AULA INVERTIDA: UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES BÁSICAS

RAFAEL CALDERÓN MUÑOZ

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ESCUELA DE POSGRADOS

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

TUNJA

2018

AULA INVERTIDA: UNA ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES BÁSICAS

RAFAEL CALDERÓN MUÑOZ

Trabajo, requisito parcial para optar el título de Magister en Educación Matemática

ALFONSO JIMÉNEZ ESPINOSA Ph.D.
Director

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ESCUELA DE POSGRADOS

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

TUNJA 2018

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo, si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación por cuenta del autor y del director de la tesis, no se hubiese llegado a buen termino sin la desinteresada participación de las personas nombradas a continuación, siendo todas muy importantes en momentos de angustia o incertidumbre.

En primera instancia, dar gracias a Dios y sus intercesores, a la virgen de la Oh de Morca, por acompañarme y guiarme en cada momento de mi vida, por la fortaleza para no dejarme desfallecer y por haber puesto seres maravillosos que fueron de ayuda valiosa durante el periodo de estudio y de la investigación.

A mi padre, a quien le debo gran motivación en mi vida y en el desarrollo de este proyecto, quien en un solo llamado de atención solía ponerme a trabajar en el desarrollo de este, y a mi madre quien me brindaba espacios de tranquilidad y comprensión.

A mi esposa y a mi hijo, a quienes les debo gran cantidad de tiempo y actividades en familia, quienes por razones de estudio tuve que dejar a un lado en actividades cotidianas, pero siempre han estado ahí para sacarme una sonrisa y levantarme en momentos de incertidumbre, estrés y desesperación.

Al director de mi tesis, Ph. D Alfonso Jiménez Espinosa, por la colaboración, paciencia y apoyo brindados durante todo este camino, y quien estando tan ocupado, siempre logró destinar un momento de su preciado tiempo para aconsejarme y guiarme con correcciones y sugerencias.

A las directivas del Colegio Técnico en Administración Micro-empresarial Ciudad del Sol en cabeza de la rectora, Esp. María Ofelia Álvarez Gómez, a quienes debo la comprensión en las ausencias a algunas jornadas pedagógicas y la colaboración con los espacios y la libertad en el trabajo con los estudiantes que fueron parte de la investigación, y muy en especial por la confianza depositada en mi.

Tabla de contenido

Contenido

Tabla de contenido ... 3

Índice de gráficas ... 5

Índice de anexos ... 6

Introducción ... 8

Capítulo 1: Generalidades ... 10

Planteamiento del problema ... 10

Objetivos ... 11

General ... 11

Específicos ... 11

Justificación ... 11

Antecedentes ... 12

Capítulo 2: Marco Teórico ... 15

Aula invertida ... 15

Situaciones a-didácticas de Brousseau ... 18

Un poco de historia del concepto función ... 19

Representaciones semióticas del concepto función ... 22

Capítulo 3: Metodología de la Investigación ... 26

Unidad de análisis 26

Etapas de la investigación 27

Etapa 1. Revisión documental y multimedia e interpretación del concepto función. 27

Etapa 2. Evaluación preliminar y construcción del concepto. 28

Etapa 3. Evaluación final. 28

Etapa 4. Discusión de resultados 28

Recolección de la información 29

Aspecto ético 29

Capítulo 4: Análisis y discusión de Resultados 30

Análisis de exposiciones grabadas en video 30

Análisis prueba 1 (Anexo 2) 35

Análisis prueba 2 (Anexo 3) 48

Conclusiones 59

Referencias Bibliográficas 61

Índice de gráficas

Gráfica 1. Representación de la función $\mathrm{fx} = 4\mathrm{x}, \mathrm{x} \in \mathbb{Z} + \cup\ 0\}$. Fuente: Elaboración propia en GeoGebra. 24

Gráfica 2. Representación de lo que los estudiantes mencionaron como recta horizontal. Fuente: Elaboración propia en GeoGebra. 31

Gráfica 3. Representación de lo que los estudiantes mencionaron como recta vertical. Fuente: Elaboración propia en GeoGebra. 32

Gráfica 4. Representación gráfica de la función $fx = x2$. Fuente: Elaboración propia en GeoGebra. 33

Gráfica 5. Representación gráfica de la función $fx = sen(x)$. Fuente: Elaboración propia en GeoGebra. 34

Gráfica 6. Representación gráfica de la situación problema. Fuente: Elaborada por E_{41}. 45

Gráfica 7. Representación gráfica de la situación problema, Fuente: Elaborada por E_{22}. 46

Gráfica 8. Representación gráfica de la situación problema, Fuente: Elaborada por E_{36}. 56

Gráfica 9. Representación gráfica de la situación problema, Fuente: Elaborada por E_{15}. 57

Índice de anexos

Anexo 1. Documento de autorizacion de uso de imagen sobre fotografias y fijaciones audiovisuales (videos) para uso público 65

Anexo 2. Actividad de evaluación 1 67

Anexo 3. Actividad de evaluación 2 72

Resumen.

La presente investigación buscó identificar los beneficios de implementar la estrategia didáctica de “aula invertida” en el proceso de aprendizaje del concepto función. Para el desarrollo de ésta se llevó a cabo la revisión de la literatura acerca de esta metodología y las investigaciones previamente realizadas implementando dicho modelo. Como el aula invertida no presenta un esquema riguroso ni una serie de actividades que presenten obligatoriedad, se decidió trabajar mediante la presentación de videos escogidos por el investigador y los cuales fueron observados por los estudiantes; posteriormente cada grupo de estudiantes debió presentar ante sus compañeros una exposición en la que presentaron lo que habían entendido del tema; luego de las exposiciones se evaluó el conocimiento adquirido por ellos, además se realizaron algunas actividades grupales con la asesoría del profesor, punto en el cual se realizó la formalización del concepto en estudio, para finalmente ser evaluado por última vez en este proceso de aprendizaje. El proceso muestra buenos resultados, y deja ver así el aula invertida como una oportunidad de aprendizaje de dicho concepto en la población en la que se realizó la investigación.

Palabras Clave: aula invertida, matemáticas, función, aprendizaje, representaciones semióticas,

Introducción

El desinterés que se está evidenciando en las aulas de clase por cuenta de los estudiantes, la inasistencia de ellos a las clases y la gran revolución tecnológica en que vivimos (Rosario, 2006) nos conducen a replantear la forma como estamos llevando el conocimiento a nuestros estudiantes, es momento de lograr que los estudiantes entiendan que son los principales actores en su construcción de conocimientos. En este sentido es conveniente darle esa gran responsabilidad a ellos, como lo afirman Bergmann & Sams (2012) mediante el aula invertida se logra dar el protagonismo a los estudiantes y ellos tienen la oportunidad de aprender a su propio ritmo.

Esta investigación tuvo por propósito la implementación de la metodología del aula invertida para la construcción de conocimiento del concepto función en estudiantes de grado noveno, y constatar los beneficios de su uso en dicho proceso. Se decidió trabajar con este concepto debido a que la enseñanza del concepto función presenta grandes dificultades debido a su naturaleza y a la forma como este se intenta ilustrar (López & Sosa, 2008), ya que al momento de enseñar se realiza mediante las distintas formas de representación, tendiendo a confundir al estudiante, quien entiende las funciones como una serie de procedimientos y algoritmos para lograr las distintas representaciones de ellas. Adicionalmente es muy sabido que en el contexto universitario es notorio el uso de este concepto para abordar objetos matemáticos más abstractos y complejos, por ende este concepto debe iniciarse y enseñarse de la mejor manera, ya que aunque la ejercitación que se puede lograr en los estudiantes a esta altura es importante, a su vez puede llegar a generar alguna dificultad al momento de utilizarlo más adelante en su vida académica o profesional, ya sea en la aplicación de las propiedades de las funciones o en la modelación de alguna situación o fenómeno cotidiano.

El presente texto contiene en su primera parte un marco teórico para entender a profundidad el estudio a realizar y tener gran claridad del camino que iba a recorrer, esta incluye el estado del arte y la teoría de lo concerniente al aula invertida, adicional, algunas ideas de la teoría de situaciones de Brousseau (2007) y una pequeña reseña histórica del concepto función. Posteriormente una segunda parte en la que se describe desde la metodología de investigación que se utilizó, hasta la población que participó en la investigación; en una tercera parte se presenta el análisis y la discusión de la información obtenida en cada una de las etapas, por último se presentan las conclusiones a las que llegó el autor luego de realizada la investigación.

Capítulo 1: Generalidades

Planteamiento del problema

En la actualidad se está evidenciando en el aula por parte de los estudiantes gran desinterés hacia el aprendizaje, donde cualquier distractor resulta gran antagonista en el aula; aquí se hace necesario pensar si los profesores están llevando a cabo de la mejor forma la labor docente, o si por el contrario se dejan llevar por el mismo modelo con el cual aprendieron.

En este momento la educación se encuentra en una nueva situación, ya que como lo afirma Rosario (2006) "Estamos ante una revolución tecnológica; asistimos a una difusión planetaria de las computadoras y las telecomunicaciones. Estas nuevas tecnologías plantean nuevos paradigmas, revolucionan el mundo de la escuela...". Si la sociedad está en constante evolución, la forma como se aprende también deberá estarlo, por tal razón se hace necesario buscar metodologías que permitan una mejor interacción entre el docente, el estudiante y la tecnología, tomando esta última como una herramienta de gran apoyo para el aprendizaje del estudiante.

Con el avance de la tecnología también se van desarrollando nuevas metodologías para el aprendizaje de cualquier área, una en auge, desde el año 2000, es el aula invertida, metodología en la cual se buscaba inicialmente que los estudiantes llegaran al salón de clase con fundamentos del tema que se iba a estudiar en la clase y que fue adaptándose a las distintas necesidades, como el caso de inasistencia de los estudiantes a la clase, refuerzo de las temáticas en algunos estudiantes, entre otras; debido a esto surge la pregunta de investigación ¿Cuáles son los beneficios de usar la metodología del aula invertida en la enseñanza de las funciones básicas?

Al hablar de funciones básicas, hace referencia a las funciones lineal, cuadrática, cubica, logarítmica y exponencial. El estudio se lleva a cabo en grado noveno de educación básica, más específicamente con los estudiantes del grado noveno del Colegio Técnico Micro-empresarial Ciudad del Sol en el municipio de Sogamoso.

Se toma el concepto de función, ya que en este se presenta una situación compleja, en la cual el estudiante no logra comprender a plenitud lo que se conoce en análisis como función, remitiéndose a la simple mecanización de un proceso para encontrar una serie de características que son representación de una expresión algebraica. Tal como lo afirman Azcárate & Deulofeu (1996, p. 63), quienes además hacen responsable de tal situación al tipo de ejercicios que plantean los libros de texto, en los que se pretende la sencilla tarea de traducir una función matemática de un lenguaje a otro.

Objetivos

General

Identificar los beneficios de usar la metodología del aula invertida en la enseñanza del concepto función.

Específicos

Establecer una estrategia, según los parámetros del aula invertida, para la apropiación del concepto función en estudiantes de grado noveno.

Valorar el modelo de aula invertida para abordar la temática de las funciones básicas en grado noveno.

Justificación

La presente investigación tiene entre sus propósitos buscar la forma de motivar a los estudiantes, al presentarse en el aula la dificultad que los dispositivos móviles (celulares inteligentes, tabletas, entre otros) interfieren en el desarrollo normal de una clase, al ser una gran distracción para los educandos; se presenta entonces un gran reto para los educadores, lograr que los alumnos encuentren en la clase de matemáticas situaciones de aprendizaje que capten su atención, evitando la distracción mencionada.

La metodología del aula invertida se presenta como una estrategia que involucra al estudiante como protagonista de su aprendizaje, permitiendo en ellos el uso adecuado de la tecnología, ya que al estar tan acostumbrados al uso de ella, puede llegar a ser una gran herramienta al implementarla en el entorno escolar, presentándose así como gran motivador para el aprendizaje en los estudiantes.

Antecedentes

Jordán, Pérez y Sanabria (2014) realizaron un trabajo de documentación, además de implementar el modelo de aula invertida con uno de sus grupos, como lo enuncian los autores. No es explícito el contexto en el cual trabajaron, pero afirman que este presenta grandes ventajas en cuanto al contenido, ya que se puede ver a mayor profundidad cada temática; adicional a esto, un desarrollo superior de competencias en los estudiantes y una mayor motivación por parte de ellos en el trabajo de la clase. Resaltan también que existen dificultades como la planeación previa que debe realizar el docente y la aceptación por parte de los estudiantes por el trabajo con este modelo.

Valverde (2014) presenta los resultados de una experiencia investigativa al usar el modelo de aula invertida, durante un curso de cálculo para la computación, en la cual tomaron como grupos control los dos cursos anteriores de la misma asignatura llevado a cabo con metodología tradicional, para realizar la comparación con el grupo que trabajaron el modelo nuevo. El número de estudiantes en los grupos de aula invertida fue 73, mientras que los dos grupos de metodología tradicional fueron de 44 y 104. En cuanto a los resultados, se puede evidenciar por parte de los investigadores que mejoró de forma sustancial el éxito del curso y el rendimiento académico de los estudiantes. Es de resaltar también por parte de los autores, el grado de satisfacción del docente, el cual dio lugar a mayor motivación en los estudiantes, quienes se mostraron más activos durante las clases, mejorando la interacción y el ambiente de estudio.

Cano y González (2016) realizaron una revisión del modelo de aula invertida con estudiantes el ciclo IV de educación básica, para mejorar en ellos las habilidades de pensamiento crítico. Este modelo fue aplicado mediante edmodo, facebook y un blog. Los participantes en este proyecto mostraron mayor grado de satisfacción, además de mejorar sus habilidades del pensamiento, análisis y comunicación, por ende de autonomía y gestión de conocimiento de forma individual y grupal. Los investigadores manifiestan que la interacción entre presencialidad y virtualidad dan mayor posibilidad al aprendizaje.

Fornons y Palau (2016) realizaron una investigación en la cual se analizó el uso del aula invertida en la enseñanza de las matemáticas en grado octavo de educación secundaria obligatoria en España, con el objetivo de mejorar los resultados de evaluaciones académicas y actitud de los estudiantes. Hicieron una comparación entre dos grupos, uno con aula invertida y el grupo control con metodología tradicional. Los estudiantes del grupo guiado mediante aula invertida, obtuvieron resultados en sus evaluaciones notoriamente superiores a los del grupo control, además de mejorar en su actitud y el ambiente de trabajo en el aula, evidenciando durante las sesiones mayor trabajo colaborativo, participación, responsabilidad e interacción con el docente.

Cázares, Rodríguez y Hinojosa (2016) elaboraron un análisis acerca de la metodología a utilizar, entre modelo tradicional y modelo de aula invertida, al momento de dar un curso de algebra para estudiantes del primer año de la facultad en un programa de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Para esta investigación se trabajó con dos grupos, el primero conformado por 29 estudiantes en el cual se trabajó el modelo aula invertida, mientras el segundo grupo por 43 estudiantes, como grupo control, se enseñó mediante el modelo tradicional. Se evidenció en los estudiantes una mayor motivación y participación, además una gran diferencia entre los resultados académicos de los dos grupos, en aproximadamente del 13% de mejoría con el aula invertida que con la metodología tradicional. Adicional a las conclusiones anteriores, los autores sugieren que este modelo sea implementado con la intención de optimizar el uso de las TIC, y afirman que la implementación de las nuevas metodologías para la enseñanza es muy bien aceptada por parte de los estudiantes, ya que tienen la facilidad de encontrar de manera más rápida y eficiente información desde sus dispositivos móviles, tales como tablet, celular, computador portátil, entre otros.

Barros y Martínez (2018) hicieron una investigación de tipo experimental, con los estudiantes de algebra IV de quinto año de Física y Matemáticas de carrera docente de educación superior, en la que aplicaron a estos estudiantes metodología tradicional durante el primer parcial, mientras que para el segundo parcial se aplicó la metodología de aula invertida. Algunos de los estudiantes manifestaron dificultades de adaptación al modelo de aula invertida, pese a ello presentaron mejores resultados con este modelo que con el tradicional; además los estudiantes presentaron mayor nivel de satisfacción con el nuevo modelo.

Capítulo 2: Marco Teórico

Aula invertida

El aula invertida trata de dar el protagonismo del aprendizaje exactamente a quien es responsable de su propio aprendizaje, el estudiante, ya que este modelo permite que el rol del educador cambie a ser un asesor para el proceso, dejando su papel protagónico de docente. Lage, Platt, y Treglia (2000, p. 32) mencionan que “invertir el aula significa que los eventos que tenían lugar dentro del salón de clases, ahora van a darse por fuera de él y viceversa”. Desde este punto de vista es posible participar de forma más activa en las actividades de alto nivel para el desarrollo de un conocimiento en los estudiantes, ya que generalmente esta clase de actividades se daban en sus hogares, donde en muchos casos no tienen quién les solucione las dudas que se puedan generar.

Desde este punto de vista es posible que el estudiante revise la teoría en videos y textos, por ejemplo, para luego, regresar al aula de clase teniendo la idea de lo que debe hacer y ponerlo en práctica con la asesoría directa del docente, dando lugar a la construcción del concepto por cuenta del estudiante. Davies, Dean y Ball (2013) enuncian que el aula invertida está basada en un modelo netamente constructivista centrado en los estudiantes, en el cual ellos son los directos responsables de su progreso, ya que pueden definir su propio ritmo de aprendizaje y decidir en qué enfocarse de acuerdo con sus necesidades particulares; en éste los estudiantes son preparados por fuera del aula de clase tradicional, mediante grabaciones de video o algunos otros recursos audiovisuales asignados por el docente.

Por su parte, López (2015) describe el aula invertida como dar la vuelta al método de aprendizaje, dejar la forma tradicional, y apoyado en el uso de nuevas tecnologías desarrolla un modelo de aprendizaje combinado, de tal manera que el tiempo de clase se dedique a actividades grupales y colaborativas, las cuales para Molina y Chatzi (2012, p.152) son las actividades dentro de las que cada grupo de estudiantes “intercambian información” y trabajan en ellas “hasta que todos sus miembros la han entendido y terminado”. Así deja la responsabilidad al alumno de prepararse fuera del aula en su propio tiempo libre; a partir de lo que López (2015) llama “video-lecciones guiadas y tuteladas de corta duración”. Si bien el docente está presente en todo el proceso de aprendizaje, el directo responsable debe ser el estudiante, brindando así una mayor oportunidad de desarrollo de competencias a ellos, quienes al tener que buscar, consultar y desarrollar actividades, en conjunto con sus pares, les permitirá generar en ellos un criterio que los lleve a ser más competentes en el uso de los objetos matemáticos con los que se está interactuando.

Bergmann y Sams (2012) consideran que en el modelo de aula invertida, el eje central son las competencias que se quieren desarrollar en el estudiante; al estar ya definidas, el docente tiene la tarea de clasificar los contenidos que se requiere que el estudiante aprenda, ya sea por video-conferencia o por experimentación, para lograr los objetivos previamente planteados; el docente deberá planear una serie de actividades participativas o colaborativas para el desarrollo por parte de los estudiantes, siendo ellos los grandes protagonistas, quedando relegado el docente a ser un auxiliar en el proceso, dejando su protagonismo en estas actividades.

El modelo de aula invertida está fundado principalmente en la dificultad que pueden presentar las distintas tareas en los estudiantes, ya que para el desarrollo cognitivo se puede pensar en actividades que pueden enmarcarse como de alto, medio o bajo nivel, siendo las de bajo nivel, las que normalmente se realizan en la clase, mientras que las de alto nivel, como el desarrollo de ejercicios de practica y situaciones problema se llevaban a cabo en casa, presentando la dificultad de falta de guía, puesto que muchos de los estudiantes no poseen ayuda alguna en caso de presentárseles dudas o dificultades en sus hogares.

Este modelo ayuda a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes, dado que permite que ellos lleven a casa las actividades de bajo nivel de desarrollo cognitivo, y las de alto nivel al aula de clase, donde se supone existe una persona capaz de participar, asesorar y solucionar las dudas que puedan surgir. Asimismo se presenta como una posibilidad para aquel docente que desea dejar su protagonismo frente a un grupo de estudiantes dando clase magistral, pues como lo manifiestan Bergmann y Sams (2012) muchos docentes persiguen tal fin; cambiar de un docente trasmisor a uno mediador o facilitador entre el estudiante y el conocimiento.

Entre las características del docente que aspira a trabajar con el aula invertida, enunciadas por Bergmann y Sams (2012), es de resaltar que al cambiar el rol completo del profesor, éste debe ser una persona muy bien capacitada en la temática a enseñar, con el fin de poder realizar de la mejor manera una clasificación de las temáticas que se pueden construir por los estudiantes fuera del aula, y los que necesariamente requieran de la asesoría del docente en el trabajo dentro de ella; además de poder servir como facilitador y poder alentar a cada estudiante en sus necesidades durante el proceso de aprendizaje.

De acuerdo con Martínez (2014) es conveniente que el docente conozca al menos el uso de un computador y poseer nociones básicas en el trabajo en internet; además, poseer gran habilidad en el diseño y creación de actividades que posibiliten la construcción de los conceptos en el estudiante; adicional a estos, el docente debe tener la disposición para practicar la evaluación formativa y así poder reestructurar el curso con el fin de facilitar la reducción de dificultades y fomentar una mejor formación. Talanquer (2015) reconoce la evaluación formativa como un “proceso cíclico” en el cual se busca identificar cómo va la interacción entre el concepto y el estudiante en busca de mejorarla en caso de que no vaya de la mejor manera.

Situaciones a-didácticas de Brousseau

En la práctica docente es lo más normal verificar el aprendizaje alcanzado por un estudiante mediante una pregunta o una situación; si el estudiante responde a ella, demuestra que sabe; en caso contrario, manifiesta que aún está teniendo alguna necesidad (Brousseau, 2007); para el mismo autor, el estudiante es capaz de construir un nuevo conocimiento, partiendo de sus experiencias o de las interacciones que tenga con un medio que pueda estar explícitamente destinado para adquirir algún conocimiento o no.

En el caso que no se presente alguna intencionalidad explicita de enseñanza, se puede decir que se trata de una situación a-didáctica, en ésta el docente ofrece a su estudiante un ejercicio o problema; es claro para el alumno que tal situación fue entregada a él con el fin que logre algún conocimiento, pero éste solamente se logrará cuando sea capaz de aplicarlo en distintas situaciones, por fuera del contexto netamente escolar (Brousseau, 2007).

Si el docente se ve involucrado en el desarrollo de alguna situación a-didáctica, esta empieza a tomar un fin didáctico, el cual determinará el conocimiento que va a ser adquirido por el estudiante, incluyendo las limitaciones y "deformaciones" que el primero pueda aportar, degenerando así el conocimiento que se quería que construyera el alumno; tal situación se conoce como situación didáctica.

La enseñanza mediante el aula invertida sugiere una reformulación al modelo actual, al cual están acostumbrados los estudiantes. Para esta investigación se seleccionaron unos videos y documentos relacionados con la temática de estudio y se asignó a los estudiantes la tarea de verlos y llevar a la clase sus conclusiones; en busca de la comprensión de del concepto de función. Como los videos y documentos presentan ejemplos que buscan involucrar al estudiante con el concepto, se puede afirmar que se trata de situaciones didácticas, pues la intención de construir un conocimiento es explícita y además puede generar las ya mencionadas restricciones o limitaciones.

Por otro lado, con la llegada del estudiante al aula, se presenta una serie de problemas con el fin de que él confronte lo que observó con lo que se busca que él aprenda, aplique todo su conocimiento en la solución de éstos, llegando finalmente a la formalización del concepto a construir. Ésta se conoce como situación a-didáctica puesto que a pesar que los estudiantes han tenido que observar distinto material en sus hogares, la formalización del aprendizaje se deberá dar dentro del aula de clase con el regreso del estudiante, acompañado por una serie de concepciones e interrogantes adquiridos en casa, que van a ser resueltas por ellos mismos en los grupos de trabajo, sin que se vea involucrado el docente, a menos que fuese necesario.

Un poco de historia del concepto función

Desde siempre el ser humano ha vivido con la preocupación de todo lo que desconoce, por tal motivo ha estado siempre en busca de conocimiento y explicación a cada uno de los fenómenos que le rodean; en este proceso, la matemática ha sido una gran aliada, ya que con ella se han logrado modelar muchos de los fenómenos, para poder así entenderlos. Según Fava, Ghezzi, Tanzini y Targi (2005), la noción de dependencia de una variable respecto de otra, es tan antigua como la misma matemática, ya que se puede rastrear desde las tablas babilónicas de astronomía y algunos documentos del tiempo de Tolomeo. También mencionan que en la antigua Grecia se estudiaba la relación entre el tiempo y la posición del planeta mediante la geometría, evitando el uso de expresiones algebraicas.

En Grecia se mostraba interés particular por las curvas, llamadas hoy, algebraicas, especialmente por las de segundo grado (secciones cónicas); toda curva que se pudiera describir como lugar geométrico construible mediante el uso de regla y compas. Se tuvo que esperar hasta el siglo XVII a que los estudiosos de la matemática prestaran atención al concepto de función; según Fava *et al*. (2005) esto se debió a la falta de conocimientos algebraicos, puesto que no estaba clara la continuidad de los números reales, había poco desarrollo de notación algebraica, y a la falta de motivación, ya que eran pocos los ejemplos en los cuales se podía utilizar dicho concepto.

El estudio de los números reales y complejos desarrollado por Bombelli, Stifel y otros, la creación de simbología algebraica por Viète y Descartes entre otros, la relación entre el álgebra y la geometría por Fermat, Descartes y otros, el estudio del movimiento por Kepler, Galileo y otros, fueron los eventos más importantes que contribuyeron a motivar a los estudiosos a desarrollar el concepto de Función. Vargas (2011) afirma que Viète escribía magnitudes conocidas como consonantes, mientras que las desconocidas como vocales.

Según Fava et al. (2005), en el estudio del movimiento nacía una verdadera intuición del concepto función de forma analítica cuando Descartes logró representar por medio de una expresión algebraica una curva. Hacia el año 1637 él afirmó que una ecuación en x y y es un medio que permite introducir una dependencia entre variables cuantitativas, en modo tal que se puede calcular el valor de una de ellas con respecto al valor de la otra. Esto es ya una evidencia clara del desarrollo del concepto función, puesto que se habla abiertamente del término dependencia entre variables.

De acuerdo con Vargas (2011), Gregory define una función como “una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o cualquier operación imaginable”; por otro lado Leibniz describía una función como una cantidad formada a partir de cantidades constantes y variables.

Los científicos del siglo XVII se encontraron con la situación de presentar una explicación acerca del movimiento terrestre, ya que no era sencillo de entender el hecho de que si la tierra tenía movimiento de rotación sobre su eje y de traslación alrededor del sol, parecía como si estuviera quieta. Esta inquietud atrajo a grandes estudiosos de la época, entre ellos Galileo y posteriormente Newton. Para poder dar una explicación razonable, fue necesario incorporar un nuevo concepto en la matemática, el de función, como relación entre variables; el cual permaneció en estudio durante los siguientes 200 años. Según Fava et al. (2005), Galileo nombra repetidamente el concepto de función, y habla acerca de la relación entre magnitudes, expresa la relación funcional verbalmente y con el lenguaje de las proporciones.

Hacia esta época se presentaba la función como una cantidad obtenida de otra cantidad mediante una o varias operaciones algebraicas. Para el año 1655 aproximadamente Isaac Newton utilizo el término "Fluente" para indicar una relación cualquiera entre variables, mientras que Bernoulli en 1698 adopto la frase "Función de x" para referirse a la cantidad obtenida al evaluar una constante en una expresión algebraica. Por otra parte a Euler le debemos la notación actual $f(x)$ para indicar una función arbitraria en x según lo indican Fava et al, (2005).

El concepto de función y las más simples funciones algebraicas fueron introducidas y utilizadas hacia el siglo XVII cuando los grandes matemáticos del momento enfrentaban los problemas de los movimientos curvilíneos como el que describe un péndulo, dejando como legado a la humanidad grandes obras acerca del cálculo infinitesimal. Hacia el año 1736 Euler en su obra "Meccanica" presenta por primera vez el símbolo e, como representación de la base del sistema logaritmo natural.

Según Fava et al, (2005), para Euler luego de haber introducido un sistema de referencias en el plano, enuncia que una función de x representará una cierta línea recta o curva, de la cual, recíprocamente, se podrán poner en relación la línea curva con la función. En consecuencia, la naturaleza de una curva será determinada por una función de x, de esta concepción de líneas desciende su división en continua, discontinua o mixta. Resalta además que las curvas continuas son aquellas que se pueden expresar como una sola función determinada de x, pero si la curva está compuesta por diferentes partes, cada parte es el resultado de una función, esta especie de curvas las conocemos como discontinuas, mixtas e irregulares, y son compuestas por partes de diferentes curvas continuas.

Esta clasificación formulada por Euler para las curvas, fue aceptada por un largo periodo y todavía se encuentra a principios del siglo XIX; Fava et al. (2005) hacen mención acerca de que en esta época se hablaba de curvas "totalmente discontinuas", "trazadas con un ligero movimiento de la mano", "que obedecen la ley de la continuidad", "mecánicas", "algebraicas", entre otras.

Representaciones semióticas del concepto función

Al hablar de comprensión y aprendizaje en matemáticas, resulta indispensable tener presente las distintas representaciones semióticas que están inmersas en ella, puesto que a pesar de que la semiótica haya empezado a hacer parte de la investigación de didáctica de la matemática apenas hacia los años 80´s, el proceso de desarrollo de las matemáticas siempre ha estado de la mano de ésta. El pionero de la teoría de las representaciones fue Raymond Duval, luego de notar la necesidad de ésta para la construcción del conocimiento de los distintos objetos matemáticos como lo indica D´Amore, Fandiño & Iori (2013, p. 19).

Duval (1996) afirma que para el aprendizaje de un concepto matemático es necesaria la transformación entre las distintas representaciones del mismo, en este caso verbal, algebraica, tabular y gráfica; por este motivo se hacen necesario el tránsito del concepto función, por estas diversas representaciones. Aquí se trabajó la transformación entre representación verbal y algebraica, de algebraica a tabular, de tabular a gráfica y de algebraica a gráfica.

Cada una de las actividades diseñadas en el marco de esta investigación, partieron de una descripción verbal de la función, contextualizada en una situación que fuera familiar para los estudiantes, tal como se puede evidenciar en el anexo 2. En el desarrollo de las actividades se tuvo que realizar la conversión de esa representación a la algebraica, luego a la tabular para llegar finalmente a la gráfica, lo que se supone ayudaría a la construcción del concepto función según lo afirma Duval (1996).

Para dar claridad en los distintos sistemas de representación del concepto función, tomamos como ejemplo una función enunciada en la etapa 1 por el estudiante E_5 en su exposición, junto con una pequeña descripción de lo que es cada uno de los sistemas de representación.

Representación verbal. Esta se trata de una descripción de la situación mediante el lenguaje natural (palabras), tal como lo podemos evidenciar en la intervención del estudiante E_5 "*la relación que hay entre el número de carros convencionales de 4 ruedas y el número de llantas que hay en un parqueadero*", (*Sic*; Diario de campo)

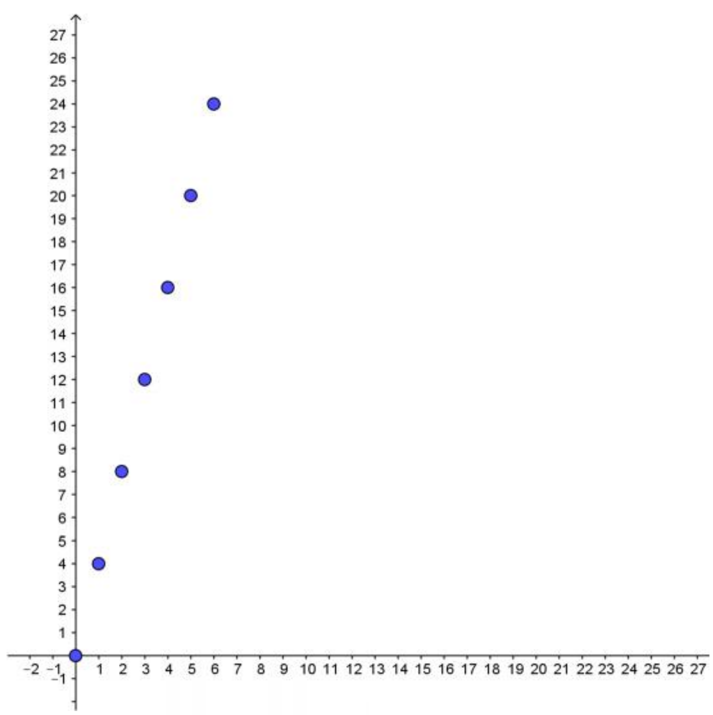
Representación algebraica. Se puede entender como una expresión algebraica que explica una situación cotidiana en forma matemática, para esta situación $f(x) = 4x$, en la cual se puede asumir que $f(x)$ es el número de llantas y este depende del número de carros x.

Representación tabular o numérica. Esta es simplemente una tabla de valores, en la cual se relacionan los puntos asociados a la función.

x	$f(x)$

0	0
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24

Representación gráfica: Se reconoce como el lugar geométrico dado por la ubicación de cada uno de los puntos, asociados a la función, en el plano de coordenadas cartesianas.



Gráfica 1. *Representación de la función* $f(x) = 4x, x \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$. *Fuente: Elaboración propia en GeoGebra.*

Si bien las anteriores representaciones semióticas dan una idea del concepto función, y ayudan a construir el conocimiento de él, no llega a ser su definición, tal como lo indican D´Amore y otros (2013), ya que corresponden al concepto función solo como “el humo para el fuego”; es decir, estas representaciones no son el objeto pero sí corresponden a él.

Capítulo 3: Metodología de la Investigación

La investigación siguió un enfoque fenomenológico, el cual es posible enmarcar dentro de un paradigma cualitativo, ya que en este enfoque se permite la interacción con los sujetos que hacen parte del estudio y el uso de variables cualitativas, las cuales son el eje de la investigación (Corbetta, 2007). Si bien la investigación es de corte fenomenológico, también al analizar los resultados, algunas respuestas se cuantifican; así el estudio adquiere un enfoque mixto (Creswell, 2013). No obstante para Rodríguez, Gil, y García (1996) la característica principal en un análisis cualitativo es mantener la naturaleza textual de los datos, aceptando la idea de una posible transformación de forma cualitativa en cuantitativa con el fin de aportar o contrarrestar las conclusiones obtenidas de manera cualitativa.

Es posible percibir la fenomenología como una metodología propia para esta clase de estudios, ya que como humanos tenemos la capacidad de extraer información de nuestra experiencia, y según Morse (2005) en la fenomenología se logra comprender un fenómeno reflexionando sobre las experiencias propias, las cuales suelen ser la primera fuente de información en un estudio de este tipo, teniendo en cuenta el espacio, el cuerpo, el tiempo y las relaciones humanas vividas.

Unidad de análisis

La investigación se realizó con los 43 estudiantes de grado noveno del colegio Técnico Empresarial Ciudad del Sol del municipio de Sogamoso, durante los meses de mayo y junio del año 2018. Cabe la pena resaltar que los estudiantes en esa época del año estaban terminando de trabajar operaciones con números reales y sus propiedades, siendo entonces su primer acercamiento al concepto función. En el momento del desarrollo de la investigación los estudiantes tenían edades entre 14 y 16 años, pertenecientes a nivel socioeconómico medio.

Etapas de la investigación

Para el desarrollo de esta investigación se plantearon tres etapas de trabajo con los estudiantes y una cuarta etapa destinada para el análisis de la información recolectada en cada una de las etapas anteriores. Es de destacar que la única persona que se encargó de la recolección de la información fue el investigador, y su forma de recopilarla está descrita en cada uno de los siguientes apartados. Se puede tener presente que previo al desarrollo de la investigación se realizó una sesión con los estudiantes que tuvo por objeto establecer la disposición que presentaban ante la estrategia a utilizar para la construcción del conocimiento del concepto función, luego fue necesaria la comunicación con los padres de los estudiantes en busca de la aceptación hacia la investigación y el proceso de aprendizaje que se iba a implementar con los estudiantes. Una vez realizadas estas reuniones, se evidencio un alto grado de aceptación y se pudo establecer además el cuidado parental y revisión durante el proceso, por cuenta de los padres hacia el desarrollo en las actividades planteadas a desarrollar en su hogar.

Etapa 1. Revisión documental y multimedia e interpretación del concepto función.

En una primera etapa se identificaron las temáticas a desarrollar mediante el aula invertida, se buscó el material a observar, en YouTube y en algunos libros de texto, teniendo presente que este fuera destinado a conseguir la construcción del conocimiento sobre el objeto bajo tratamiento, y la forma como este sería distribuido a los estudiantes, luego se organizaron grupos de trabajo entre los estudiantes para que diseñaran una exposición en la cual contaran a los compañeros lo aprendido sobre la temática que se les había asignado, durante dos sesiones de clase de algebra, las cuales fueron grabadas en video para su posterior análisis. En esta primera parte los estudiantes recibieron las indicaciones pertinentes sobre lo que debían desarrollar y cómo hacerlo, esto consistió en una charla en la cual se les pedía a los estudiantes revisar material audiovisual y material escrito entregado a ellos por cuenta del docente.

Etapa 2. Evaluación preliminar y construcción del concepto.

Para la segunda etapa se diseñó un cuestionario que tuvo como finalidad identificar la concepción del concepto función con el que quedaron los estudiantes luego de realizada la primera etapa; este cuestionario puede ser observado más adelante (Anexo 2). Posterior a la aplicación del cuestionario anterior, se realizaron actividades grupales en las que se buscaba una mayor aproximación al concepto mediante la participación de los estudiantes. Las actividades para esta etapa fueron diseñadas mediante situaciones en contexto, teniendo presente que se lograran las distintas formas de representación del concepto función, además del reconocimiento de las características de las funciones implícitas en ellas, fueron extraídas de situaciones reales y del contexto natural de los estudiantes, es decir que lograran identificar la situación sin tener la necesidad de alguna explicación de ella.

Etapa 3. Evaluación final.

En la tercera etapa se diseñó y se aplicó una segunda prueba (cuestionario – Anexo 3) en la que se trataba de identificar el nivel de apropiación del concepto por parte de los estudiantes.

Etapa 4. Discusión de resultados

Esta última etapa se trata del análisis y la discusión de los resultados obtenidos en cada una de las etapas anteriores.

Recolección de la información

Además de las grabaciones de video se tuvo en cuenta un diario de campo durante el proceso, con el fin de evidenciar las distintas reacciones que tenían los estudiantes frente a las diferentes temáticas y la forma como estaban adquiriendo o construyendo el conocimiento. Adicional a esto se recolectó el material producido por los estudiantes, como los distintos talleres desarrollados propuestos por el docente.

Aspecto ético

Para el aspecto ético y legal del desarrollo normal de las clases video grabadas se solicitó un consentimiento informado o autorización a los padres o acudientes de los estudiantes que iban a participar de las distintas actividades, esto en conformidad con el decreto 1377 de 2013 (Ver Anexo 1).

Se diseñó y aplicó prueba diagnóstica para determinar las concepciones de los estudiantes luego de la presentación de las exposiciones de los distintos grupos de estudiantes (Ver Anexo 2), posteriormente, una segunda prueba aplicada luego del trabajo grupal en el aula. (Ver Anexo 3)

Para la interpretación y análisis de los datos obtenidos en la aplicación de los cuestionarios se tomaron en cuenta cada una de las respuestas, para luego formular las categorías inductivas (Corbetta, 2007), obtenidas de los modelos de respuestas presentadas por los estudiantes. Según Agar (1980, p.9) estas categorías inductivas se construyen de la lectura y análisis de cada respuesta, una y otra vez, hasta encontrar patrones y regularidades que permitan enmarcarlas dentro de dichas categorías.

Capítulo 4: Análisis y discusión de Resultados

Análisis de exposiciones grabadas en video

En esta sección se encuentra la forma como los estudiantes trataron el concepto en sus exposiciones al volver al aula, luego de haber visto el material audiovisual en sus hogares.

La mayoría de los estudiantes en sus exposiciones mencionan que *"una función es una relación entre dos variables, en las cuales una es independiente y la otra dependiente"* (Diario de campo), esta segunda depende de la primera; además enuncian una función como una maquina en la cual se aporta un valor *"entrada"* y esta automáticamente arrojará otro valor que denominan *"salida"*. En su exposición E_5[1] manifiesta que *"Para que una relación sea función se debe tener en cuenta que una entrada no puede tener más de una salida"*.

E_9 menciona que *"si x y y pertenecen al conjunto de los números reales entonces se puede realizar una gráfica en el plano de coordenadas cartesianas"* (*Sic*); además de esto E_5 manifiesta que gráficamente también se puede determinar si el lugar geométrico corresponde a una función o a una relación, mediante lo que él llama *"la prueba de la recta vertical"*; es evidente que él se refiere a que si se traza una recta paralela al eje y en cualquier valor de x, y esta corta el lugar geométrico en más de un punto, se trata de una relación y no de una función.

E_8 reconoce otra forma de representación que él llama *"Forma de tabla"* y afirma que *"para que una relación sea función no importa si se repite un valor de las variables dependientes, lo que importa es que no ocurra en la independiente" (Sic)*, con lo cual puede dar cuenta que se refiere a

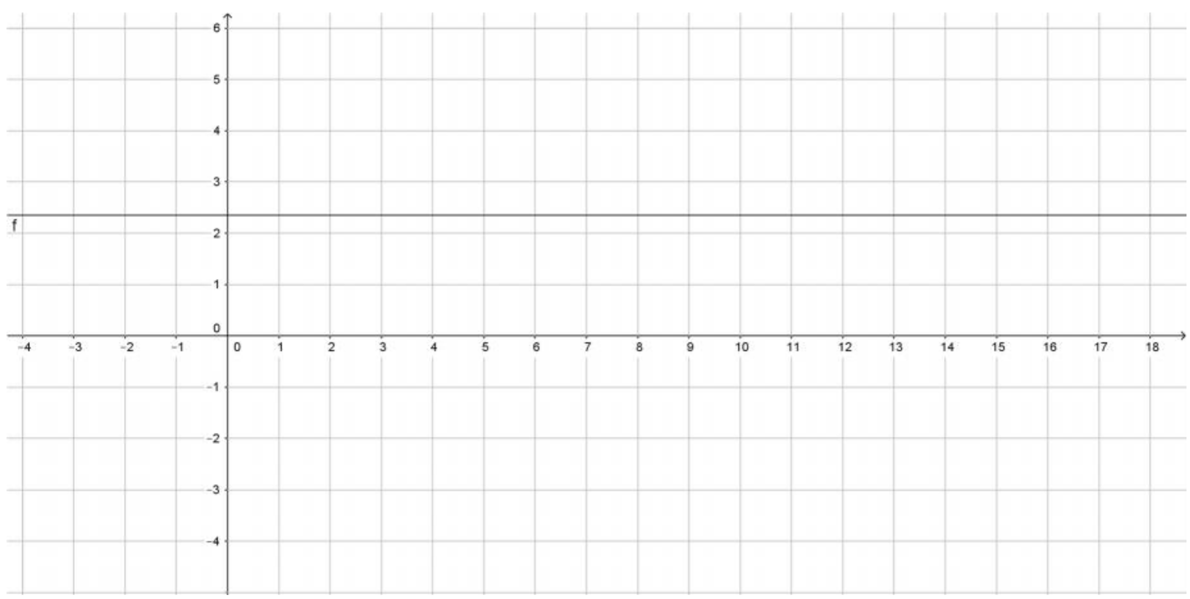
[1] E_n significa, un estudiante

que un valor de x no puede tener más de una imagen para que la relación sea función; a pesar que no lo diga tan explícitamente.

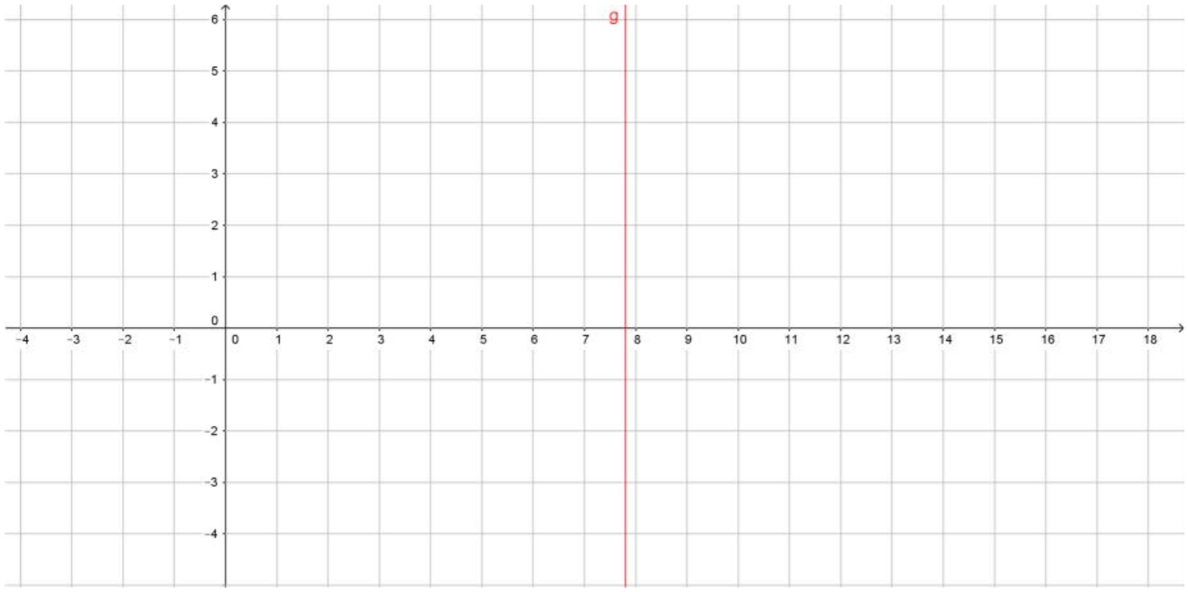
Otra forma de representación expuesta por E_5 es la que el nombra *"conjunto de pares ordenados"* y manifiesta que si cada entrada está asociada con una única salida, la relación es una función, nuevamente nos damos cuenta que el concepto en estudio tiene un cierto nivel de apropiación por cuenta de los estudiantes. Hasta este punto es fácil evidenciar el énfasis que hace el estudiante en determinar si una relación es o no una función.

Algunos otros estudiantes, que no encontraron una forma de exponer la idea de este concepto, decidieron presentar algunos ejemplos como los que veremos a continuación.

Ejemplo 1. Rectas horizontal y vertical



Gráfica 2. Representación de lo que los estudiantes mencionaron como recta horizontal. Fuente: Elaboración propia en GeoGebra.

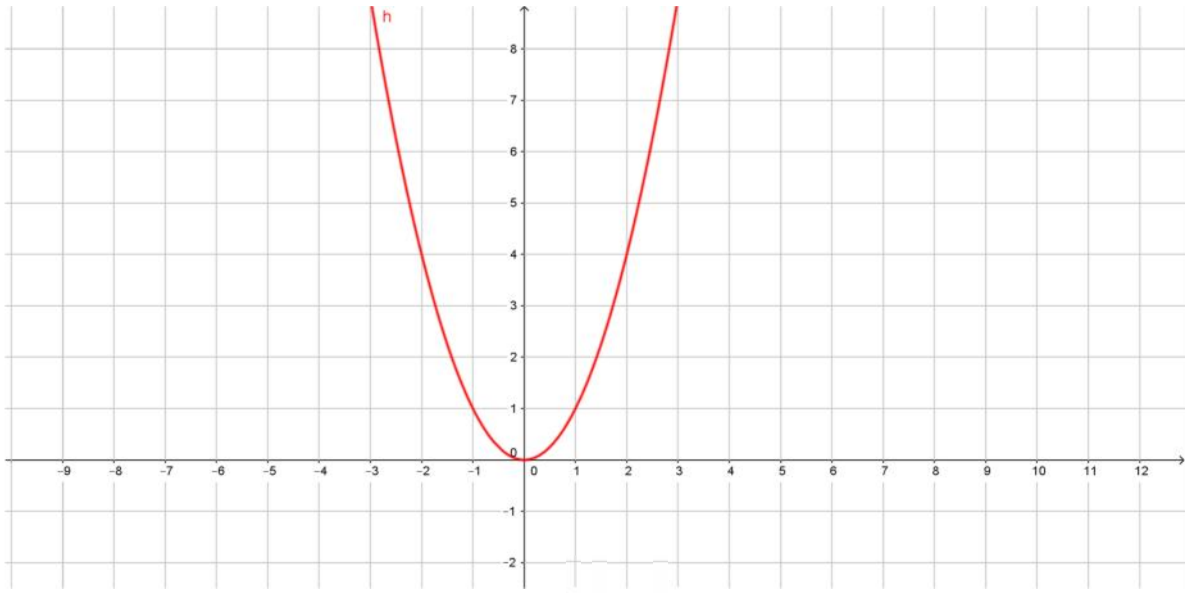


Gráfica 3. Representación de lo que los estudiantes mencionaron como recta vertical. Fuente: Elaboración propia en GeoGebra.

Para los estudiantes que tomaron estos ejemplos, la relación presentada en Grafica 2 la llamaron recta horizontal, es una función puesto que para cada x existe una única imagen, mientras que la presentada como recta vertical en Grafica 3, no corresponde a una función ya que para un valor particular de x existen infinitas imágenes, lo cual no corresponde con la definición.

Es de aclarar que no se admite como correcto el uso de “horizontal y vertical” para realizar una distinción entre ellas, ya que como lo afirman D´Amore, Fandiño, & Iori (2013, p. 108) estas palabras “… son muy útiles en la realidad concreta, para describir la disposición de las cosas y de los objetos, pero no para hablar de los entes ideales y abstractos de la matemática en el plano…” por lo cual deben o pueden ser nombradas como paralela al eje x y paralela al eje y.

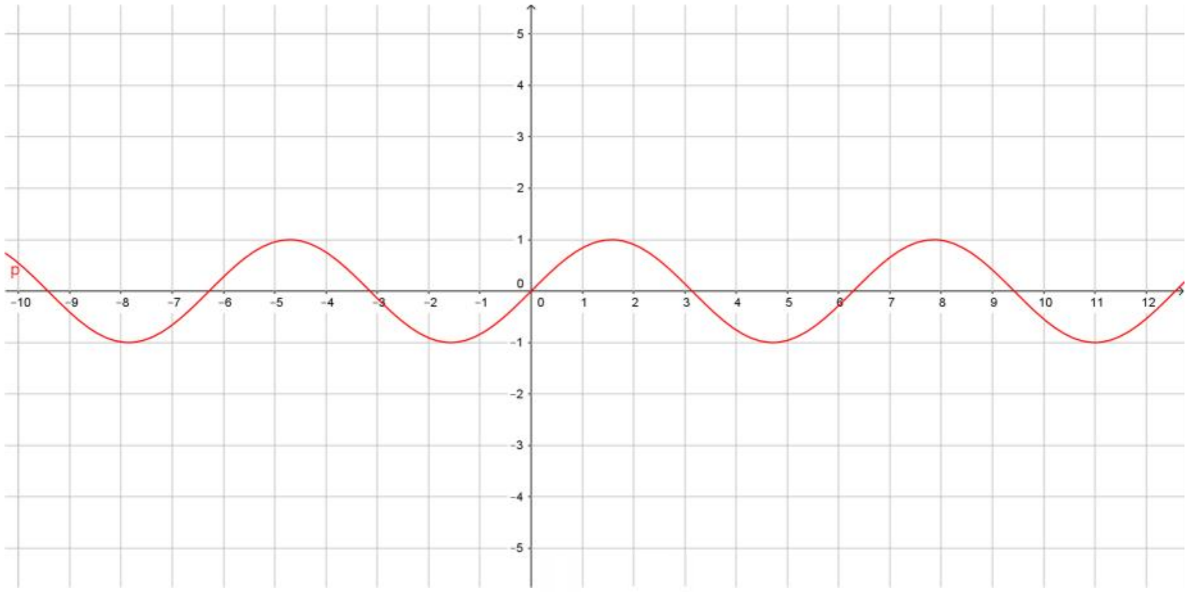
Ejemplo 2. $f(x) = x^2$



Gráfica 4. Representación gráfica de la función $f(x) = x^2$. Fuente: Elaboración propia en GeoGebra.

Los estudiantes que utilizaron este ejemplo en su exposición, pese a no nombrar el lugar geométrico, que representaron, de la forma correcta, lograron identificar el dominio como el conjunto de los números reales y el rango todos los números reales no negativos. En el rango los estudiantes incluyen en los números no negativos al cero, puesto que para ellos dicho número no posee signo positivo ni negativo.

Ejemplo 3. Funciones periódicas



Gráfica 5. Representación gráfica de la función $f(x) = sen(x)$. Fuente: Elaboración propia en GeoGebra.

Los estudiantes que tomaron este ejemplo particular identificaron algunas características como la que ellos llaman *"comportamiento cíclico"* en el que una sección del lugar geométrico se repite en intervalos específicos. La grafica completa está formada por copias de una porción en intervalos regulares.

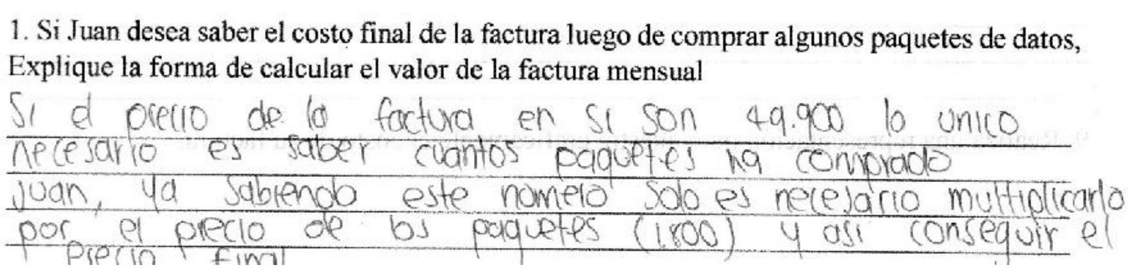
En las exposiciones de los estudiantes es posible identificar la representación gráfica o cartesiana, representación tabular, representación algebraica. En particular en la exposición del estudiante E_5 se identifica la representación en lenguaje común, quien presenta algunas situaciones cotidianas como, entre otras la siguiente: "*la relación que hay entre el número de carros convencionales de cuatro ruedas y el número de llantas que hay en un parqueadero*" (*Sic*). Como lo afirma Duval (1993), para la construcción de un conocimiento es necesario que se haga mediante sus representaciones semióticas, y en este caso se evidencia que solamente uno de los estudiantes trabajó esta primera etapa haciendo uso de las mencionadas formas de representación, mientras que los demás se detuvieron a trabajar solamente una o máximo dos de las formas de representación semiótica mencionadas.

Análisis prueba 1 (Anexo 2)

A continuación se presentan los principales hallazgos en la primera prueba, la cual se entregó para su solución por parte de los estudiantes, luego de finalizar las exposiciones realizadas como tarea por ellos. Cada ítem de los resueltos en esta prueba se presentan a continuación, mediante algunos ejemplos de respuestas dadas por los estudiantes.

En el primer ítem podemos evidenciar que el 81% de los estudiantes lograron en sus palabras explicar la forma de resolver la situación problema planteada, tal vez por estar basada en un contexto en el cual se desenvuelven muy bien, ya que casi el 100% de ellos poseen dispositivos móviles y son consumidores de los paquetes de datos, hecho que podemos evidenciar fácilmente en la respuesta del estudiante E_{41} quien en charla posterior con el docente manifestó comprar un paquete diario, luego de agotarse los datos incluidos en su plan.

Respuesta del estudiante E_4:


1. Si Juan desea saber el costo final de la factura luego de comprar algunos paquetes de datos, Explique la forma de calcular el valor de la factura mensual

Si el precio de la factura en si son 49.900 lo unico necesario es saber cuantos paquetes ha comprado juan, ya sabiendo este nomero solo es necesario multiplicarlo por el precio de los paquetes (1.800) y asi conseguir el precio final

Respuesta del estudiante E_{19}:

TIENE QUE CONTAR CUANTOS PAQUETES ADICIONALES COMPRO Y
MULTIPLICAR LA CANTIDAD EXACTA DE LOS PAQUETES POR 1800. Y EL
RESULTADO QUE DE SE SUMA A $49.900 QUE ES LO QUE VALE
EL PLAN QUE TIENE JUAN.

Respuesta del estudiante E_{41}.

LOS 49.900 QUE VALEN EN SI LA FACTURA
MAS LOS DIAS QUE COMPRE DATOS POR EL COSTO DE
1.800 CADA DIA DURANTE UN MES

Respuesta del estudiante E_{43}.

Al plan final sumarle el valor del paquete por las
veces que lo adquirio

En el segundo ítem se deseaba observar la capacidad adquirida para pasar la representación verbal de una función a la algebraica, en esta se pudo observar que el 27% de los estudiantes resolvieron mediante la expresión algebraica, tal como lo realizó el estudiante E_{36}.

Respuesta del estudiante E_{36}.

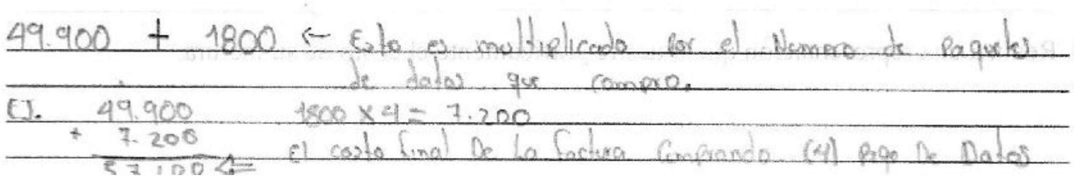
2. Escriba mediante una expresión algebraica la situación anterior

$F(x) = 49900 + 1800 \cdot x$

$x = N^{\circ}$ paquete de datos

Adicional a la respuesta anterior, se pudo evidenciar las siguientes respuestas en el restante 73% con algunas variaciones. Llama la atención la respuesta del estudiante E_{13}, el cual no pudo escribir de forma general la variable, número de paquetes, mediante algún símbolo y tuvo que escribirlo en su lenguaje natural.

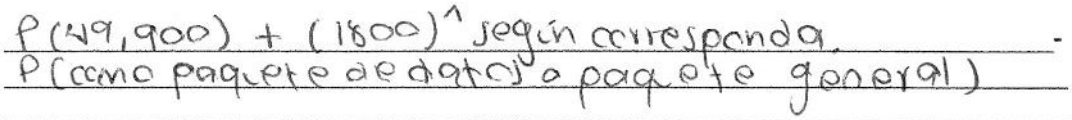
Respuesta del estudiante E_{13}.



La respuesta de E_{13}, es un hecho que expresa Duval (1993) al afirmar de la necesidad de tener en cuenta en la clase los diferentes tipos de representación semiótica, incluso la del lenguaje natural, la cual resulta aquí muy importante.

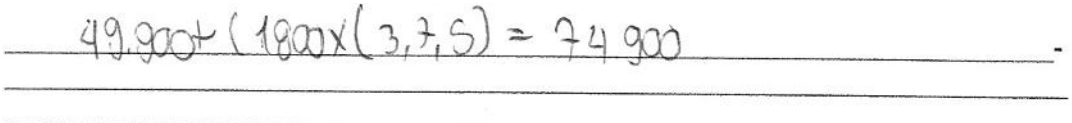
El estudiante E_{11} por su parte reconoce la variable, número de paquetes de datos, como la variable de la cual depende el valor total de la factura, pero no encuentra una forma correcta de escribirlo.

Respuesta del estudiante E_{11}.



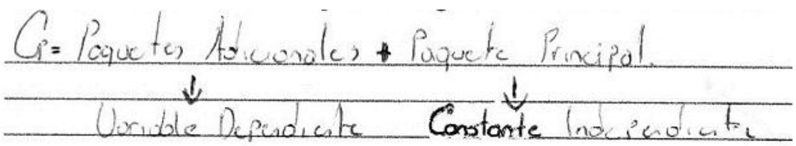
Al igual que E_{13}, el estudiante E_{39} no puede representar la variable en forma general y para hacerlo utiliza los números 3, 7 y 5, los cuales se pide tomar como valores para reemplazar dicha variable en el numeral 6.

Respuesta del estudiante E_{39}.



Se encontraron además estudiantes que como E5 intentaron dar solución correctamente, pero ante la falta de seguridad en su respuesta, decidieron expresarla en los términos del lenguaje utilizado por el profesor en las sesiones anteriores. Aquí se evidencia la influencia del contrato didáctico, cuando el estudiante expresa su respuesta en las palabras que ha oído del profesor, que como lo expone D´Amore (2006, p. 116) el estudiante busca dar la que para él es la respuesta “correcta” y para ello toma cada herramienta vista o ejemplificada por el docente, incluyendo su lenguaje.

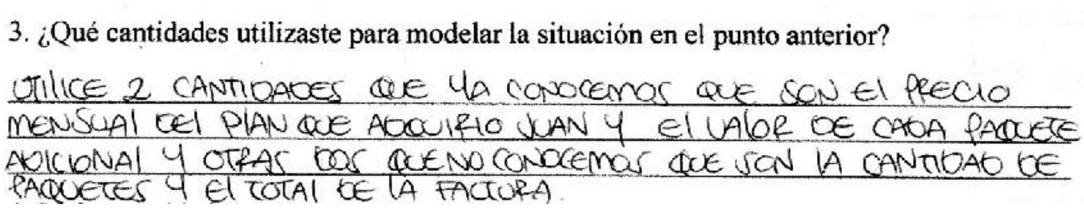
Respuesta del estudiante E_5.


Ct= Paquetes Adicionales + Paquete Principal.
Variable Dependiente Constante Independiente

La respuesta de E_5 ratifica esa cláusula del contrato didáctico, al usar los términos oídos del profesor, así no tenga mucho sentido.

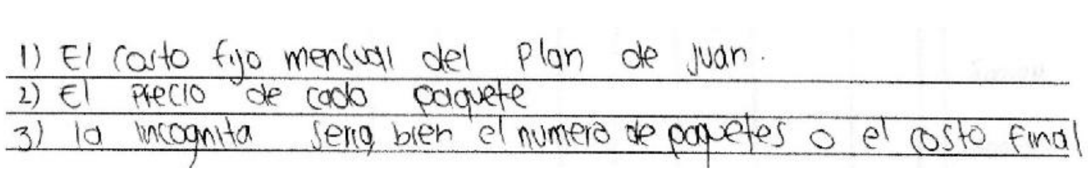
Para el tercer ítem de esta prueba, el 24% reconoce las variables “número de paquetes y costo final de la factura mensual” como cantidades, refiriéndose a ellas como cantidades desconocidas; evidencia de ello es la respuesta del estudiante E_{41} y como incógnitas lo observamos en la respuesta del estudiante E_{43}.

Respuesta del estudiante E_{41}.


3. ¿Qué cantidades utilizaste para modelar la situación en el punto anterior?

UTILICE 2 CANTIDADES QUE YA CONOCEMOS QUE SON EL PRECIO MENSUAL DEL PLAN QUE ADQUIRIO JUAN Y EL VALOR DE CADA PAQUETE ADICIONAL Y OTRAS DOS QUE NO CONOCEMOS QUE SON LA CANTIDAD DE PAQUETES Y EL TOTAL DE LA FACTURA.

Respuesta del estudiante E_{43}.


1) El costo fijo mensual del plan de juan.
2) El precio de cada paquete
3) la incognita seria bien el numero de paquetes o el costo final.

El restante 76% reconocen como cantidades únicamente los valores numéricos constantes en la situación, el costo básico de la factura y el costo de cada paquete de datos, como se puede evidenciar en la respuesta del estudiante E_{26}

Respuesta del estudiante E_{26}.

$49.900 pago de factura mensual
$1.800 paquete de datos

En el cuarto ítem es fácil identificar la dificultad que representó a los estudiantes reconocer una variable y diferenciarla de una constante, ya que únicamente el 11% de los estudiantes establecieron de manera correcta cuáles eran las cantidades variables en la situación, como se evidencia en las respuestas de los estudiantes E_{41}, E_{32} y E_{21}.

Respuesta del estudiante E_{41}

4. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta anterior, ¿Existe alguna que sea variable?

No ___ **Si** _X_ **Cuál(es)?**

LA CANTIDAD DE PAQUETES ADICIONALES Y EL VALOR TOTAL DE LA FACTURA.

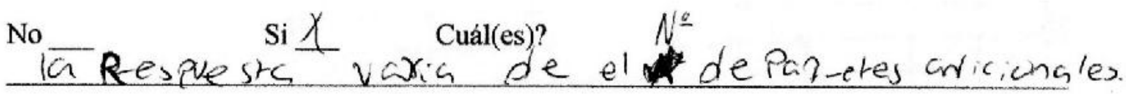
Respuesta del estudiante E_{32}

No ___ **Si** _X_ **Cuál(es)?**

El paquete adicional ya q no siempre lo necesita generalmente lo usa y eso cambia el costo final

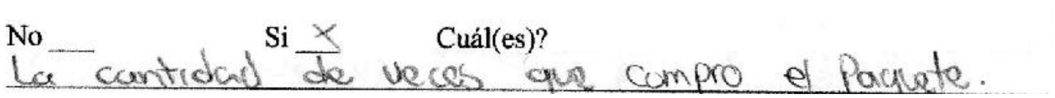
El estudiante E_{21} denominó al costo final de la factura como el resultado, ya que para él lo importante era poder establecer la cantidad de dinero a pagar.

Respuesta del estudiante E_{21}


No ___ Si X Cuál(es)? Nº
la Respuesta varia de el Nº de Paquetes adicionales.

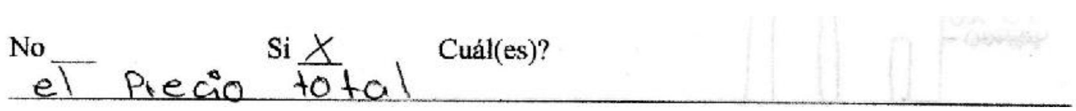
Se pudo establecer además que para el 27% de los estudiantes solamente existía una cantidad variable que era el número de paquetes adicionales, como se pudo observar en la respuesta del estudiante E_4.

Respuesta del estudiante E_4


No ___ Si X Cuál(es)?
La cantidad de veces que compro el Paquete.

Al igual que para el estudiante E_{21}, para E_2 es muy importante la cantidad de dinero a cancelar, dicho estudiante fue el único en identificar esa cantidad como única variable.

Respuesta del estudiante E_2


No ___ Si X Cuál(es)?
el Precio total

El resto de los estudiantes respondieron que sí existían variables, justificándolo con respuestas como "*si, porque su valor es diferente o puede cambiar cada mes*" o mencionaban el valor 1800, el cual correspondía al costo de cada paquete de datos.

En el quinto ítem, al igual que en el cuarto, fue complicado para los estudiantes la identificación de las cantidades constantes, siendo el mismo porcentaje de estudiantes quienes acertaron en su respuesta; veamos como ejemplos las respuestas dadas por los estudiantes E_{43}, E_{18} y E_{31}, las cuales enmarcan las principales categorías de respuestas, siendo E_{43} el modelo de la respuesta correcta, mientras que E_{18} y E_{31} son respuestas en las cuales únicamente se menciona una de las dos cantidades constantes en la situación.

Respuesta del estudiante E_{43}

5. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta 2, ¿Existe alguna que sea constante?

No ___ Si X Cual(es)? El precio de el plan y el precio de los paquetes

Respuesta del estudiante E_{18}

No ___ Si X Cual(es)?

49.900 ya que esto es lo que paga [illegible] a no datos adicionales

Respuesta del estudiante E_{31}

No ___ Si ___ Cual(es)?

la cosntante es $1,800 ya que puede segar comprando

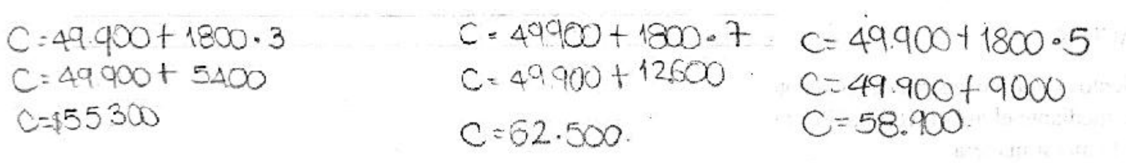
Todas las respuestas del 92% de los estudiantes que lo resolvieron, se enmarcan en las respuestas de los estudiantes E_{41}, E_{22} y E_{35}, que aquí se tomaron como las categorías inductivas de este análisis (Corbetta, 2007). En estas categorías de respuesta se identifican resultados correctos, con algunos ligeros cambios de procedimiento.

Respuesta del estudiante E_{41} (Categoría de respuesta 1)

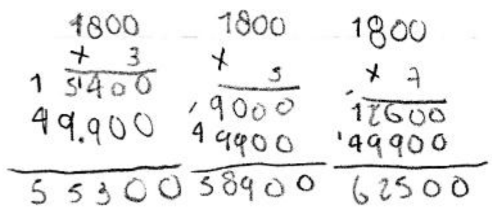
6. Usando la expresión algebraica que planteaste en la pregunta N°2, determina el valor final de la factura de los últimos tres meses, sabiendo que consumió, 3, 7 y 5 paquetes de datos adicionales.

- $f(x) = 1800 \times 3 + 49.900$
  $= 5.400 + 49.900$
  $= 55.300$
- $f(x) = 1800 \times 5 + 49.900$
  $= 9.000 + 49.900$
  $= 58.900$
- $f(x) = 1800 \times 7 + 49.900$
  $= 12.600 + 49.900$
  $= 62.500$

Respuesta del estudiante E_{22}



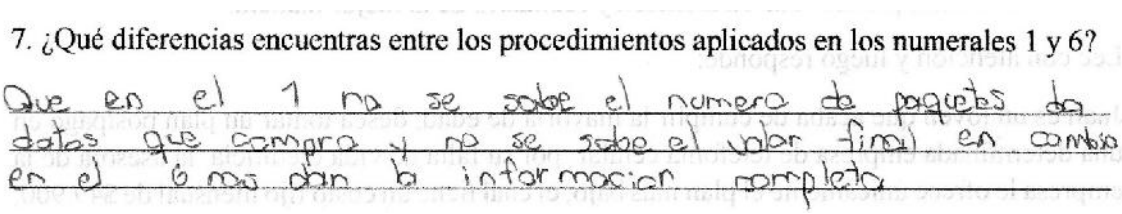
Respuesta del estudiante E_{35}



En las respuestas de los estudiantes E_{41}, E_{22} y E_{35} se observa cómo los cálculo son correctos para casos particulares; es decir, si compró 3 paquetes adicionales, o siete o cinco, pero no percibieron la expresión de generalidad para la variable, y por tanto no la escribieron como $1800x$, donde 1800 es precio por paquete y x el número de paquetes.

En el séptimo ítem el 30% de los estudiantes manifestaron que en el primer punto de la prueba no tenían toda la información, mientras que en el numeral seis ya aparecía completa la información y se podían realizar los cálculos, como lo podemos evidenciar en la respuesta del estudiante E38.

Respuesta del estudiante E_{38}



El 70% restante se puede enmarcar en las siguientes respuestas:

Respuesta del estudiante E_{41}

NINGUNO, UTILICE EL MISMO PROCEDIMIENTO, SOLAMENTE QUE
EN EL PUNTO 6 YA SABIA LA CANTIDAD DE PAQUETES ADICIONALES
QUE HABIA ADQUIRIDO JUAN.

Respuesta del estudiante E_9

En el primero se explica verbalmente su procedimiento y
en el seis ya es ejecutado la expresion algebraica
para determinar los valores de lo planteado.

El 78% de los estudiantes tuvieron respuestas muy acordes a la situación del octavo ítem, obteniendo el resultado exacto, mientras que el 22% restante solamente presentan la respuesta, que aunque es la correcta no presenta ninguna justificación o procedimiento, por lo cual no fueron objeto de este análisis. Las respuestas del 78% se pueden enmarcar dentro de las siguientes categorías: *Respuesta como función, aun no en forma de ecuación algebraica (modelo la respuesta de* E_{22}*), respuesta como descripción verbal (modelo la respuesta de* E_{41}*) y explicación empírica (modelo la respuesta de* E_{32}*).*

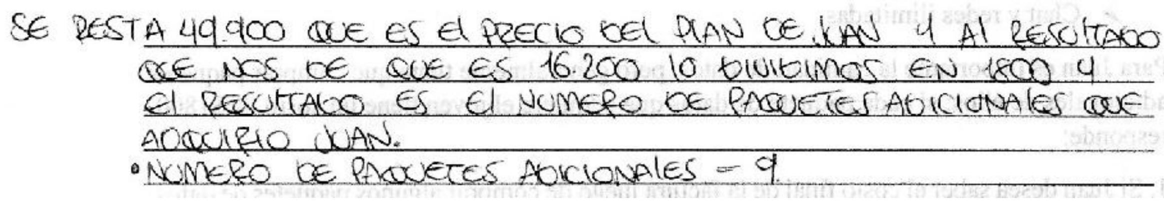
Respuesta como función, aun no en forma de ecuación algebraica (modelo la respuesta de E_{22}*)*

8. Si en un determinado mes, Juan olvidó el número de paquetes adicionales adquiridos, pero sabe que el costo final de la factura fue $66.100, ¿Qué procedimiento puede seguir para saberlo?, ¿cuantos paquetes adicionales compró Juan?.

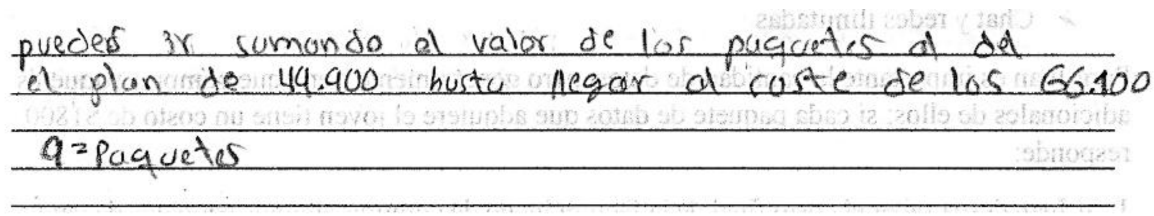
$x = (C_T - C_F) \div C_{pa}$ C_T = Costo Total
$x = (66\,100 - 49\,900) \div 1800$ C_F = Costo Fijo
$x = 16\,200 \div 1800$ C_{pa} = Costo paq adicional
$x = 9.$

Juan compró 9 paquetes adicionales.

Respuesta como descripción verbal (modelo la respuesta de E_{41}*)*

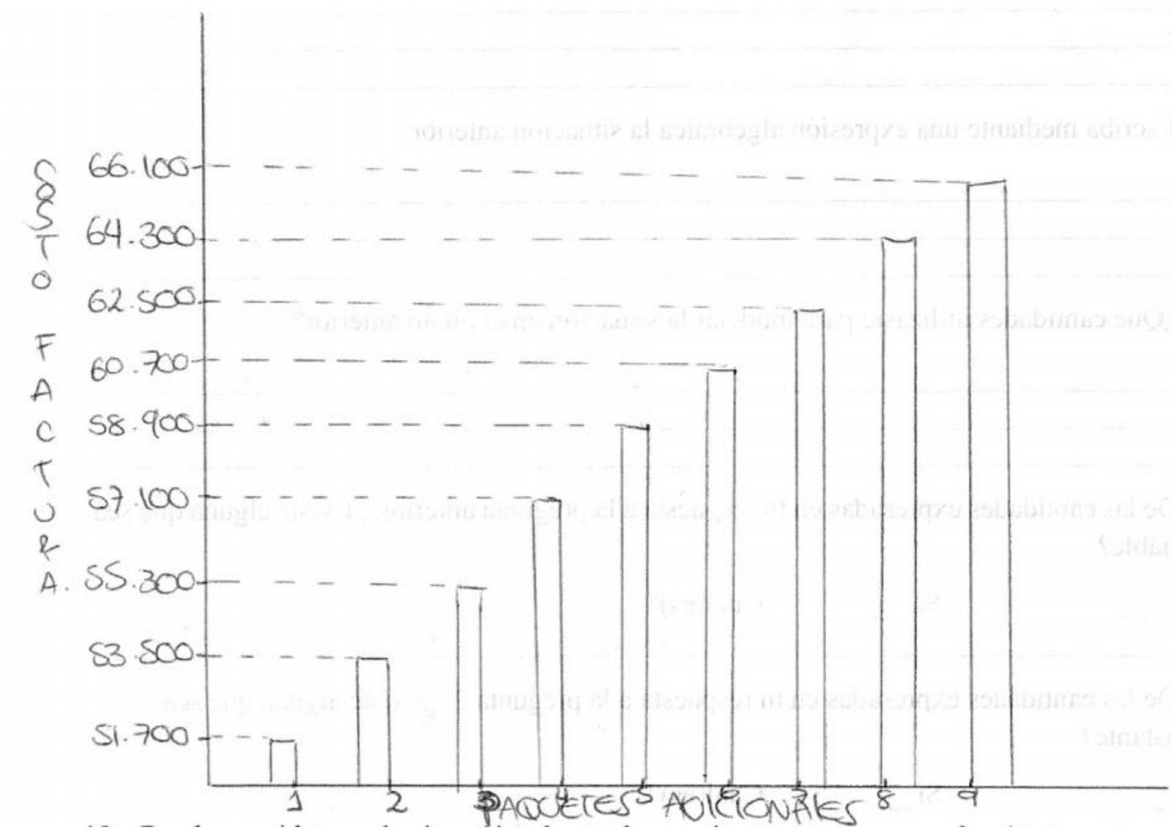

SE RESTA 49.900 QUE ES EL PRECIO DEL PLAN DE JUAN Y AL RESULTADO QUE NOS DE QUE ES 16.200 LO DIVIDIMOS EN 1800 Y EL RESULTADO ES EL NUMERO DE PAQUETES ADICIONALES QUE ADQUIRIO JUAN.
• NUMERO DE PAQUETES ADICIONALES = 9.

Explicación empírica (modelo la respuesta de E32)


puedes ir sumando al valor de los paquetes al del plan de 49.900 hasta llegar al coste de los 66.100
9 = paquetes

Siendo la respuesta más común, la ofrecida en la *respuesta como descripción verbal (modelo la respuesta de E41)*, en esta explican verbalmente el procedimiento que realizan para encontrar la respuesta de una forma más técnica que la ofrecida en la *explicación empírica (modelo la respuesta de E32)*, en la cual se evidencia un procedimiento más empírico que efectuaron mediante la adición del cargo fijo (49900), con sumas repetidas de 1800 hasta llegar al valor total de la factura. En este caso la variable aún no la percibe tan claramente ese estudiante, por eso recurre al trabajo empírico.

A la hora de graficar, se pudo notar la gran dificultad que se presentó en los estudiantes, teniendo un 36% que prefirieron dejar el espacio en blanco aduciendo inseguridad a la hora de hacerlo, además se destaca la categoría *respuesta como descripción verbal (modelo la respuesta de E41)*, ya que es la más presentada por los estudiantes con un 32%, veamos:

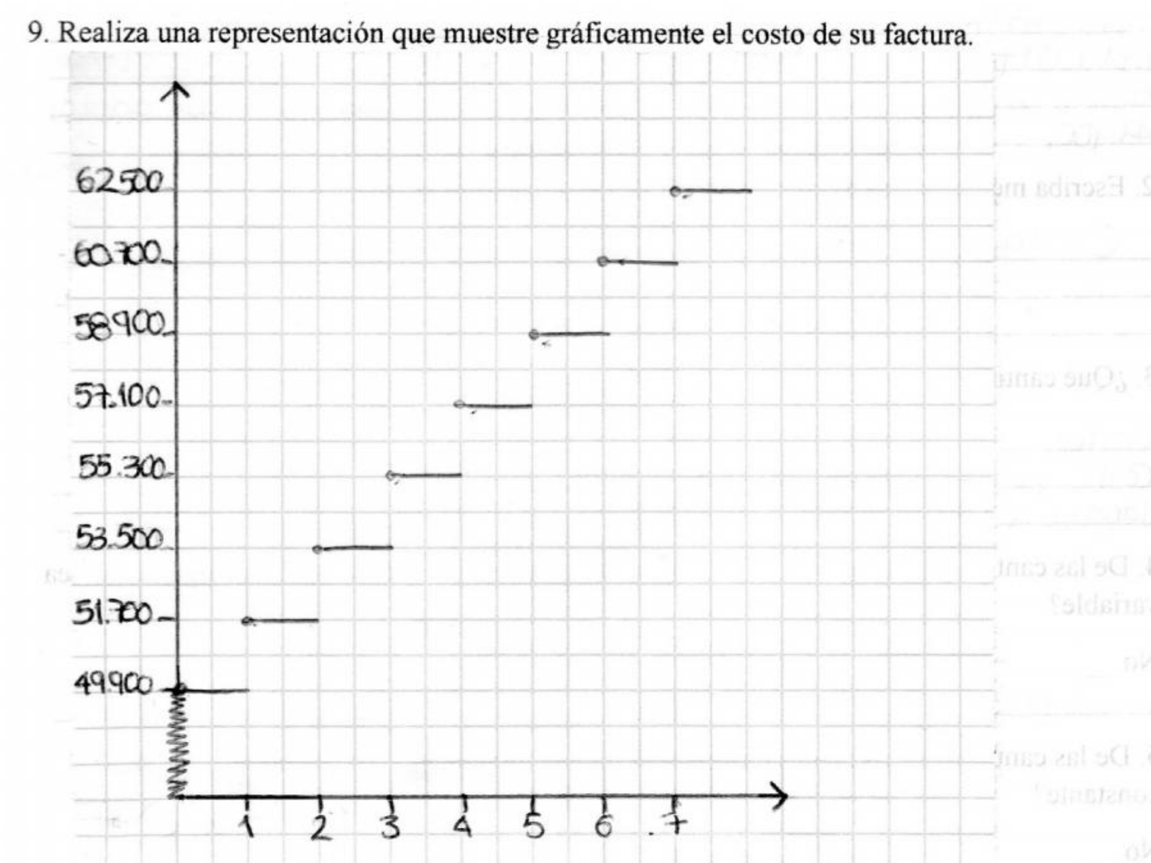


Gráfica 6. Representación gráfica de la situación problema. Fuente: Elaborada por E_{41}.

En esta grafica podemos observar la tendencia que presentan los estudiantes por realizar gráficos estadísticos, posiblemente debido a que al ser una institución técnica en administración micro-empresarial, desde los primeros grados se trabaja la estadística y muy en especial la lectura de gráficos.

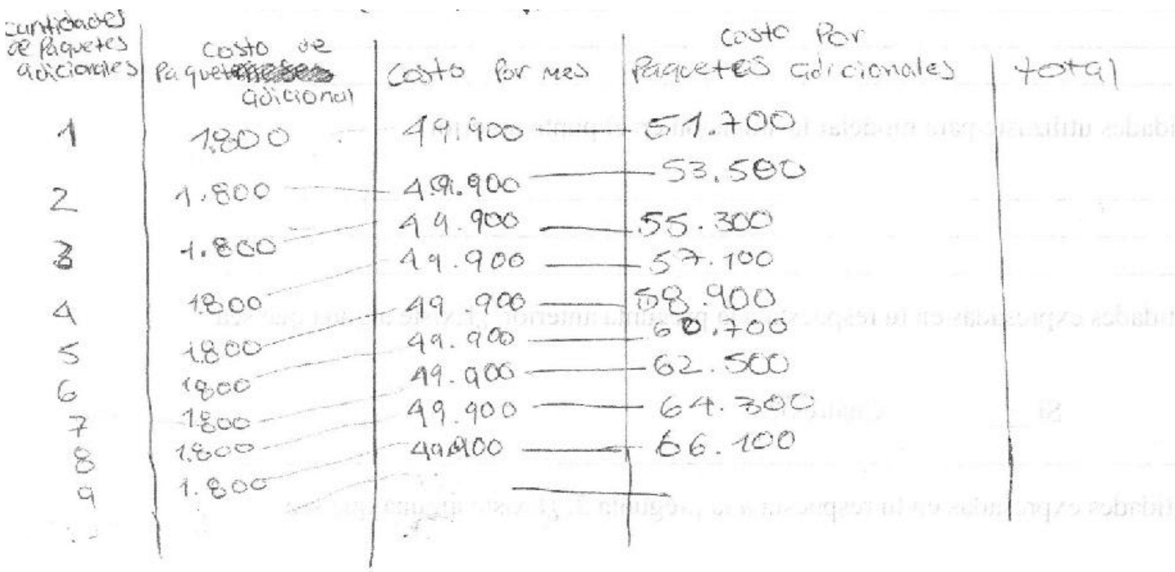
La siguiente gráfica destacada fue la del estudiante E_{22}, en la cual podemos ver un mayor acercamiento a la gráfica de una función, en esta podemos resaltar que los estudiantes reconocen la particularidad en la situación en la cual no es posible adquirir una fracción del paquete, por lo cual podemos ver esta clase de gráfica, evidenciado en la respuesta que dieron los estudiantes en el momento de presentar esta prueba.

E_{18} manifestó "*profe, a nosotros nos venden paquetes de datos completos y los cobran completos, no importa que consumamos solo una parte de ellos*" (Diario de campo), respuesta que en otras palabras manifestaron algunos de los estudiantes que realizaron esa clase de gráficas.



Gráfica 7. Representación gráfica de la situación problema, Fuente: Elaborada por E_{22}.

Es de resaltar la respuesta del estudiante E_{12}, quien fue la única persona en responder de la siguiente manera:



Cantidades de paquetes adicionales	Costo de Paquete adicional	Costo por mes	Costo por Paquetes adicionales	total
1	1800	49.900	51.700	
2	1.800	49.900	53.500	
3	1.800	49.900	55.300	
4	1800	49.900	57.100	
5	1800	49.900	58.900	
6	1800	49.900	60.700	
7	1800	49.900	62.500	
8	1.800	49.900	64.300	
9	1.800	49900	66.100	

En esta respuesta podemos observar otra forma de representación de función, diferente de la gráfica, la cual, pese a no ser la pedida, es correcta y representa claramente la situación del costo de la factura en función de la cantidad de los paquetes de datos, según lo manifestó el estudiante, quien dijo "al ver esta tabla yo sé cuánto debería pagar dependiendo de los paquetes que compre en un mes". Lo anterior muestra la importancia de tener en cuenta las diversas representaciones semióticas por las que debe pasar un objeto matemático, para ser comprendido, como lo afirma Duval (1993).

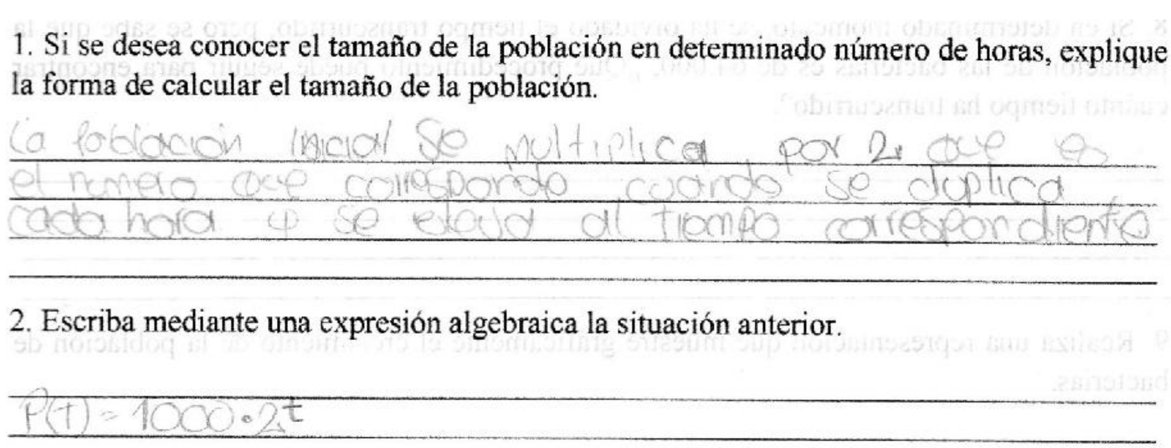
A modo de conclusión de esta primera prueba podemos ver que aunque la situación está dentro de un contexto que es familiar para los estudiantes, ellos tienen dificultad para expresarla de forma algebraica, aunque verbalmente hayan podido explicar un procedimiento de cálculo; adicional a esto, se puede evidenciar dificultad al identificar las cantidades que intervienen y una mayor dificultad al momento de definir cuáles de estas son variables y cuales constantes.

Los estudiantes lograron realizar con éxito cálculos particulares en la situación, ya fuera de forma técnica o de forma empírica. Para la representación gráfica es notable la dificultad que presentó para ellos, con lo cual podemos afirmar que a pesar de haber visto previamente el concepto en forma de videos y en las exposiciones de sus compañeros, aun no se ha realizado el acercamiento esperado a la definición del concepto en estudio, esto basándonos en las palabras de Duval (1993), quien afirma que para alcanzar la formalización de un concepto, este debe pasar por sus distintas formas de representación.

Análisis prueba 2 (Anexo 3)

A diferencia de la primer prueba, en la segunda se logró encontrar que solo el 54% de los estudiantes lograron expresar con sus palabras el método que utilizaron más adelante para solucionar la situación problema planteada, como lo podemos evidenciar en el protocolo de los estudiantes E_5 y E_{40}.

Evidencia del estudiante E_{40}



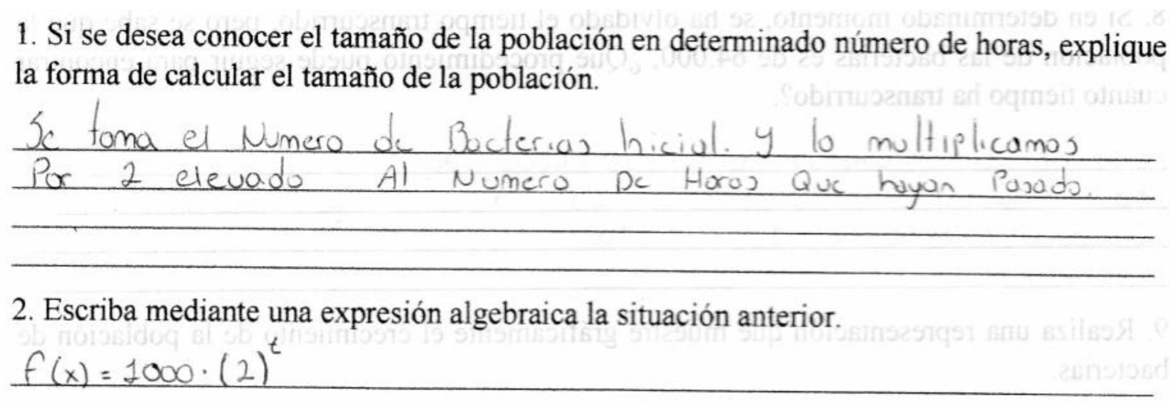
1. Si se desea conocer el tamaño de la población en determinado número de horas, explique la forma de calcular el tamaño de la población.

La población inicial se multiplica por 2 que es el número que corresponde cuando se duplica cada hora y se eleva al tiempo correspondiente

2. Escriba mediante una expresión algebraica la situación anterior.

$P(t) = 1000 \cdot 2^t$

Evidencia del estudiante E_5


1. Si se desea conocer el tamaño de la población en determinado número de horas, explique la forma de calcular el tamaño de la población.

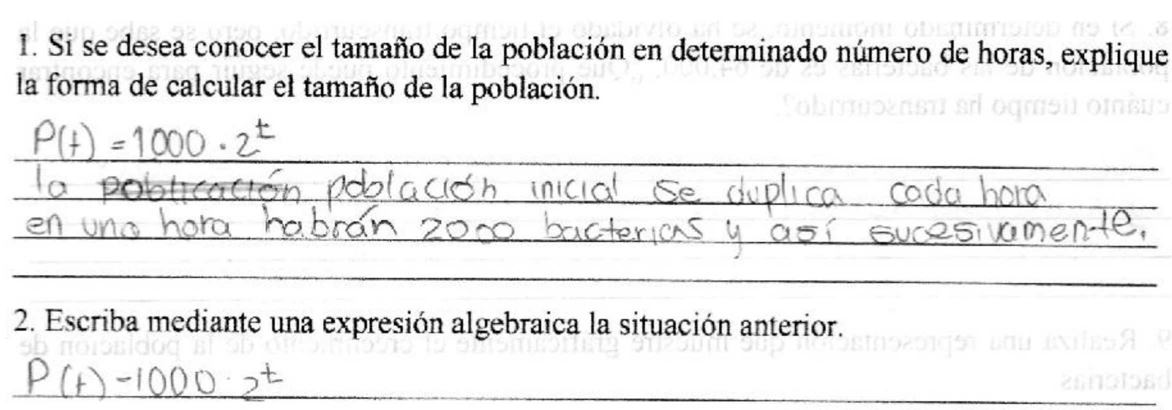
Se toma el Numero de Bacterias inicial. y lo multiplicamos Por 2 elevado Al Numero De Horas Que hayan Pasado.

2. Escriba mediante una expresión algebraica la situación anterior.

$f(x) = 1000 \cdot (2)^t$

En la evidencia del estudiante E_{24} podemos reconocer uno de los modelos de respuestas más utilizadas, en las cuales se manifestaba mediante un ejemplo la situación, pero sin lograr generalizarla, pero al momento de representar algebraicamente la situación lo realizó de forma correcta (Duval, 1993).

Evidencia del estudiante E_4


1. Si se desea conocer el tamaño de la población en determinado número de horas, explique la forma de calcular el tamaño de la población.

$P(t) = 1000 \cdot 2^t$

la ~~poblacación~~ población inicial se duplica cada hora en una hora habrán 2000 bacterias y así sucesivamente.

2. Escriba mediante una expresión algebraica la situación anterior.

$P(t)-1000 \cdot 2^t$

Así mismo fue posible observar que, aunque el porcentaje de estudiantes que alcanzaron el objetivo en la primera pregunta fue bajo, al momento de modelar algebraicamente la situación mediante una expresión, en el segundo ítem, el 98% de los estudiantes lograron expresar algebraicamente la situación que se les pidió, esto es observable en las evidencias de los estudiantes E_{22} y E_{37}.

Evidencia del estudiante E_{22}

Se coge la población inicial y se multiplica por dos y el resultado se eleva al tiempo.

2. Escriba mediante una expresión algebraica la situación anterior.

$P(t) = 1000 \cdot 2^t$

Evidencia del estudiante E_{37}

1. Si se desea conocer el tamaño de la población en determinado número de horas, explique la forma de calcular el tamaño de la población.

R/: Pues ha medida que van pasando las horas las bacterias se van multiplicando.

2. Escriba mediante una expresión algebraica la situación anterior.

$P(t) = 4000 \cdot 2^t$

Como podemos observar en la evidencia del estudiante E_{24}, él expresa verbalmente de la forma correcta, pero al pasar al lenguaje algebraico se le presentó alguna dificultad, planteándola expresión de forma incorrecta, correspondiendo al 2% de los estudiantes que no logró escribir la expresión como se esperaba.

Evidencia del estudiante E_{24}

1. Si se desea conocer el tamaño de la población en determinado número de horas, explique la forma de calcular el tamaño de la población.

Se toma la población y tiempo que es igual al número de la población inicial de bacterias por el tiempo elevado a la 2 ya que se duplica.

2. Escriba mediante una expresión algebraica la situación anterior.

$P(t) = 1000 \cdot 2t$

Con relación al reconocimiento de las cantidades utilizadas para modelar la situación, el 98% de los estudiantes lograron reconocer por lo menos 3 de las cantidades utilizadas, como lo podemos evidenciar en el protocolo del estudiante E_{14} quien nombró 3 de las cantidades utilizadas; por otro lado los estudiantes que respondieron las cuatro cantidades presentaron respuestas similares a las que pueden observarse en las evidencias de los estudiantes E_5 y E_{22}.

Evidencia del estudiante E_{14}.

3. ¿Qué cantidades utilizaste para modelar la situación en el punto anterior?

tiempo - numero de bacterias inicial y la duplicacion que seria 2

Evidencia del estudiante E_5

3. ¿Qué cantidades utilizaste para modelar la situación en el punto anterior?

Numero De Bacterias Inicial, Cuando Se Duplica, el Numero De Horas, y el Numero total De Bacterias.

Evidencia del estudiante E_{22}

3. ¿Qué cantidades utilizaste para modelar la situación en el punto anterior?

Población inicial (1000)
Duplicación (2)
Tiempo (t)
Total de las bacterias (Pt)

Por su parte el estudiante E_{16}, quien no contestó la pregunta que se le pidió, presentó los resultados de las operaciones para las primeras horas del cultivo de bacterias, lo cual podemos observar a continuación.

Evidencia del estudiante E_{16}

3. ¿Qué cantidades utilizaste para modelar la situación en el punto anterior?

$P(1) = 1000 \times 2^1 = 2000$
$P(2) = 1000 \times 2^2 = 4000$
$P(3) = 1000 \times 2^3 = 8000$
$P(4) = 1000 \times 2^4 = 16000$

Una vez más la respuesta de este estudiante evidencia una forma empírica e intuitiva de representar la variación, sin aún percibirla matemáticamente y no poder expresarla algebraicamente, pero lo hace usando otra representación semiótica (Duval, 1993).

Para el cuarto y quinto ítem, en los cuales se debía determinar cuáles de las cantidades eran variables y cuáles constantes, el 25% de los estudiantes respondieron que sí habían cantidades variables y cantidades constantes; pero se abstuvieron de escribir cuales, observable en la evidencia del estudiante E_{39}, mientras que el 75% de los estudiantes lograron identificar cuáles de las cantidades eran variables y cuales constantes, como lo evidenciamos en las respuestas del estudiante E_9.

Evidencia del estudiante E_{39}

4. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta anterior, ¿Existe alguna que sea variable?

No ___ Si X Cuál(es)?

5. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta 2, ¿Existe alguna que sea constante?

No ___ Si X Cual(es)?

Evidencia del estudiante E_9

4. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta anterior, ¿Existe alguna que sea variable?

No ___ Si x Cuál(es)?

la cantidad de horas - y el total de la poblacion de los bact

5. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta 2, ¿Existe alguna que sea constante?

No ___ Si x Cual(es)?

población inicial de bacterias y (el núm) la duplicación

En el sexto ítem todos los estudiantes determinaron correctamente los tamaños de la población para los tiempos equivalentes a 3, 7, 11 y 13 horas. Como lo podemos evidenciar en el desarrollo de los estudiantes E_{12} y E_{30}, en los cuales podemos enmarcar la totalidad de las respuestas.

Evidencia del estudiante E_{12}

6. Usando la expresión algebraica que planteaste en la pregunta 2, determina el tamaño de la población luego de 3, 7, 11 y 13 horas.

$P(t) = 1000 \cdot 2^3 = 8000$

$P(t) = 1000 \cdot 2^7 = 128,000$

$P(t) = 1000 \cdot 2^{11} = 2,048,000$

$P(t) = 1000 \cdot 2^{13} = 8,192,000$

Evidencia del estudiante E_{30}

6. Usando la expresión algebraica que planteaste en la pregunta 2, determina el tamaño de la población luego de 3, 7, 11 y 13 horas.

$P(t)=7000\cdot 2^3$	$P(t)=7000\cdot 2^{11}$	$P(t)=7000\cdot 2^7$	$P(t)=7000\cdot 2^{13}$
$P(t)=7000\cdot 8$	$P(t)=7000\cdot 2048$	$P(t)=7000\cdot 128$	$P(t)=7000\cdot 8192$
$P(t)=8000$	$P(t)=2048000$	$P(t)=128\,000$	$P(t)=8192000$

En el séptimo punto se puede evidenciar que los estudiantes logran identificar una función, sin importar su representación; esto ya que ellos afirman no existir diferencia alguna, pues que el sexto punto es simplemente la aplicación del primero, en el cual describían verbalmente lo que debían hacer; lo anterior lo podemos observar en los protocolos de los estudiantes E_5 y E_9.

Evidencia del estudiante E_5

Que en la Pregunta 1 se toma una Exprecuón Verbal, y General Para Cualquier situación, En la Pregunta 6, se toma de forma Algebraica y se toman Valores Especificos

Evidencia del estudiante E_9

En el punto 1 se explico el Procedimiento verbalmente y en el punto 6 se utilizo la expresión algebraica planteada.

En el octavo ítem se puede observar cómo los estudiantes utilizan los valores obtenidos en el sexto ítem para afirmar que si desean conocer el tiempo que tarda en aumentar la población de bacterias hasta 64.000 unidades, se deben suponer valores de tiempo entre 3 y 7 horas, lo cual utilizan de herramienta y utilizan un método empírico de tanteo, hasta llegar al valor deseado, tal como lo podemos evidenciar en los protocolos de los estudiantes E_4 y E_{43}.

Evidencia del estudiante E_4

8. Si en determinado momento, se ha olvidado el tiempo transcurrido, pero se sabe que la población de las bacterias es de 64.000, ¿Qué procedimiento puede seguir para encontrar cuánto tiempo ha transcurrido?.

Busco en 3-4 que esta el valor 64.000 y corresponde a 6 horas $P(t) = 1000 \cdot 2^6$

$P(t) = 64000$

Evidencia del estudiante E_{43}

8. Si en determinado momento, se ha olvidado el tiempo transcurrido, pero se sabe que la población de las bacterias es de 64.000, ¿Qué procedimiento puede seguir para encontrar cuánto tiempo ha transcurrido?.

Vemos que la opcion mas rapida es crear una lista de resultados de todas las potencias hasta encontrar la que tenemos. Asi, siguiendo lo dicho vemos que han transcurrido 6 horas.

Por su parte el estudiante decide dividir la población de 64000 entre 2, cada vez hasta obtener como resultado 1000, posteriormente cuenta el número de veces que tuvo que dividir y este corresponderá a las horas en las que la población llegara a 64000.

Evidencia del estudiante E_5

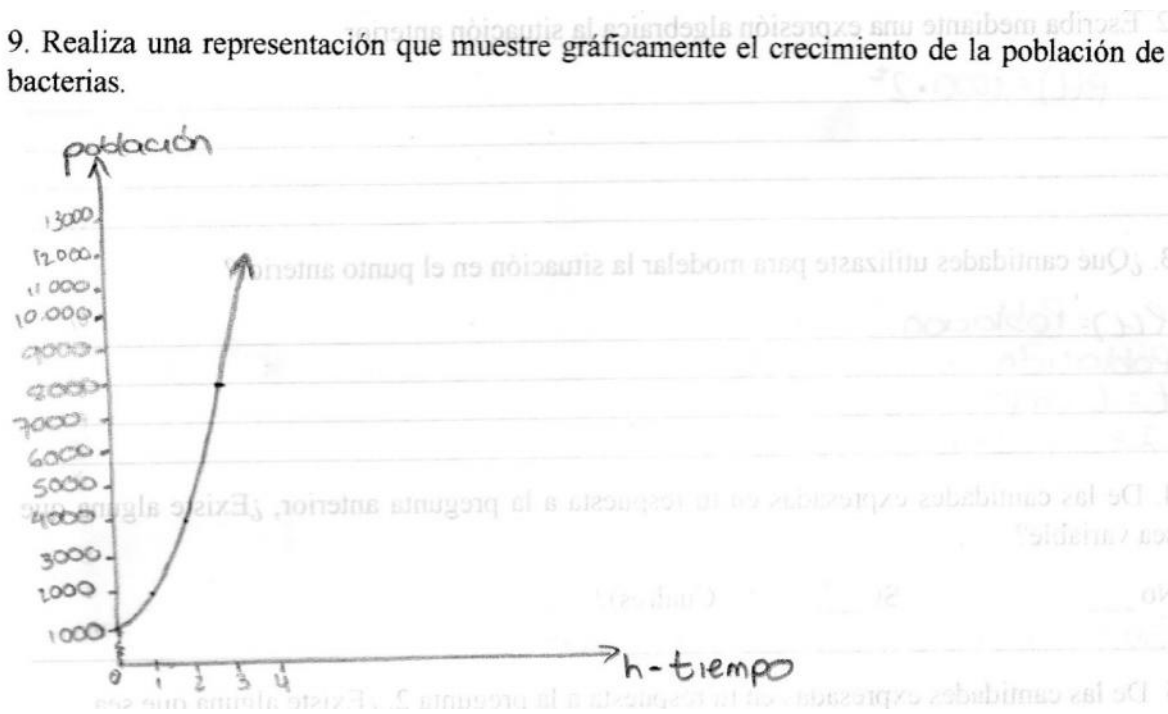
8. Si en determinado momento, se ha olvidado el tiempo transcurrido, pero se sabe que la población de las bacterias es de 64.000, ¿Qué procedimiento puede seguir para encontrar cuánto tiempo ha transcurrido?.

Dividir el Numero De Veces Que Sea Necesario Por 2 hasta llegar A 1000, Que Es la Poblacion Inicial.

$64.000 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 = 1000$

Más del 51% de los estudiantes lograron representar gráficamente la situación, como se puede evidenciar en la gráfica el estudiante E_{36} (Gráfica 7); aunque algunos de ellos no lograron conservar la escala en el eje vertical, ante la imposibilidad de ubicar números tan grandes, decidieron utilizar diferentes escalas para cada uno de los ejes, como lo podemos evidenciar en la gráfica realizada por el estudiante E_{15} (Gráfica 8).

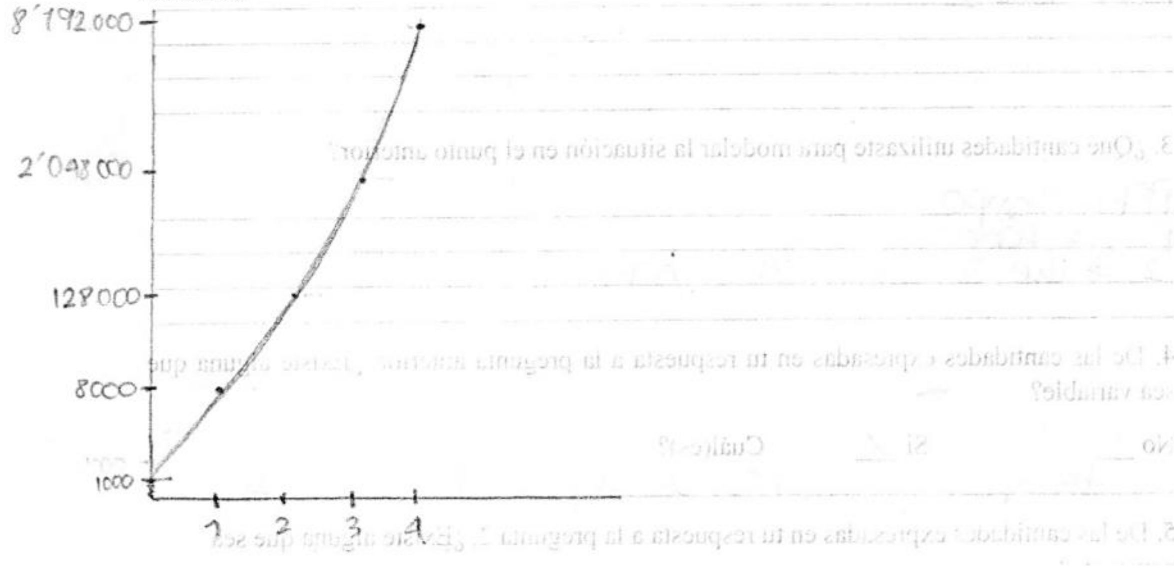
Evidencia del estudiante E_{36}



Gráfica 8. Representación gráfica de la situación problema, Fuente: Elaborada por E_{36}.

Evidencia del estudiante E_{15}

9. Realiza una representación que muestre gráficamente el crecimiento de la población de bacterias.



Gráfica 9. Representación gráfica de la situación problema, Fuente: Elaborada por E_{15}.

Además de lo descrito anteriormente, hay que destacar que el estudiante E_{15} en el eje x ubicó los números 1, 2, 3 y 4 refiriéndose a los valores 3, 7, 11 y 13 horas del ítem 6, manifestando querer aprovechar los valores ya conocidos. Los demás estudiantes, no presentaron grafica ya que les resultó imposible ubicar números tan grandes en el eje y.

En el décimo ítem, aunque cada uno de los estudiantes afirma que la situación corresponde a una función, se puede evidenciar gran dificultad al justificar por qué lo es, entre las respuestas más utilizadas por los estudiantes encontramos las siguientes:

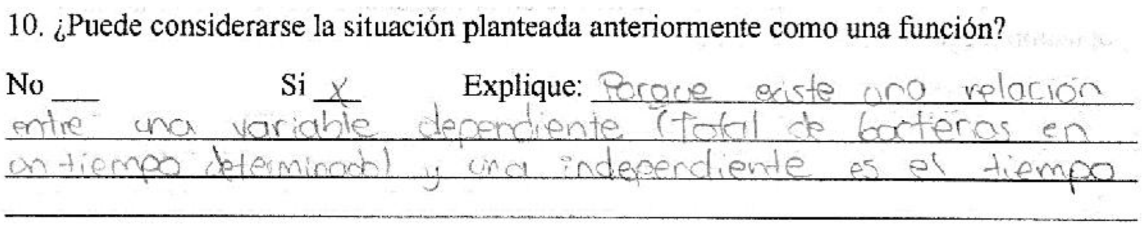
Evidencia del estudiante E_9

10. ¿Puede considerarse la situación planteada anteriormente como una función?

No ___ Si _x_ Explique: porque la cantidad total de bacterias depende de el numero de horas. Ademas cuando una linea paralela pasa una vez por el eje Y es una funcion.

En la respuesta anterior hay que destacar que el estudiante manifiesta que gráficamente es posible evidenciar si la representación corresponde a una función o no, aunque no está bien escrito, al interactuar con el estudiante, realiza la prueba gráfica de la manera correcta.

Evidencia del estudiante E_{22}


10. ¿Puede considerarse la situación planteada anteriormente como una función?

No ___ Si _X_ Explique: Porque existe una relación entre una variable dependiente (Total de bacterias en un tiempo determinado) y una independiente es el tiempo

En esta segunda prueba se puede observar que la mayoría de los participantes de la investigación lograron superar gran parte de las dificultades presentadas durante la primera prueba, ya que como se puede evidenciar, el porcentaje de individuos que erraron en cada ítem disminuyó en esta última prueba con relación a la primera.

Conclusiones

El desarrollo de esta investigación permitió conocer las características del aula invertida y los efectos que tiene su implementación para la construcción del concepto función en estudiantes de grado noveno, cuyo contexto sociocultural ya fue expuesto. De tal experiencia podemos afirmar que:

El estudio previo de la metodología aula invertida permitió el diseño de las actividades destinadas a la construcción del conocimiento del concepto función en los estudiantes, pese a no tener reglas y siendo una metodología tan flexible en su implementación, es un gran generador de oportunidades tanto para el docente como para el alumno.

La observación de los videos en casa generó gran incertidumbre en algunos estudiantes, quienes manifestaron inseguridad, ya que si les era complicado aprender con el docente en frente de ellos, asumían que les iba a ser mucho más complicado por medio de los videos, incertidumbre que fue rápidamente superada con el desarrollo de la primera sesión en que trabajaron en equipo.

Durante la implementación del aula invertida se evidenció en los estudiantes un mayor grado de motivación por la clase y de responsabilidad con sus quehaceres, además de un alto nivel de satisfacción con el desarrollo de cada actividad, lo cual manifestaron con alegría durante cada sesión del desarrollo de la investigación (Diario de campo).

La metodología de aula invertida presentó a los estudiantes una nueva manera de aprender y de resolver las dudas, lo cual fue de gran ayuda en los estudiantes que presentaban un menor desarrollo cognitivo en quienes se generó mayor autonomía, estudiantes que dejaron de ser actores secundarios en la realización de trabajos en grupo y pasaron a ser grandes protagonistas en dichas actividades, lo anterior evidenciado en los estudiantes que decidieron trabajar con gran seriedad y responsabilidad, mientras que quienes mostraron apatía y no realizaron las actividades a conciencia siguieron siendo guiados por sus compañeros.

La implementación de esta metodología mostró a los estudiantes que son ellos los responsables de su formación y no el docente, tal como lo manifiesta López (2015), ya que en ellos se delega la responsabilidad de sus conocimientos. Como se podía esperar el profesor fue quedando en un segundo plano en el que actuaba de tutor en caso que fuera necesario, ya que luego de las primeras actividades fueron muy pocas las preguntas en las que tuvo que participar, debido a que los estudiantes empezaron a creer que eran capaces de resolver las distintas situaciones apoyándose entre ellos.

El modelo de aula invertida resultó ser eficiente en la construcción del concepto función en la población que se realizó la investigación, esto basado en el análisis realizado durante las tres actividades de evaluación propuestas.

En cuanto al tratamiento específico del concepto de función es importante destacar la profunda importancia de explorar las diferentes formas de representación semiótica, y por qué no, permitir, e incluso estimular la exploración empírica e intuitiva, si hace falta. Esto se destaca, pues para algunos profesores, pareciera que esa aparente falta de rigidez, por no estar siempre en el manejo de las expresiones algebraicas, así sea sin un contexto de significación, es lo único importante.

Referencias Bibliográficas

Agar, M. (1980). *The professional stranger: An informal introduction to ethnography.* New York: Academic Press.

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas.* Madrid: Síntesis.

Barros, V., & Martínez, M. (2018, Febrero). Aula invertida en la enseñanza de Álgebra en la educación superior. *Espirales. Revista interdisciplinaria de investigación, 2*(13), 12-23. Retrieved from www.revistaespirales.com/index.php/es/article/download/150/100

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flipp your Classroom Reach Every Student in Every Class Every Day* (Fist Edition ed.). United States of America: Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. Retrieved from https://escolaecofeliz.files.wordpress.com/2015/12/flip-your-classroom.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* (D. Fregona, Trans.) Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cano, G., & Gonzalez, J. (2016). *CONTIC APRENDÍ: AULA INVERTIDA COMO MODELO PARA PROMOVER EL PENSAMIENTO CRITICO EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO DEL COLEGIO ANTONIO GARCIA. I.E.D.* Universidad de la Sabana. Bogota: Intellectum. Retrieved from https://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/30017/Gina%20Marley%20Cano%20Rodr%C3%ADguez%20%28Tesis%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Cázares, J., Rodríguez, G., & Hinojosa, M. (2016). EFECTIVIDAD DE LA METODOLOGÍA DE AULA INVERTIDA EN UN CURSO DE ÁLGEBRA PARA INGENIEROS. *Revista Electrónica ANFEI Digital*(2), 1-6. Retrieved from anfei.org.mx/revista/index.php/revista/article/download/313/954

Corbetta, P. (2007). (M. Díaz, & D. Susana, Trans.) Madrid: McGraw-Hill/ Interamericana de España S.A.U.

Creswell, J. (2013). *Qualitative inquiry and research design : choosing among five approaches.* United States of America: SAGE Publications, Inc.

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Bogotá: Magisterio.

D´Amore, B., Fandiño, M., & Iori, M. (2013). *La semiótica en a didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

Davies, R., Dean, D., & Ball, N. (2013, Septiembre 6). Flipping the classroom and instructional technology integration in a college-level information systems spreadsheet course. *Educational Technology Research and Development (ETR&D)*, 563-580. Retrieved from https://ssrn.com/abstract=2321828

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de la Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65. Retrieved from https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Fava, G., Ghezzi, C., Tanzini, L., & Targi, B. (2005). *Storia del Concetto di Funzione.* Toscana: Indirizzo.

Fornons, V., & Palau, R. (2016, Marzo). FLIPPED CLASSROOM EN LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS DE 3º DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. *EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*(55), a322. Retrieved from http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/284

Jordán, C., Pérez, M., & Sanabria, E. (2014). Investigacion del impacto en un aula de matemáticas al utilizar flip eduaction. *Pensamiento matemático, 4*(2), 9-22. Retrieved from https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5995030

Lage, M., Platt, G., & Treglia, M. (2000). Inverting the Classroom: A Gateway to Creating an Inclusive Learning Environment. *The Journal of Economic Education*, 30-43.

Lopéz, J., & Sosa, L. (2008). DIFICULTADES CONCEPTUALES Y PROCEDIMENTALES EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. In P. Leston, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 308-318). México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lopéz, M. (2015, 1 17). *Nubemia- Tu academia en la nube*. Retrieved from http://www.nubemia.com/aula-invertida-otra-forma-de-aprender/

Martínez, W., Esquivel, I., & Martínez, J. (2014). Aula Invertida o Modelo Invertido de Aprendizaje: Origen, Sustento e Implicaciones. In I. Esquivel, *Los Modelos Tecno-Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI* (pp. 143-160). Veracruz: DSAE-Universidad Veracruzana.

Molina, P., & Chatzi, P. (2012). ACTIVIDADES EN GRUPO Y ACTIVIDADES COLABORATIVAS. TRABAJAMOS CON LAS TICS. In P. Molina, *Actas de las IV Jornadas de Formación para Profesores de Español en Chipre* (pp. 152-156). Nicosia-

Chipre: Colección ELEChipre. Retrieved from https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5152280

Morse, J. (2005). *Asuntos críticos en los métodos de investigación cualitativa.* Alicante, España: Publicaciones de la Universidad de Alicante. Retrieved from http://biblio.uptc.edu.co:2097/a/565/asuntos-criticos-en-los-metodos-de-investigacion-cualitativa

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa* (2 ed.). Granada, España: Aljibe.

Rosario, J. (2006). TIC : su uso como herramienta para el fortalecimiento y el desarrollo de la educación virtual. *Didactica, Innovacion y Multimedia. D I M Revista*, 8.

Talanquer, V. (2015). La importancia de la evaluación formativa. *Educ. quím, 26*(3), 177-179. Retrieved from https://dx.doi.org/10.1016/j.eq.2015.05.001

Valverde, A. (2014). Una experiencia de enseñanza inversa en un curso de matemáticas en Ingeniería Informática. In U. d. Oviedo, *XX Jornadas sobre la Enseñanza Universitaria de la Informática (JENUI)* (pp. 435-442). Oviedo: Universidad de Oviedo. Retrieved from https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099/15504/P435va_unae.pdf

Vargas, M. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Retrieved from http://www.bdigital.unal.edu.co/7276/1/01186564.2012.pdf

Anexo 1

DOCUMENTO DE AUTORIZACION DE USO DE IMAGEN SOBRE FOTOGRAFIAS Y FIJACIONES AUDIOVISUALES (VIDEOS) PARA USO PÚBLICO

Atendiendo al ejercicio de la patria potestad, establecido en el código civil colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del decreto 2820 de 1974 y la ley de infancia y adolescencia, el docente Rafael Calderón Muñoz identificado con CC N° 74381606 de Duitama, le solicita autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del (la) estudiante ______________________________, identificado con T.I. N° _______________________, alumno de la Institución Educativa en Administración Micro-empresarial Ciudad del Sol del municipio de Sogamoso para que aparezca ante la cámara, en una videograbación con fines pedagógicos que se realizará en clase de Matemáticas en las instalaciones del colegio.

El propósito del video es evidenciar el desarrollo de la experiencia con uso del modelo de aula invertida en el proceso de aprendizaje del concepto función, este podrá ser utilizado con fines netamente pedagógicos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos. Se manifiesta:

Ausencia de sanción en caso de no participar.

Los datos recolectados, así como videos y fotos son para uso netamente académico en el desarrollo de la investigación de la tesis maestral del autor.

A dicho material tendrá acceso únicamente el investigador, así como sus distintos asesores, para el desarrollo de la misma, adicionalmente quienes fueren encargados de su evaluación.

Autorizo,

____ __________________________

Firma de padre/madre de familia o acudiente	Cedula de ciudadanía
___________________________________	_______________________
Nombre del estudiante	Tarjeta de identidad

Anexo 2

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN 1

UPTC – MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

COLEGIO TÉCNICO MICRO-EMPRESARIAL CIUDAD DEL SOL

El objetivo de este cuestionario es identificar el conocimiento adquirido, acerca del concepto función, durante el desarrollo del proceso de aprendizaje mediante el aula invertida.

Lee con atención y luego responde:

Juan es un joven que acaba de cumplir la mayoría de edad, desea tomar un plan postpago en una determinada empresa de telefonía celular, por su falta de vida crediticia, la asesora de la empresa le ofrece únicamente el plan más bajo, el cual tiene un costo fijo mensual de $49.900, plan que acepta Juan.

El plan que adquiere Juan incluye:

- 400 minutos a todo destino nacional
- Minutos ilimitados al mismo operador
- 1,5 GB de datos en navegación y descargas
- Chat y redes ilimitadas

Para Juan es importante la cantidad de datos, pero generalmente tiene que comprar paquetes adicionales de ellos; si cada paquete de datos que adquiere el joven tiene un costo de $1800, responde:

1. Si Juan desea saber el costo final de la factura luego de comprar algunos paquetes de datos, Explique la forma de calcular el valor de la factura mensual

____

____

____

____

2. Escriba mediante una expresión algebraica la situación anterior

____-

____

____

3. ¿Qué cantidades utilizaste para modelar la situación en el punto anterior?

____

____

____

4. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta anterior, ¿Existe alguna que sea variable?

No ___ Si ___ Cuál(es)?

____

5. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta 2, ¿Existe alguna que sea constante?

No ___ Si ___ Cual(es)?

____

6. Usando la expresión algebraica que planteaste en la pregunta N°2, determina el valor final de la factura de los últimos tres meses, sabiendo que consumió, 3, 7 y 5 paquetes de datos adicionales.

7. ¿Qué diferencias encuentras entre los procedimientos aplicados en los numerales 1 y 6?

8. Si en un determinado mes, Juan olvidó el número de paquetes adicionales adquiridos, pero sabe que el costo final de la factura fue $66.100, ¿Qué procedimiento puede seguir para saberlo?, ¿cuantos paquetes adicionales compró Juan?.

9. Realiza una representación que muestre gráficamente el costo de su factura.

10. ¿Puede considerarse la situación planteada anteriormente como una función?

No ____ Si ____ Explique: ____

____

____

____

Anexo 3.

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN 2

UPTC – MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

COLEGIO TÉCNICO MICRO-EMPRESARIAL CIUDAD DEL SOL

Objetivo: Evaluar la apropiación del concepto función por parte de los estudiantes al final del proceso de aprendizaje mediante la estrategia metodológica “Aula invertida”.

Considere una población de bacterias en un medio nutriente homogéneo. Suponga que al muestrear la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si el número de bacterias en el tiempo t es p(t), donde t se mide en horas, y la población inicial es p(0)=1000.

1. Si se desea conocer el tamaño de la población en determinado número de horas, Explique la forma de calcular el tamaño de la población.

____

____

____

____

2. Escriba mediante una expresión algebraica la situación anterior

____

____

____

____

3. ¿Qué cantidades utilizaste para modelar la situación en el punto anterior?

____

____

____

____

4. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta anterior, ¿Existe alguna que sea variable?

No ___ Si ___ Cuál(es)?

____

5. De las cantidades expresadas en tu respuesta a la pregunta 2, ¿Existe alguna que sea constante?

No ___ Si ___ Cual(es)?

____

6. Usando la expresión algebraica que planteaste en la pregunta 2, determina el tamaño de la población luego de 3, 7, 11 y 13 horas.

____

____

____

____

7. ¿Qué diferencias encuentras entre los procedimientos aplicados en los numerales 1 y 6?

____

____

8. Si en determinado momento, se ha olvidado el tiempo transcurrido, pero se sabe que la población de las bacterias es de 64.000, ¿Qué procedimiento puede seguir para encontrar el tiempo?, ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?.

9. Realiza una representación que muestre gráficamente el crecimiento de la población de bacterias.

10. ¿Puede considerarse la situación planteada anteriormente como una función?

No ___ Si ___ Explique: ____

____

____

____