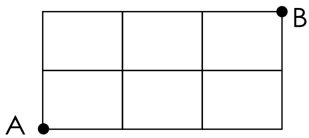
**3.** Una gota de mercurio cayó al piso y rodo por la escalera, dividiéndose al dar tumbos de escalón en escalón. En el primer golpe aparecieron tres gotas; cada una de estas a su vez, se dividió en otras tres en el segundo golpe, y así sucesivamente. Calcular el número de gotas al cabo del quinto golpe



**4.** Tengo dos cajas amarillas con tres cajas verdes en cada una, además cada una de las cajas verdes contienen 4 cajas rojas con 5 cajas azules en cada una ¿Cuántas cajas tengo en total?

**5.** Cuál es la ruta más larga para ir del punto A al punto B con la única condición de que no puede volver a pasar por el mismo punto


**6.** De cuántas maneras puede ir del punto A al punto B por el camino más corto.

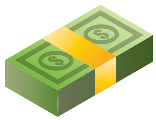



**7.** Dado el siguiente esquema molecular:

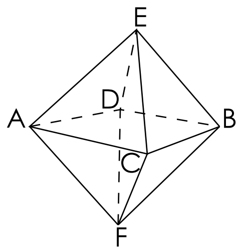
$( \sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim r)$

Si: "p" es falsa "q" es verdadera y "r" es verdadera, el conector dominante es el bicondicional. Encontrar el valor de verdad del esquema por medio de un diagrama.

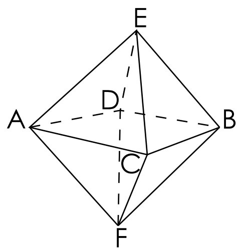
**8.** Rodrigo tiene en su billetera 5 billetes de: 1 euro, 2euros, 5 euros, 10 euros y 20 euros ¿Cuántas cantidades distintas pueden formar



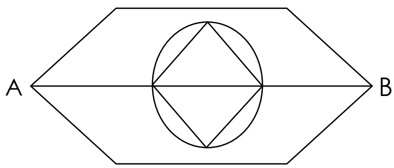
**9.** ¿Cuál es el número mínimo de aristas que puede tener un camino que lleve de A a B? sin pasar dos veces por el mismo vértice ¿Y Cuál el número máximo?



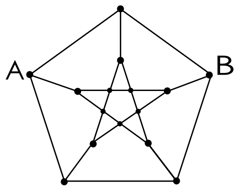

**10.** Hallar todos los caminos distintos de tres y cuatro aristas que llevan del vértice A al vértice B



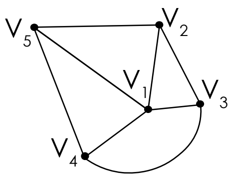

**11.** De cuantas formas puedes ir del punto A al punto B sin pasar dos veces por el mismo punto



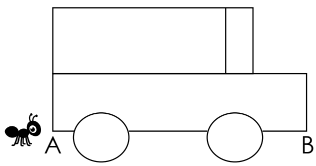
**12.** Utilizando el camino más largo, cuántos segmentos debes recorrer para ir del punto A al punto B. sin pasar dos veces por el mismo punto




**13.** Se pretende asfaltar las calles de una zona de la ciudad representada a continuación, de manera que los puntos son los cruces de las calles y las líneas las calles. Es posible asfaltar de manera que no pisemos las calles ya asfaltadas antes de terminar todo el trabajo




**14.** De cuántas formas puede ir una hormiga del punto A al punto B en la figura que se muestra a continuación sin pasar dos veces por el mismo punto



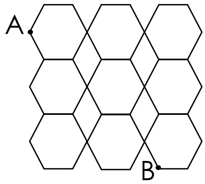

**15.** Hacer un diagrama lineal de los conjuntos

$A = \{x / x^3 - 2x^2 + 44x - 48 = 0\}$
$B = \{2,3,4\}$
$C = \{x / x^2 = 4, x \text{ es positivo}\}$
$D = \{x / x^2 - 6x + 8 = 0\}$

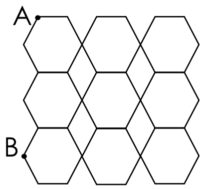
**16.** Dos hombres y 4 niños pueden hacer una obra en 6 días, pero con dos hombres más pueden hacer el mismo trabajo en 4 días ¿En cuántos días harán dicha obra un hombre trabajando sólo?

**17.** A es 25% más eficiente que B y C 20% menos que A. Si A y C acaban la obra trabajando juntos en 20 días. ¿Cuánto más tardará B trabajando sólo?

**18.** Trazar el recorrido más corto para unir los puntos A y B haciendo contacto a todos los hexágonos.

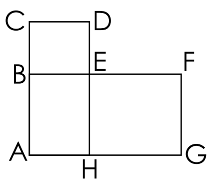



**19.** Trazar el camino más largo para unir los puntos A y B sin pasar dos veces por el mismo punto ni por el mismo segmento




**20.** En la figura se muestra el plano del barrio "La Florida". En el que pasan 4 líneas de buses que hacen el recorrido de la siguiente manera:

Línea 1: EFGHABE que mide 17 Km
Línea 2: CDEHABC que mide 12 kilómetros
Línea 3: CDEFGHABC que mide 20 kilómetros
Línea 4: EHABE
¿Cuánto mide la ruta de la línea 4?



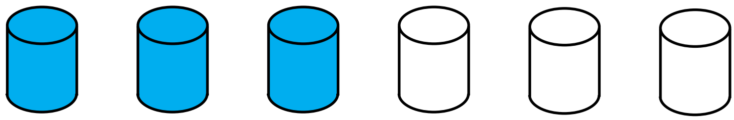

**21.** Utilizando 4 fichas, colócalas de tal manera que se formen 6 filas de dos fichas cada una.

**22.** Utilizando 6 fichas, colócalas de tal manera que se formen 3 filas de 3 fichas cada una.

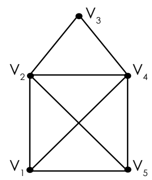
**23.** Utilizando 6 fichas, colócalas de tal manera que se formen 15 filas de 2 fichas cada una.

**24.** Utilizando 9 fichas, colócalas de tal manera que se formen 8 filas de 3 fichas cada fila,

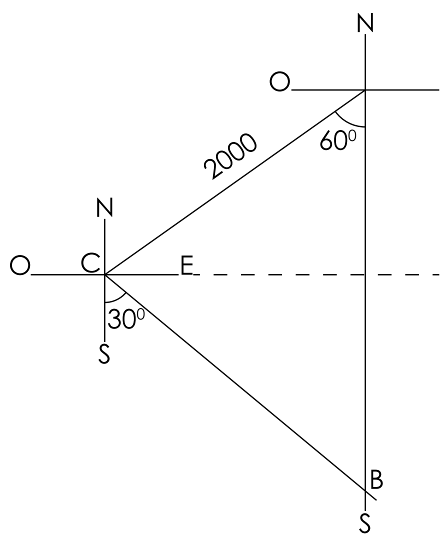
**25.** La siguiente figura muestra 6 vasos en línea recta, los tres primeros están llenos de yogurt y los 3 restantes están vacíos tiene que mover solo uno de los vasos de tal manera que cada vaso lleno se alterne con un vaso vacío.



**26.** ¿Es posible unir todos los vértices pasando una sola vez por cada una de las aristas?



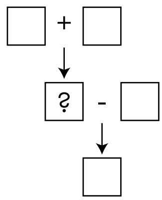

**27.** Un avión recorre 2000 millas con rumbo S60⁰ O y luego cambia su dirección volando con un rumo de S30⁰ E hasta un punto situado al sur del punto de partido. ¿Cuál es la distancia desde el punto de partida hasta el punto de llegada?



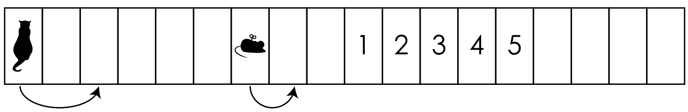
**28.** Esquematice un gráfico en el que describa el recorrido de un auto en el que tuvo dos paradas de igual tiempo y la distancia que recorre en el segundo tramo es la mitad de la que recorre en el primer tramo, además se sabe que el tiempo empleado en el primer tramo es el doble del tiempo empleado en el segundo tramo

**29.** A las 12h00 horas María y Rodrigo escuchan una noticia, María comunica esta noticia a tres de sus amigas y cada una de ellas lo comunica a otras tres y así sucesivamente. Rodrigo comunica a dos de sus amigos, cada uno de los cuales lo comunica a otros dos y así sucesivamente. Si cada persona demora 10 minutos en comunicar a sus amigas y amigos ¿Cuántos hombres y cuantas mujeres conocen la noticia a las 13 horas.

**30.** Los números del 1 al 5 deben distribuirse en los cuadrados de forma que todas las operaciones resulten correctas. ¿Qué número va en el cuadrado que tiene la incógnita?




**31.** El gato y el ratón se mueven en línea recta hacia la derecha. Al mismo tiempo el ratón se mueve un cuadrado y el gato se mueve dos. ¿En cuál de los cuadrados se juntan?



# MODIFICAR EL PROBLEMA

Para entender esta estrategia conviene analizar el siguiente caso << Quizás es imposible romper un manojo de lápices por la mitad, sin embargo si rompemos cada lápiz por separado, el objetivo resulta fácil de alcanzar >>

De forma análoga ésta estrategia consiste en dividir el problema de forma consciente y sistemática en sub problemas y resolver cada una de esas partes para finalmente combinar los resultados hasta lograr una solución al problema global.

Un problema puede resultar difícil por su tamaño, por tener demasiados elementos que lo hacen enrevesado y oscuro, normalmente el camino correcto para la resolución de un problema complicado es la división de este en otros más sencillos.

## EJEMPLO

**1.** Transformar la fracción compleja a fracción simple.

$$\frac{\frac{\sqrt[2]{2}*\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[3]{2}}}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{7}{8}}\right)^{-2}} \div \frac{\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\ldots}}}}{\frac{16^{2^{-1}}+27^{3^{-1}}}{(5+2)^2}} + \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$$

## a. COMPRENDER EL PROBLEMA

Puedes replantear el problema

## b. CREAR UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Seleccionamos la estrategia, en este caso modificamos el problema

## c. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN

La fracción compleja podría ser dividida en sub problemas así:

$P_1/P_2 \div P_3/P_4 + P_5$

Resolviendo los sub problemas tendríamos:

$$P_1: \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} * \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{2} * \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$P_2: \left(\sqrt[3]{1-\frac{7}{8}}\right)^{-2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = (2)^2 = 4$$

$$P_3: \sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\ldots}}} = \sqrt[3-1]{16} = \sqrt[2]{16} = 4$$

$$P_4: \frac{16^{2^{-1}} + 27^{3^{-1}}}{(5+2)^2} = \frac{16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}}}{(7)^2} = \frac{\sqrt[2]{16} + \sqrt[3]{27}}{49} = \frac{4+3}{49} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

$$P_5: \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

Ahora escribimos la nueva fracción combinando los resultados de los sub problemas

| | |
|---|---|
| $2/4 \div 4/(1/7) + 2$ | Finalmente operamos para obtener la solución global |
| $1/2 \div 28 + 2$ | Por jerarquía de las operaciones primero dividimos |
| $1/2 \times 1/28 + 2 =$ | $1/56 + 2 = 113/56$ |

## d. EXAMINAR LO HECHO

Una forma de verificar el resultado podría ser empleando una calculadora con lo cual estaríamos haciendo uso de la tecnología en el cálculo de operaciones aritméticas un tanto complejas.

**2.** Verónica tiene en su cuenta de ahorros \$4000 y por concepto de interés a plazo fijo durante un año ha ganado \$240. Si retira de su cuenta \$960 para matricularse en la universidad. ¿Qué cantidad le queda en su cuenta de ahorros?

## Resolución.

Aquí está claro que para saber qué cantidad le queda en su cuenta de ahorros hay que saber primero cuál es el monto total de sus ahorros. Como esto no está dado se debe resolver primero el problema auxiliar.

¿De qué cantidad dispone en su cuenta de ahorros?

Para esto sumamos el capital más el interés

4000 + 240 = $4240 Saldo disponible

La situación ahora es que ya conozco el monto total del que dispone Verónica en el banco, luego ya puedo saber el saldo que le queda después de hacer el retiro correspondiente para su matrícula mediante una simple resta

4240 - 960 = $3280

Cantidad que le queda en su cuenta de ahorros

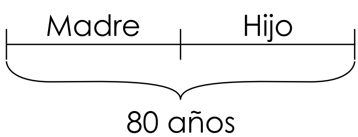
En éste problema con la técnica de la determinación de problemas auxiliares, se busca que la vía de solución sea  de fácil comprensión para el estudiante

**3.** La edad de una madre y la de su hijo suman 80 años. Si dentro de 5 años la madre tendrá el duplo de la edad de su hijo ¿Cuál es la edad de la madre?

## Resolución

Dentro de ésta técnica la lectura analítica y la reformulación, así como la modelación juega un papel muy importante para resolver los problemas como veremos a continuación en la resolución de este problema

Una primera modelación de las condiciones dadas puede ser la siguiente

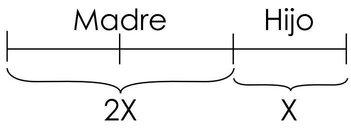



¿Qué necesito saber para hallar la edad de la madre?

Como conozco el todo y la edad de la madre representa una parte, necesito conocer la otra parte que es la edad del hijo. Para esto reformulo el problema con una nueva pregunta (nuevo problema)

¿Cuál es la edad del hijo?

No es evidente; me apoyo de nuevo en la lectura analítica y la modelación, dirigiendo mi atención a las edades que tendrán después de pasados 5 años



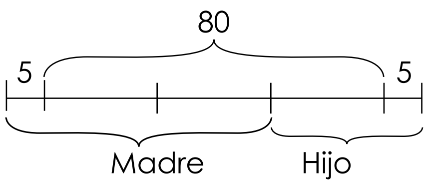

La relación entre las edades de la madre y el hijo es que la primera es el doble de la segunda. De éste análisis surge una nueva pregunta.

¿Cuál es la edad del hijo dentro de 5 años?

Del modelo se infiere que si tuviera el todo, como hay tres partes iguales ya pudiera buscar el contenido de una parte pero no conozco el todo, por tanto surge una nueva pregunta

¿Cuál es el total de años al cabo de 5 años?

Para esto nuevamente aplicamos la técnica de la modelación

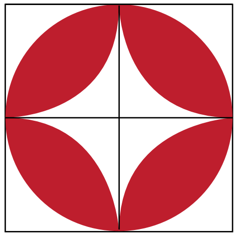



Esto si ya lo puedo hallar, puesto que conozco las partes y quiero hallar el todo

$5 + 80 + 5 = 90 \rightarrow$ Suman de las edades dentro de 5 años
$90 \div 3 = 30 \rightarrow$ Edad del hijo dentro de 5 años
$30 - 5 = 25 \rightarrow$ Edad del hijo
$80 - 25 = 55 \rightarrow$ Edad de la madre

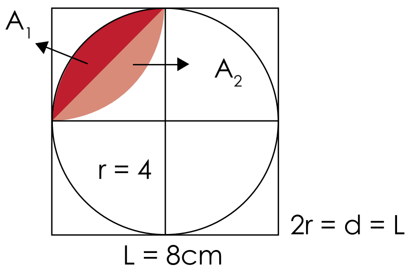
En la solución de éste problema se puede ver como el problema original se fue descomponiendo en problemas auxiliares.

**4.** Calcular el área de la zona sombreada de la figura, sabiendo que el lado del cuadrado mide 8cm.



## Resolución

Nos proponemos pequeñas metas, es decir descomponemos el problema global en subproblemas. En este caso vamos a calcular el área sombreada de uno de los cuadrantes.




Para esto trazamos una recta auxiliar para calcular el área de la zona de área $A_1$.

$$A_1 = \frac{A_{\circ}}{4} - A_{\triangle}$$

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{b*h}{2}$$

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r*r}{2}$$

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$$

$$A_1 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Como $A_1 = A_2$ eEl área de una zona es:

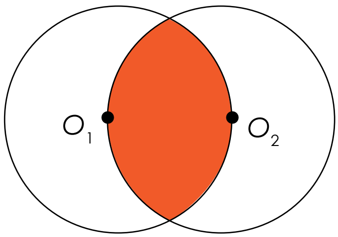
$$A_{12} = 2\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$A_{12} = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Como son cuatro zonas congruentes la expresión anterior multiplicamos por 4.

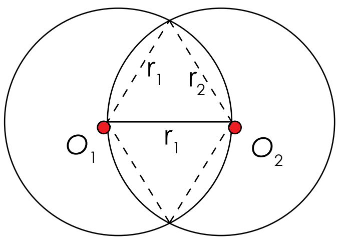
$$A_T = 4r^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$
$$A_T = 4\left(\frac{d}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$
$$A_T = 4\,\frac{d^2}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$
$$A_T = d^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$
$$A_T = 8^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

**5.** Hallar el área de la región sombreada de la figura. Si $r_1 = r_2 = 6$cm.

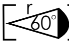



## Resolución

Para hallar el área de la región sombreada se hace necesario dividir la zona sombreada en partes para lo cual trazamos los radios.




Como se observa en la gráfica el área sombreada estaría formada por 2 triángulos equiláteros más 4 semi hojas de 1/6 de círculo (Exágono con lo cual el pronlema inicial se ransforma en dos subproblemas, el de econtrar el área del triágulo y el área de un segmento circular.

$As=2[\ \triangle\ ]+4[$  $]$

$$As=2\left[\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right]+4\left[\frac{\pi r^2\theta}{360^\circ}-\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right]$$

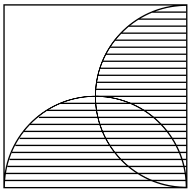
$$As=2\left[\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right]+4\left[\frac{\pi r^2 60^\circ}{360^\circ}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$As=2\left[\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\right]+4\left[\frac{\pi 6^2}{6}-\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$As=2\left[\frac{36\sqrt{3}}{4}\right]+4\left(\frac{36\pi}{6}\right)-4\left(\frac{36\sqrt{3}}{4}\right)$$

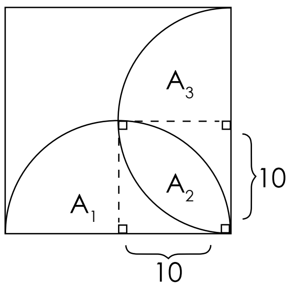
$$As=-2\left[\frac{36\sqrt{3}}{4}\right]+4\left(\frac{36\pi}{6}\right)$$

**6.** Calcular el área de la zona sombreada de la figura, sabiendo que el lado del cuadrado mide 20cm.



## Resolución

El problema se puede descomponer en subproblemas, mediante el tazo de líneas auxiliares se puede dividir el área sombreada a 3 zonas: $A_1$, $A_2$ y $A_3$.

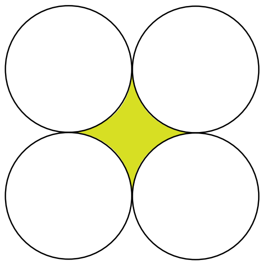



$A_1 = A_3$ cuarta parte del área de una circunferencia
$A_1=(\pi.r^2)/4 = (\pi.10^2)/4 = 25\pi$
$A_2 = l^2 = 10^2 = 100$ área de un cuadrado

Por tanto:

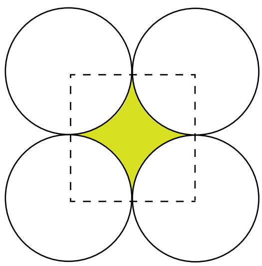
$A_s = A_1 + A_2 + A_3$
$A_s = 2A_1 + A_2$
$A_s = 2\ (25\pi) + 100$ sustituyendo
$A_s = 50\pi + 100$
$A_s = 50(\pi + 2)\ cm^2$

**7.** Calcular el área sombreada de la figura, si se sabe que los cuatro círculos son congruentes y su radio mide 10 cm



## Resolución

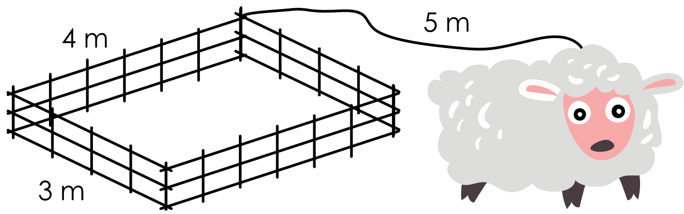
Dentro de esta técnica el trazo de líneas auxiliares nos lleva a replantear el problema en dos subprolemas.



Calcular el área del cuadrado y el área del círculo (cuatro cuartos de círculo)

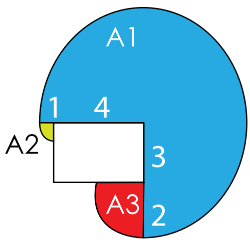
$A_s = A_{\square} - A_{\odot}$
$A_s = l^2 - \pi r^2$
$A_s = (2r)^2 - \pi r^2$
$A_s = (2*10)^2 - \pi(10)^2$
$A_s = 400 - 100\pi$
$A_s = 100(4 - \pi)cm^2$

**8.** Una oveja está atada mediante una soga de 5 m al vértice de un corral de 4 x 3m (ver figura) cuyo exterior se encuentra cubierto de pasto. ¿Qué superficie máxima puede pastar?




## Resolución

Para resolver el problema esquematicemos los datos del problema en un gráfico.

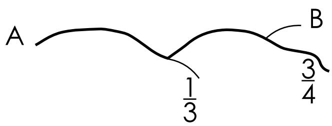



De este análisis nos lleva a una nueva pregunta ¿Cuál es el área de las 3 regiones?

Ahora vamos a calcular las áreas $A_1$, $A_2$ y $A_3$ por partes

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3$$
$$A_1 = 3\pi r^2/4 = 3\,\pi(5)^2/4 = 75\pi/4$$
$$A_2 = \pi r^2/4 = \pi(1)^2/4 = \pi/4$$
$$A_3 = \pi r^2/4 = \pi(2)^2/4 = \pi$$
$$A_T = 20\pi \text{ m}^2$$

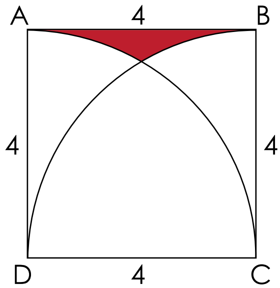
**9.** Como se ve en la figura, un río comienza en el punto A, y a cierta distancia la corriente se separa en dos. Uno de los cauces se lleva 1/3 de la corriente, y el segundo cauce se lleva el resto. Este segundo cauce se vuelve a dividir en dos, un cauce se lleva la 3/4 partes de la corriente y el otro cauce se lleva el resto. ¿Qué fracción de la corriente principal original llega al punto B?



## Resolución

Imaginemos que el volumen de agua que circula inicialmente por el río son 24 $m^3$ (divisor común de las fracciones indicadas) esto implica que por la primera ramificación circularían 8 $m^3$ (1⁄3), y por la segunda ramificación 16 $m^3$ (2⁄3). En la segunda ramificación por el brazo de las 3⁄4 partes circularía $12m^3$ y consecuentemente por la ramificación que conduce al punto B llevaría $4m^3$. Este resultado indica que la ramificación que conduce al punto B lleva la sexta parte de la corriente principal.

**10.** Hallar el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado




## Resolución

Para resolver este problema se hace necesario formar tres regiones, mediante el trazo de líneas auxiliares tal como se muestra en la figura, con el fin de determinar las áreas de sus partes componentes

El área sombreada se reduce a determinar el área del cuadrado, el área del triángulo equilátero y de los dos sectores circulares. Así:

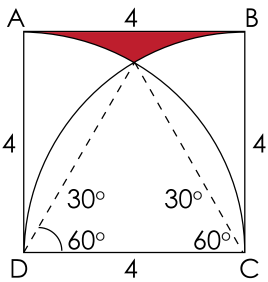
$$A_s = l^2 - \frac{l^2\sqrt{3}}{4} - 2\left[\frac{\pi r^2\theta}{360^\circ}\right]$$

$$A_s = 4^2 - \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 2\left[\frac{\pi 4^2 30^\circ}{360^\circ}\right]$$

$$A_s = 16 - 4\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$$

$$A_s = 4\left[4 - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$A_s = 0{,}7\ u^2$$



**11.** Hallar el valor de $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}$

Para: $x = \dfrac{2b}{b^2+1}$ ; $y = \dfrac{2a}{a^2+1}$ ; $\dfrac{a^2(b^2+1)}{b^2(a^2+1)} = \dfrac{16}{25}$

## Resolución.

Para resolver este tipo de problemas se hace necesario dividir el problema en sub problemas. Así:

Para los valores propuestos de x e y se tiene:

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+\frac{2b}{b^2+1}} = \sqrt{\frac{(b+1)^2}{b^2+1}} = (b+1)\sqrt{\frac{1}{b^2+1}} \qquad (P_1)$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1-\frac{2b}{b^2+1}} = \sqrt{\frac{(b-1)^2}{b^2+1}} = (b-1)\sqrt{\frac{1}{b^2+1}} \qquad (P_2)$$

$$\sqrt{1+y} = \sqrt{1+\frac{2a}{a^2+1}} = \sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2+1}} = (a+1)\sqrt{\frac{1}{a^2+1}} \qquad (P_3)$$

$$\sqrt{1-y} = \sqrt{1-\frac{2a}{a^2+1}} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2+1}} = (a-1)\sqrt{\frac{1}{b^2+1}} \qquad (P_4)$$

En consecuencia la expresión a evaluar se transforma en

$$(P_1 + P_2)/(P_3 + P_4)$$

$$\frac{(b+1)\sqrt{\frac{1}{b^2+1}}+(b-1)\sqrt{\frac{1}{b^2+1}}}{(a+1)\sqrt{\frac{1}{a^2+1}}+(a-1)\sqrt{\frac{1}{a^2+1}}}$$

Factorizando

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{b^2+1}}\,[b+1+b-1]}{\sqrt{\frac{1}{a^2+1}}\,[a+1+a-1]} = \frac{2b}{2a}\sqrt{\frac{(a^2+1)}{(b^2+1)}} = \sqrt{\frac{b^2(a^2+1)}{a^2(b^2+1)}}$$

Se deduce por hipótesis que $\sqrt{\dfrac{b^2(a^2+1)}{a^2(b^2+1)}} = \sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$

**12.** Si $x = \dfrac{n^2 - \sqrt{n^2 - 1} - 1}{\sqrt{n^2 - 1} - 1}$ ; $y = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$ ; $x^4 + y^4 = 332$

Calcular un valor de x - y

## Resolución

Cuando se trata de expresiones complejas es preciso transformarlas en otras mas simples asi:

$$\text{De } x = \frac{(n^2 - 1) - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n^2 - 1} - 1} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}\,(\sqrt{n^2 - 1} - 1)}{\sqrt{n^2 - 1} - 1} = \sqrt{n^2 - 1}$$

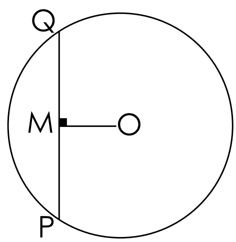
$$\text{Como: } y = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{x} \rightarrow xy = 1$$

$$\text{Pero } x^4 + y^4 = 322$$

Reformulando las condiciones iniciales formamos un trinomio cuadrado perfecto

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 322 + 2(xy)^2 \rightarrow xy = 1$$
$$(x^2 + y^2)^2 = 324$$
$$\text{De aquí } x^2 + y^2 = 18$$
$$\text{adicionando } (-2xy)$$
$$\underbrace{x^2 + y^2 - 2xy}_{\text{T.C.P}} = 18 - 2xy \rightarrow xy = 1$$
$$(x - y)^2 = 16$$
$$x - y = \pm 4$$

**13.** En la figura PQ = 6cm. La cuerda está situada a $\sqrt{3}$ cm del centro O. ¿Cuál es la longitud del arco $\overset{\frown}{PQ}$?



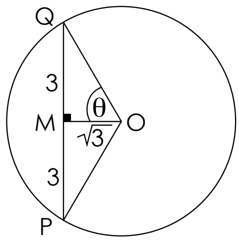

## Resolución

¿Qué necesita conocer para resolver el problema?

El ángulo central, como no lo tengo. Reformulo una nueva pregunta (nuevo problema

¿Cuál es la medida del ángulo central ∡QOP?

En la figura, mediante construcciones auxiliares formamos el triángulo rectángulo como se muestra a continuación.




¿Qué necesito saber ahora para calcular m∡ QOM?

La magnitud del segmento QM. Es evidente que QM = 3cm puesto que el radio perpendicular a una cuerda, divide a la cuerda que subtiende en dos partes iguales.

Consecuentemente ya podemos aplicar una función trigonométrica para calcular la medida del ángulo θ

$\tan\theta = 1/\sqrt{3}$
$\theta = 30°$

Con esto ya podemos determinar la medida del ángulo central

$m\measuredangle\ QOP = 2\theta = 60°$

Pues bien con ésta información ya podemos responder a la pregunta inicial del problema. Para calcular la medida de arco $\overset{\frown}{PQ}$ aplicamos el teorema de ángulos asociados a una circunferencia así.

$m\measuredangle\ QOP = \overset{\frown}{PQ} = 60°$

**14.** Reducir $P=\sqrt{6+2\sqrt{10+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}}}$

## Resolución

Dividiendo en sub problemas y realizando procesos de sustitución no queda:

$$\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7 + 1 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} = \sqrt{7} - 1$$

Reeplazando en la expresión propuesta

$$P = \sqrt{6 + 2\sqrt{10 + 2(\sqrt{7} - 1)}}$$

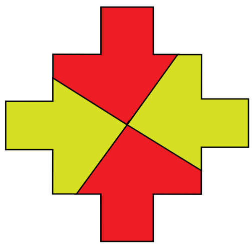
$$P = \sqrt{6 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}}$$

$$P = \sqrt{6 + 2(\sqrt{7} + 1)} \quad \text{Similar al caso anterior}$$

$$P = \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$$

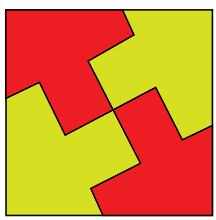
$$P = \sqrt{7} + 1$$

**15.** Con las cuatro piezas que se muestran en la figura, formar un cuadrado

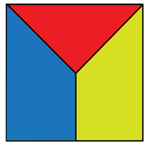


## Resolución

En este caso estamos modificando la forma de la figura sin perder sus características esenciales para formar una nueva figura.

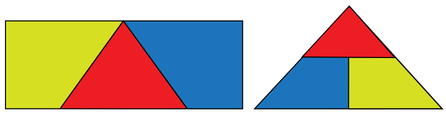


**16.** Descomponer un cuadrado en tres partes de tal manera que con ellos se pueda formar un rectángulo y un triángulo

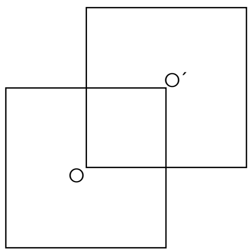


## Resolución

En este caso haciendo uso de la capacidad inmaginativa formamos dos nuevas figuras geométricas.

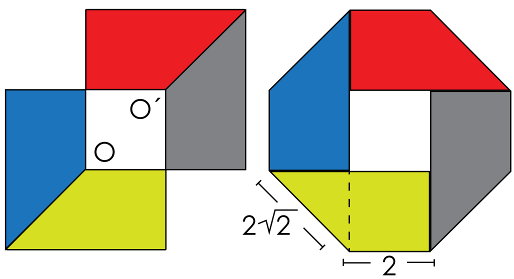


**17.** La figura que se muestra a continuación está formada por la intersección de dos cuadrados congruentes; siendo o y o´ centros de dichos cuadrados y cuyo lado mide 4cm. Realizando trazos apropiados formar un octaedro y calcular su perímetro.




## Resolución

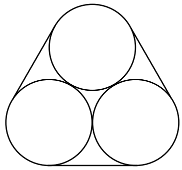
Es evidente que apartir de la construcción de línenas auxiliares y cambio de posición de sus partes se forma la nueva figura



Ahora nos corresponde calcular la hipotenusa del triángulo para poder determinar su perímetro.

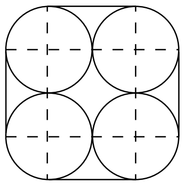
$$h = \sqrt{(2^2 + 2^2)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$P = 4(2 + 2\sqrt{2})$$

**18.** Tres tubos de diámetro 1m se unen con una banda metálica ajustada completamente tal como se muestra en la figura. Hallar la longitud de la banda.



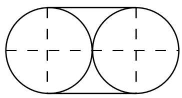
## Resolución

Si consideramos que el problema se trata de 4 tubos tendríamos la siguiente ecuación:



Realizando construcciones auxiliares nos damos cuenta que el perímetro sería la suma de cuatro diámetros y cuatro arcos con ángulos centrales rectos.

$P = 4d + d\pi$
$P = d(\pi + 4)$
Si fuese con dos tubos tendríamos



$P = 2d + d\pi$
$P = d(\pi + 2)$

Consecuentemente mediante el análisis de problemas auxiliares llegamos a la conclusión que cuando se trata de 3 tubos se aplica la fórmula.

$P = d(\pi + 3)$
$P = 1(\pi + 3)$
$P = \pi + 3$

**19.** Hallar la suma de las cifras del resultado de operar $20032003^2 - 20032002^2$

## Resolución

Para esto la primera cifra descomponemos como la suma de dos números así:
$(20032002+1)^2 - 20032002^2$

Es evidente que con la aplicación de este artificio estamos modificando la estructura del problema inicial.

Desarrollando el binomio tenemos

$20032002^2 + 2(20032002)(1) + 1^2 - 20032002^2$
$40064004 + 1 = 40064005$ Operando

Como en el problema se pide calcular la suma de sus cifras tenemos que:

$40064005 \rightarrow 4 + 6 + 4 + 5 = 19$

**20.** Resolver la ecuación

$2(x + 1/x)^2 - 9(x + 1/x)+10 = 0$

## Resolución

Por la estructura de la ecuación haciendo un cambio de variable $x + 1/x$ por a para simplificar el problema nos queda:

$2a^2 - 9a + 10 = 0$
$(a - 2)(2a - 5) = 0$ Factorando
$a = 2$ ó $a = 5/2$ Igualando ambos factores a 0
Sustituyendo $x + 1/x$ por a, para volver a la variable inicial

$x + 1/x = 2$ ó $x + 1/x = 5/2$

Transformando en ecuaciones enteras nos queda

$x^2 - 2x + 1=0$ ó $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Factorando las ecuaciones tenemos

$(x-1)^2 = 0$ ó $(x - 2)(2x - 1) = 0$

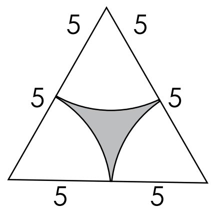
Igualando a cero cada uno de los factores

$x = 1$ ó $x = 2$ ; $x = 1/2$

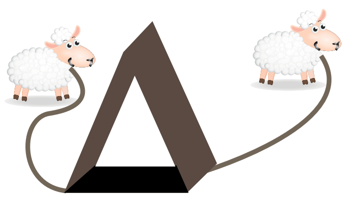
Consecuentemente las raíces de la ecuación son:
$x_1 = 1$ ; $x_2 = 2$; $x_3 = 1/2$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

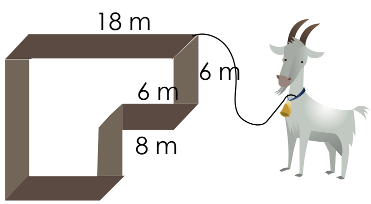
**1.** Calcular el área de la región sombreada




**2.** Dos borregos están atados mediante una soga de 8 m, en dos vértices de un tapial de forma de triángulo equilátero de 8 m de lado. ¿Qué superficie máxima pueden pastar los dos borregos?



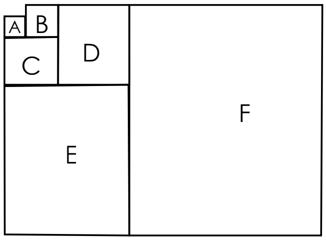
**3.** Un chivo está atado mediante una soga de 18 m en la esquina de un piso cerrado por un tapial de la forma como se indica en la figura. ¿Qué superficie máxima puede pastar?



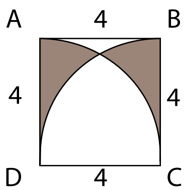
**4.** Resolver

$$\frac{a-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}{a+\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a}}} \div 1-\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}}+\frac{\dfrac{a}{a+2}-\dfrac{a}{a-2}}{\dfrac{a+2}{a-2}-\dfrac{a-2}{a+2}}$$

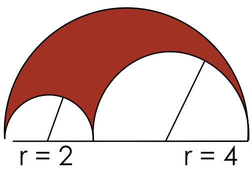
**5.** En la figura se muestra un terreno que ha sido dividido en seis parcelas cuadradas: A; B; C; D; E y F. Si el área de la parcela A es $4m^2$ y la de la B es de $9\ m^2$, ¿Cuál es el área de la parcela F.




**6.** Hallar el área de la región sombreada, ABCD es un cuadrado



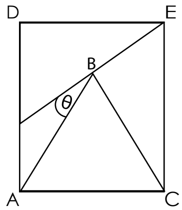

**7.** Calcular el perímetro de la región sombreada



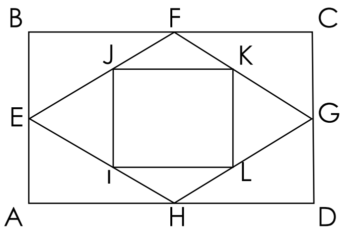

**8.** Si $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}} \wedge y=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Calcular el valor de $x^4 - y^4$

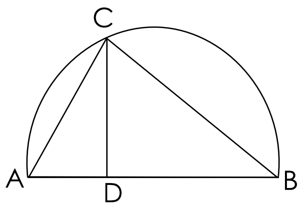
**9.** En la figura ABC triángulo equilátero, BEC triángulo isósceles construidos en el interior del cuadrado ADEC. Hallar la medida del ángulo $\theta$



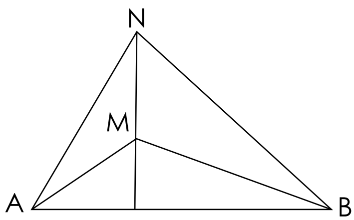

**10.** ABCD es un rectángulo con BC = 6cm y AB = 4cm, los puntos E, F, G, H, I, J, K, L son punto medios de los segmento indicados en la figura. Hallar el área del rectángulo IJKL




**11.** En la figura que se muestra a continuación, el arco $\overset{\frown}{AB}$ es un semicírculo, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{AD}$ = 4cm y $\overline{DB}$ = 9cm. Hallar el área del triángulo ACB.



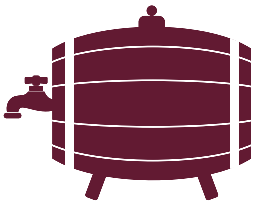

**12.** En la figura AB = 10cm y MN = 2/5 AB ¿Cuál es el área del polígono ANBM?



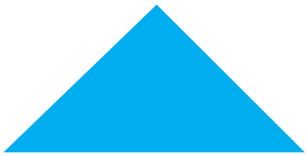
**13.** Si $a+b = \sqrt{11}$ y $ab = 5$. Calcular $E = a^2 + b^2$

**14.** Se compran 40 bicicletas a \$1220 cada una, se venden 25 bicicletas a \$1300 cada una y las restantes a \$1180 ¿Cuánto gana o pierde?

**15.** De un tonel de vino se extrae primero el 20% y luego el 25% de lo que queda ¿Qué porcentaje del total se extrajo?



**16.** Si la base de un triángulo aumenta en un 50% y su altura en un 20%. ¿En qué porcentaje aumenta su área?



**17.** Calcular el valor de $M = (x^3 + y^3)/(x^2 + y^2)$ si $x + y=2$ y $x.y = 3$

**18.** Si $X = (a^2 b + a + b)/ab$ .Hallar valor de la expresión
$(x + a)/(b - x) + (x-a)/(b + x) + (2ab + 2b^2)/(x^2 - b^2)$

**19.** Resolver la ecuación $2(x - 5) + 7\sqrt{x - 5} = 4$

**20.** Factorar: $9a^2 - 6ab + b^2 - 21x^2 + 12ax - 4bx$

**21.** Si $x = 1/2\ (a/b + b/a)$ .Encontrar el valor de $8x^3 - 6x$

**22.** Simplificar la siguiente expresión:

$$p = [(a + b + c)(a + b + d) - (a + c + d)(b + c + d) - (a + b + c + d)(a + b - c - d) + ab]$$

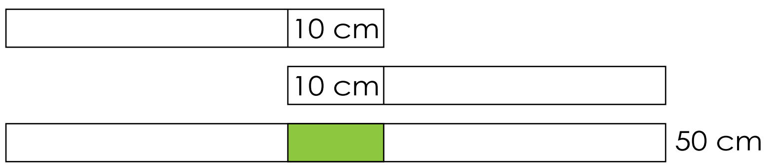
**23.** Determinar el valor de:

$$M = \cfrac{4}{1 + \cfrac{xy(x+y)^{-1}}{1 + \cfrac{xy(x+y)^{-1}}{4 - xy(x+y)^{-1}}}} \text{; para } x = \sqrt{5} \text{ e } y = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}$$

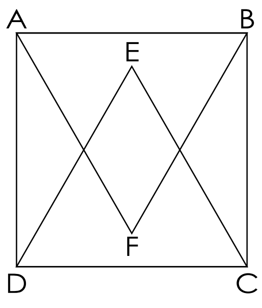
**24.** Resolver la ecuación

$$\frac{3 + 2x - x^2}{x - \sqrt{x^2 - 3}} = x + \sqrt{x^2 - 3}$$

**25.** Un carpintero tiene 4 tiras de madera de la misma longitud. Pega dos de ellas con un traslape de 10 cm y así obtiene una tira de 50 cm de longitud. Con las otras dos quiere hacer una de 56 cm de longitud. ¿Cuánto debe medir es traslape?

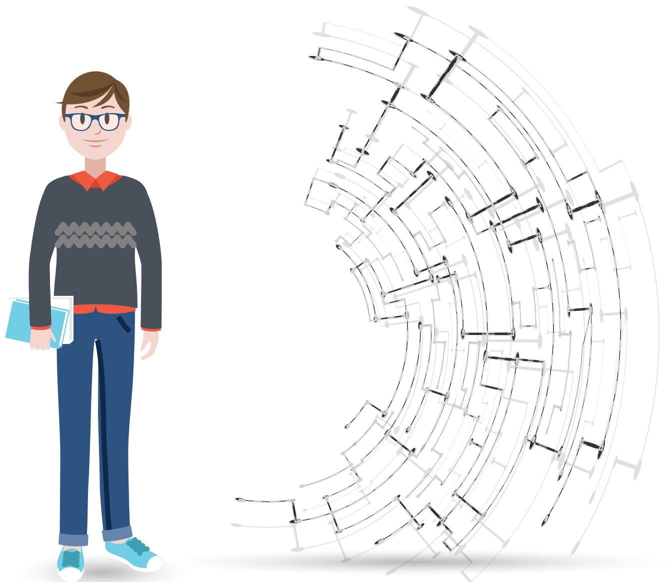



**26.** En la figura ABCD es un cuadrado y los triángulo ABF y DEC son equiláteros. Si AB=1 Cuál es la longitud de EF?



# CONSTRUCCIONES AUXILIARES

El trazo de líneas auxiliares es una estrategia muy útil para resolver problemas de geometría, puesto que éstas nos permiten cerrar el dibujo en ciertas partes lo cual nos da información adicional la misma que nos conduce a la solución del problema.



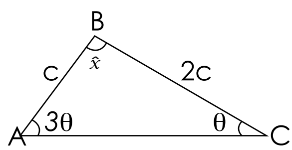
## EJEMPLOS

**1.** Calcular m∡B en el triángulo ΔABC , en el cual

$\overline{BC} = 2\overline{AB}$; m∡A = 3m∡C

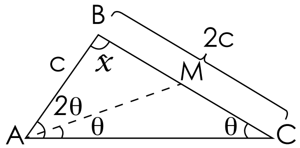
### a. COMPRENDER EL PROBLEMA

Esquematizamos los datos del problema en un gráfico



### b. CREAR UN PLAN PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Seleccionamos la estrategia, en este caso realizamos construcciones auxiliares para formar nuevas figuras que me permitan establecer relaciones entre los lados y los ángulos.

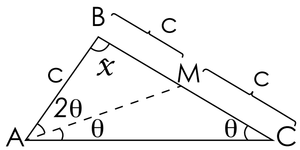



### c. PONER EN PRÁCTICA EL PLAN

Para establecer una relación entre los ángulos A y C tracemos el segmento $\overline{AM}$ de modo que:$m\measuredangle MAC = m\measuredangle C$

En el $\Delta AMB$, $m\measuredangle AMB = 2m\measuredangle\theta$ por ángulo exterior a un triángulo. Por lo cual el $\Delta ABM$ es isósceles, entonces $\overline{AB} = \overline{BM} = c$

Consecuentemente $\overline{MC} = \overline{AB} = c$ por condición del problema
De lo cual se deduce que el $\Delta AMB$ es equilátero




$\therefore m\measuredangle x = 60^0$

### d. EXAMINAR LO HECHO

Puesto que el triángulo ABM es equilátero $2\theta = 60^0 \rightarrow \theta = 30^0$
Por teorema de suma de ángulos internos de un triangulo

$x + 3\theta + \theta = 180^0$
$60^0 + 3 * 30^0 + 30^0 = 180^0$

Con lo cual se verifica que cumple el teorema con los datos calculados.

**2.** Comprobar geométricamente que el área la figura N$^{ro}$ 1 , es igual al área de la figura N$^{ro}$ 2

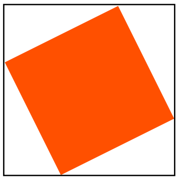


Fig. N$^{ro}$ 1

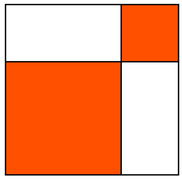
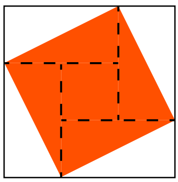
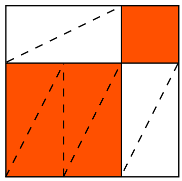


Fig. N$^{ro}$ 2

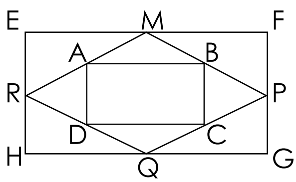
## Resolución

Sí trazamos líneas auxiliares sobre la figura N$^{ro}$ 1 observamos que los triángulos que aparecen sin pintar forman los dos rectángulos sin pintar de la figura N$^{ro}$ 2 y las área segmentadas con relleno forman dos cuadrados tal como se muestra en la figura.





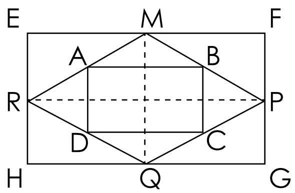
**3.** Si EFGH es un rectángulo de 32 cm$^2$; y los puntos M,P,Q,R,A,B,C,D son puntos medios de los segmentos indicados en la figura. Hallar el área de ABCD

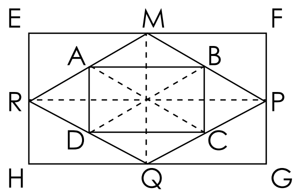



## Resolución

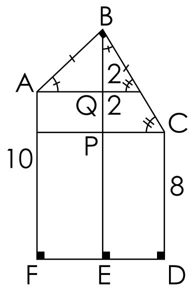
Al trazar líneas auxiliares las mismas que unen los puntos MQ y PR se puede observar que el área del polígono MPQR es la mitad del área del rectángulo EFGH, por tanto su área es 16 cm$^2$

Sí trazamos nuevamente líneas auxiliares uniendo las diagonales del rectángulo ABCD, se puede observar que el área del rectángulo ABCD es la mitad del área del polígono MPQR, por tanto el área del rectángulo es 8 cm$^2$




**4.** En la figura $\overline{AB} = \overline{BC}$; $\overline{BE} = 12$. Hallar $\overline{FD}$

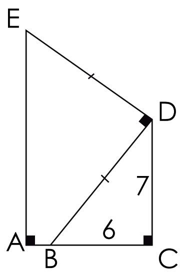



**Resolución:**

Trazando líneas auxiliares por los puntos A y C paralelas a FD
Como AF =10 → PQ = 2; y como BE = 12 → BQ = 2
En el ⊿ABQ: tan∢1 = 2/AQ
En el triángulo BPC: cot∢1 = 4/PC
Por relaciones inversas sabemos que:
tan∢1· cot∢1 = 1
2/AQ · 4/PC = 1 → AQ · PC = 8 (1)
sen∢1 = cos∢2 por ángulos complementarios
2/AB = PC/BC; como AB = BC → PC = 2 por semejanza
Substituyendo el valor de PC en la ecuación (1) nos queda:
AQ · 2 = 8 → AQ = 4

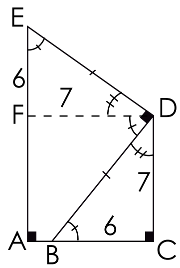
Por tanto la medida de FD = AQ + PC → FD = 4 + 2 = 6

**5.** Con los datos que se muestran en la figura. Hallar $\overline{AE}$



## Resolución

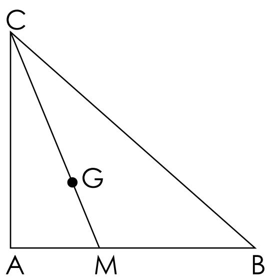
Por el punto D tracemos una línea auxiliar paralela al $\overline{AC}$
El triángulo BCD es semejante al triángulo EFD por el postulado ALA
Consecuentemente estableciendo relaciones de proporcionalidad se tiene que $\overline{EF} = 6$ y $\overline{FD} = 7$, como $\overline{DC} = \overline{AF} = 7$ por ser lados de un paralelogramo se tiene que $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE}$
$\overline{AE} = 7 + 6 = 13$



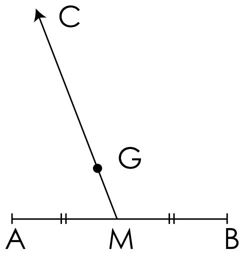

**6.** El segmento AB es un lado del triángulo ABC y el punto G es el baricentro. Trazar el triángulo y explicar el proceso de construcción.


## Resolución

Imaginemos el problema resuelto



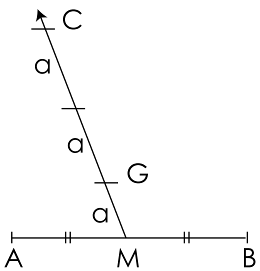

Para poder determinar el tercer vértice (Punto C) primer encontremos el punto medio de $\overline{AB}$ (Punto M) y luego tracemos la recta M G



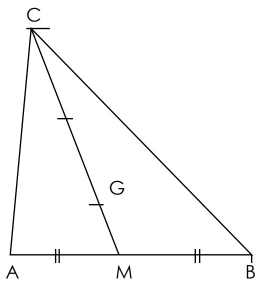

Por ser CM mediana del triángulo, se cumple que:
r = CG/GM = 2/1 r: razón

Por tanto MG = 1/2 CG

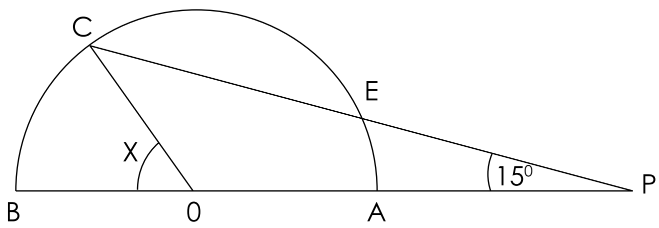
Tomemos con el compás la medida del segmento GM y a partir de G traslademos 2 veces este segmento sobre la recta GM hasta localizar el punto C



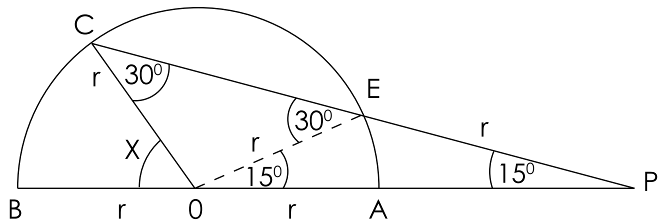

Finalmente trazamos los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ parta formar el triángulo ABC




**7.** En la figura hallar la medida del ángulo x .Si EP = AB/2 y el punto O centro del círculo.

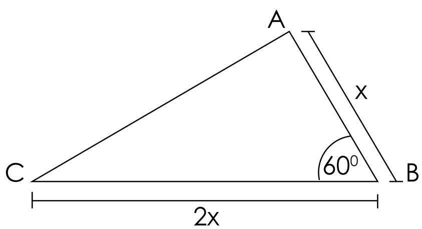



## Resolución

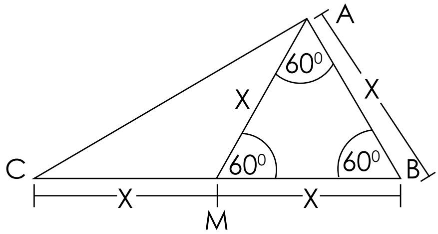



| | |
|---|---|
| $\overline{OB} = \overline{OA} = r$ | Hipótesis. |
| $EP = AB/2$ | Hipótesis. |
| $EP = 2r/2 = r$ | Sustitución. |
| $\overline{OE}$: radio | Por construcción. |
| $m\measuredangle EOA = 15^0$ | A lados iguales, se oponen ángulos iguales. |
| $m\measuredangle CEO = 30^0$ | Ángulo exterior a $\Delta$ OEP. |
| $m\measuredangle ECO = 30^0$ | A lados iguales, se oponen ángulos iguales. |
| $m\measuredangle X = 45°$ | Ángulo exterior a $\Delta$ COP. |

**8.** Hallar la medida del $\measuredangle C$, sabiendo que $\overline{BC} = 2\overline{AB}$

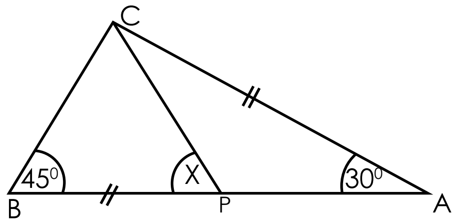


## Resolución

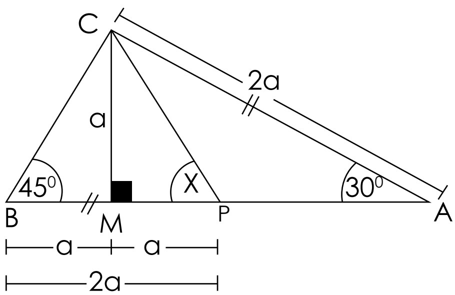



| | |
|---|---|
| $\overline{AM}$ | Por construcción . |
| m∡AMB = m∡MAB = 60º | ∆ ABM Isósceles y equilátero. |
| 60º = m∡C + m CAM | Ángulo exterior a ∆ CMA. |
| 60º = m∡C + m∡C | ∆ CMA Isósceles. |
| 60º = 2 m∡C | Reducción de términos semejantes |
| m∡C = 30º | Axioma multiplicativo. |

**9.** En la figura, si $\overline{BP} \cong \overline{AC}$. Hallar m∡x

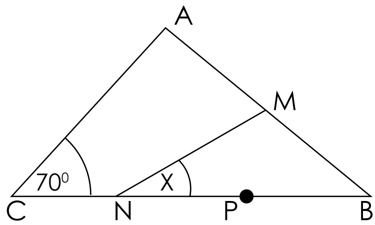



## Resolución

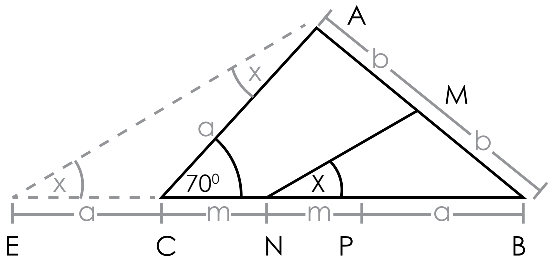



| | |
|---|---|
| $\overline{CM}$ altura | Por construcción. |
| CM = a | Lado opuesto al ángulo de 30º en el ⊿AMC. |
| m∡BCM = 45⁰ | Ángulo complementario. |
| $\overline{BM}$ = $\overline{CM}$ = a | A ángulos iguales, se oponen lados iguales |
| $\overline{MP}$ = a | El todo es igual a la suma de sus partes. |
| m∡X = 45º | ∆ PMC rectángulo e Isósceles. |

**10.** Dados: M es punto medio de $\overline{AB}$ ; N punto medio de $\overline{CP}$; $\overline{AC} \cong \overline{PB}$. Hallar la medida del $\measuredangle x$

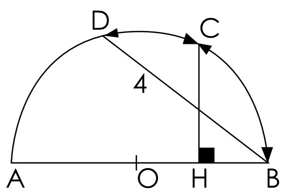



## Resolución



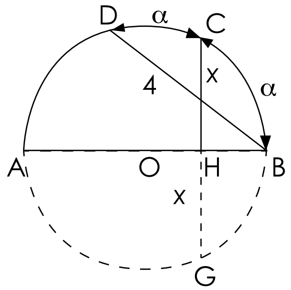

| | |
|---|---|
| $\overline{AE}$ // $\overline{MN}$ | Por construcción. |
| $\overline{EN} \cong \overline{NB}$ | Teorema de los puntos medios de dos lados. |
| $\overline{EC}$ = a | Asociación de igualdades. |
| $m\measuredangle AEC = m\measuredangle X$ | Ángulos correspondientes. |
| $70^{\circ} = m\measuredangle X + m\measuredangle X$ | Ángulo exterior al triángulo Isósceles EAC. |
| $70^{\circ} = 2\, m\measuredangle X$ | Reducción de términos semejantes. |
| $m\measuredangle X = 35°$ | Axioma multiplicativo. |

**11.** Calcular la perpendicular $\overline{CH}$ en el semicírculo de centro O; siendo C punto medio del arco $\overset{\frown}{BD}$ y $\overline{BD}$ = 4cm



**Resolución.**

Por construcción completemos el círculo y tracemos la prolongación del segmento $\overline{CH}$ hasta el punto G




Puesto que $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ se cumple que $\overline{CH} = \overline{HG} = x$ por propiedad de diámetro perpendicular a una cuerda

$\widehat{DC} = \widehat{CB} = \alpha$ por hipótesis

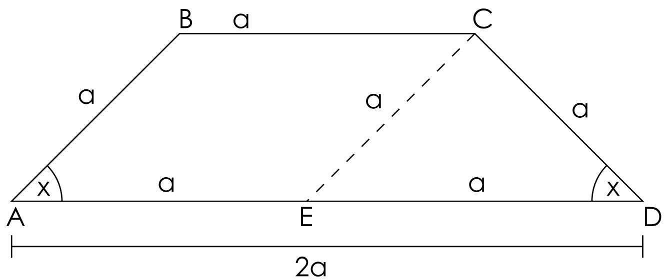
Con lo cual $\overline{BD} = \overline{CG} = 4$ cm cuerda de un mismo arco

$\overline{CG} = 4 = 2x$

$\therefore x = 2cm$

**12.** Calcular el ángulo menor de un trapecio en el cual los lados no paralelos son iguales, el lado no paralelo es iguales a la base menor y la base menor es la mitad de la base mayor.

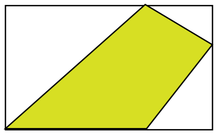
**Resolución.**




Trazando la línea auxiliar EC en función a los datos de la hipótesis, con lo cual se forma un triángulo equilátero lo que nos permite calcular la medida del ángulo buscado

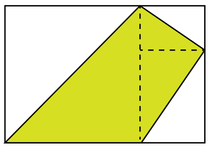
$m\measuredangle x = 60°$

**13.** Calcular el área sombreada de la figura, sabiendo que el largo mide 5cm y el ancho 4cm.



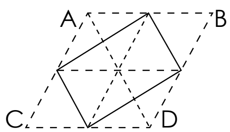
## Resolución

Para encontrar el área sombreada se hace necesario trazar líneas auxiliares para establecer una relación entre el área sombreada y la no sombreada. En nuestro caso el área sombreada es la mitad del área del rectángulo, por tanto el área sombreada es $10cm^2$



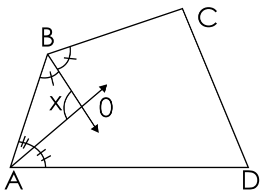
**14.** Dos triángulos equiláteros se pegan por un lado. Después todas las esquinas de la figura obtenida se juntan en el centro ¿Qué figura se forma?

## Resolución




Como se observa claramente en la figura se forma un rectángulo

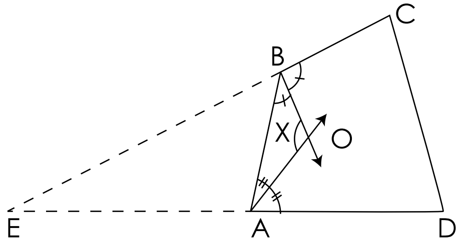
**15.** En la figura que se muestra a continuación m∡BOA = $85^0$, $\overrightarrow{BO}$ bisectriz ∡B ; $\overrightarrow{AO}$ bisectriz ∡A; m∡C = $150^0$.Hallar m∡D



## Resolución

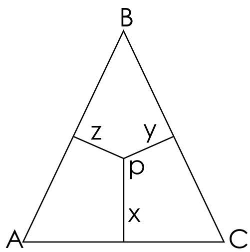
En este caso para resolver el presente ejercicio se hace necesario trazar líneas auxiliares con lo cual conseguimos formar el triángulo EAB.

$m\measuredangle BOE = 90^0 - \measuredangle E/2$ Teorema
$85^0 = 90^0 - \measuredangle E/2$
$\measuredangle E = 10^0$
$\measuredangle E + \measuredangle C + \measuredangle D = 180^0$
$10^0 + 150^0 + D = 180^0$
$\measuredangle D = 20^0$




**16.** El triángulo ABC es un triángulo equilátero de altura h. P punto interior al triángulo; x,y,z distancias más cortas entre el punto P a cada uno de los lados del triángulo.Demostrar que:

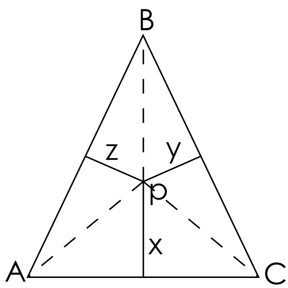
$x + y + z = h$



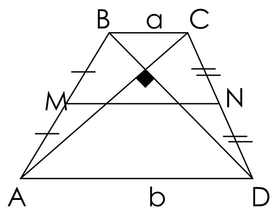

## Resolución

Por construcción formamos los triángulos uniendo el punto P con cada uno de los vértices

$A_t = A_1 + A_2 + A_3$
$b.h/2 = AC.x/2 + CB.y/2 + AB.z/2$
$L.h/2 = L.x/2 + L.y/2 + L.z/2$
$h = x + y + z$

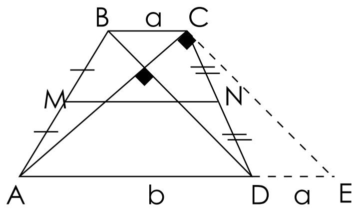


**17.** En la figura las diagonales de un trapecio se cortan ortogonalmente y miden 60 cm y 80 cm .Determinar el valor de su mediana $\overline{MN}$.



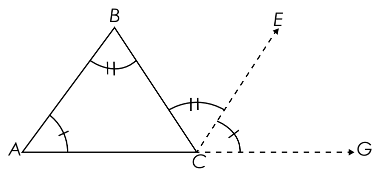

## Resolución

AC = 80; BD = 60
BD = CE po construcción
$\Delta$ACE: AE = $\sqrt{80^2 + 60^2}$ = 100
$\Rightarrow$ a + b = 100
MN = (a + b)/2
$\therefore$ MN = 50



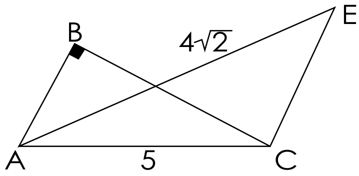

**18.** Demostrar que "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º"

## Resolución



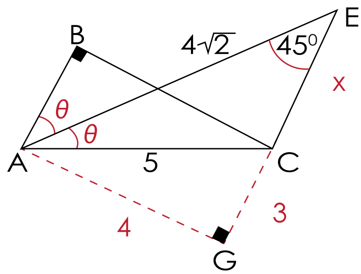

| | |
|---|---|
| $\overline{CE}$ // $\overline{AB}$ | Por construcción. |
| $\overline{CG}$ | Prolongación del $\overline{AC}$ por construcción |
| m∡ECG = m∡A | Correspondientes. |
| m∡ECB = m∡B | Alternos internos. |
| m∡GCE + m∡ECB + m∡C= 180º | Suma de ángulos a un mismo lado de una recta. |
| m∡A + m∡B + m∡C = 180º | Sustitución. |

**19.** En el triángulo rectángulo ABC de ex -centro "E". Calcular $\overline{EC}$, sabiendo que $\overline{AE} = 4\sqrt{2}$ m; $\overline{AC} = 5$m.

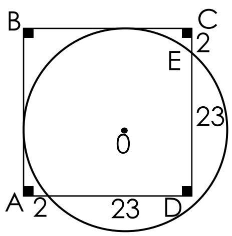



**Resolución**

$\measuredangle AEC = 1/2 \measuredangle B = 45°$ "E" ex - centro del $\Delta ABC$
$\overline{AG} \perp \overline{GE}$ Por construcción
$\therefore \Delta AGE$ Isósceles
$\overline{AG} = \overline{GE}$
En el $\triangle$rectángulo AGE
Sen $45^0 = AG/ 4\sqrt{2} \rightarrow AG = 4$
En el $\triangle$rectángulo AGC
DC = 3 Teorema de Pitágoras
En el triángulo rectángulo AGE
tan $45^0 = 4/(3 + x)$
x = 1

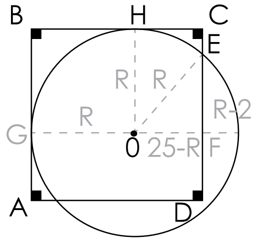



**20.** Calcular el radio de la circunferencia, tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del cuadrado ABCD mostrado. Si divide a los otros dos lados en dos segmentos que miden 2 y 23cm.




## Resolución

Realizando las construcciones auxiliares correspondientes tenemos:




El lado del cuadrado ABCD es 2 + 23 = 25 u

Trazamos $\overline{OE}$ se deduce que $\overline{OE}$ =R

Trazando $\overline{OF} \perp$ CD para formar un triángulo rectángulo, por deducción se tiene que:

$\overline{OF} = \overline{FG} - \overline{OG} = 25 - R$

$\overline{EF} = \overline{CF} - \overline{CE} = R - 2$

En el⊿OFE, por teorema de Pitágoras se tiene

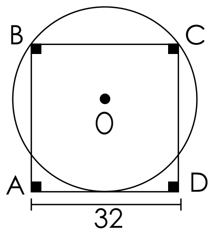
$R^2 = (25 - R)^2 + (R - 2)^2$

$R^2 - 54R + 629 = 0$

$(R - 37)(R - 17) = 0$

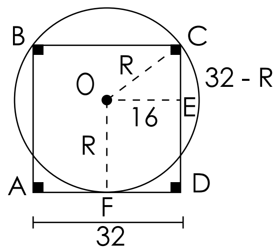
R = 17u

**21.** Calcular el radio de la circunferencia mostrada si ABCD es un cuadrado de 32 cm de lado.



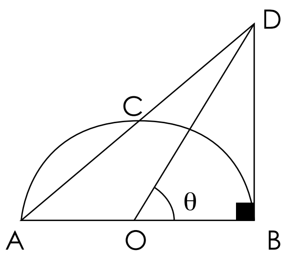

## Resolución

Realicemos las construcciones auxiliares para establecer las relaciones correspondientes



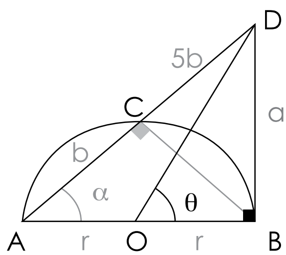

Trazando $\overline{OC}$ se deduce que $\overline{OC} = R$
Trazando $\overline{OE} \perp \overline{CD}$, se duduce que:
$\overline{OE} = \overline{AD}/2 = 16$ cm
Trazando $\overline{OF} \perp \overline{AD}$,se deduce que:
$\overline{ED} = R$
$\overline{EC} = 32 - R$
En el triángulo OEC aplicamos el teorema de Pitágoras
$R^2 = 16^2 + (32 - R)^2$
De donde R = 20 cm

**22.** En la figura que se muestra a continuación "O" es el centro de la semicircunferencia y $\overline{CD} = 5\ \overline{AC}$ .Calcular el valor de la expresión $E = \sqrt{\tan^2\theta + 5}$



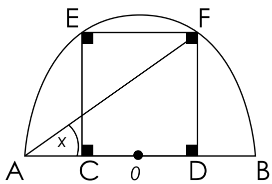

### Resolución

Realizando las construcciones auxiliares correspondientes tenemos



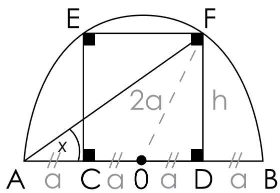
En el triángulo rectángulo ABD
$D + \alpha = 90^0 \rightarrow$ sen $D = \cos \alpha$
$2r/6b = b/2r \rightarrow 4r^2 = 6b^2$ (1)
En el triángulo rectángulo ABD por el teorema de Pitágoras
$(6b)^2 = (2r)^2 + a^2$ (2 )
Sustituyendo (1) en (2)
$6(4r^2) = 4r^2 + a^2 \rightarrow a^2/r^2 = 20$
Como en el⊿ DBO: $\tan\theta = a/r$
Finalmente en la expresión pedida se tendrá:
$E = \sqrt{\tan^2\theta + 5} = \sqrt{(20+5)}$
$E = 5$

**23.** Si la figura es una semicircunferencia y AC = CO = OD = DB .Calcular la medida del ∡x




### Resolución

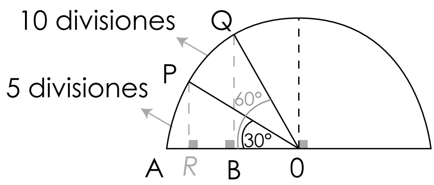
Realizando las construcciones auxiliares correspondientes




Del gráfico $\overline{OA}$=2a radio de la circunferencia
OF = 2a = R Por construcción
En el ⊿DFO
$h^2 = (2a)^2 - a^2 \rightarrow h = a\sqrt{3}$
En el ⊿ADF
$\tan x = h/3a = (a\sqrt{3})/3a = 1/\sqrt{3}$
$x = 30^0$

**24.** Una semicircunferencia de radio $(1+\sqrt{3})$ cm ,se divide en treinta arcos iguales. Calcular la proyección del arco comprendido entre la quinta y décima división sobre el diámetro horizontal en centímetros

**Resolución**

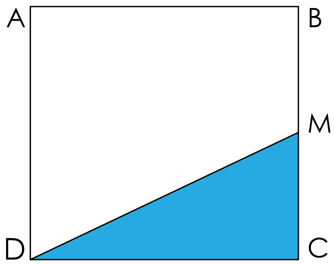



Como una semicircunferencia forma un ángulo central de $180^0$, entonces cada división mide $6^0$ ,luego entre la primera y décima división hay $60^0$ y entre la quinta y décima hay $30^0$.

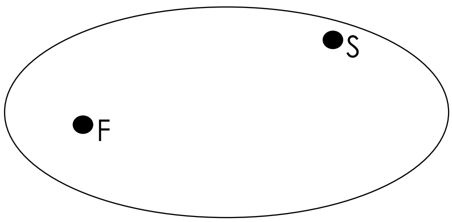
En el $\triangle BQO$ se tiene: $BO = (1+\sqrt{3})\cos 60^0$ (1 )
En el $\triangle OPR$ se tiene $BO + BR = (1+\sqrt{3})\cos 30^0$ ( 2 )
Reemplazando (1) en (2)
$BR + (1+\sqrt{3})\cos 60^0 = (1+\sqrt{3})\cos 30^0$
$BR + (1+\sqrt{3})(1/2) = (1+\sqrt{3})\sqrt{3}/2$
$BR + 1/2 + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2 + 3/2$
$BR = 1$ cm

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** En el cuadrado ABCD, M es el punto medio del lado BC. El área de la parte sombreada es $6cm^2$. Determinar el área del cuadrado ABCD

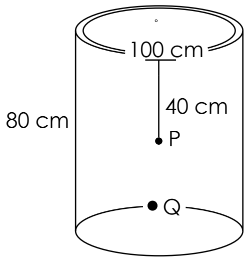



**2.** ¿Cuál es el camino más corto para ir del foco F de la elipse, al punto S de la figura adjunta, tocando en el borde de la elipse?



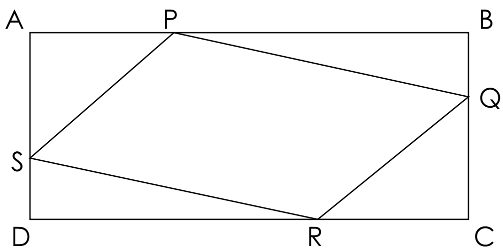
**3.** Dibujar el triángulo de perímetro mínimo que se puede inscribir en un triángulo acutángulo dado.

**4.** Los puntos P y Q están respectivamente en el interior y en el exterior del cilindro sin tapa de la figura adjunta, ¿Cuál es el camino más corte entre P y Q?




**5.** Sea un prisma hexagonal regular ,¿Cuál es la longitud más corta que ,partiendo de un vértice de la base ,recorre todas las caras laterales y termina en el vértice de la cara superior, situada en la misma arista que el vértice de partida?

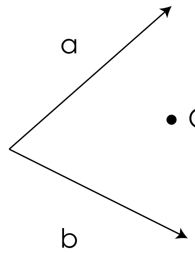
**6.** En la figura los puntos P,Q,R y S y dividen cada lado del rectángulo en razón 1:2. ¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo PQRS y el área de ABCD?



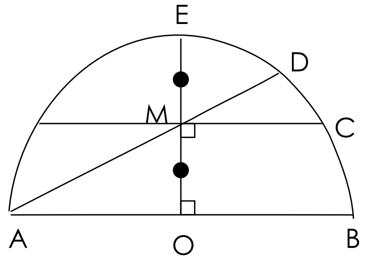

**7.** En un triángulo rectángulo cualquiera encontrar el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo utilizando implementos de dibujo

**8.** Dibujar un triángulo equilátero mediante la construcción de dos circunferencias congruentes intersecantes.

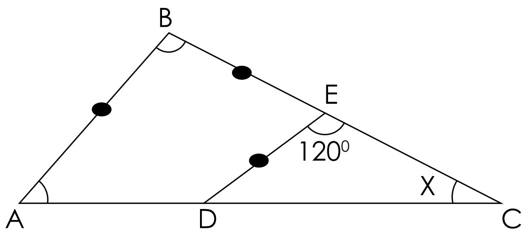
**9.** Los lados de un triángulo están sobre las semirrectas a y b y el punto Q es la mitad del tercer lado de dicho triángulo. Trazar el triángulo



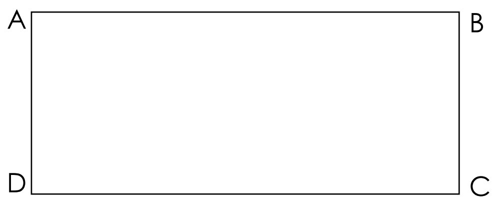

**10.** En el semicírculo de la figura de centro "O", $\overline{EM} = \overline{OM}$. Calcular m $\overset{\frown}{CD}$



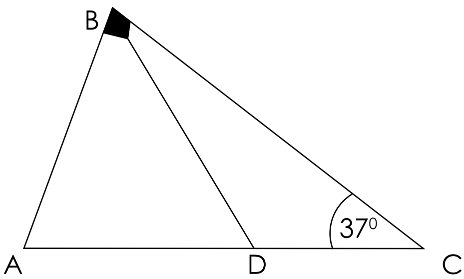

**11.** En el triángulo de la figura: $\overline{BE} = \overline{ED} = \overline{AB}$, además $\overline{AC} = \overline{BC}$. Calcular $m\measuredangle x$



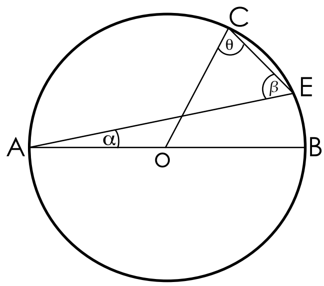

**12.** ABCD es un rectángulo, donde $\overline{AB} = 20$ cm y $\overline{BC} = 4$ cm. Sí el papel se dobla a lo largo de la diagonal $\overline{AC}$. El lado $\overline{AB}$, corta al lado $\overline{DC}$ en el punto O. Hallar la longitud del segmento $\overline{DO}$



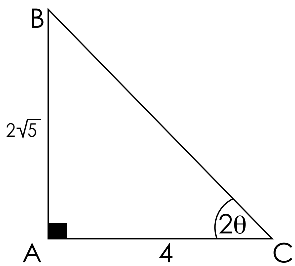

**13.** A partir de los datos que se muestran en la figura determinar $\overline{BD}$ si: $\overline{AC} = 2\overline{DC} = 50$



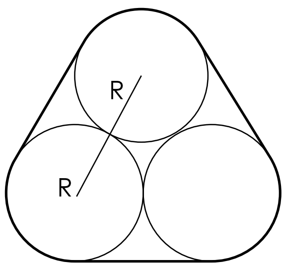

**14.** En la figura hallar $\tan\theta$, si $\tan\alpha = 2/3$ ,$\tan\beta = 3/5$ , siendo $\overline{AB}$ diámetro y "o" centro de la circunferencia.



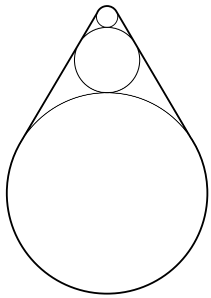

**15.** En la figura calcular $\tan\theta$



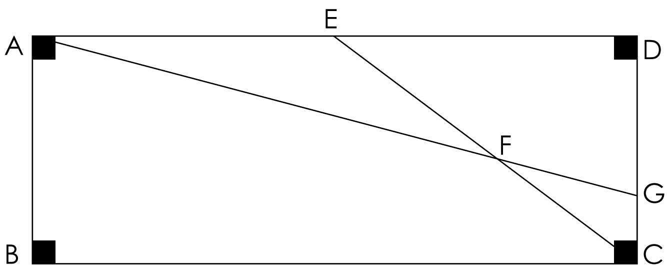

**16.** Hallar la longitud de la faja que envuelve a los tres cilindros del mismo diámetro.



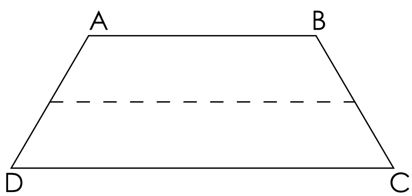
**17.** Hallar la longitud de la correa de trasmisión de tres ruedas tangentes exteriormente como se muestra en la figura cuyos diámetros son 18 cm,6 cm y 2 cm respectivamente



**18.** En el rectángulo ABCD se toman los puntos medios E en $\overline{AD}$ y F en $\overline{CE}$, se une A con F y se prolonga hasta cortar a $\overline{CD}$ en G. Hallar $\overline{FG}$ si $\overline{AF} = 30$




**19 .** En el trapecio isósceles A B C D AB ∥ DC; m∡A=2m∡C; AD = 10 cm 2AB = DC. Hallar la longitud del segmento que unen a los puntos medios de los lados no paralelos

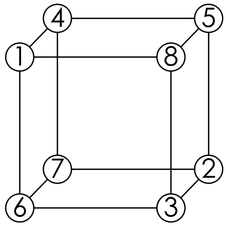


# Respuestas

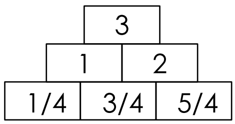
## EXPERIMENTAR CON LOS DATOS DEL PROBLEMA

**1.** 3

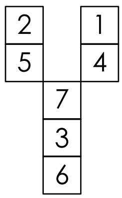
**2.**




**3.**




**4.**




**5.** En la estrella del 8 son múltiplos de 8 excepto el 226

**6.** 15 x 2-21÷7+18÷6
30 - 3 + 3 = 30

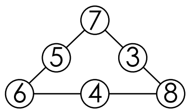
**7.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | - | 7 | + | 2 | = | 4 |
| - | | + | | + | | |
| 9 | + | 1 | - | 4 | = | 6 |
| + | | - | | - | | |
| 4 | + | 2 | - | 3 | = | 3 |
| = | | = | | = | | |
| 4 | | 6 | | 3 | | |

**8.**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 5 | 2 | 4 | 3 | 2 | 6 | 5 | 4 |

**9.**




**10.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | | 1 | | 13 |
| 12 | | 5 | | 8 |
| 2 | 6 | 3 | 10 | 4 |
| | | 7 | | |
| | | 9 | | |

**11.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 6 | 7 |
| 5 | 8 | 3 | 2 |

**12.**

a=3 b=7 c=4

d=5 e=2 f=1

g=6 h=9 i=8

**13.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 5 | 2 | 1 | 9 | 8 | 3 | 7 |
| 9 | 7 | 2 | 3 | 8 | 5 | 6 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 8 | 4 | 7 | 6 | 2 | 5 | 9 |
| 7 | 8 | 9 | 1 | 6 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| 5 | 3 | 1 | 9 | 2 | 8 | 7 | 4 | 6 |
| 2 | 6 | 4 | 7 | 5 | 3 | 1 | 9 | 8 |
| 8 | 2 | 3 | 5 | 4 | 7 | 9 | 6 | 1 |
| 1 | 9 | 7 | 6 | 3 | 2 | 4 | 8 | 5 |
| 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 1 | 3 | 7 | 2 |

**14.** B $7 \times 5 - 6 = 29$
**15.** D $(26-5)3 = 63$
**16.** A $4 \times 3 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$
**17.** D $[(3 - 1) \times (9 \times 6)] \div 12 = 9$
**18.** B $9 \times 4 = 36 \rightarrow \sqrt{36} = 6$
**19.** D La suma de las cifras suma 5
**20.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 | 2 |
| 3 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 5 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 5 |

## INDUCCIÓN MATEMÁTICA

**1.** 888888

**2.** 111111111

**3.** 888

**4.** $9^2 - 9$

**5.** 16

**6.** 324

**7.** 1764

**8.** 42

**9.** M

**10.** 720

**11.** 1024

**12.** 24

**13.** $1 - 2^{-2000}$

**14.** 529

**15.** 4760

**16.** 702

**17.** Sean a y b números consecutivos se verifica que:

$a^2 + b^2 + (ab)^2 = (ab + 1)^2$ Ley General

**18.** Siendo a el primer número consecutivo se verifica que:

$a(a + 1)(a + 2)(a + 3) = [a(a + 3) + 1]^2 - 1$ Ley General

**19.**

| # de fichas | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pasos | 3 | 7 | 15 | 31 | ... | ... | $2^n - 1$ |

**20.**

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 |

$S_1 = 1 + 2 + 2 + 3 = 8 = 2^3$

$S_2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 4 + 3 + 4 + 5 = 27 = 3^3$

$S_{20} = 20^3 = 8000$

**21.** 72

**22.** 100/101

## RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

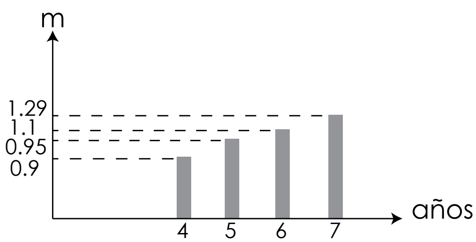
**1.** 46 y 14
**2.** 175 y 25
**3.** 27 y 6
**4.** 25 $cm^2$
**5.** $(\sqrt{2}-1)^2\ m^2$
**6.** 20%
**7.** 3
**8.** -1
**9.** $10^0$
**10.** 7
**11.** $x^2$
**12.** 242
**13.** 10 $cm^2$
**14.** 4$cm^2$
**15.** 314 $cm^2$
**16.** $4\pi$
**17.** 4cm
**18.** 54cm
**19.** 81
**20.** $60^0$
**21.** 80%
**22.** $30^0$
**23.** 63 y 71
**24.** 14
**25.** $10^0$
**26.** 0
**27.** $\sqrt{3}$
**28.** C

## HACER UN DIBUJO QUE REPRESENTE EL ENUNCIADO

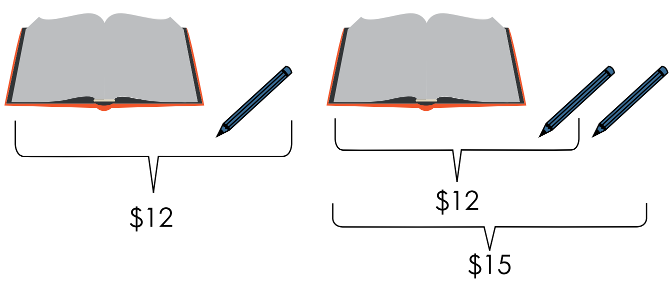
**1.** 700 ml


**2.** D-E-K

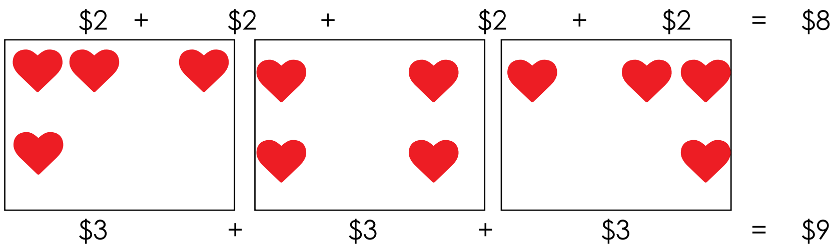
**3.** 19cm;20cm



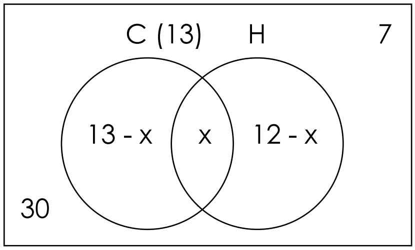

**4.** $ 9



**5.** 12 Chocolates




**6.** 2

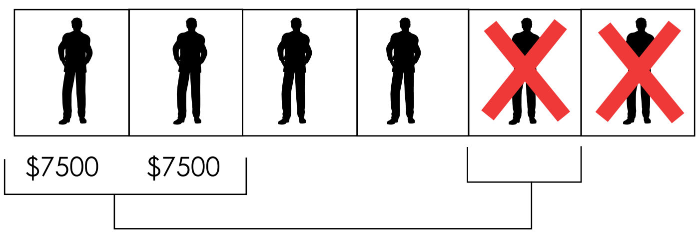



**7.** 60°

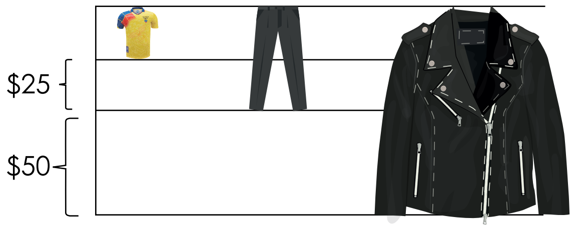
**8.** 5 lit.

**9.** $ 5.4

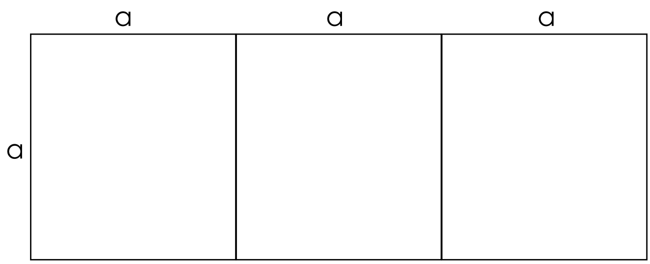

**10.** $90 000



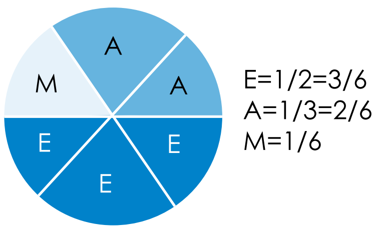
**11.** \$75



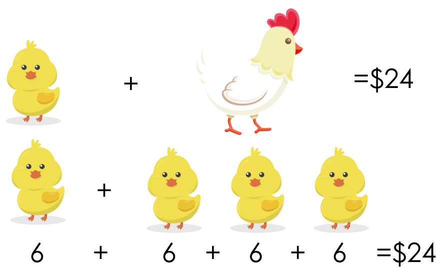

**12.** 21m; 63m



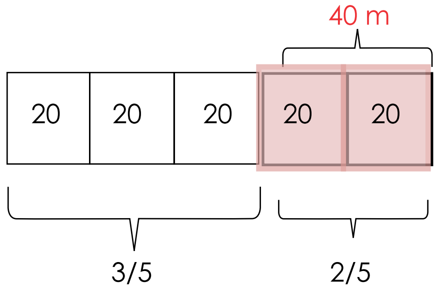

**13.** Nada



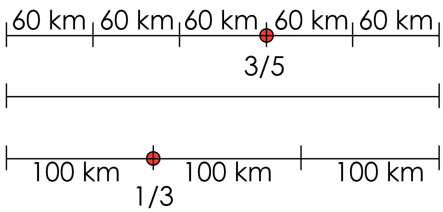

**14.** \$6



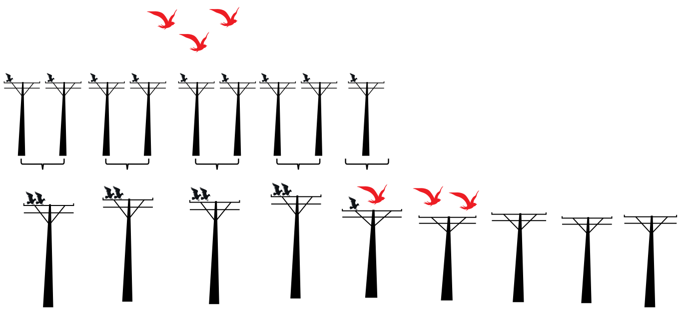
**15.** 100m




**16.** 80 km




**17.** 12



**18.** 24 $m^2$
**19.** 300m
**20.** 1.84m

## TRASLADO DE REGIONES

**1.** $2\pi$ cm$^2$
**2.** $8\pi$ cm$^2$
**3.** $9\sqrt{3}/4$ cm$^2$
**4.** $2(\pi - 2)$ cm$^2$
**5.** $25\pi$ cm$^2$
**6.** 8 cm$^2$
**7.** $9(\pi-2)$ cm$^2$
**8.** $12.5\ \pi$ cm$^2$
**9.** $2\pi$ cm$^2$
**10.** 9 cm$^2$
**11.** D
**12.** 8 cm$^2$
**13.** 4 cm$^2$
**14.** $\pi - 2$
**15.** 18 cm$^2$
**16.** 8 cm$^2$
**17.** 75 cm$^2$
**18.** 12 cm
**19.** 24 cm$^2$
**20.** 6 cm
**21.** $4(\pi - 2)$

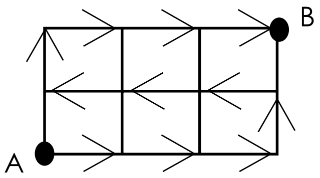
## HACER UNA LISTA

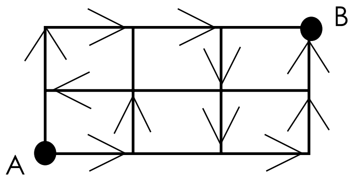
**1.** 16
**2.** 13
**3.** 18
4. 24
**5.** 17
**6.** 10
**7.** 18
**8.** 30
**9.** 11
**10.** 36
**11.** 14
**12.** 8
**13.** 32
**14.** 1024
**15.** 10
**16.** 4
**17.** 4
**18.** 21
**19.** 13
**20.** 18
**21.** 10
**22.** 15
**23.** 12
**24.** 21
**25.** $20
**26.** 4
**27.** 8
**28.** 6
**29.** 40
**30.** 12
**31.** 8
**32.** 3

## HACER UN DIAGRAMA

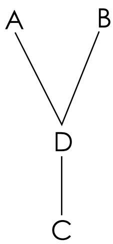
**1.** Los dos caminos son iguales
**2.** 36
**3.** 81
**4.** 152

**5.** 11 maneras

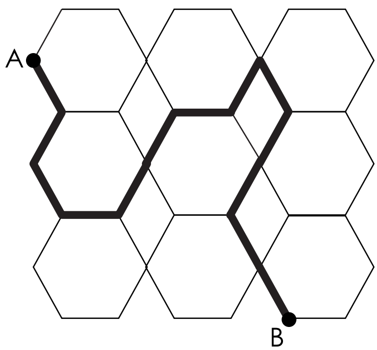


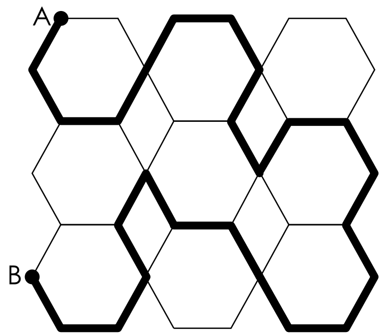

**6.** 10
**7.** Verdadero
**8.** 31
**9.** El mínimo 2 y el máximo 5
**10.** 8 caminos de 3 vértices y 8 caminos de 4 vértices
**11.** 11
**12.** 13
**13.** No es posible
**14.** 8
**15.**




**16.** 24
**17.** 25
**18.** 13 Tramos

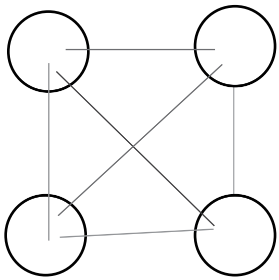


**19.** 25 Tramos

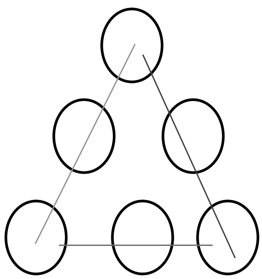



**20.** 9 kilómetros

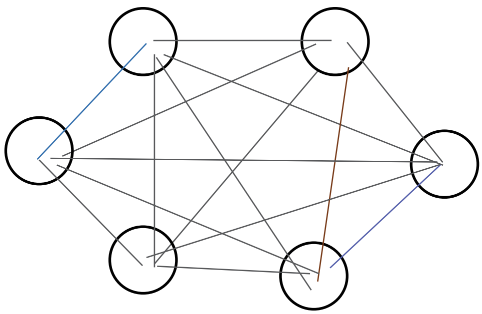
**21.**



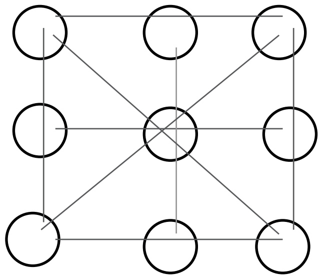
**22.**



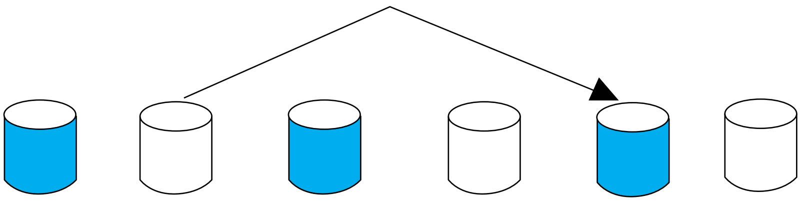
**23.**



**24.**



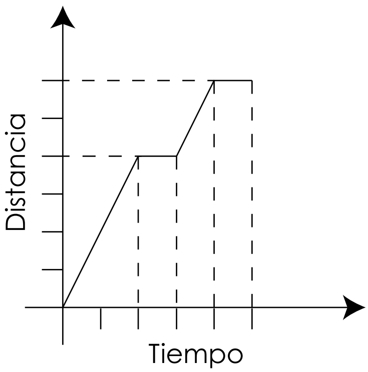
**25.**



**26.** Es un camino euleriano ya que atraviesa cada arista exactamente una vez: $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$, $V_5$, $V_1$, $V_4$, $V_2$, $V_5$

**27.** 4000

**28.**




**29.** 1220

**30.** 5

**31.** 4

## MODIFICAR EL PROBLEMA

**1.** $12.5\,(2\sqrt{3}-\pi)$ cm$^2$

**2.** 295.78 m$^2$

**3.** 835.3 m$^2$

**4.** $-\,(a+2)/2a$

**5.** 441 m$^2$.

**6.** $8(\sqrt{3} + 1\pi/3)$ cm$^2$

**7.** $12\pi$ cm

**8.** 20

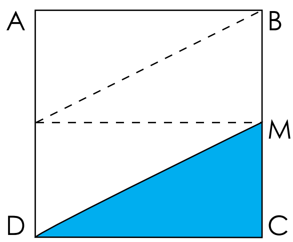
**9.** 45º

**10.** 6cm$^2$

**11.** $39cm^2$
**12.** 20 $cm^2$
**13.** 1
**14.** $1400
**15.** 40%
**16.** 80%
**17.** 5
**18.** (-2ab)/(ab + 1)
**19.** 21/4
**20.** (3a – b-3x) (3a-b + 7x)
**21.** $(a/b)^3 + (b/a)^3$
**22.** cd
**23.** 2
**24.** 2
**25.** 4
**26.** 0.73

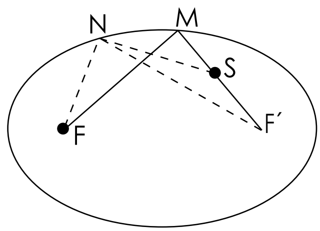
## CONSTRUCCIONES AUXILIARES

1.Si trazamos líneas auxiliares podemos observar que el área sombreada representa la cuarta parte del área total. Por tanto el área total del cuadrado será 24 $cm^2$

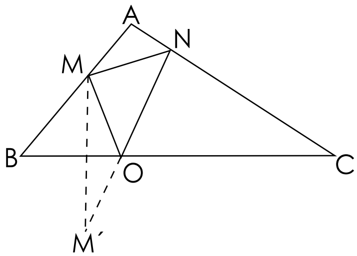



2. Empleando la desigualdad triangular se demuestra fácilmente que el punto de la elipse que define el camino más corto es la intersección de la recta que pasa por los puntos S y F' (foco) con la curva, el mismo que se corta en el punto M tal como se muestra en la figura.

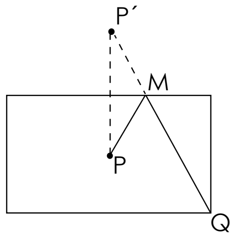
Si tomamos un punto arbitrario N sobre la curva distinta de M se demuestra que: SM+MF<SN+NF



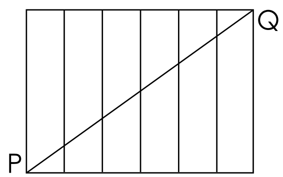

**3.** Este problema se resuelve fácilmente si dos de los vértices del triángulo buscado son fijos .Si los vértices M y N del triángulo inscrito son fijos. El triángulo MNO es de perímetro mínimo, siendo O la intersección del segmento de extremidades M' (Punto simétrico de M con respecto del lado BC del triángulo) y N



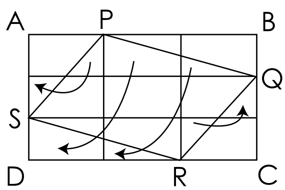

**4.** El camino más corto se obtiene desarrollando la superficie lateral del cilindro. Por simetría del punto P, con respecto al perímetro del círculo el camino PMQ es de la misma longitud que el segmento QP', luego es el más corto que cumple las condiciones del problema.



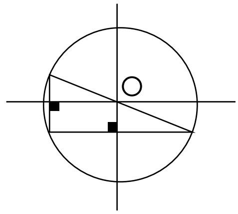

**5.** Como los extremos de la línea poligonal están sobre las cara laterales del prisma y éste es regular, basta desarrollar las caras laterales y unir los puntos P y Q por un segmento, tal como se muestra en la figura adjunta.



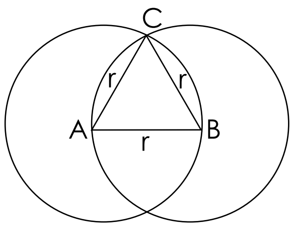

**6.** Dibujamos paralelas al lado AD por P y R y también al lado AB por S y Q. Cada uno de los rectángulos pequeños representa 1/9 del área original. Por traslado de regiones Area PQRS / Area ABCD = (5/9)/(9/9) = 5/9



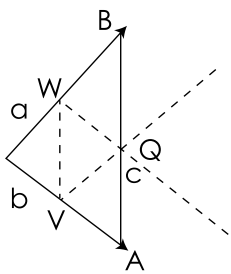
**7.** El punto de intersección de las mediatrices de los catetos de un triángulo rectángulo se cortan en el punto medio de la hipotenusa, y este punto a su vez constituye el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo



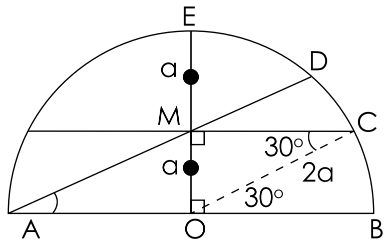

**8.** Dibujamos dos circunferencia congruentes interesantes tal que la segunda circunferencia pase por centro de la primera circunferencia .Si unimos los centros y el punto de intersección de las circunferencias podemos comprobar que se forma un triángulo equilátero. Cada triángulo divide en 6 sectores iguales de la circunferencia




**9.** Por construcciones auxiliares trazamos la recta paralela a lo semirrecta "b" que pase por Q y corta a la semirrecta "a" en el punto W ,de manera similar tracemos la recta paralela a la semirrecta a que pasa por Q y corta a la semirrecta b en el punto V. Si unimos los puntos de corte de las dos semirrectas se forma un segmento VW y finalmente trazamos una recta paralela a este segmento que pase por Q la misma que corta a las semirrectas a y b en los puntos B y A con lo cual se forma el triángulo correspondiente.

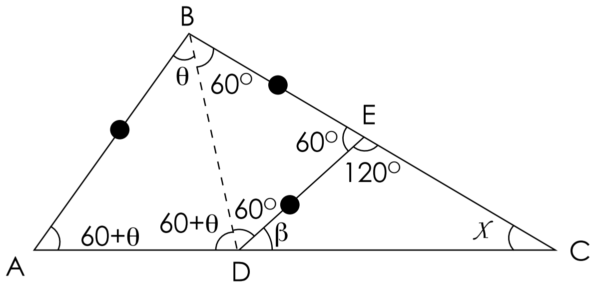


**10.**



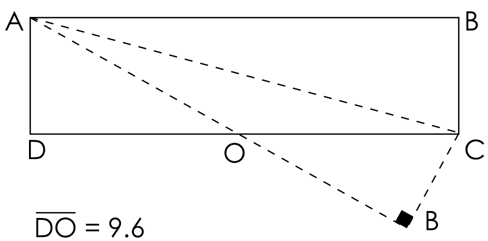

$m\overset{\frown}{CD} = 23.12^0$

**11.**



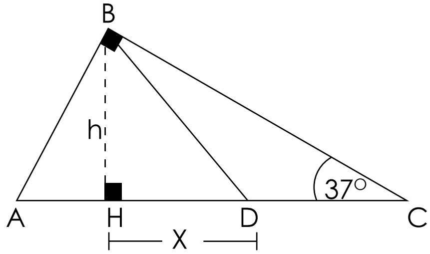

$x = 20^0$

**12.**



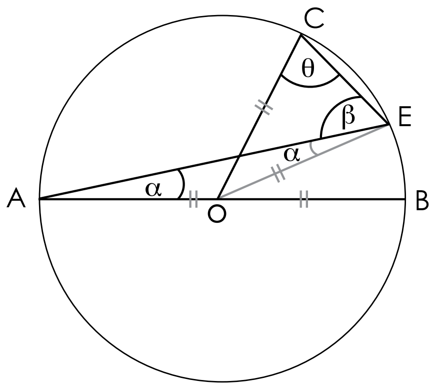

$\overline{DO} = 9.6$

**13.**



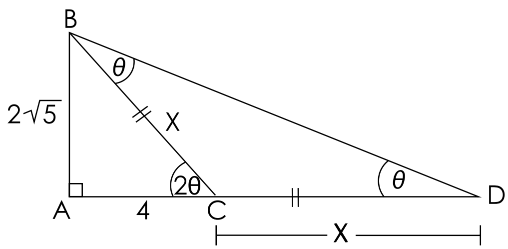

$\overline{BD} = 25$

**14.**



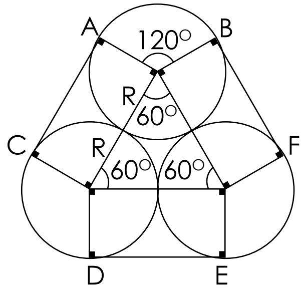

$\tan\theta = 19/9$

**15.**



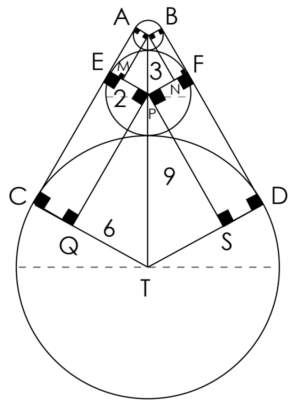

$\tan\theta = \sqrt{5}/5$

**16.**




$L = 2R\,(3 + \pi)$ cm

**17.**




$L = (16\sqrt{3} + 38\,\pi/3)$ cm

**18.** 10 cm

**19.** 15 cm

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


1. Torres, A. (2007). *Educación matemática y desarrollo del pensamiento lógico*. Perú.
2. De Guzmán, M. (1984). J*uegos matemáticos en la enseñanza*. Universidad Complutense de Madrid.
3. Díaz, Frida y Hernández G. (1998). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. McGraw-Hill: México
4. Monereo, C. (1998). *Estrategias de enseñanza-aprendizaje*. Graó. Barcelona.
5. Polya, G. (1956) *Como plantear y resolver problemas*. México: Trillas. 1990
6. Puig, P. *Didáctica, Matemática, Eurística*. Madrid.
7. Campistrous, L. y Riza C. (1998) *Aprender a resolver problemas aritméticos*. Cuba.
8. Baquerizo, G. (2008) *Fundamentos de matemáticas para educación Básica*. Ecuador.
9. Fones, María. Jugando con la matemática. España. 2007
10. Povis, A. *Razonamiento Inductivo Deductivo*. Perú.
11. Palacios J. *Didáctica de las Matemáticas*. Perú. 2003

EDITORIAL UTN
IBARRA - ECUADOR

UNIVERSIDAD TECNICA DEL NORTE
SCIENTIA ET THECNICUS IN SERVITIUM POPULI
UTN
AUTONOMA DESDE 1986
IBARRA ECUADOR

ISBN: 978-9942-984-63-0
9 789942 984630