FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL APRENDIZAJE DE LA DERIVADA

Tesis de maestría

CESAR FABIAN RIVEROS PANQUEVA

Director

Dr. Publio Suárez Sotomonte

Tunja, 2019

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL APRENDIZAJE DE LA DERIVADA

Tesis de maestría presentada por Cesar Fabian Riveros Panqueva dentro del programa de Maestría en Educación Matemática para aspirar al título de Magister en Educación Matemática, dirigida por el Dr. Publio Suárez Sotomonte profesor de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Cesar Fabian Riveros Panqueva

Dr. Publio Suárez Sotomonte

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1. Introducción y contextualización 1

Capítulo 2. Generalidades 4

Planteamiento del problema 4

Justificación 6

Objetivos 9

Objetivo general 9

Objetivos específicos 9

Antecedentes 9

Capítulo 3. Marco teórico 15

Pensamiento matemático 15

Pensamiento variacional 16

Teoría de los registros semióticos 17

Procesos del pensamiento matemático 19

La formulación, tratamiento y resolución de problemas 20

La comunicación 20

Razonamiento 20

Modelación 21

Tecnología en la educación 22

Ambiente virtual de aprendizaje. 23

GeoGebra como mediador de aprendizaje 24

Epistemología de la derivada 25

Noción de derivada 29

Tangente. 29

Velocidades. 31

Razón De Cambio..32
Derivada...33
Capítulo 4. Metodología..34
Enfoque de investigación..34
Tipo de investigación 35
Unidad de análisis...36
Etapas de la investigación...37
Categoría de análisis...42
Capítulo 5. Análisis 44
Descripción de la experiencia y análisis de resultados.......................................44
Descripción de la actividad 0: Practica experimental 46
Análisis de la actividad...48
Descripción de la actividad 1: Representación gráfica a partir de registro tabular 52
Análisis de la primera sesión..56
Descripción de la actividad 2: Representación gráfica a partir de registro algebraico.........57
Análisis de la segunda sesión 62
Descripción de la actividad 3: Interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente. 65
Análisis de la tercera sesión..70
Descripción de la actividad 4: Aproximación de rectas secantes. 73
Análisis cuarta sesión 76
Descripción de la actividad 5: Caracterización de la función derivada...............................77
Análisis quinta sesión..81
Reflexiones a partir de la descripción...83
Construcción del sentido de la experiencia 84

Competencias digitales respecto al diseño de los ambientes 88
Capítulo 6. Conclusiones 97
Bibliografía 101
Anexos 107

Lista de tablas

Tabla 1: Epistemología de la derivada 26

Tabla 2 Propósitos planteados para cada una de las sesiones 40

Tabla 3 Categorías y subcategorías de análisis 42

Tabla 4 Descripción de los ambientes. Competencia digital en relación al dibujo. 94

Tabla 5 Descripción de los ambientes. Competencia digital en relación al funcionamiento. ...95

Tabla 6 Descripción de los ambientes. Competencia digital en relación a la modelación. 96

Lista de figuras

Figura 1. La recta tangente t es la posición límite de la recta secante 30

Figura 2. Muestra el caso de h >o 31

Figura 3. Velocidad promedio en un intervalo de tiempo h. 31

Figura 4. Razón de cambio promedio..32

Figura 5. Etapas de la investigación...38

Figura 6. Montaje experimental para un MRU...46

Figura 7. Registro tabular por algunos estudiantes...47

Figura 8. Representación gráfica del movimiento..48

Figura 9. Descripción por estudiantes. 49

Figura 10. Calculo de la velocidad media por un estudiante...50

Figura 11. Experimentación del fenómeno...51

Figura 12. Toma de datos experimentales..51

figura 13. Representación gráfica del primer ambiente virtual. 53

Figura 14. Solución por un estudiante de la conversión del registro tabular a registro gráfico54

Figura 15. Aproximación de la velocidad media por un estudiante. 56

Figura 16. Red del análisis de la interpretación gráfica 56

Figura 17. Representación gráfica del segundo ambiente virtual...58

Figura 18. Aproximación a la razón de cambio promedio por un estudiante..........................59

Figura 19. Red del análisis de la interpretación de la velocidad. 63

Figura 20. Descripción de un estudiante en lenguaje natural de la velocidad..........................64

Figura 21. Representación gráfica del tercer ambiente virtual...66

Figura 22. Pendiente de la recta tangente como aproximación de pendientes de rectas secantes...69

Figura 23. Interpretación gráfica por un estudiante de la tangente como aproximación de secantes....70
Figura 24. Red del análisis de la recta tangente como aproximación de secantes 71
Figura 25. Interpretación de un estudiante de la aproximación de la secante a la tangente. 72
Figura 26. Interpretación gráfica por dos estudiantes de la aproximación de secantes. 73
Figura 27. Representación gráfica del cuarto ambiente virtual 74
Figura 28. Interpretación geométrica por un estudiante de la pendiente de la recta. 75
Figura 29. Expresión de un estudiante del límite cuando h tiende a cero de la pendiente. 76
Figura 30. Representación gráfica del quinto ambiente virtual 78
Figura 31. Caracterización de la función derivada. 80
Figura 32. Deducción de la derivada mediante paso al límite. 81
Figura 33. Aplicación de los ambientes 85

Lista de Anexos

Anexo 1 Actividad 0: Práctica experimental 107

Anexo 2 Actividad 1: Representación gráfica a partir de registro tabular 109

Anexo 3. . Red del análisis de la interpretación gráfica 111

Anexo 4. Actividad 2: Representación gráfica a partir de registro algebraico 112

Anexo 5. Red del análisis de la interpretación de la velocidad 114

Anexo 6. Actividad 3: Interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente. 115

Anexo 7. Red del análisis de la recta tangente como aproximación de secante 117

Anexo 8. Actividad 4: Aproximación de rectas secantes. 118

Anexo 9. Actividad 5: Caracterización de la función derivada. 119

Anexo 10.Carta de intención para participar en la investigación 120

Capítulo 1. Introducción y contextualización

La compleja problemática de la Educación Matemática y su vivencia en el aula, ha impulsado que los investigadores y docentes orienten sus esfuerzos en mejorar su enseñanza y los ambientes de aprendizaje de los estudiantes, para lograr la comprensión de las nociones matemáticas. Diversas investigaciones (Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas, 1996; Mendoza, 2003; Dolores, 2007; Dávila ,2018, Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) muestran que en muchos casos la enseñanza de la Matemática y especialmente el caso de la derivada de una función, se sigue centrando en la idea que algunos llaman las Matemáticas formales, apoyándose en métodos de memorización y en el desarrollo algorítmico, sin permitirle al estudiante la posibilidad de contextualizar, modelar y analizar situaciones problemáticas de distintos fenómenos físicos.

Es necesario impulsar un cambio en los procesos de enseñanza, promoviendo prácticas dinámicas y significativas para los estudiantes, que propicien el desarrollo de su pensamiento matemático. En la actualidad, con la incorporación de las tecnologías en los ámbitos escolares, se han creado aplicaciones informáticas especializadas en la visualización dinámica de objetos matemáticos, permitiendo un cambio en cuanto a los procesos de enseñanza y las estrategias metodológicas de los docentes, los cuales constituyen herramientas básicas para avanzar hacia la comprensión de la matemática.

La investigación tiene la finalidad de indagar y analizar los procesos del pensamiento matemático, haciendo énfasis en el pensamiento variacional, que se contextualiza en el estudio del objeto matemático derivada, formulando actividades articuladas desde la variación y el cambio, mediadas por ambientes virtuales en los cuales se propicia el manejo de distintos sistemas de representación que conllevan a un mejor entendimiento de las nociones matemáticas (Duval y Sáenz, 2016).

Esta investigación se desarrolla dentro de una tendencia de tipo cognitivo, adoptada desde la epistemología y la psicología para contribuir al aprendizaje de la matemática; dicha corriente es llamada por Vasco (2013) enfoque noético-semiótico de Duval; de manera particular los sistemas semióticos de representación. Se contextualiza en los enfoques de resolución de problemas, enfatizando en los procesos del pensamiento matemático (Mason, Burton y Stacey,1982); los anteriores aspectos conceptuales están relacionados con el pensamiento variacional y los sistemas analíticos de Cantoral y Farfán (2000) y Vasco (2003) resaltando los elementos de la modelación en Matemática de Trigueros (2009) enmarcadas en los modelos que se utilizan para estructurar y promover el proceso de aprendizaje de los alumnos y el análisis de los procesos mentales que tienen lugar durante la modelación, fortaleciendo la capacidad de formular y solucionar problemas. Así mismo, se toman algunos aspectos relacionados con los ambientes virtuales de Moreno y Montoya (2015) resaltando el propósito de los aplicativos informáticos y permitiendo el desarrollo de contenidos temáticos mucho más dinámicos, Del mismo modo, ampliando las posibilidades que proporciona el software GeoGebra como plataforma para el diseño y creación de ambientes virtuales (Fiallo y Parada, 2014).

La investigación se estructura en seis capítulos. En el capítulo 1, se expone la introducción y contextualización, teniendo en cuenta el papel que desempeña los procesos de enseñanza, en el fortalecimiento del pensamiento matemático y los sistemas de representación, en el aprendizaje de la derivada a partir de situaciones modeladas en ambientes virtuales. En el capítulo 2 se determina las generalidades del trabajo, que permitieron delimitar y formular el planteamiento del problema, la justificación y los objetivos de la investigación en relación con la apropiación y al análisis de los procesos del pensamiento variacional que emergen del aprendizaje de la derivada. En el capítulo 3, se muestra el marco teórico que sustenta el trabajo, describiendo aspectos del pensamiento matemático, la teoría de los registros semióticos, la modelación y la implementación de la tecnología en los procesos de enseñanza de la matemática.

En el capítulo 4, se establece el diseño metodológico con un enfoque cualitativo de tipo descriptivo-interpretativo, permitiendo un acercamiento más global y comprensivo a los entornos escolares, dando la posibilidad al investigador de observar y analizar el fenómeno de estudio, aportando mayor información descriptiva y así comprender el contexto sobre lo que se está investigando (Gallardo, 2017). Además, se establecen las etapas que permitieron la descripción e interpretación de los resultados, teniendo en cuenta las categorías y subcategorías de análisis. En el capítulo 5, se analiza la información que se obtuvo en el desarrollo e implementación de cada uno de los ambientes virtuales, mediante el análisis de los sistemas de representación se describen e interpretan aspectos del pensamiento matemático como la modelación, el razonamiento, la generalización y la abstracción a través de las situaciones problemáticas expuestas en cada una de las sesiones, además, se determina la competencia digital de todos los ambientes en relación al dibujo, su funcionamiento y la modelación. Finalmente, en el capítulo 6, se exponen las conclusiones respecto al desarrollo del pensamiento matemático que emerge en la implementación de actividades mediadas por entornos virtuales. Mediante al análisis y la evaluación de resultados se pudo determinar que los estudiantes apropian el objeto derivada desde una perspectiva de la variación y el cambio, usando los diferentes registros semióticos de representación, entre los cuales se trabajaron el lenguaje natural, tabular, gráfico, numérico y algebraico.

Capítulo 2. Generalidades

Este capítulo proporciona las generalidades que permitieron delimitar la problemática que se presentan en muchos estudiantes al comprender situaciones relacionadas con la variación y el cambio; se justifica la implementación de estrategias que permitan fortalecer capacidades para identificar, interpretar, modelar y simular situaciones problemáticas en donde subyace el cambio. Posteriormente, se formulan los objetivos, general y específico de la investigación, enfocados al análisis y al desarrollo del pensamiento matemático en el aprendizaje de la derivada; se consideran además los resultados en investigaciones nacionales e internacionales relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la derivada.

Planteamiento del problema

El estudio del Cálculo, la modelación y simulación de diversas situaciones problemáticas permite identificar características de algunos fenómenos. Por ejemplo, en el ámbito de la física temas como la velocidad de una partícula se puede modelar a partir del concepto de derivada como la razón de cambio del espacio recorrido respecto al tiempo; es aquí donde el aprendizaje de la derivada como razón de cambio hace parte fundamental en la comprensión del Cálculo. En varias investigaciones (Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas, 1996; Sánchez- Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008, Dolores, 2007) mencionan diversas dificultades en el aprendizaje de la derivada, en donde el estudiante no encuentra relación entre el concepto y su contextualización; además, se le dificulta identificar características de las situaciones gráficas, entre otras.

Con la incorporación de la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática; por ejemplo, investigaciones hechas por Lupiáñez y Moreno (2001) evidencian que, con la implementación de aplicaciones especializadas en Matemática, los estudiantes desarrollan una mejor comprensión. Esto no quiere decir que el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (Tic) constituyen la solución a la problemática de las dificultades en el área; Gracia (2018) expresa que el uso de software educativo y todo lo relacionado con las herramientas informáticas estimulan al estudiante, potencializando aspectos del pensamiento como la modelación, el razonamiento, la generalización y la abstracción; en consecuencia las Tic se convierten en un buen mediador pedagógico, aportando una participación activa en el proceso de aprendizaje que anteriormente no se tenía cuando el docente desarrollaba su clase de forma tradicional (Cardona, 2012).

Adicionalmente, es necesario comprender los procesos del pensamiento matemático a través de los cuales los estudiantes apropian de significado el objeto derivada. Desde este supuesto, resulta relevante observar y analizar las prácticas de aula en donde se propician situaciones problemáticas en un ambiente virtual para así poder determinar y categorizar algunos aspectos como la generalización, argumentación, las representaciones, modelación y simulación.

Los tipos de pensamiento matemático contemplados en los programas oficiales de matemáticas de Colombia para la educación básica y media son: el pensamiento numérico, métrico, espacial, variacional y aleatorio; en el estudio el cálculo diferencial, especialmente la noción de derivada, está presente el pensamiento variacional y los sistemas analíticos. Según el Ministerio de Educación Nacional (Colombia-MEN, 2003) el desarrollo de este pensamiento permite entender las relaciones de cambio en diversas situaciones cotidianas, facilitando así los procesos métricos, algorítmicos, de modelación y de simulación; entonces es importante que las investigaciones en Educación Matemática se interesen en potencializar en los estudiantes este tipo de pensamiento, ya que el MEN lo introduce en sus Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias en todos los grados de escolaridad aumentando gradualmente su complejidad desde el grado primero hasta el undécimo.

Atendiendo los resultados obtenidos en pruebas SABER durante los últimos tres años, por los estudiantes de grado undécimo de educación media del Instituto Técnico Francisco Lucea del municipio de San Luis de Palenque-Casanare, se puede afirmar que presentan dificultades en la comprensión de situaciones problema y objetos matemáticos relacionados con el cambio y la variación, y su posterior modelación. Adicionalmente, en la evaluación institucional que se realiza cada año con el grado undécimo, se determinaron dificultades en la representación de registros gráficos, en la interpretación de tablas, la definición de función y en la solución de situaciones problemáticas de fenómenos naturales.

Por lo tanto, es necesario identificar y proponer estrategias que vayan en la dirección de mejorar el pensamiento matemático mediante actividades enmarcadas en diferentes contextos que puedan incentivar la imaginación, la modelación y simulación. Ante esta problemática, se plantea como pregunta de investigación: ¿Cómo apropian los estudiantes de grado undécimo la noción de derivada de una función univariada a partir de situaciones presentadas como modelos y simulaciones en entornos virtuales?

Justificación

En el aprendizaje de la derivada, su definición y conceptualización son algunos de los retos en la enseñanza del análisis matemático, específicamente del Cálculo Diferencial, ya que al estudiante se le dificulta desarrollar competencias que le permita identificar, interpretar, modelar y simular situaciones problemáticas, en donde subyace el cambio en situaciones de contexto. Artigue (1995) expresa que, si bien muchos estudiantes pueden aprender a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas primitivas y resolver algunos problemas, se encuentran grandes dificultades para alcanzar una verdadera comprensión del concepto.

En la enseñanza de la derivada hay un constante interés en que los estudiantes aprendan a calcular su valor de forma mecánica, mediante las reglas de derivación, dando poca importancia a su conceptualización e interpretación, lo cual se constituye en un aspecto clave en el desarrollo del pensamiento matemático. Duval y Sáenz (2016) indican que cuando un estudiante usa varias representaciones semióticas de un objeto llega a alcanzar una mejor comprensión del concepto. Así surge la necesidad de proponer situaciones de contexto en donde el estudiante no sólo realice de forma mecánica algoritmos, sino que pueda generalizar, argumentar, representar, modelar y simular situaciones problemáticas en los campos de las representaciones externas e internas que incentivan la imaginación y consolidan la comprensión del objeto derivada.

Dentro del pensamiento matemático está presente el pensamiento variacional, considerado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2003) como un pensamiento que se caracteriza por la percepción y caracterización del cambio en diferentes contextos; además de su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos. El aprendizaje de la derivada requiere del pensamiento variacional interpretándola como la razón de cambio, cociente variacional, límites y pendiente de la recta tangente; además puede modelar diferentes fenómenos físicos siendo de vital importancia al fortalecimiento del pensamiento variacional en los procesos de enseñanza de la matemática.

Es de destacar que, si bien el MEN viene dotando a las Instituciones con tecnologías, no ha hecho lo mismo con la capacitación para la utilización de dicho material. San Luis de Palenque es un municipio del Departamento de Casanare que cuenta con un solo colegio, el Instituto Técnico Educativo Francisco Lucea y donde al parecer las prácticas docentes aún están diseñadas de forma tradicional, ya que los recursos informáticos no son usados, tal vez por la falta de capacitaciones para la implementación y el diseño de actividades donde se incorporen aplicaciones informáticas, permitiendo al estudiante visualizar, analizar y contextualizar situaciones problemáticas en ambientes distintos al tradicional; y no por falta de estos, ya que la institución ha sido dotada de una gran cantidad de material informático como tabletas y computadores. En esta investigación, además de potencializar el pensamiento matemático nace la inquietud de incorporar las Tic en los procesos de enseñanza y aprendizaje en un ambiente virtual con software en geometría dinámica, para brindar a los estudiantes herramientas en donde pueden manipular y simular diversas situaciones problemáticas donde se evidencie la derivada como razón de cambio.

Mediante el análisis didáctico de estas actividades del aula, se evaluaron los resultados obtenidos en el proceso de comprensión del objeto derivada, describiendo la apropiación de los estudiantes de este objeto. Además, se propuso observar situaciones problemáticas del docente en su práctica de aula al aplicar una secuencia didáctica con actividades en ambientes virtuales, que sirven de mediación para el aprendizaje de la derivada. Con esto se proyectó identificar y categorizar dichos procesos que se ponen en evidencia al momento de solucionar las situaciones problemáticas que involucran el cambio, siendo éste un aporte significativo de la Educación Matemática al aprendizaje de la derivada, complementando el cálculo algorítmico y dándole importancia al desarrollo del pensamiento matemático.

Objetivos

Objetivo general

Describir y analizar los procesos del pensamiento matemático que se involucran en la comprensión del objeto derivada a partir de situaciones modeladas y simuladas en entornos virtuales, por estudiantes de grado undécimo del Instituto Técnico Francisco Lucea de San Luis de Palenque.

Objetivos específicos

- Caracterizar los procesos del pensamiento matemático en estudiantes de bachillerato al aplicar una propuesta didáctica de la derivada como razón de cambio.
- Analizar la interpretación dada por los estudiantes en situaciones problema modeladas y simuladas por el profesor de movimientos en física, planteadas como actividades de exploración de la derivada como razón de cambio en ambientes virtuales de aprendizaje.
- Analizar la competencia digital de los estudiantes, al experimentar con los ambientes virtuales en el aula.
- Interpretar el análisis y la reflexión sobre la práctica en el aula de clase del aprendizaje de la derivada, con el fin de (re)significar concepciones del estudiante y profesor.
- Hacer una propuesta de material virtual con actividades validadas que sirvan como mediación para el aprendizaje de la derivada como razón de cambio.

Antecedentes

Investigaciones a nivel internacional y nacional que tienen como objeto de estudio el concepto de derivada, presentan perspectivas como el análisis de la práctica del profesor cuando enseña el concepto, la incorporación de las Tic como medio de enseñanza, la construcción teórica del concepto, la resolución y modelación de problemas. Dichas perspectivas tienen en común superar algunos obstáculos en el aprendizaje del cálculo. Por tal motivo son relacionadas como referentes en esta investigación.

A nivel internacional, Izquierdo (2010) muestra un estudio donde considera y analiza aspectos de la práctica del profesor en la enseñanza de la derivada desde la perspectiva de la construcción del conocimiento matemático. En la investigación se plantea una metodología de tipo cualitativo, mediante el estudio de caso. Los participantes fueron dos profesores de Enseñanza Secundaria con varios años de servicio en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Algunos de los resultados relevantes fueron que la enseñanza de la derivada por uno de los docentes se apoya en la modelación, interpretación de gráfica y análisis de los mecanismos de construcción del concepto, integrándolos a través de la tecnología. Para ello, usan las herramientas informáticas Cabri II Géomètre y Funciones para Windows que le permiten relacionar los diferentes significados en ambos modos de representación. Por otro lado, resalta la práctica del otro docente, en la cual se centra en disponer un procedimiento de cálculo, siempre que sea posible; no hace uso de los significados de la derivada de una función, no modela otros mecanismos para que posteriormente encuentre relación entre ellos. Se limita al uso algorítmico del operador de la derivada mediante el uso de las reglas de derivación.

En investigaciones realizadas desde el enfoque ontosemiótico por Font (2005), Badillo (2003), Font y Contreras (2008), se expone que la comprensión de la derivada está relacionada con el reconocimiento de funciones semióticas, permitiendo así determinar la relación que existe entre $f'(a)\ y\ f'$. Generalmente en la enseñanza de la derivada se inicia con una introducción del concepto de límite, dando una definición de la derivada por límites, siendo tal vez éste el origen de algunas dificultades que han surgido en el aprendizaje del cálculo. Artigue (1998) expresa que muchos docentes consideran que un estudiante ha aprendido si, al final del curso, este logra dominar las fórmulas que le permiten encontrar la expresión analítica de la función derivada. Según Font (2000) la definición de derivada como un límite, es la que presenta mayor complejidad semiótica, ya que implica involucrar funciones semióticas presentando notables dificultades para los alumnos. Se determina a partir del análisis anterior, que la mejor forma de llegar a la comprensión del concepto es posponer la definición de función derivada por límites, en muchos casos, introduciendo primero la interpretación geométrica de la derivada.

Sánchez-Matamoros et al. (2008) presentan investigaciones en donde la Matemática Educativa se interesa por la comprensión de la derivada, mostrando dificultades que se han generado en estudiantes de bachillerato resaltando tres aspectos fundamentales: lo que se conoce sobre la comprensión de la derivada de una función en un punto, el papel que desempeñan los sistemas de representación y las características del desarrollo del esquema de derivada.

En otros trabajos, Orton (1983) "identificó tres tipos de errores que cometían los alumnos en las tareas de diferenciación y sus aplicaciones: estructurales, arbitrarios y manipulación" (p.271). En esta investigación se consideró que la derivada en un punto indica la velocidad de cambio, y se analizó mediante el uso de tablas, gráficas y la descripción de situaciones, así determinando la interpretación que tenían los estudiantes sobre la razón de cambio en puntos particulares. Por otro lado, Ferrini & Graham (1994) y Porzio (1997) resaltan la importancia de la relación entre razón de cambio y cociente incremental en la comprensión de la derivada, así como la influencia de los contextos en la construcción del significado y las transformaciones entre diferentes representaciones.

Kendal y Stacey (2001) hacen un estudio sobre la implementación de software (en este caso Programas de Cálculo Simbólico, utilizando la calculadora TI-92) en la enseñanza del cálculo en relación al concepto de derivada proponiendo distintas representaciones como numéricas, gráfica y simbólicas; además de las posibles relaciones entre ellas. Realizan un intento de clasificar las prácticas de enseñanza y relacionarlas con el conocimiento y creencias de los profesores. Comentan que los estilos de enseñanza se centran en la realización de procedimientos o en la comprensión conceptual.

En investigaciones nacionales, Jiménez & Espinosa (2014) exponen el resultado de una investigación que tuvo como metodología un enfoque cualitativo con un esquema socioepistemológico, la cual se fundamenta en la caracterización de fenómenos y en la construcción de conocimiento matemático a partir de prácticas sociales. La investigación tuvo como objetivo "caracterizar el proceso de construcción social y contextual de conocimiento en un grupo de estudiantes al concepto de derivada en un punto, a partir de prácticas sociales y de las interacciones en el aula de clase" (p.53). Señalan como conclusión importante que estas "prácticas posibilitan el puente entre el conocimiento particular y el conocimiento generalizado expresado a través de un concepto matemático, en este caso el de razón, forma de medirla y razón constante" (p. 78).

Por otro lado, Fiallo y Parada (2014) resaltan la importancia de un curso de precálculo en la Universidad Industrial de Santander con el propósito de aportar herramientas para el desarrollo del pensamiento variacional; se apoyan en las representaciones dinámicas que se pueden generar en GeoGebra, convirtiéndose en una herramienta que posibilita la experimentación, el análisis, la modelación y conexión entre diferentes tipos de representación, partiendo de un enfoque de la resolución de problemas, donde relacionan el tratamiento matemático de la variación y el cambio, señalando que la forma de alcanzar la construcción de pensamiento variacional es mediante la implementación de situaciones problemáticas en donde intervienen diferentes tipos de representación numérico, gráfico, algebraico y verbal; finalmente mencionan que el uso de las tecnologías digitales logran que los problemas matemáticos tenga un papel fundamental en la construcción de conocimiento.

La Educación Matemática se ha interesado en distintos factores en cuanto al aprendizaje y la enseñanza. Fúneme (2018) investigó en cómo se da el aprendizaje cuando se incorporan herramientas informáticas en el aula. Resalta la idoneidad didáctica de una serie de actividades mediadas por ambientes virtuales bajo una metodología de aula invertida, evitando así que las sesiones tengan una transmisión de información unidireccional del docente a los alumnos, proporcionando la comunicación, el debate y el análisis de los conceptos. El estudio se implementó con estudiantes universitarios de primer semestre en clase de cálculo diferencial. El trabajo muestra la configuración epistémica de cada una de las actividades y su radiografía asociada para finalmente establecer el grado de idoneidad de la propuesta.

Villa (2013) muestra un estudio de caso bajo un enfoque cualitativo con cuatro estudiantes de primer año de ingeniería que cursaban la asignatura pre-calculo en la Universidad de Antioquia; describe cómo se aproximan al objeto de estudio a partir de la comprensión de la tasa de variación, mediante el uso de software en geometría dinámica como el GeoGebra y Modellus. En dicha investigación se plantearon cuatro situaciones diseñadas, las cuales involucran fenómenos de covariación entre algunas cantidades, determinando características de la función matemática que se implica en el contexto.

Existen trabajos a nivel local fundamentados en la implementación de la geometría dinámica mediante el uso de aplicaciones informáticas, Medina (2009) muestra cómo las herramientas computacionales visualizan y posibilitan la variación en la geometría; menciona que cuando se emplea el software Cabri, se evidencia cómo el campo de la experimentación y manipulación pueden contribuir al abordaje de situaciones problemáticas relacionadas con las razones de cambio y las relaciones geométricas, permitiendo además detectar con facilidad los conocimientos previos del estudiante cuando se desarrollan actividades desde la exploración y aplicación de ambientes virtuales.

Las propuestas didácticas de tipo visual geométrico mediado por software dinámico facilitan el aprendizaje de la derivada. Córdoba, Ruiz y Rendón (2015) estudian cómo una propuesta potencializa la curiosidad e interés mediante la interacción entre el docente, estudiante y el programa, dejando a un lado el desarrollo algorítmico y memorización de contenido. Manejaron un enfoque cualitativo, ya que este permite una observación más detallada de los procesos que se involucran en el aula de clase, dejando en evidencia una mejora en el aprendizaje del cálculo diferencial, cuando se utilizan herramientas de visualización computacional en los procesos educativos.

Capítulo 3. Marco teórico

El capítulo a continuación expone los fundamentos teóricos que sustentan la investigación respecto al aprendizaje de la derivada enmarcada en situaciones problemáticas mediadas por ambientes virtuales. En primer lugar, se describen aspectos del pensamiento matemático, haciendo especial referencia al pensamiento variacional, la modelación, simulación y solución de problemas. Posteriormente, se expone los fundamentos de la teoría de los registros de representación semiótica. Finalmente, la importancia e implementación de las Tic en los procesos de enseñanza de la matemática y una fundamentación sobre la noción de derivada y razón de cambio.

Pensamiento matemático

Existen diversas formas de ver y entender el Pensamiento Matemático ya que en él está presente otros tipos de pensamientos que encierran toda actividad matemática, en la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el pensamiento variacional; en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio (Colombia-MEN, 2003). Estos cinco tipos de pensamientos se relacionan entre sí puesto que, al solucionar un problema matemático, el estudiante puede plantear diferentes formas de resolverlo, poniendo en práctica los procesos de aprendizaje a partir de la activación de las diferentes formas de pensar matemáticamente.

Por otro lado, Cantoral et al. (2005) lo interpreta como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Otra visión expresa que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos mediante la cotidianidad en sus múltiples tareas diarias, especialmente en aquellas donde realiza sistematización y contextualización del conocimiento matemático, lo anterior basado en los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (2006). Adicionalmente, Mason, Burton y Stacey (1982) expresan que el pensamiento matemático es un proceso dinámico que permite el aumento de la complejidad de las ideas que podemos manejar extendiendo nuestra capacidad de comprensión.

En esta investigación, se asume el pensamiento matemático como lo plantea Cantoral et al. (2005) como una manifestación de la actividad humana donde se generan:

> Los procedimientos, explicaciones, escrituras y formulaciones verbales que el estudiante construye al alrededor de cualquier actividad matemática, motivado por descifrar los mecanismos propios de esta, donde la cultura y el medio contribuyen en la formación de los pensamientos matemáticos (p.18).

Por último, el pensamiento matemático es una construcción del sujeto que se desarrolla en su diario vivir y su entorno socio cultural; por tal razón es de vital importancia que en los colegios se propicien actividades en donde cada estudiante desarrolle su propio pensamiento matemático a través de la mediación del maestro, en conjunción con el saber, propiciando el desarrollo de capacidades cognitivas para la construcción de nuevos conocimientos.

Pensamiento variacional

En el estudio del cálculo diferencial está muy presente la variación y el cambio, convirtiéndolo en una herramienta fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite modelar, predecir y cuantificar la variación y el cambio en diferentes fenómenos. Sin embargo, esta perspectiva ha perdido relevancia y se ha interesado por los procesos de construcción y el desarrollo algorítmico, lo que convierte al estudio del cálculo algo tedioso y de poco agrado por los estudiantes. Distintas investigaciones, exponen que la clase de cálculo diferencial, debe estar dirigida especialmente a que los estudiantes trabajen con ideas de variación y modelación de fenómenos de cambio; en este sentido es indispensable el desarrollo de su pensamiento variacional (Cantoral y Farfán, 2000; Cantoral y Reséndiz, 2003).

Muchas veces se confunde la noción del pensamiento variacional con la definición de una función, aprenderse de memoria una fórmula o saber la gráfica de varias funciones en un plano cartesiano. Estas concepciones más bien se convierten en obstáculos epistemológicos y didácticos al dominio del pensamiento variacional. Según los Lineamientos Curriculares el pensamiento variacional se ocupa del reconocimiento de la variación y el cambio en diferentes contextos del mismo modo con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos. Vasco (2003) expresa el pensamiento variacional como:

> (…). Una manera de pensar dinámica que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p.63)

Su propósito fundamental apunta a tratar de modelar patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad, además conlleva a que el estudiante pueda generar modelos mentales, determinar patrones de variación y poder expresarlo en diferentes sistemas simbólicos de representación.

Teoría de los registros semióticos

Las representaciones juegan un papel importante en los procesos de aprendizaje de la matemática, ya que el estudiante puede expresar y exteriorizar una idea de su conocimiento. Es indispensable que las concepciones de los estudiantes tengan diferentes representaciones y que exista una relación entre ellas. Duval y Sáenz (2016) expresa que el uso de varias representaciones semióticas de un objeto matemático facilita la comprensión del concepto, dándole importancia a las construcciones mentales, a los procesos cognitivos en la formación de conocimiento y al mismo tiempo aumentando la capacidad del pensamiento matemático y por lo tanto el conocimiento del objeto.

Duval (citado en Vrancken, 2011; p.41) formula algunas hipótesis que permiten fundamentar su teoría:

- La comprensión no está ligada estrictamente a los contenidos matemáticos, sino a la naturaleza de las actividades y de los desempeños que se exigen. Es fundamental el estudio del funcionamiento cognitivo implicado por el aprendizaje requerido.
- No hay conocimiento que pueda ser movilizado por un sujeto sin una actividad de representación.
- El pensamiento humano se caracteriza por la movilización de muchos sistemas de representación. En matemática, son los sistemas semióticos los principales componentes de la arquitectura cognitiva que permiten al individuo entender esta disciplina.

Duval, siendo uno de los referentes en el campo de la representación semiótica, se interesó por analizar los problemas de comprensión en el aprendizaje de la matemática, partiendo que las representaciones también pueden ser signos que se producen a partir de reglas, permitiendo la descripción de un proceso o fenómeno. Para Font (2009) los conceptos matemáticos, se representan por sistemas matemáticos de signos y son considerados en el mundo real. Entonces, se entiende como registro semiótico al conjunto de signos para representar una idea o un objeto matemático; adicionalmente, debe cumplir con tres características de ser identificable, permitir el tratamiento y posibilitar la conversión (Duval, 1998).

Gruszycki, Oteiza, Maras, Gruszycki, & Balles (2012) definen la característica identificable como:

> (…) se refiere a reconocerse como una representación de un registro dado, el tratamiento es una acción sobre la representación interna a un registro. Asimismo, entre diferentes registros de representación se

> pueden realizar conversiones, que son transformaciones de una representación en otra que pertenece a otro registro diferente al de la primera. Una operación de conversión puede ser la de traducir información tabular sobre una función, en una gráfica (p.2170).

Según Duval (1999) el tratamiento son las transformaciones de la representación dentro del mismo registro; de modo que, a partir de éstas se obtengan otras representaciones que se puedan establecer como una ganancia de conocimiento refiriéndose a la transformación interna de un registro, los tratamientos que se pueden realizar dependen principalmente de las posibilidades y reglas que brinda el sistema de representación.

La conversión es una transformación de representación de un registro a otro, conservando parte de su significado a la representación inicial y al mismo tiempo, denotando otros significados, por ejemplo, cuando se tiene una ecuación algebraica y pasar a su representación gráfica. Duval y Sáenz (2016) expresan que "La conversión es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado" (p.75).

En la actividad matemática, especialmente en el cálculo diferencial siempre está presente el cambio constante de una representación a otra, dado que existen diferentes formas de expresar y representar un objeto matemático. Cada representación tiene características diferentes según el sistema de reglas para su creación, pero siempre el objeto representado se mantiene invariante. (Duval, 2008).

Procesos del pensamiento matemático

Toda actividad matemática tiene como base fundamental acceder a los procesos del pensamiento matemático. "Formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos" (Lineamientos

Curriculares, 1998, p.51). Estos son los procesos que están contemplados en el desarrollo de los contenidos curriculares.

La formulación, tratamiento y resolución de problemas

La solución de problemas matemáticos podría convertirse en el principal eje organizador del currículo; “Cuando se trabajan en el aula de forma sistemática, dando opción al alumno a que razone y explique cuál es su forma de afrontar y avanzar en el desarrollo de la actividad, salen a la luz las dificultades que el propio proceso de resolución de problemas conlleva” (Urdiain, 2006, p.19) Es interesante que muchas personas confunden la dificultad de un problema con lo tedioso del cálculo para resolverlo, sin saber que el cálculo es solo una etapa de la solución del problema, la cual puede realizarse con el software adecuado. De hecho, una práctica común e incorrecta es ir directamente a la solución sin analizar el problema y los resultados.

La comunicación

Con la actividad matemática los estudiantes pueden desarrollar la capacidad de establecer relaciones entre ideas matemáticas, expresar conceptos matemáticos utilizando ilustraciones y describir de un lenguaje simbólico a un lenguaje natural. A su vez, determinando aspectos tales como la descripción cualitativa y cuantitativa de fenómenos de variación presentados en diferentes contextos mediante diversas representaciones verbales, tabulares, gráficas y simbólicas.

Razonamiento

La identificación de situaciones problemáticas en contextos reales, el análisis de actividades relacionadas con la realidad, la aplicación de estrategias en la resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible deben estar presentes en la metodología utilizada por los docentes en matemática, de esta forma desarrollando en los estudiantes el razonamiento, permitiendo percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones.

Modelación

La modelación matemática se ha incorporado en los ámbitos escolares desde hace aproximadamente treinta años. Biembengut y Hein (1999) han trabajado la modelación en distintos grados de escolaridad, desde primaria hasta estudiantes de posgrado en Educación Matemática, mencionando que existe un cambio de una transmisión de técnicas de resolución, a una herramienta o estructura de otra área del conocimiento, permitiendo un mayor desempeño en la comprensión e interpretación de distintos contextos.

Vasco (2003) resalta la importancia de impulsar un cambio de lo que él llama las matemáticas puras a una matemática dinámica, proponiendo un cambio curricular desde los grados de preescolar hasta el bachillerato donde se implementan procesos de modelación matemática y procesos del pensamiento variacional, permitiéndole al alumno herramientas en la construcción de modelos, reproducciones mentales entre sistemas de representación, identificación de patrones, entre otros. De este modo, Vasco (2003) define la modelación como:

> La modelación matemática es el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad. Se trata de un proceso de detección, formulación y proyección de regularidades por medio de la creación de un artefacto mental, un sistema con sus componentes, transformaciones y relaciones, cuyas variables covarían en forma que simulen las regularidades de la covariación de los fenómenos o procesos que se intenta modelar (p.10).

La modelación matemática se interesa por la resolución de problemas reales, enfocándose en que los estudiantes adquieran herramientas para comprender los diferentes fenómenos del mundo en el que viven. Trigueros (2009) menciona que existen distintas perspectivas respecto al uso de la modelación:

> (…). Modelación educativa que tiene, como su nombre lo indica, un objetivo claramente pedagógico. Aquí, se pueden distinguir dos tipos de corrientes, una didáctica en la que los modelos se utilizan para estructurar y promover el proceso de aprendizaje de los alumnos, y otra que se pueden considerar de carácter conceptual en la que el papel de la modelación es clave para introducir nuevos conceptos y para desarrollarlos.
>
> (…). Modelación cognitiva que tiene intereses de tipo psicológico como es el análisis de los procesos mentales que tienen lugar durante la modelación. Su finalidad es comprender la forma en que se piensa cuando se usa la modelación en la solución de problemas, o bien promover los procesos de pensamiento matemático mediante el uso de modelos (p.5).

En la enseñanza de la matemática, la modelación le permite al estudiante aprenderla de manera aplicada en las otras áreas del conocimiento, a su vez mejora la capacidad de formular y solucionar problemas. Es importante mencionar que se debe tener un ambiente que contribuya y promueva los procesos de discusión y de reflexión conduciendo así a la compresión de los fenómenos mediante los recursos matemáticos utilizados. De este modo, la implementación de situaciones problemáticas, debe conducir al estudiante a desarrollar ideas con conocimiento matemático que le permitan analizar y solucionar distintos problemas que pudieran resolverse mediante la misma idea.

Tecnología en la educación

La incorporación de la tecnología en los procesos de enseñanza y el aprendizaje ha generado un impacto en la educación y ha impulsado un cambio en las estrategias metodológicas, las cuales han facilitado un mayor entendimiento en las diferentes áreas del conocimiento. En investigaciones donde se implementan como mediador del aprendizaje diferentes programas informáticos de matemáticas, evidencian grandes aportes al aprendizaje de la matemática; al mismo tiempo, mencionan que surgen dificultades y que no con la sola implementación de las tecnologías al aula se solucionarían todas las problemáticas en la educación matemática. Moreno (2014) menciona que el uso de la tecnología juega papel importante en el desarrollo de habilidades matemáticas, es decir, la tecnología ayuda a que el estudiante no sea sólo un espectador o receptor del conocimiento, sino que pase a ser un ente activo vinculado directamente con el quehacer matemático.

Ambiente virtual de aprendizaje.

A continuación, se muestran distintas interpretaciones que han tenido los ambientes virtuales de aprendizaje: "es el conjunto de entornos de interacción, sincrónica y asincrónica, donde, con base en un programa curricular, se lleva a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje, a través de un sistema de administración de aprendizaje" (López, Rayón, Escalera y Ledesma, 2002, p.6). Por otro lado, Vidal, Llanusa, Diego y Vialart (2008) mencionan que los entornos virtuales de aprendizaje se centran en los procesos del estudiante, permitiéndole construir su propio conocimiento, basado desde su propia expectativa y necesidades del contexto. Lo definen como un proceso o actividad de enseñanza y de aprendizaje que se desarrolla fuera de un espacio físico, temporal y a través de Internet, ofrecen diversidad de medios y recursos para apoyar la enseñanza. Finalmente, Moreno y Montoya (2015) lo definen como "un sistema de software diseñado para facilitar la gestión de cursos, sean completamente a distancia o como complemento de cursos presenciales" (p.5).

Sin embargo, en el desarrollo de este trabajo se considera adecuado tomar la definición dada por Pantoja y Zwierewicz (2008):

> Espacios de aprendizaje dominados por las TIC que permiten una simulación en tiempo real de las condiciones que se dan en un aula presencial y que ofrecen condiciones técnicas para el desarrollo de

estrategias interactivas y la consecuente construcción colaborativa del conocimiento, aunque en este caso docente y discente se pueden encontrar a miles de kilómetros de distancia (p. 285).

A medida que las Tic se constituyeron en un espacio importante en la educación se fueron creando e implementado software especializados en la enseñanza y el aprendizaje. Esto permite la representación dinámica de distintas concepciones y agrega un potencial interés por el aprendizaje. Desde la educación matemática e informática, se crearon aplicaciones como GeoGebra, Cabri Geometry, Derive, calculadoras científicas, entre otros. Dichas aplicaciones informáticas proporcionaron factores positivos en desarrollo del pensamiento variacional, la modelación y simulación de los educandos cuando reciben orientaciones bajo el uso de los ambientes virtuales. En esta investigación, se implementó el software GeoGebra como mediador y herramienta para la creación de los ambientes virtuales de aprendizaje.

GeoGebra como mediador de aprendizaje.

GeoGebra es un software libre especializado en geometría dinámica que cuenta con una interfaz de muy fácil uso, además tiene varias aplicaciones para trabajar en todos los niveles educativos como geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos y estadística. Con éste se puede construir puntos, segmentos, polígonos, gráfica de funciones, aplicativos y una serie de construcciones geométricas, así pues, se ha convertido en el software que apoya la enseñanza y aprendizaje de las ciencias en todo el mundo según el IGI (2017).

GeoGebra fue desarrollado por Markus Hohenwarterel, con el propósito de permitir la exploración y manipulación directa y dinámica de la geometría. Es un medio de trabajo donde el estudiante tiene la posibilidad de experimentar con una materialización de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones. Así se posibilita un cambio de la clase tradicional, donde se plasmaban de forma estática todas las representaciones matemáticas. Ahora bien, el éxito del uso en la implementación de este software dependerá de la manipulación de todas las herramientas y comandos que tiene cada hoja dinámica; del mismo modo permite ampliar los conocimientos matemáticos del docente y la capacidad de proponer situaciones problemáticas adecuadas para alcanzar cada objetivo propuesto en la clase.

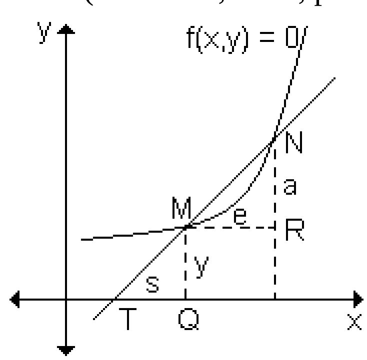
Epistemología de la derivada

Se presentan algunas reflexiones epistemológicas sobre la derivada, describiendo algunos alcances y estudios por matemáticos que sobresalen en la génesis y evolución de las nociones matemáticas. En el siglo XVII los problemas que estaban interesados en resolver los matemáticos y otros científicos y que dieron lugar al surgimiento de las ideas y métodos del cálculo son los siguientes:

> i) Hallar la ecuación de la tangente a una curva dada en un punto, era un problema planteado en el contexto de la geometría en Grecia y que resolvieron con métodos geométricos para algunas curvas, y se pretendía resolverlo para toda curva; ii) Problemas de máximos y mínimos, como encontrar el ángulo de inclinación del tubo de un cañón que maximiza el alcance de un proyectil; iii) Problemas de integración, como hallar el área de figuras con lados curvos, hallar la longitud de segmentos de curvas, la distancia recorrida por un móvil conocida la expresión de su velocidad. (Ávila, Ávila y Parra, 2013, p.1226)

Al querer dar solución a los problemas mencionados surgieron matemáticos y científicos como Arquímedes, Isaac Barrow, Fermat, Newton, Leibniz y otros, que diseñaron métodos para resolverlos y así ir avanzando a lo que hoy se conoce como el Teorema Fundamental del Cálculo.

Tabla 1:
Epistemología de la derivada

Autor	Año	Génesis y evolución
Arquímedes	(287-212a. C.)	Trabajó en el estudio de problemas relacionados con las áreas y sólidos circunscritos por curvas y superficies, utilizando métodos que, de manera muy ingeniosa, evitaba los procesos infinitos; pero que permitían encontrar soluciones a los problemas con un grado de aproximación suficiente para los requerimientos prácticos (Durán, 2002). Estudió en fenómenos de variación tanto en la mecánica como en los fenómenos naturales. Mostró un rigor diferente al de regla y compás, predominante en esa época en Grecia. Logró demostrar sus mediciones de áreas y volúmenes de cuerpos y figuras en forma parecida a la realizada por Riemann (1826-1886)
Isaac Barrow	1630-1677	Publicó sus Lectiones Geometricae (Lecciones Geométricas) en donde estableció, entre otras cosas, métodos para trazar tangentes a curvas. De una curva definida implícitamente por $f(x, y) = 0$, un arco infinitamente pequeño MN de coordenadas $M(x, y)$ y $N(x + e, y + a)$ en donde e y a son incrementos infinitesimales de x y de y, respectivamente, de modo que se cumpliera $f(x + e, y + a) = f(x, y)$, y en la que al resolverla desprecia todos los términos que contienen potencias de e, de a o productos de éstos. (Vrancken, 2011, p. 55)  Finalmente, considerando como iguales el arco infinitamente pequeño y el segmento de recta *MN*, aplica la semejanza entre los triángulos *TQM* y *MRN*, obteniendo la pendiente *m* de la tangente en M a partir

		de la expresión $\frac{y}{s} = \frac{a}{e}$ dónde $m = \frac{a}{e}$. Como a y e son en realidad los diferenciales de y y de x respectivamente, su cociente es igual a lo que actualmente se escribe como: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ y expresa precisamente a la derivada como cociente de diferenciales. (Vrancken, 2011, p. 56) Por otra parte, la proposición de Barrow destacó debido a que se relaciona la cuadratura de una curva con el problema de trazar de una tangente a otra curva que cumple con ciertas características. En este caso, la recta tangente se considera en el sentido griego, como una recta que toca a la curva en un solo punto. Barrow demostró esto último en un contexto geométrico.
Fermat	1601-1665	Aunque Fermat no fue matemático de profesión cultivó con gran pasión el estudio de ésta ciencia; hizo dos importantes descubrimientos que están relacionados con sus trabajos sobre geometría. El más importante de ellos, titulado “Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum” (Métodos para hallar máximos y mínimos a una línea tangente en una curva), dando el primer paso en el desarrollo del concepto de derivada de una función (Pineda, 2013). Fermat expuso un método, eminentemente algebraico y desprovisto de fundamentos demostrativos, para hallar los puntos en los cuales una función polinómica, toma un valor máximo o mínimo. Infortunadamente, Fermat nunca explicó la base lógica de su método con la suficiente claridad, por tal razón no fue aceptado de buen modo por los matemáticos de su época y fue criticado severamente por ser insatisfactorio.
Newton	1642-1727	En su obra titulada De Analysi per Aecuationes Numero Terminorum Infinitas, escrito en 1669 y publicado en 1711, Newton obtuvo que si el área bajo una curva viene dada por la expresión ax^m con m entero o fraccionario, entonces la velocidad de cambio de área con respecto a x viene dada por max^{m-1} y que éste es el valor de la ordenada de la curva para la abscisa x (Lozano, 2011,p.11).

		Además, Inventó su *método de fluxiones* en 1671, pero no se publicó hasta 1736. Su idea es asimilar las cantidades variables a cuerpo en movimiento, las variables x e y son cantidades que van fluyendo, de las cuales salen las fluxiones p y q o velocidades de variación, a las que denotó con las letras $\dot{x}$ $\dot{y}$; para ello utiliza en un principio los infinitamente pequeños (Vásquez y Del Rincón, 1998, p.3).
Leibniz	1646-1716	Leibniz, más conocido como filósofo, presentó su cálculo entre 1673 y 1676. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque fue el primero en publicarlo. Basándose en una concepción geométrica llegó a resultados similares, obteniendo un método para la resolución del problema de las tangentes y la determinación de áreas y volúmenes. (Vrancken y Engler, 2013, p.66).
Newton y Leibniz		En el último tercio del siglo XVII, Newton y Leibniz crearon de manera independiente el cálculo diferencial e integral, ellos hicieron fundamentalmente tres cosas: 1) Tomaron la riqueza de los métodos que existían para encontrar tangentes, puntos extremos y áreas, lo cual resumieron bajo el título de dos conceptos generales que ahora se llaman derivada e integral. 2) Trabajaron con notaciones distintas, que a la postre resultaron equivalentes. 3) Cada uno de ellos dio un argumento para formular lo que hoy en día se conoce como el Teorema Fundamental del Cálculo. Adicionalmente, de manera diferente e independiente, sistematizaron y generalizaron las ideas y procedimientos que habían sido abordados hasta el momento. Tanto el cálculo de Newton como el de Leibniz tratan de cantidades variables. Al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y de función, los fundamentos del cálculo infinitesimal presentan una falta de rigor muy alejada del carácter propio de la matemática. La presentación de Leibniz es poco rigurosa, pues presenta las diferenciales como entidades extrañas que, aunque las define, no se

	comportan como incrementos. Por su parte, el cálculo de fluxiones de Newton se basa en algunas demostraciones algebraicas que tampoco son convincentes (Mateus, 2011, p.11). El nuevo cálculo creado por estos dos matemáticos llegó a convertirse en universal, en cuanto se aplica del mismo modo a todo tipo de funciones, ya que Newton y Leibniz lo aplicaron con éxito para calcular: áreas como la cisoide o la cicloide, tangentes, problemas geométricos, longitudes de arco, y para problemas de máximos y mínimos, entre otros.

Noción de derivada

Stewart (2012) considera en primer lugar una interpretación geométrica de la derivada, como la pendiente de la recta tangente a una curva; posteriormente, se ocupa en encontrar la velocidad de un cuerpo e involucra el concepto de límite. Finalmente, lo interpreta como una razón de cambio. Se transcribe a continuación los elementos conceptuales de la derivada de una función, correspondiente al cálculo de una variable propuesto por Stewart (2012).

Tangente.

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere hallar la tangente a la curva C en el punto $P\big(a, f(a)\big)$, entonces se consideran puntos $Q(x, f(x))$ cada vez más cercanos a P, donde $x \neq a$, se determina la pendiente de la recta secante PQ como:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (1)$$

Entonces, cuando Q se acerca P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a, si m_{PQ} tiende a un número m, se define la tangente t como la recta que pasa por P con pendiente m

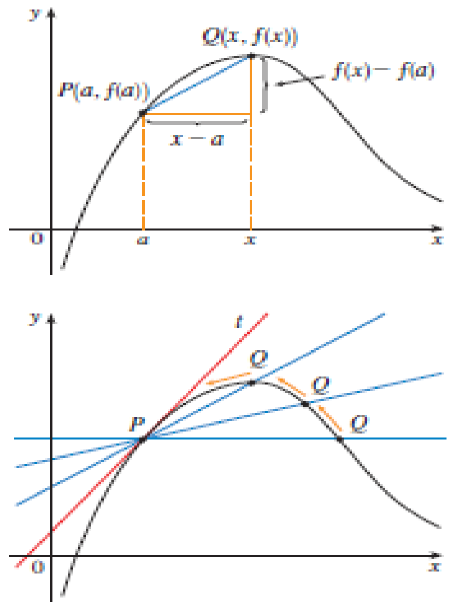


Figura 1. La recta tangente t es la posición límite de la recta secante – tomado de (Stewart,2012, p.144).

Definición 1: **la recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\big(a, f(a)\big)$, es la recta que pasa por P, con pendiente $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ siempre que el límite exista.

Posteriormente, se considera otra expresión para la pendiente de la recta tangente cuando se determina que $h = x - a$ despejando $x = a + h$, así la pendiente de la recta secante PQ es:

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (2)$$

Del mismo modo cuando x tiende a a, h lo hace a 0 ($h = x - a$), en consecuencia la expresión para la pendiente de la recta tangente, que se da en la definición 1, se convierte en:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (3)$$

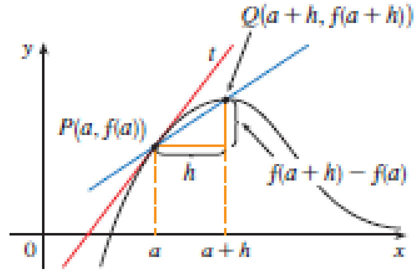


Figura 2. Muestra el caso de h >o – tomado de (Stewart,2012, p.145).

Velocidades.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia directa) del objeto respecto al origen, en el instante t. La función f que describe el movimiento se conoce como función de posición del objeto. En el intervalo de $t = a$, hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$ (ver figura 3). La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es:

$$velocidad\ promedio = \frac{desplazamiento}{tiempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (4)$$

Teniendo la misma expresión de la pendiente de la recta secante PQ, se tiene:

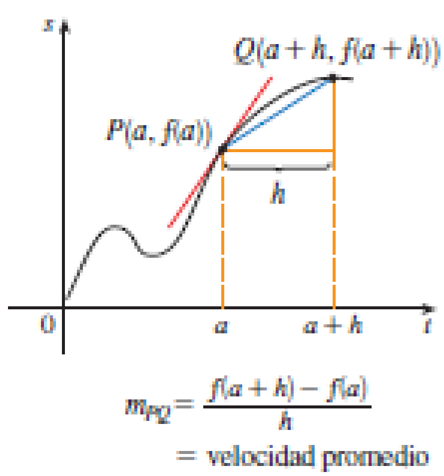


Figura 3. Velocidad promedio en un intervalo de tiempo h tomado de (Stewart,2012, p.145).

Si las velocidades promedio sobre intervalos $[a, a+h]$ se hacen más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0 se define la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$, en el instante $t = a$ como el límite de la velocidad promedio

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (5)$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P.

Razón De Cambio.

Se supone que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x. Si x cambia de x_1a x_2, el cambio en x se conoce como incremento de x está dado por: $\Delta x = x_2 - x_1$ y el cambio correspondiente en y es: $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ el cociente de diferencias es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (6)$$

Se llama **razón de cambio promedio de y con respecto a x** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ de la figura 4.

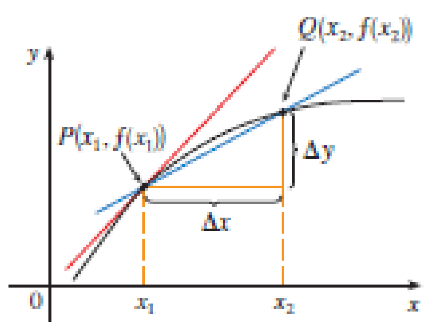


Figura 4. Razón de cambio promedio tomado de (Stewart,2012, p.148).

Por analogía con la velocidad, se considera que la relación de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por lo tanto, al hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas relaciones de cambio promedio se llama razón (instantánea) de cambio de y con respecto a x, en $x = x_1$, interpretando la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P\big(x_1, f(x_1)\big)$

$$razón\ de\ cambio\ instantánea = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (7)$$

Derivada.

Se ha visto que surge la misma clase de límite en la búsqueda de la pendiente de una línea tangente o la velocidad de un objeto. En realidad, los límites de la forma: $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ surgen cuando se calcula una razón de cambio y se define como la derivada de una función en un número a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (8)$$

Ahora haciendo que varíe a, reemplazando a con una variable x en la ecuación (8), se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (9)$$

Dado cualquier número x, para el cual este límite exista, se asigna a x el número $f'(x)$. De este modo se considera f' como una nueva función, llamada **derivada de *f*** definida por medio de la ecuación (9). El valor de $f'(x)$ se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f, en el punto $\big(x, f(x)\big)$.

Capítulo 4. Metodología

Se opta por un enfoque cualitativo; dado que la investigación busca describir aspectos relacionados con el desarrollo del pensamiento matemático en el aprendizaje de la derivada en un grupo de estudiantes de educación media, al implementar una propuesta didáctica con actividades desarrolladas en ambientes virtuales; se hace necesario adoptar el tipo descriptivo-interpretativo para alcanzar los objetivos trazados. Se establecen los instrumentos que permiten la descripción e interpretación de los aspectos del pensamiento matemático, que son evidentes en los estudiantes ante las actividades planteadas, se especifica la unidad de análisis de los participantes de la investigación; además, se describe la manera como se llevará a cabo el análisis e interpretación de los resultados con base en las categorías y subcategorías establecidas, indicando el desarrollo del pensamiento matemático a través de situaciones problemáticas expuestas en cada una de las sesiones.

Enfoque de investigación

El estudio tiene como objetivo analizar los procesos del pensamiento matemático del objeto derivada, a partir de situaciones modeladas y simuladas en entornos virtuales, en estudiantes de grado undécimo del instituto técnico Francisco Lucea de San Luis de Palenque. Se hace necesario implementar un enfoque de tipo cualitativo, permitiendo un acercamiento más global y comprensivo al entorno escolar, dando la posibilidad al investigador de observar y analizar el fenómeno de estudio, aportando mayor información descriptiva y así comprender el contexto sobre lo que se está investigando. Gallardo (2017) menciona que “la investigación cualitativa no estudia la realidad en sí, sino cómo se construye la realidad. Esto implica estudiarlo desde el punto de vista de las personas y enfatizar el proceso de comprensión” (p.22).

La investigación cualitativa pretende analizar las cualidades de un fenómeno de estudio, permitiendo al investigador obtener la información de distintas maneras, como la observación y descripción de procesos asociados a la conducta humana. Taylor y Bogdan (1986) consideran, en un sentido amplio, la investigación cualitativa como "aquella que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable"(p.20).

Este enfoque, permite establecer instrumentos de recolección no estandarizados ni absolutamente predeterminados; puesto que el análisis del estudio no es estadístico, no se emplean mediciones numéricas. Los principales instrumentos utilizados en esta investigación, fueron las actividades planteadas bajo la implementación de los ambientes virtuales, la observación directa e interpretación de los resultados en las sesiones de clase, permitiendo analizar y describir a profundidad el fenómeno de estudio.

Tipo de investigación

La investigación, es de tipo descriptivo-interpretativo, ya que el estudio pretende proporcionar una descripción de la apropiación que conciben los estudiantes en el aprendizaje de la derivada e interpretar un análisis de los procesos del Pensamiento Matemático que se evidencian en la solución de situaciones problemáticas mediadas por las Tic con estudiantes de grado undécimo del Instituto Técnico Francisco Lucea.

La metodología de tipo descriptivo-interpretativo como modelo a seguir, nos permitió describir el comportamiento y particularidades de los estudiantes, al enfrentar situaciones problemáticas de la derivada como razón de cambio mediadas por ambiente virtuales. Hernández, Fernández y Baptista (2010) afirman que la investigación cualitativa de tipo descriptivo “Busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis, con el fin de establecer su estructura o comportamiento” (p. 92).

Se pretende recolectar la información de manera independiente para así, poder describir lo analizado, además la investigación descriptiva-interpretativa sirve como base para investigaciones que requieran un mayor nivel de profundidad, “los estudios descriptivos miden de forma independiente las variables y aun cuando no se formulen hipótesis, tales variables aparecen enunciadas en los objetivos de investigación.” (Arias, 2006 a, p.25). Esto permite describir de manera más profunda los aspectos del pensamiento matemático que emergen de la implementación de los ambientes virtuales.

Unidad de análisis

En la investigación se consideró como unidad de análisis al grupo de estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Francisco Lucea del municipio de San Luis de Palenque en el departamento de Casanare. El grado cuenta con un total de veinte estudiantes con edades desde los 14 a 17 años de edad. Siendo 13 mujeres y 7 hombres en estratificación 1 y 2. Son jóvenes provenientes de familias trabajadoras en el comercio, la agricultura y la ganadería; el 40 % de ellos viven en zonas rurales aledañas al casco urbano. Además, son estudiantes comprometidos con las actividades institucionales y se proyectan profesionalmente con estudios universitarios en las distintas universidades nacionales.

Son estudiantes que, en el transcurso del año escolar, se han destacado en el área de matemáticas, presentan aptitudes en los procesos algorítmicos, en las representaciones graficas de funciones mediante el uso de aplicaciones especializadas en la visualización dinámica de objetos matemáticos. También, presentan dificultades en los procesos de análisis, caracterización y descripción en la solución de situaciones problemáticas contextualizadas en distintos fenómenos físicos.

Etapas de la investigación

En el desarrollo de la investigación, se determinaron unas etapas para poder alcanzar los objetivos establecidos, en la primera etapa se presenta la delimitación del problema enmarcado en el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de grado undécimo; en la segunda etapa, la revisión teórica, la cual permitió sustentar el fenómeno de estudio, determinado por el pensamiento variacional, los sistemas de representación semiótica, la modelación, la incorporación de la tecnología en la educación y la fundamentación teórica de la derivada; en la tercera etapa se elaboraron y validaron los instrumentos y ambientes virtuales, los cuales fueron pensados y concebidos en el desarrollo de los diferentes tipos de representación como verbal, gráfico, numérico y analítico, para poder llegar a una descripción e interpretación más profunda del fenómeno a estudiar; en la cuarta etapa se aplicaron y evaluaron los ambientes, que fueron establecidos en seis sesiones de dos horas cada una, desarrolladas dentro del plan de área del docente; en la quinta etapa se analizó información obtenida, teniendo en cuenta las categorías de análisis deductivas descritas en la tabla 2 finalizando el capítulo; finalmente, se formularon las conclusiones en el capítulo sexto.

Figura 5. Etapas de la investigación – fuente: elaboración propia.

Primera etapa: delimitación del problema.

Inicialmente se desarrolló una indagación centrada en el pensamiento matemático, la importancia de la tecnología en los procesos de aprendizaje en diferentes estudios del cálculo diferencial, específicamente en el aprendizaje y comprensión de la noción de derivada. Así mismo, se consideraron los antecedentes, los cuales ha sido expuestos en el marco del pensamiento variacional, el papel que desempeña los sistemas de representación, distintos errores y dificultades en el aprendizaje de la derivada y finalmente el uso adecuado de diferentes programas informáticos para modelar distintas representaciones dinámicas de un objeto matemático.

La consolidación de los antecedentes permitió determinar el problema de la investigación centrado en el análisis de los procesos del pensamiento matemático en situaciones modeladas y simuladas en entornos virtuales. Para la solución de dicha problemática, fue necesario determinar un marco teórico en relación con el aprendizaje de la derivada, el pensamiento variacional, la modelación, los sistemas de representación y la incorporación de la tecnología en los procesos educativos, que permitiera sustentar la investigación, del mismo modo escoger una metodología adecuada para analizar, describir e interpretar aspectos del pensamiento matemático como la modelación, el razonamiento, la generalización y la abstracción a través de situaciones modeladas en ambientes virtuales.

Segunda etapa: revisión teórica.

Una vez realizada la búsqueda en distintas investigaciones que tuvieran relación con el pensamiento matemático, haciendo especial énfasis en el pensamiento variacional que se utiliza al momento de analizar, solucionar y modelar situaciones problemáticas de la derivada como razón de cambio. Se estructuró un marco teórico que permitiera fundamentar la investigación planteada basado en la teoría de las representaciones semióticas expuesta por Duval; la modelación como herramienta para formular, resolver e interpretar fenómenos relacionados con la variación y el cambio; la importancia de la utilización de los diferentes recursos informáticos, que han permitido un acercamiento a la comprensión de la matemática; el papel de los ambientes virtuales en los procesos de enseñanza enfatizando en los factores que proporcionan y finalmente una fundamentación de la derivada. Para ello, fue necesario recurrir a distintas fuentes bibliográficas como bases de datos, libros, tesis doctorales y distintos artículos de investigación de carácter nacional e internacional que nos permitió recopilar, organizar y tomar una postura frente a todos los referentes teóricos que se utilizaron en esta investigación.

Tercera etapa: elaboración del instrumento, ambientes virtuales y gráficos dinámicos.

los instrumentos, consistieron en la producción de seis ambientes virtuales, se puso en consideración el tratamiento del objeto derivada mediante situaciones problemáticas, en donde se evidenciaba el cambio. Además, cada ambiente tenía unas actividades para desarrollar de forma escrita con relación a la observación, manipulación y análisis de lo planteado por el ambiente.

Para el diseño de las situaciones se tuvieron en cuenta las dificultades y consideraciones propuestas por Dolores (2007), Azcarate y otros (1996), quienes manifiestan la importancia de considerar las concepciones previas de los alumnos con relación a la velocidad y utilizar las representaciones gráficas de funciones para de esta manera poder visualizar la razón de cambio como la pendiente a una curva. Las actividades propuestas se pensaron para poner en evidencia diferentes tipos de registro (verbal, gráfico, numérico y analítico), permitiendo un tratamiento entre los mismos, como es el caso de la pendiente que puede ser considerada desde el punto de vista gráfico y mediante una razón de cambio para poder determinar su valor numérico.

Una vez elaborado los ambientes con sus respectivas actividades, se sometieron a una validación por parte de un experto en diseño de instrumentos mediados por las Tic. Posteriormente, se realizaron las correcciones y modificaciones que dieron como resultado una propuesta para el aprendizaje de la derivada como razón de cambio.

Cuarta etapa: aplicación de los ambientes virtuales.

Se planificaron seis sesiones de clase, una actividad de experimentación y simulación de un fenómeno físico tomada como actividad diagnostica y cinco dedicadas al desarrollo de los ambientes virtuales, que se presentan a continuación en un cuadro con los contenidos y objetivos propuestos.

Tabla 2
Propósitos planteados para cada una de las sesiones – fuente: elaboración propia.

Sesión	Propósito
Primera	• Identificar problemas físicos que relacionan el desplazamiento con el tiempo. • Realizar el tratamiento de un registro tabular a un registro gráfico. • Plantear el cálculo de la velocidad media en distintos intervalos de tiempo.

	• Realizar un registro verbal que describa el fenómeno físico.
Segunda	• Identificar la relación existente entre la velocidad media y la velocidad instantánea. • Plantear el cálculo de la velocidad instantánea de un cuerpo que sigue una trayectoria parabólica. • Identificar la razón de cambio promedio dando solución a la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ • Analizar un registro gráfico que modela el comportamiento de un cuerpo que es lanzado parabólicamente.
Tercera	• Determinar la relación entre la velocidad media y la pendiente de la recta secante. • Determinar la relación entre la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente. • Representar gráficamente la recta tangente a una curva. • Representar gráficamente la recta secante a una curva. • Plantear el cálculo de pendiente de la recta secante en distintos intervalos. • Describir el proceso analítico de cuando h se aproxima a cero.
Cuarta	• Describir el lugar geométrico del triángulo que se forma entre Δx , Δy y la recta secante. • Incorporar el límite a la definición de derivada. • Identificar la definición de la razón de cambio instantánea.
Quinta	• Caracterizar la función derivada. • Determinar la expresión algebraica de la derivada de una función. • Plantear el cálculo de la derivada de una función con el paso al límite.

Quinta y sexta etapa: análisis de la información y redacción de conclusiones

Se describe de forma detallada la aplicación y solución de cada una de las actividades propuestas, asentando algunas intervenciones de los estudiantes y del docente que son relevantes para el análisis y la caracterización de los procesos del pensamiento matemático y la aceptación de la propuesta didáctica basada en la implementación de ambientes virtuales para el aprendizaje de la derivada. Además, se realizó una caracterización de los ambientes virtuales determinando la competencia digital respecto al dibujo, funcionamiento y modelación.

Categoría de análisis

Tabla *3*

Categorías y subcategorías de análisis – fuente: elaboración propia.

Categoría	Subcategorías	Actividad	Instrumento
Lenguaje tabular	Descripción de tablas valores del desplazamiento y tiempo.	1 a	Ambiente 1
	Aproximación velocidad media.	1 c ,1 d, 1 e 2 b	Ambiente 1 Ambiente 2
	Aproximación a razón de cambio promedio.	2 c	Ambiente 2
Lenguaje gráfico	Construcción de gráfica a partir de registro tabular de movimiento.	1 a	Ambiente 1
	Interpretación de la tangente como aproximación de secantes.	3 a, 3 b, 3 c, 3 e,	Ambiente 3
	Descripción e interpretación del significado del movimiento en las gráficas.	1 b	Ambiente 1

	Caracterización del triángulo determinado por los incrementos.	4 a	Ambiente 4
	Descripción e interpretación del significado de la velocidad en las gráficas.	1 a, 2 b	Ambiente 1 Ambiente 2
	Interpretación entre la relación de la razón de cambio promedio e instantánea.	4 b	Ambiente 4
	Construcción gráfica de la función derivada.	5 a	Ambiente 5
Lenguaje natural	Descripción del movimiento.	1 f	Ambiente 1
	Descripción de la velocidad.	2 b	Ambiente 2
	Descripción del límite de una sucesión de rectas secantes a la tangente.	3 f	Ambiente 3
	Caracterización de propiedades de la función derivada.	5 c	Ambiente 5
Conversión entre registros algebraico a gráfico	Caracterización de la velocidad en un punto.	2 c	Ambiente 2
	Conversión de registro tabular a registro gráfico de rectas secantes como aproximación a tangente.	3 g	Ambiente 3
	Expresión del límite de sucesión de secantes.	4 c	Ambiente 4
Tratamiento en lenguaje algebraico	Aproximación al objeto derivada como límite de una pendiente, cociente, etc.	5 d	Ambiente 5

Capítulo 5. Análisis

En este capítulo se proporciona un análisis de los datos que se obtuvieron en el desarrollo de la investigación, se detalla una descripción y se ilustran los gráficos dinámicos que se crearon en el aplicativo GeoGebra para elaborar las situaciones problemáticas presentadas en la propuesta; finalmente, se elabora una caracterización de los ambientes y se desarrolla un análisis a posteriori de algunas de las actividades propuestas.

Descripción de la experiencia y análisis de resultados

Se determinaron algunos aspectos generales resaltando las dificultades, aciertos e intervenciones de los alumnos que fueron relevantes en el desarrollo de cada sesión, poniendo en evidencia algunas respuestas que tienden a ser generales en todos los estudiantes; de este modo, se describió la aceptación de la propuesta didáctica y se determinaron algunos aspectos del pensamiento matemático.

Adicionalmente, se hace una interpretación de cada una de las actividades para el aprendizaje de la derivada, describiendo aspectos relevantes de las categorías y subcategorías expuestas anteriormente, los datos provienen de la solución de cada uno de los estudiantes y las observaciones realizadas por el profesor – investigador. En el análisis se consideraron todas las respuestas, dado que en la solución de las actividades se evidencian concepciones matemáticas y físicas, mostrando aciertos y dificultades más significativos en relación con la variación y la apropiación de la derivada vista como razón de cambio.

Descripción del módulo para experiencias mecánicas

El módulo para experiencias mecánicas (MEM) es una herramienta que facilita el aprendizaje de la física, especialmente la cinemática y dinámica; ya que en él se simulan situaciones relacionadas con el movimiento, como el movimiento rectilíneo uniforme, el movimiento rectilíneo variado, movimiento circular, movimiento semi parabólico, entre otros. Gracias a este material, el estudiante tuvo la oportunidad de identificar, visualizar y analizar situaciones problemáticas que se reflejan en la realidad, logrando validar mediante la experimentación diferentes teorías físicas.

El MEM cuenta con varios accesorios que complementan la eficacia de dicha herramienta. Se compone de:

1. Rampla: la rampla está hecha de acero inoxidable.
2. Foto celdas y cronómetro: estas van conectadas a un cronómetro que nos permite visualizar el tiempo que se demora el cuerpo de una fotocelda a la otra.
3. Un cuerpo: el cuerpo del MEM es un balín que hace referencia a la partícula que se desplaza por la rampla.
4. Cinta métrica o metro: nos permite medir las distancias recorrida del cuerpo de x a x’
5. Soportes: son los que van sujetos a las fotoceldas y facilitan su desplazamiento.

Figura 6. Montaje experimental para un MRU fuente: elaboración propia

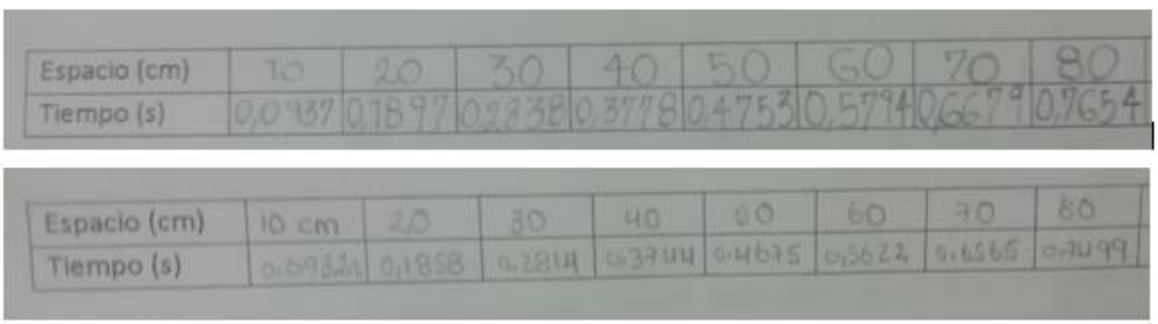
Descripción de la actividad 0: Practica experimental de un movimiento rectilíneo uniforme

Se considera esta actividad como una prueba diagnóstica, en relación con algunos aspectos como: la modelación, simulación, argumentación y representación gráfica del comportamiento de un cuerpo que experimenta un movimiento rectilíneo uniforme. El MEM se utilizó como herramienta para realizar una práctica experimental con los estudiantes, mostrándoles una situación relacionada con la variación y el cambio de un fenómeno físico. Material que fue utilizado gracias al apoyo del MSc. Simón Bolívar Cely.

Iniciando la clase, el profesor explicó el funcionamiento y las características del módulo para la experimentación, se mencionaron todas las prácticas que en él se pueden simular y analizar, se les explicó a los estudiantes que la práctica experimental que van a simular, corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme, y cómo los datos que tendrán que registrar son experimentales se deben tomar registro de tres y sacarle su respectivo promedio, disminuyendo el margen de error.

Se organizaron grupos de a cinco estudiantes para que puedan simular y registrar los datos necesarios para solucionar las preguntas de la actividad (ver Anexo 1).

Los estudiantes se mostraron muy interesados por comenzar la actividad, pues era la primera vez que ellos realizaban una práctica experimental en física; en la primera actividad los estudiantes pasaban el cuerpo por la rampa y tomaban el registro del tiempo en segundos en varios intervalos de espacio, registrándolos en una tabla de datos. Se observó que algunos no entendían el valor que arrojaba el cronómetro, dado que los valores eran menores que un segundo; gracias al trabajo colaborativo en los grupos todos los estudiantes pudieron determinar los datos para completar la tabla. El gráfico muestra algunos registros tabulares de los estudiantes.



Espacio (cm)	10	20	30	40	50	60	70	80
Tiempo (s)	0,0937	0,1897	0,2838	0,3778	0,4753	0,5794	0,6679	0,7654

Espacio (cm)	10 cm	20	30	40	50	60	70	80
Tiempo (s)	0,0982	0,1858	0,2814	0,3744	0,4675	0,5622	0,6566	0,7499

Figura 7. Registro tabular por algunos estudiantes.

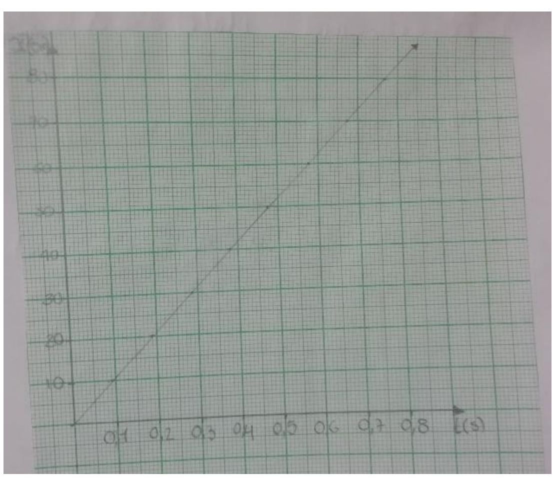
Luego de que cada grupo visualizó y analizó la situación propuesta, se dio el tiempo para que dieran solución a las preguntas en relación a los datos. En la representación gráfica no surgieron preguntas, se observó que, todos los estudiantes entendieron y representaron el movimiento, teniendo en cuenta que las unidades de la variable independiente fue el tiempo en segundos y las unidades de la variable dependiente fueron los centímetros.

Finalmente, dando respuesta a las velocidades media que experimentaba el cuerpo algunos mencionaron que era exactamente igual que en clase de física, relacionando la razón de cambio con la fórmula $v = \frac{dezplazamiento}{tiempo}$. al pedirles una conclusión respecto a la velocidad algunos no respondieron, otros contestaron que el movimiento era directamente proporcional, otros si determinaron que la velocidad permanecía constante en toda su trayectoria.

Análisis de la actividad

En la primera actividad se les solicita a los estudiantes que registren unos datos del tiempo del desplazamiento del cuerpo entre la primera y la segunda fotocelda, teniendo en cuenta que la primera fotocelda es fija en $x = 0\ cm$ y la segunda se desplaza hacia la derecha cada 10 cm. Se pudo establecer que las actividades experimentales y la toma de datos de situaciones reales facilita la representación de los registros tabulares, dado que el 100% de los estudiantes tomaron y representaron correctamente los datos.

Posteriormente, en el inciso b) se considera que el 75% (15 estudiantes) realizan correctamente la representación gráfica que modela el movimiento del cuerpo. Determinado que en el eje *x* exponen los segundos y en el eje *y* los centímetros; el otro 25% (5 estudiantes) tuvieron dificultades en el patrón de unidad del tiempo, representando los puntos coordenados sin tener en cuenta todos los decimales. Aunque los datos son tomados experimentalmente y existe un grado de error estas representaciones muestran el comportamiento de un cuerpo que experimenta un movimiento rectilíneo uniforme.



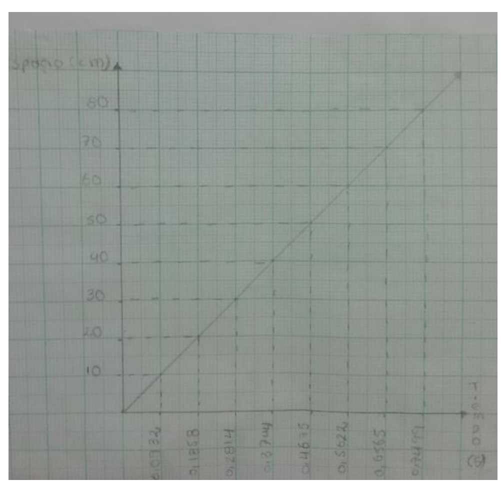
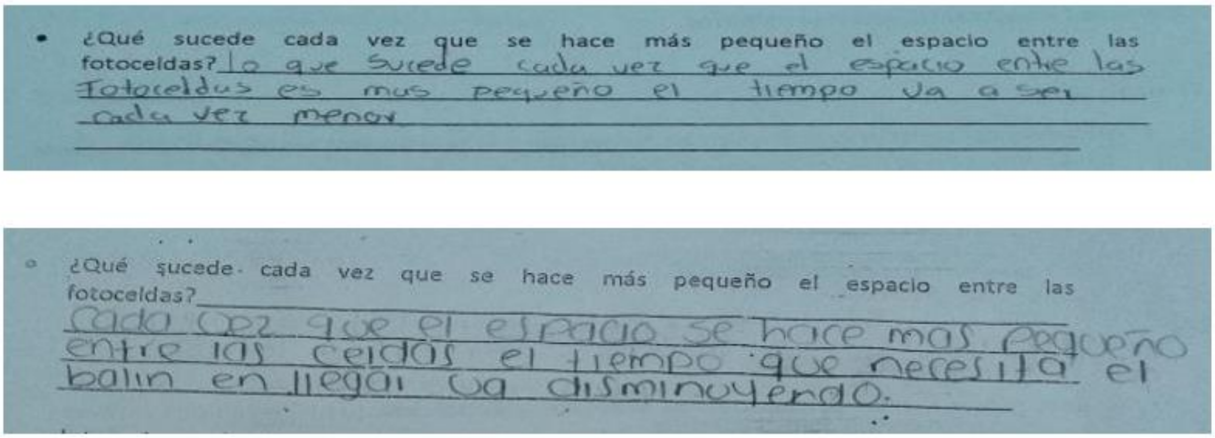


Figura 8. Representación gráfica del movimiento.

En relación con el inciso c), al preguntarles qué sucedía cuando se hacía más pequeño el espacio entre las fotoceldas, se pudo determinar que solo el 50%(10 estudiantes) pueden expresar en un lenguaje natural, que cada vez que el espacio entre las fotoceldas es más pequeño, el tiempo también va siendo más pequeño. La figura 9 muestra algunas de las respuestas más comunes.



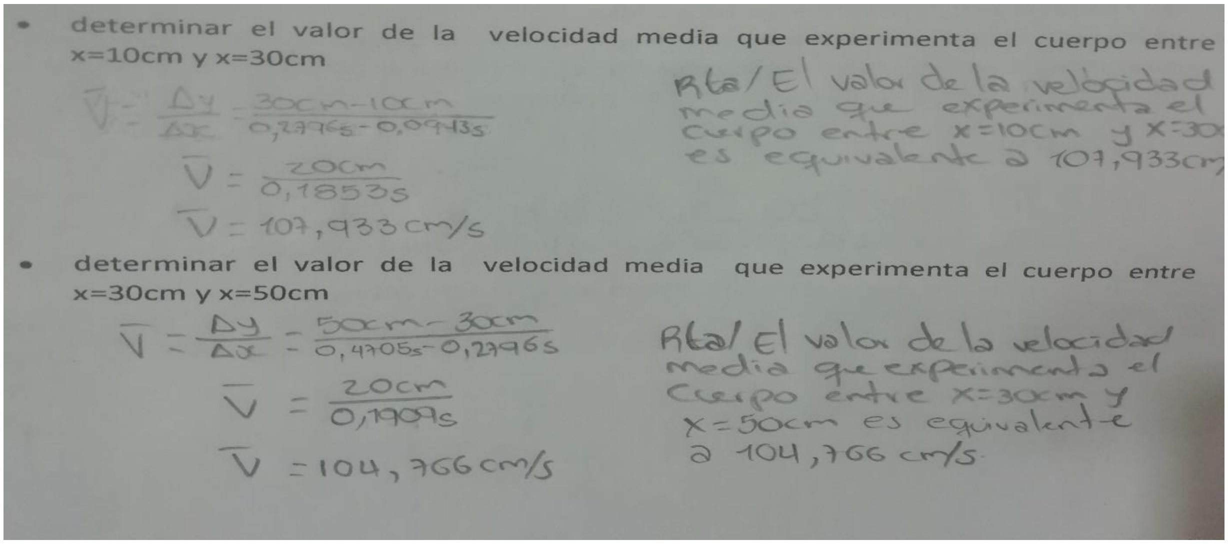
- ¿Qué sucede cada vez que se hace más pequeño el espacio entre las fotoceldas? lo que Sucede cada vez que el espacio entre las Fotoceldas es mas pequeño el tiempo va a ser cada vez menor

- ¿Qué sucede cada vez que se hace más pequeño el espacio entre las fotoceldas? cada vez que el espacio se hace mas pequeño entre las celdas el tiempo que necesita el balin en llegar va disminoyendo.

Figura 9. Descripción por estudiantes.

De los 20 trabajos que se obtuvieron, se observó que en un 80% (16 estudiantes) pudieron determinar correctamente la variación media en los intervalos usando el algoritmo $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, adicionalmente expresaron que ese valor era la velocidad media ($\bar{v}$) del cuerpo en un intervalo de tiempo, 13 de los estudiantes la determinaron con las unidades en cm/s,

El otro 20% (4 estudiantes) tuvo dificultades en varios aspectos, como: definir los valores $f(b)\ y\ f(a)$ confundiendo el desplazamiento con el tiempo que arrojaba el cronómetro, expresaron la velocidad media como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ y posteriormente no les dio el valor numérico correcto. Estos estudiantes no reconocen la magnitud de la velocidad ni mucho menos las unidades de medida, esto quiere decir que no hay reconocimiento de los registros gráficos a un registro numérico para determinar analíticamente la variación media en un fenómeno físico.



- determinar el valor de la velocidad media que experimenta el cuerpo entre x=10cm y x=30cm

$\bar{V} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30cm-10cm}{0,2776s-0,0913s}$

$\bar{V} = \frac{20cm}{0,1853s}$

$\bar{V} = 107,933 cm/s$

Rta/ El valor de la velocidad media que experimenta el cuerpo entre x=10cm y x=30 es equivalente a 107,933cm

- determinar el valor de la velocidad media que experimenta el cuerpo entre x=30cm y x=50cm

$\bar{V} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{50cm-30cm}{0,4705s-0,2796s}$

$\bar{V} = \frac{20cm}{0,1909s}$

$\bar{V} = 104,766 cm/s$

Rta/ El valor de la velocidad media que experimenta el cuerpo entre x=30cm y x=50cm es equivalente a 104,766 cm/s.

Figura 10. Calculo de la velocidad media por un estudiante.

Finalmente, en el inciso e) Solo un 40% de ellos conjeturaron que las velocidades eran constantes y que el cuerpo no experimentaba un cambio de velocidad en su trayectoria. Un 60% solo describieron los valores de las dos variaciones, sin dar una interpretación de los datos; algunas de sus respuestas fueron:” podemos concluir que la velocidad media que experimenta en 10cm y 30 cm es de $106{,}5530\ {}^{cm}/_{s}$ y en 30cm y 50cm $106{,}666\ {}^{cm}/_{s}$” “que a medida de que el tiempo avanza va aumentando su velocidad”.

Figura 11. Experimentación del fenómeno.

Figura 12. Toma de datos experimentales.

Descripción de la actividad 1: Representación gráfica a partir de registro tabular

Se realizó un estudio previo de las concepciones de los estudiantes trayendo a consideración la definición de función su importancia, dada su aplicabilidad en distintos campos del conocimiento; por otro lado, se les expuso que Stewart (2012) menciona su funcionalidad en la ingeniería, en la economía, biología, la química, entre otros. Considerando que existen distintos fenómenos físicos que se pueden ser modelados desde la variación y el cambio.

De esta manera se introduce el tema de la razón de cambio en distintos fenómenos, tales como la velocidad de un cuerpo, el crecimiento de una población, el costo marginal de una producción, entre otros. Definiendo la razón de cambio como el cociente entre Δy y Δx , dando a conocer que $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ intentando dar significado a las expresiones dadas, se consideró su interpretación gráfica de los elementos mencionados. Se mencionó que la velocidad media de un cuerpo experimenta una razón de cambio entre el desplazamiento y el tiempo. Se les preguntó ¿Qué sucede si la velocidad media da negativa o cero? inmediatamente algunos contestaron: el cuerpo se devuelve o permanece en reposo. Después se presentaron algunos ejemplos y ejercicios con representaciones gráficas y solución algebraica de la razón de cambio; posteriormente a los 40 minutos se les indicó que encendieran sus computadores y se les explicó la actividad propuesta para la clase mediante el ambiente virtual. La figura 13 representa el gráfico dinámico del primer ambiente virtual.

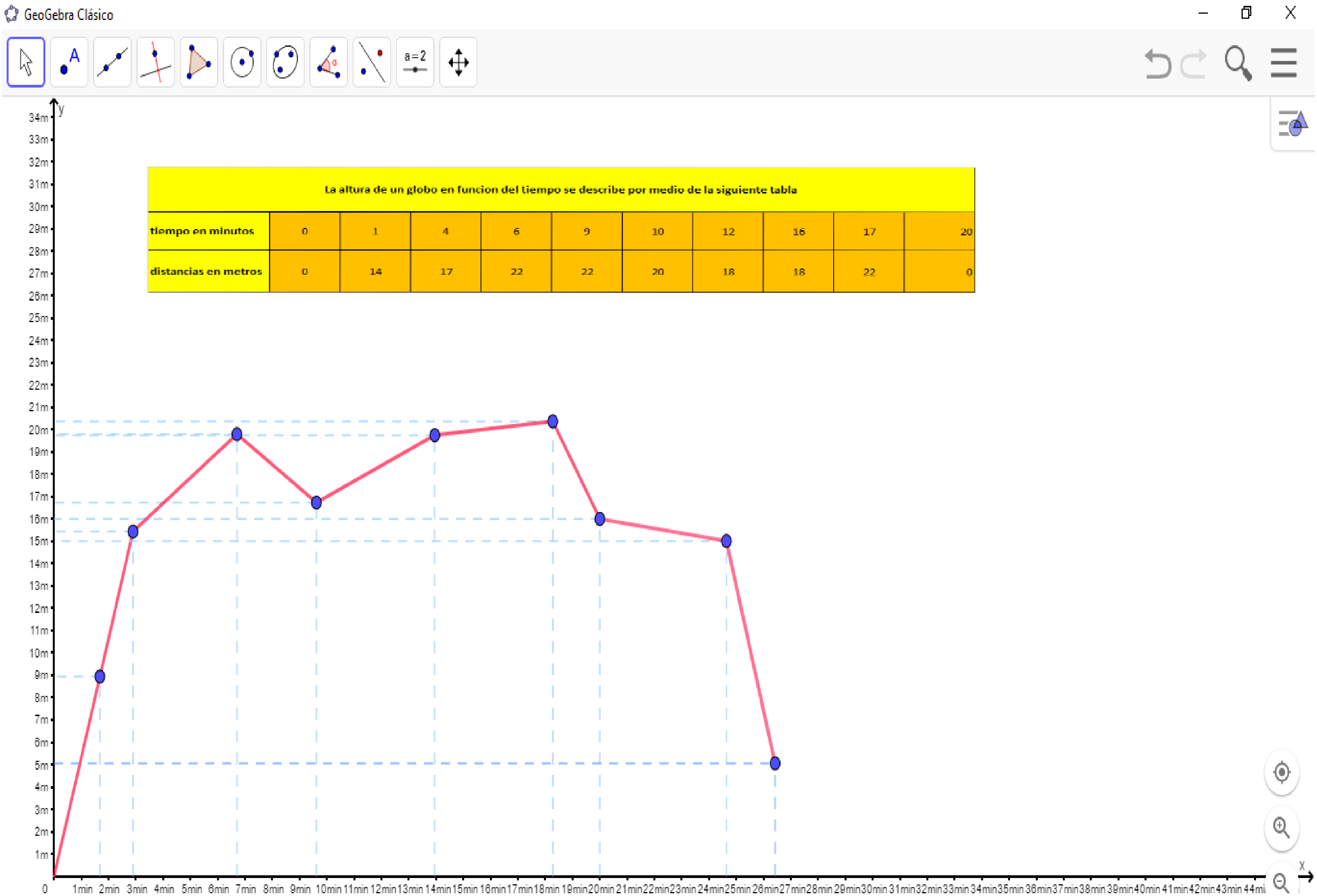


figura 13. Representación gráfica del primer ambiente virtual fuente: elaboración propia.

Cada estudiante dispuso de un computador con el software GeoGebra y el aplicativo con las situaciones problemáticas para que de manera individual resolvieran las situaciones (Anexo 2). Es importante mencionar que todos los alumnos que hicieron parte de la investigación conocen y manejan todas las herramientas del software. Se dio un tiempo de cinco minutos para que cada uno pudiera explorar y manipular el ambiente. Se pudo observar a priori que algunos de los estudiantes tienen dificultades en las unidades de medida que intervienen en el problema y en el patrón de unidad al momento de realizar el gráfico. Por otro lado, la mayoría pudo realizar de manera correcta el registro gráfico de la situación planteada, poniendo en evidencia el tratamiento de la representación.

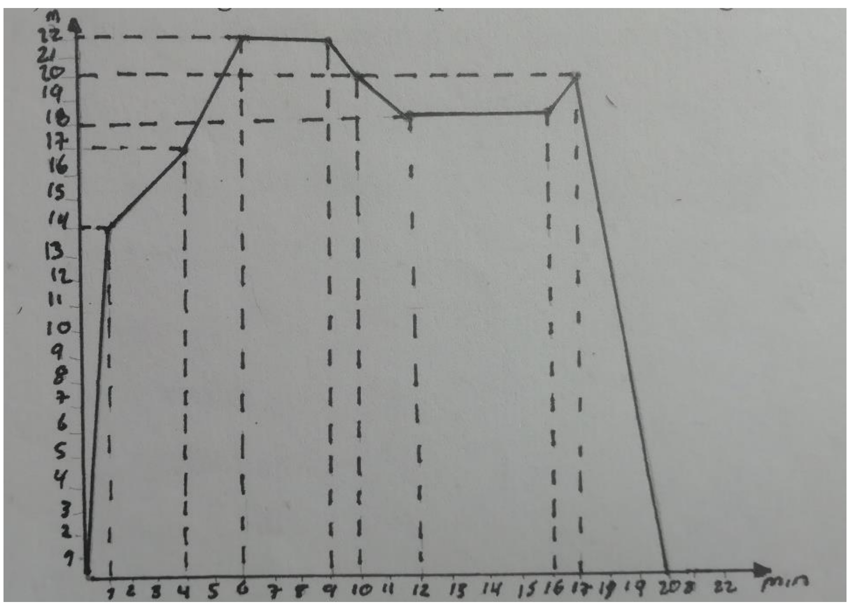


Figura 14. Solución por un estudiante de la conversión del registro tabular a registro gráfico

En el trascurso de la clase surge la pregunta ¿cómo se halla la velocidad media? Un estudiante contesta: “la variación de y con la variación en x” recordando verbalmente $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, se mencionan a continuación algunos diálogos entre el docente y algunos alumnos.

Estudiante1: profe ¿Cómo hago para saber la velocidad media si no nos dan función?

Profesor: no, muy bien, en este caso no nos dan función, pero nos dan una tabla de valores, la pregunta sería ¿Qué representan esos valores?

Estudiante 1: representan un valor en x que sería el tiempo y su imagen en y que sería la altura

Con lo anterior, se puede determinar que existe un cambio de registro tabular a un registro gráfico. Posteriormente, otro alumno intervino y comentó.

Estudiante 2: ¿Profe, es decir que la imagen de x_1 *es* $f(x_1)$*?*

Profesor: si

Estudiante 2: o sea que $f(x_1) = 17$ *y* $f(x_2) = 22$*.*

Profesor: sí, muy bien.

Estudiante 2: es decir, que la razón de cambio es cinco medios.

Profesor: exacto, ese es el valor numérico, además la idea es mirar e interpretar ese valor, teniendo en cuenta que nos están preguntando es una velocidad, no un número.

Estudiante 2: o sea metros sobre segundos.

Revisando sus respuestas, todos logran determinar las velocidades medias, pero se les dificulta hacer una descripción del movimiento, ya que se les preguntó la velocidad media en distintos intervalos de tiempo donde daba como resultado valores mayores que cero, menores que cero y cero. Además, aunque se mencionó lo de las unidades de la velocidad muchos no la tuvieron en cuenta en la solución. La imagen muestra la solución de la mayoría de los estudiantes.

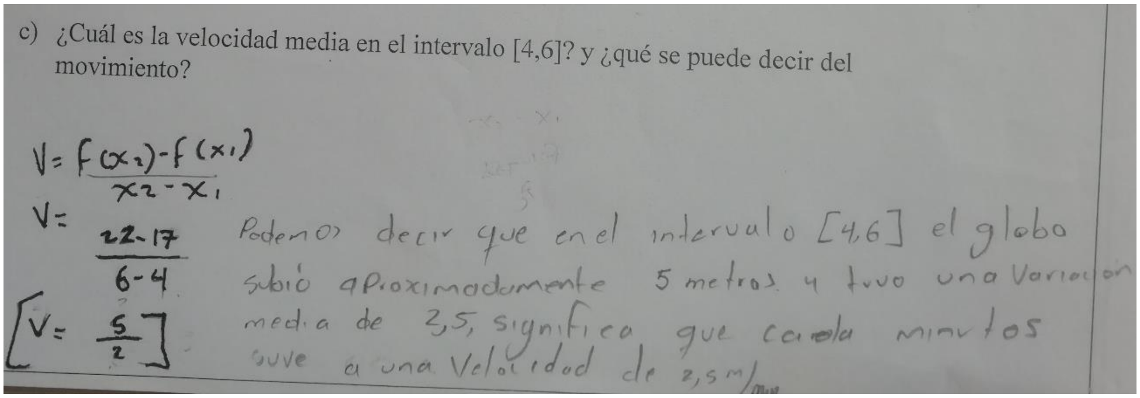


Figura 15. Aproximación de la velocidad media por un estudiante.

En el desarrollo de la actividad, se pudo observar que existe un mayor interés en la solución de ejercicios, una amplia participación y una mejor comunicación entre el docente - alumno y alumno – alumno. Se termina la clase solicitando que entreguen sus respuestas.

Análisis de la primera sesión

La actividad propone una comprensión del gráfico que se genera a partir de la interpretación del registro tabular, calculando la velocidad media en distintos instantes. Se construyó una red que muestra la codificación de los resultados de los estudiantes.

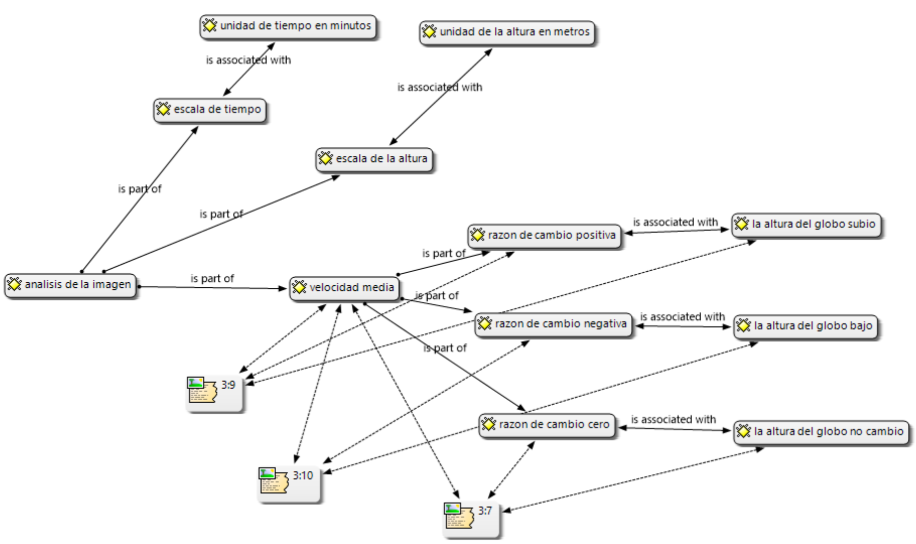


Figura 16. Red del análisis de la interpretación gráfica – fuente: elaboración propia. (ver anexo 3)

Se estableció que los estudiantes por medio del pensamiento visual determinan la unidad de medida de las variables que interactúan en el problema, considerando que la situación problemática proporcionó información de una representación tabular, propicio identificar como variable independiente el tiempo en minutos y la variable dependiente la altura en metros. Mediante lenguaje gráfico identifican fácilmente la altura máxima del globo y el tiempo total del desplazamiento; del mismo modo, por medio de la observación del gráfico determinan el desplazamiento del cuerpo, puesto que en distintos intervalos realizan una aproximación de la velocidad media, concluyendo que el globo pasa por varios episodios donde su velocidad es creciente, decreciente y cero. Determinando finalmente mediante lenguaje natural la descripción del movimiento del cuerpo en toda su trayectoria.

En el inciso b) aproximadamente el 80% de los estudiantes respondieron correctamente, sumando los desplazamientos que realiza el globo en toda su trayectoria. El otro 20 % no lograron comprender que, aunque existían intervalos en que el cuerpo descendía, ese valor también representa un desplazamiento, restándole dicho valor a las alturas alcanzadas. Dando significado a las velocidades promedio en los apartados c), d) y e). El 50 % de los estudiantes determinaron su valor adecuado y con unidades apropiadas en metros por segundo; el otro 50 % dieron su valor correcto sin tener en cuenta las unidades.

Descripción de la actividad 2: Representación gráfica a partir de registro algebraico

A continuación, se muestra el gráfico dinámico del segundo ambiente virtual.

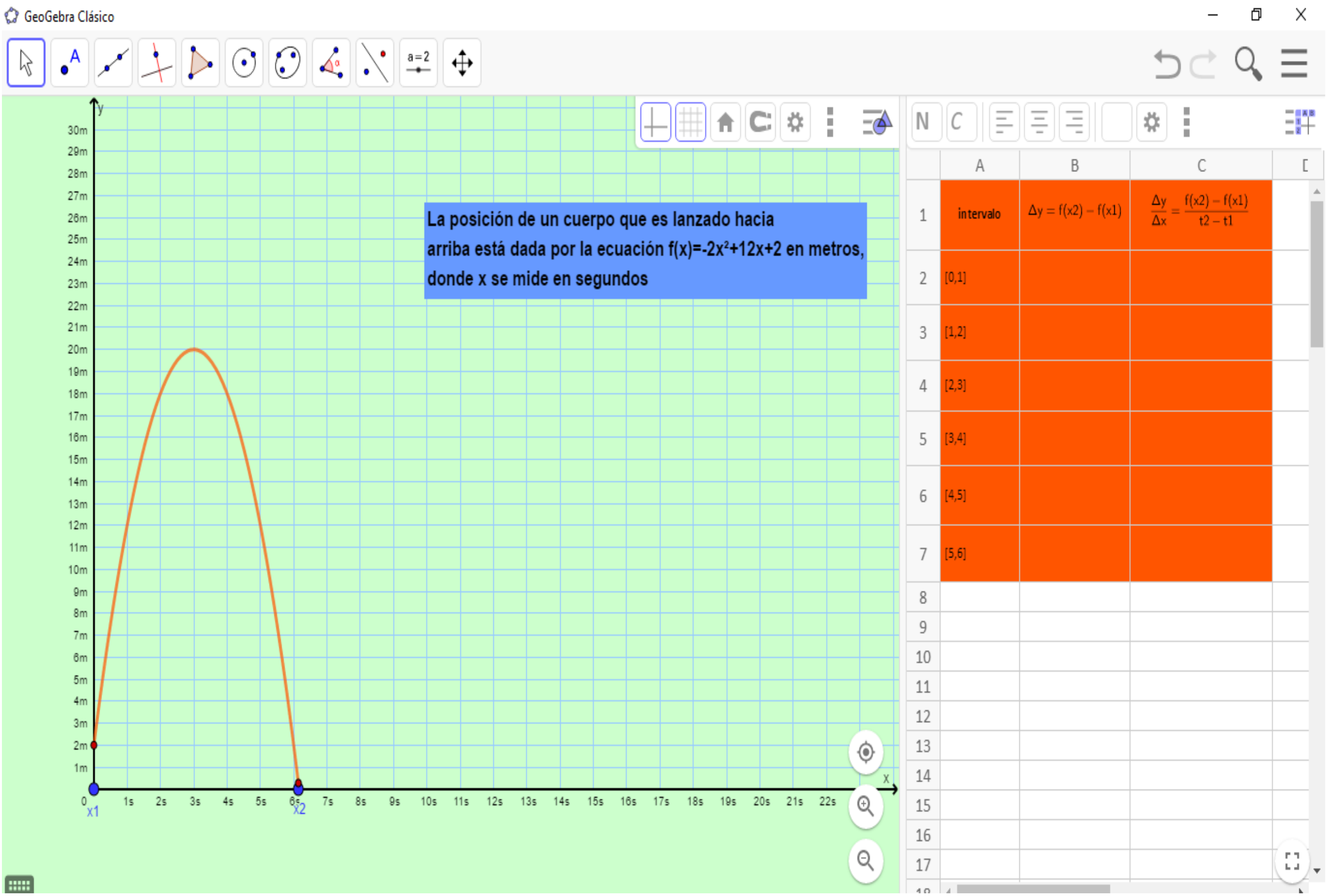
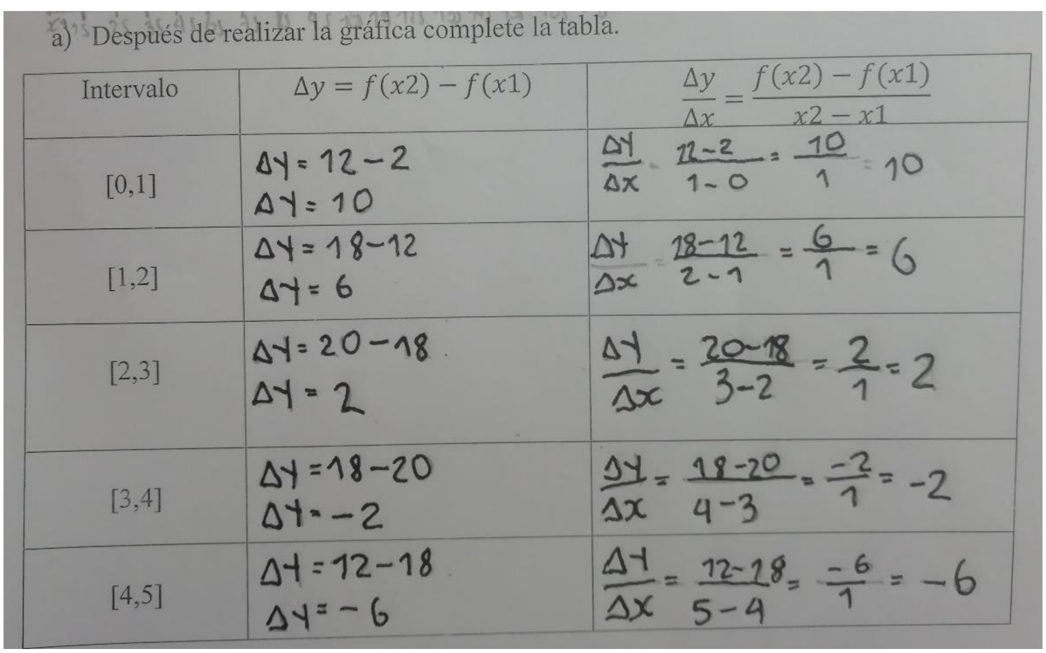


Figura 17. Representación gráfica del segundo ambiente virtual – fuente: elaboración propia.

Se le entregó a cada estudiante nuevamente un computador y la copia de la actividad propuesta (ver Anexo 4); se dio un espacio de cinco minutos para que observaran y manipularan los elementos del ambiente, determinando su funcionalidad y miraran la forma dinámica en que mostraba la situación problemática; en este pequeño espacio no se observó ninguna intervención y el salón estuvo en total silencio.

Posteriormente algunos determinaron que mediante la manipulación de los puntos podrían obtener el valor de x_1 y x_2 y al mismo tiempo $f(x_1)$ y $f(x_2)$; por otro lado como el ambiente suministraba la expresión de la función, hubo algunos estudiantes que optaron reemplazar los valores y determinar el resultado algebraicamente. Se pudo percibir que el ambiente presentado facilitaba la identificación de $f(x_1)$ y $f(x_2)$ para cada x_1 y x_2, permitiendo completar de forma correcta una tabla donde se les pedía las razones de cambio en distintos intervalos, afianzando lo aprendido en la actividad anterior



a) Después de realizar la gráfica complete la tabla.

Intervalo	$\Delta y = f(x2) - f(x1)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$
[0,1]	$\Delta y = 12 - 2$ $\Delta y = 10$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12-2}{1-0} = \frac{10}{1} = 10$
[1,2]	$\Delta y = 18 - 12$ $\Delta y = 6$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18-12}{2-1} = \frac{6}{1} = 6$
[2,3]	$\Delta y = 20 - 18$ $\Delta y = 2$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20-18}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$
[3,4]	$\Delta y = 18 - 20$ $\Delta y = -2$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18-20}{4-3} = \frac{-2}{1} = -2$
[4,5]	$\Delta y = 12 - 18$ $\Delta y = -6$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12-18}{5-4} = \frac{-6}{1} = -6$

Figura 18. Aproximación a la razón de cambio promedio por un estudiante.

Estudiante 3: profe es decir que según la gráfica se puede ver que si se reemplaza en la función $f(x_1)$ *en cero daría dos*

Profesor: si señor

Estudiante 3: y se puede hacer lo mismo con $f(x_2)$ *en 1 daría 12*

Profesor: muy bien.

Estas intervenciones evidencian la funcionalidad del ambiente para determinar los elementos que intervienen en la razón de cambio, facilitando su visualización cuando la variable independiente es modificada, mostrando de forma dinámica el trazo de la función en distintos intervalos. Esto permitió al estudiante analizar la variación de una función, desarrollar un modelo mental de la covariación entre las magnitudes, observar que la velocidad no es contante y que experimenta un cambio en todo su trayecto.

Ese tipo de análisis llevó a los estudiantes a preguntarse por el vértice para poder describir el comportamiento del cuerpo, algunos lo determinaron visualmente haciendo llegar la imagen de x_1 al punto más alto, otros recordaron cómo hacerlo algebraicamente mediante las expresiones $x = \frac{-b}{2a}$ $y = f(\frac{-b}{2a})$

Veinte minutos después sin ninguna intervención el docente decide preguntar ¿será lo mismo determinar la velocidad en un intervalo y velocidad en un punto?

Estudiante 3: no es lo mismo

Profesor: bien, no es lo mismo entonces ¿qué podríamos hacer?

Estudiante 4: tomar un intervalo que encierre al punto

Profesor: teniendo la idea de su compañero, en el caso del ambiente ¿cuál sería el intervalo?

Estudiante 4: [3,5]

Profesor: no creen que ese intervalo aún es muy grande

Estudiante 3: si

Profesor: qué pasaría si el intervalo es más reducido y que encierre al punto 4

Estudiante 4: daría una razón más exacta

Profesor: exacto, entonces ¿cómo se podría hallar la velocidad en ese punto?

Se dio un espacio de diez minutos para que analizarán la situación y pudiera de manera intuitiva reducir la distancia entre x_1 y x_2 y poder así, determinar la velocidad en un punto. Esto con el fin de poder ver el tema de razón de cambio instantánea y velocidad instantánea he ir determinando la diferencia entre la velocidad media y la velocidad instantánea.

Profesor: que puntos tomaron

Estudiante 4: [3.9,4.1]

Profesor: muy bien y si hacemos aún más pequeño

Estudiante 4: [3.99, 4.01]

Profesor: listo muy bien, determinen la velocidad en el punto

Finalmente, las actividades 1 y 2 tienen como objeto ver y determinar velocidad media como una razón de cambio que surge de la identificación de los incrementos Δx y Δy, logrando una interpretación analítica de la covariación entre la variable independiente con la variable dependiente. Considerando las dudas de los estudiantes y analizando sus respuestas se pudo determinar que en su mayoría describen el cambio de la velocidad en su trayectoria; además algunos mencionan que el cuerpo sube hasta una altura máxima y señalan la forma del desplazamiento que experimentó el cuerpo; solo dos de ellos determinaron la velocidad en el punto y posteriormente establecieron una relación entre la velocidad media y la velocidad instantánea. Se puede concluir que, aunque el ambiente virtual aporta herramientas para entender la razón de cambio y la velocidad media, se presentan dificultades al identificar la velocidad instantánea.

Análisis de la segunda sesión

Se presenta una función definida algebraicamente y se les solicitó la razón de cambio promedio en distintos intervalos de tiempo, el análisis del comportamiento de los cambios y la caracterización de la velocidad en un punto. Introduciendo la noción de velocidad instantánea se desarrolló la idea de que cuando el incremento Δx se aproxima a cero es la aproximación de la velocidad instantánea.

Al momento de calcular varias veces la razón de cambio promedio todos los estudiantes no tuvieron inconvenientes en calcular su valor, dado que el ambiente proporciona herramientas para determinar de una manera sencilla los valores de los incrementos Δx y Δy, calculando los cocientes que permiten determinar las velocidades. Al terminar la tabla de las razones de cambio promedio se pudo observar que algunos estudiantes se preguntan "si la razón de cambio promedio dio negativas, entonces su velocidad también es negativa". El docente pregunta a todos los estudiantes que significado tendría que la velocidad diera negativo. Algunos responden que en ese momento el cuerpo está cayendo.

En el apartado b) muestra la descripción de la velocidad del cuerpo en su trayectoria, se codificaron las respuestas arrojando una red que muestra una clasificación de tres tipos de descripción: apropiada, poco apropiada y no apropiada.

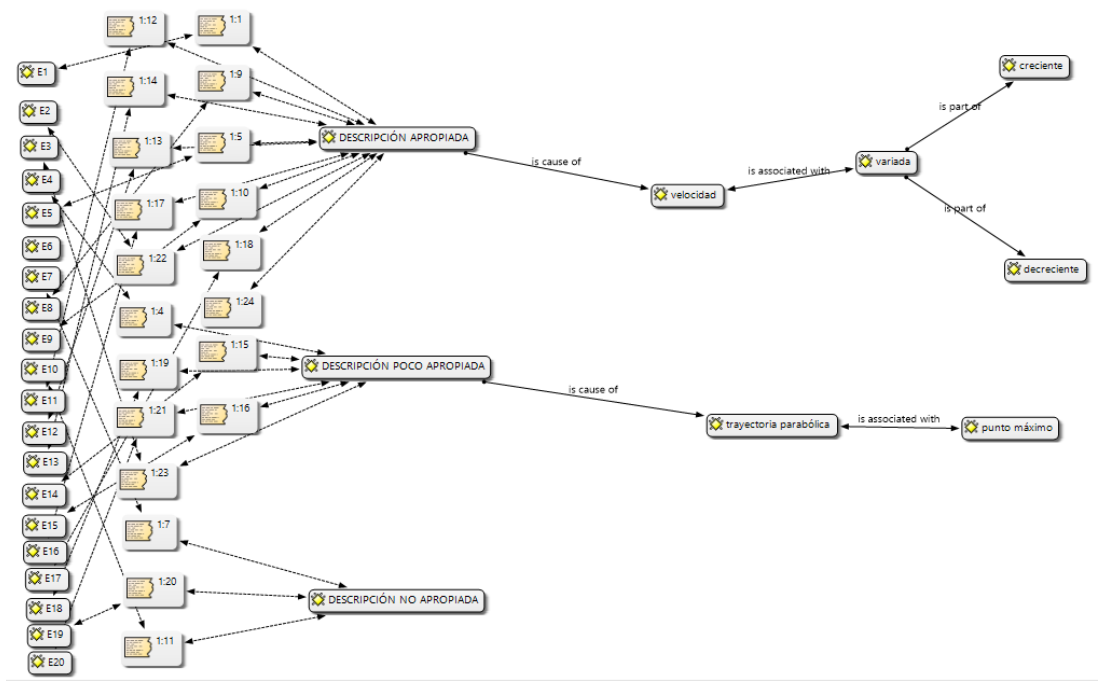
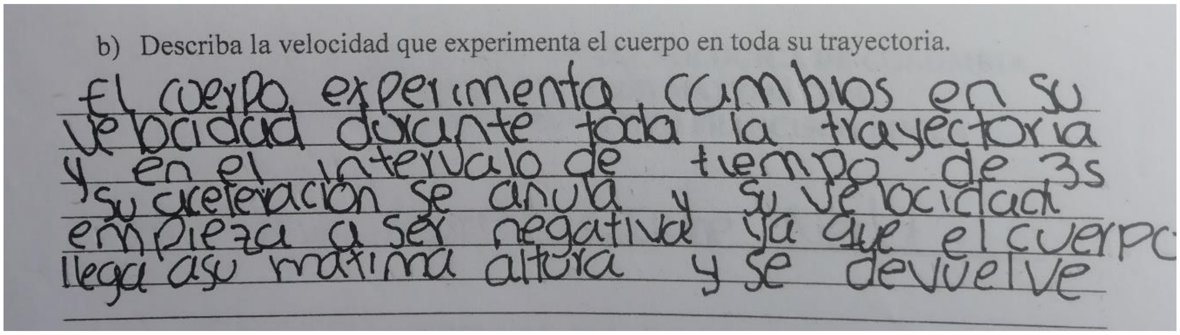


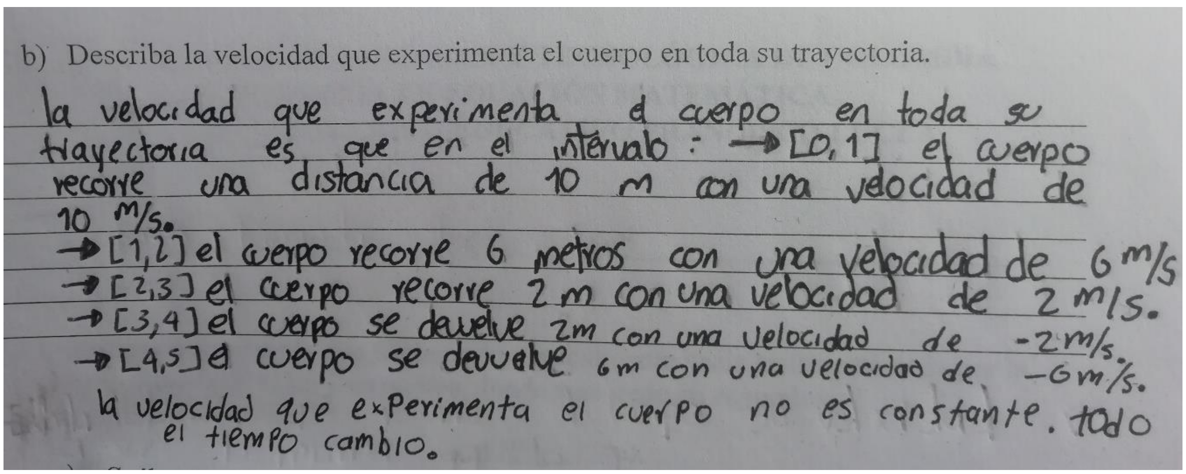
Figura 19. Red del análisis de la interpretación de la velocidad – fuente: elaboración propia. (ver Anexo 5)

En la descripción apropiada están el 55% (11 alumnos) y fueron las respuestas donde los estudiantes mencionan que la velocidad que experimenta el cuerpo no es constante, determinan que la velocidad cambia en cada instante, que tiene una velocidad creciente hasta que llega a su punto máximo en donde adquiere una velocidad de cero e inmediatamente el cuerpo empieza a descender y su velocidad es decreciente. Por otro lado, el 30% (6 alumnos) dieron una descripción poco apropiada se mencionó de esta manera ya que la descripción que realizaron es cierta pero no coincide con la pregunta, entre sus respuestas se puedo encontrar que describieron el movimiento parabólico del cuerpo, determinan mediante la observación del registro gráfico el punto de partida del movimiento y el punto más alto, adicionalmente algunos comentan el tiempo que dura el movimiento. Finalmente, el 15% (3 alumnos) dieron una descripción no apropiada mencionando que la aceleración aumenta hasta llegar a cero, un estudiante menciona que su velocidad aumenta cuando el tiempo aumenta, sin dar una justificación adecuada a sus descripciones. Por lo tanto, no existe una coherencia con lo aprendido en clases anteriores. A continuación, se exponen algunas de las respuestas de los estudiantes.



b) Describa la velocidad que experimenta el cuerpo en toda su trayectoria.

El cuerpo experimenta cambios en su velocidad durante toda la trayectoria y en el intervalo de tiempo de 3s su aceleración se anula y su velocidad empieza a ser negativa ya que el cuerpo llega asu maxima altura y se devuelve



b) Describa la velocidad que experimenta el cuerpo en toda su trayectoria.

la velocidad que experimenta el cuerpo en toda su trayectoria es que en el intervalo: → [0,1] el cuerpo recorre una distancia de 10 m con una velocidad de 10 m/s.
→ [1,2] el cuerpo recorre 6 metros con una velocidad de 6 m/s
→ [2,3] el cuerpo recorre 2 m con una velocidad de 2 m/s.
→ [3,4] el cuerpo se devuelve 2m con una velocidad de -2 m/s.
→ [4,5] el cuerpo se devuelve 6m con una velocidad de -6 m/s.
la velocidad que experimenta el cuerpo no es constante. todo el tiempo cambio.

Figura 20. Descripción de un estudiante en lenguaje natural de la velocidad.

En el inciso c) al preguntarles por la velocidad a los cuatro (4) segundos se observó que la mayoría de los estudiantes no dieron con la respuesta correcta. Se presentaron dificultades, puesto que dieron solución de la misma forma que la velocidad promedio tomando como $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$ y a $f(x_1) = 2$ y $f(x_2) = 18$ dando como respuesta $v = \frac{18-2}{4-0} = 4m/s$; ningún estudiante consideró una velocidad negativa, mientras que el 15% (3 estudiantes) no dieron ningún tipo de respuesta. Por otro lado, el 10% (2 estudiantes) desarrollaron con la misma noción de la velocidad promedio, pero en este caso reduciendo el incremento Δx en [3.9,4.1] de tal manera que los 4 segundos estuvieran dentro del intervalo. Es interesante como los estudiantes desarrollan la idea de la aproximación del límite sin haberles explicado el tema.

Se considera que al finalizar la segunda actividad los estudiantes afianzaron la razón de cambio promedio y la relacionaron con la velocidad media, describiendo que en algunos fenómenos el cambio no es constante. Según sus respuestas se observó que no existen dificultades para determinar numéricamente su valor. Pero en la descripción tanto del movimiento como la de las velocidades muchos de los estudiantes no lograron expresar verbalmente una interpretación de los resultados. Por otro lado, no se identificó la diferencia entre la velocidad media y la velocidad instantánea.

Descripción de la actividad 3: Interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente.

Es importante mencionar que en una clase anterior a la actividad del ambiente virtual se les había explicado a los estudiantes la forma de determinar la pendiente de una recta secante, del mismo modo se trabajó una interpretación geométrica de la recta tangente a una curva, enfatizando en el reconocimiento de la pendiente como una razón de cambio entre los incrementos Δy y Δx. En la figura 21 se expone el amiente virtual propuesto para la tercera sesión

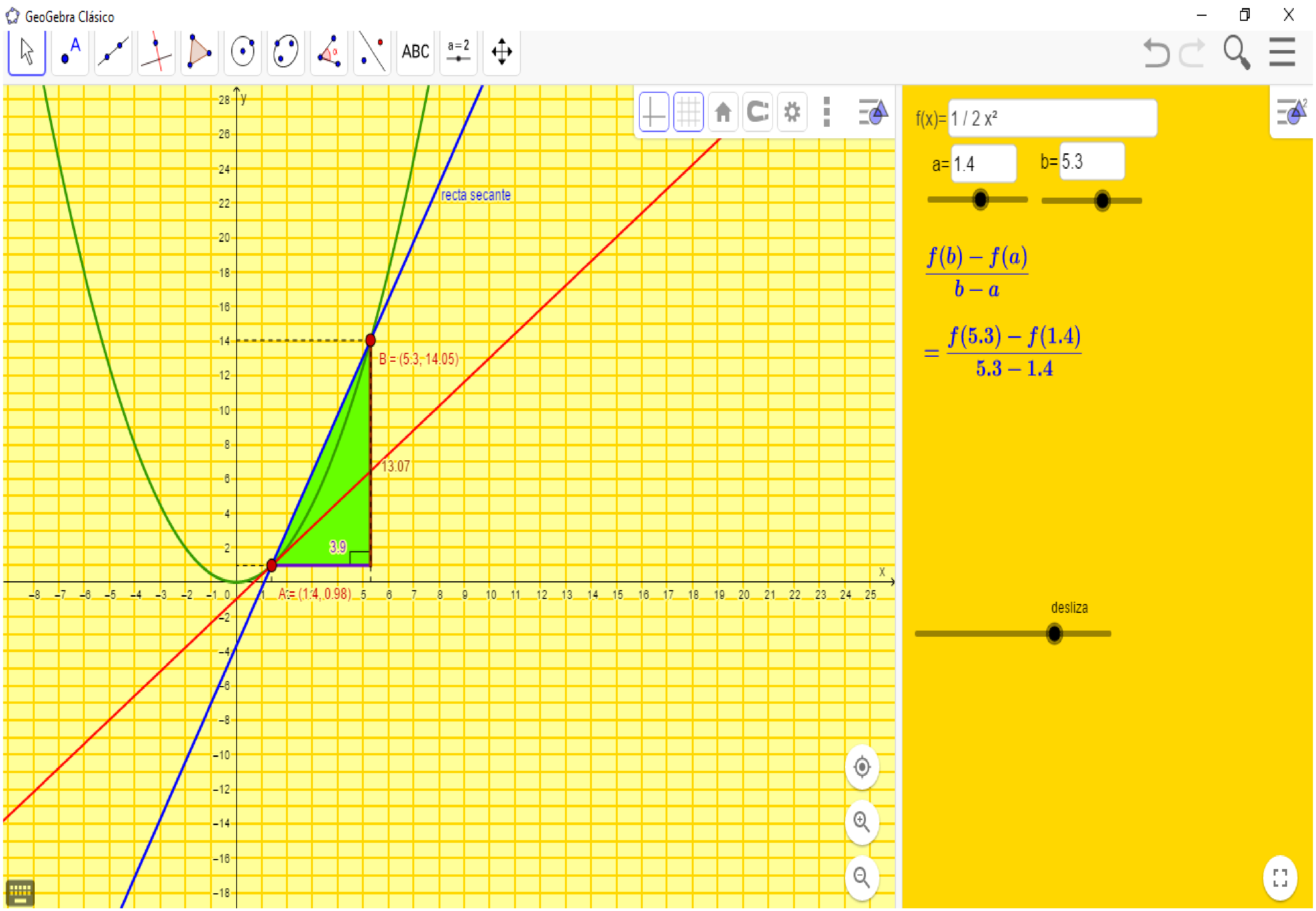


Figura 21. Representación gráfica del tercer ambiente virtual – fuente: elaboración propia.

Al igual que en los ambientes anteriores se dio un espacio de diez minutos para que reconocieran los elementos que están presentes en el ambiente y determinaran su funcionalidad; posteriormente se formularon una serie de preguntas para que se familiaricen con el ambiente.

Profesor: ¿qué se puede percibir a primera vista?

Estudiantes: hay una recta tangente en un punto

Profesor: listo ¿Por cuál punto?

Estudiantes: punto A

Profesor: muy bien y si miramos en la parte derecha de nuestra pantalla ¿Qué más información nos dan?

Estudiantes: profe aparece la expresión algebraica de una función y además la gráfica que aparece en el programa corresponde a la misma función.

Profesor: ¿qué función será?

Estudiantes: un medio de equis al cuadrado.

Profesor: ¿qué características podemos determinar?

Estudiantes: que es una función cuadrática que abre hacia arriba.

Posteriormente se dio un espacio para que manipularan unos deslizadores y pudieran observar y analizar cómo de forma dinámica estas herramientas cambian algunas condiciones inicialmente dadas y muestran visualmente el comportamiento del cambio, en este caso mostrando como la recta secante se acerca a la recta tangente en un punto a la curva.

Estudiante 1: es decir profe que si se desliza el a se mueve también el punto A en la gráfica

Profesor: si es cierto, la pregunta es ¿Qué representa el a minúscula?

Estudiante 1: sería la coordenada en x del punto A de la función

Profesor: ah muy bien, que sucederá si deslizo b

Estudiante 1: lo mismo, se mueve el punto B y cambia la coordenada en x del punto

Profesor: listo y el último deslizador que nos muestra

Estudiante 1: un triángulo

Profesor: ¿después del triángulo?

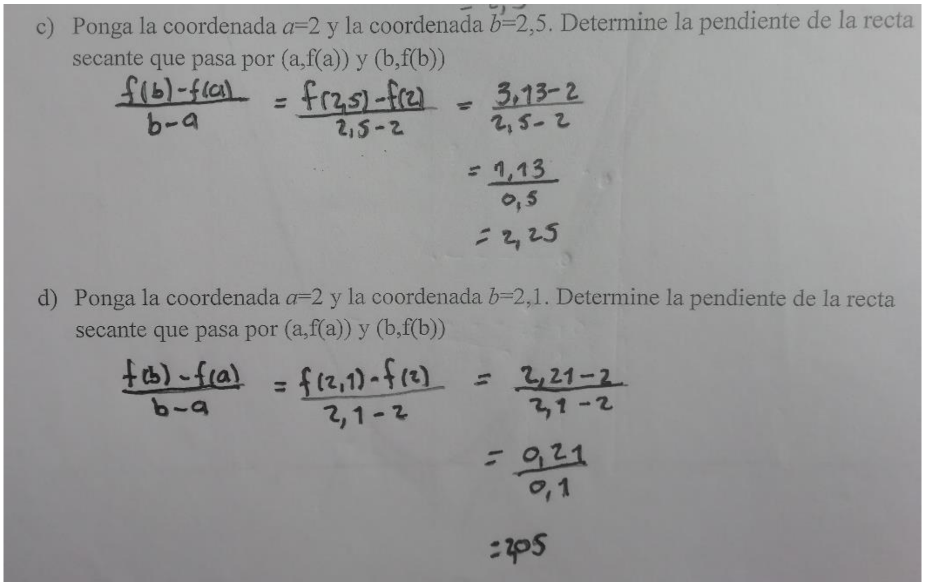
Estudiante 1: una recta

Profesor: ¿qué tipo de recta?

Estudiante 1: una recta secante que pasa por el punto A y B

El diálogo anterior se repitió con varios estudiantes mientras analizaban el ambiente, después se dispusieron a resolver la actividad planteada (Anexo 6). Se pudo determinar que el ambiente virtual da las herramientas necesarias para comprender y determinar la pendiente de la recta secante en distintos intervalos, es importante destacar que los intervalos entre a y b se hacían cada vez más pequeños a tal punto de que $a = 2$ y $b = 2{,}1$ con el fin de propiciar que los estudiantes identificaran que la pendiente de la recta secante cuando Δx se aproxima a cero se convierte en la pendiente de la recta tangente, y al mismo tiempo pudieran relacionar que la velocidad instantánea en un punto equivale a la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Los primeros 40 minutos transcurrieron sin ninguna duda, comentaron entre ellos mismos que es mucho más sencillo determinar las pendientes de las rectas secantes con la ayuda del software que hacerlas numéricamente.



c) Ponga la coordenada a=2 y la coordenada b=2,5. Determine la pendiente de la recta secante que pasa por (a,f(a)) y (b,f(b))

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2,5)-f(2)}{2,5-2} = \frac{3,13-2}{2,5-2}$$

$$= \frac{1,13}{0,5}$$

$$= 2,25$$

d) Ponga la coordenada a=2 y la coordenada b=2,1. Determine la pendiente de la recta secante que pasa por (a,f(a)) y (b,f(b))

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2,1)-f(2)}{2,1-2} = \frac{2,21-2}{2,1-2}$$

$$= \frac{0,21}{0,1}$$

$$= 2,05$$

Figura 22. Pendiente de la recta tangente como aproximación de pendientes de rectas secantes.

Estudiante 2: profe es decir que la recta secante y la recta tangente son iguales cuando $a = 2$ y $b = 2{,}001$

Profesor: tienden a ser las mismas, pero ¿qué se podría deducir de esa información?

Estudiante 2: que mientras b se acerca al valor de a la recta secante entre A y B también se va acercando a la tangente

La simulación gráfica de la función y de las rectas permitió la visualización del proceso al encontrar la pendiente de la recta tangente mediante acotamiento de Δx, del mismo modo facilitó la descripción de las rectas secantes.

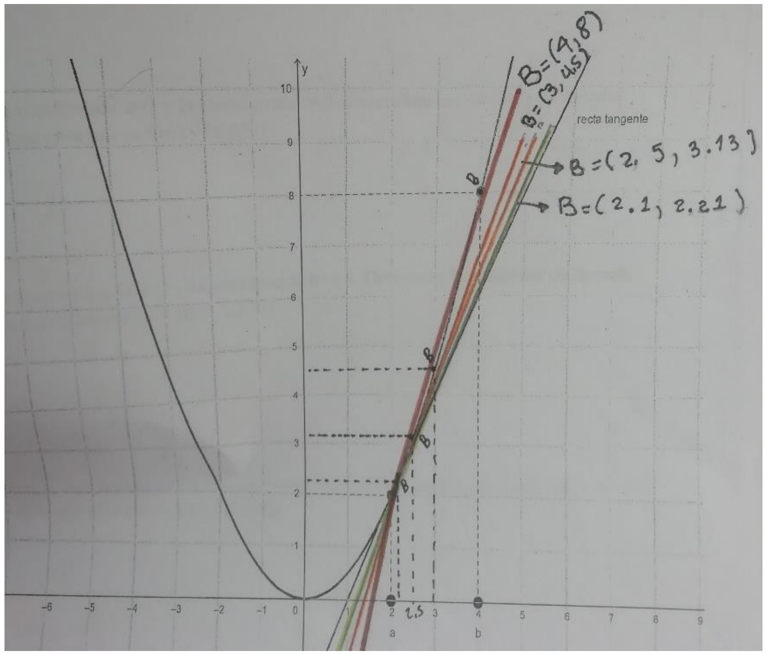


Figura 23. Interpretación gráfica por un estudiante de la tangente como aproximación de secantes

Análisis de la tercera sesión

La idea de que la pendiente de la recta secante tome distintos valores para cada intervalo haciendo cada vez más pequeños es muy importante, reforzando el significado de la razón de cambio promedio y al mismo tiempo induciendo al estudiante al significado de la razón de cambio instantánea. Por tal motivo en los incisos a), b), c) y d) se consideraron dos puntos $\left(a, f(a)\right)$ (fijo) y $\left(b, f(b)\right)$ (variable) que pertenecen a la función definida algebraicamente como: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Adicionalmente el ambiente virtual muestra un dibujo dinámico que permite la representación gráfica de la función y la manipulación de dichos puntos sobre la gráfica y así poder determinar la pendiente de las rectas secantes.

Se pudo determinar que los estudiantes mediante la interpretación del lenguaje gráfico y la manipulación del ambiente no presentaron dificultades para hallar la pendiente de las secantes, expresándolas como la razón del cambio vertical y el cambio horizontal $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; aproximadamente el 80 % (16 estudiantes) dieron cuenta que los cálculos realizados para encontrar la pendiente son los mismos para determinar la velocidad promedio, a diferencia que el incremento en *x* se hace cada vez más pequeño, considerando una aproximación de la velocidad instantánea y al mismo tiempo, el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

En cuanto a la actividad de la idea de derivada a partir de la aproximación del incremento h a cero, es decir lo que sucede cuando la secante a A y B se va acercando a la tangente en A, formalizada en la expresión 1 y 2, se detecta que la mayoría de los estudiantes aborda las representaciones del concepto de derivada e identifican que cuando b se acerca al valor de a, la pendiente de la recta tangente tiene la expresión $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ determinando así el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto; mediante pensamiento visual el estudiante identifica que la secante se aproxima cada vez más a la tangente, y que el paso al límite, se trabaja de manera intuitiva, a partir de los valores discretos que da el estudiante.

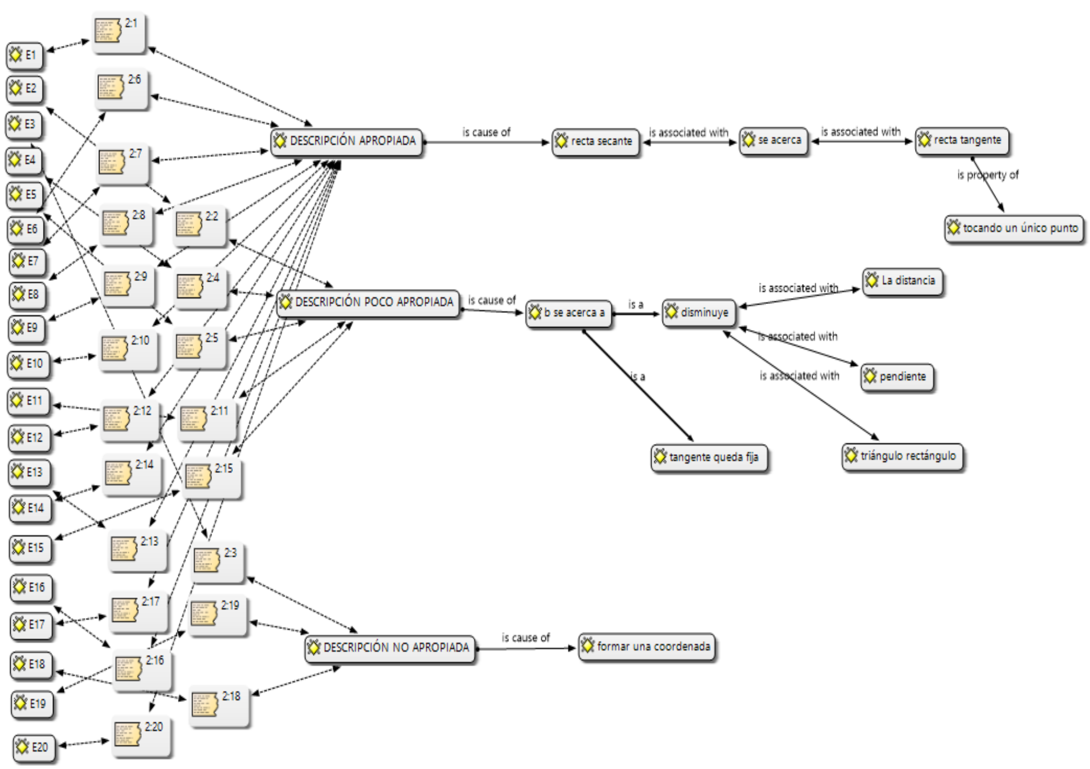
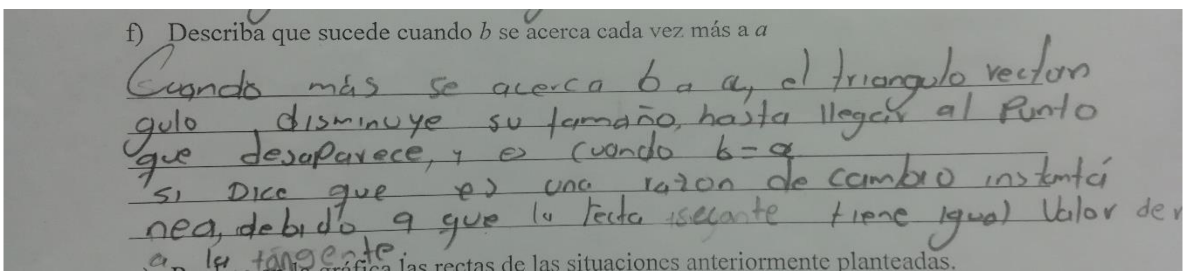


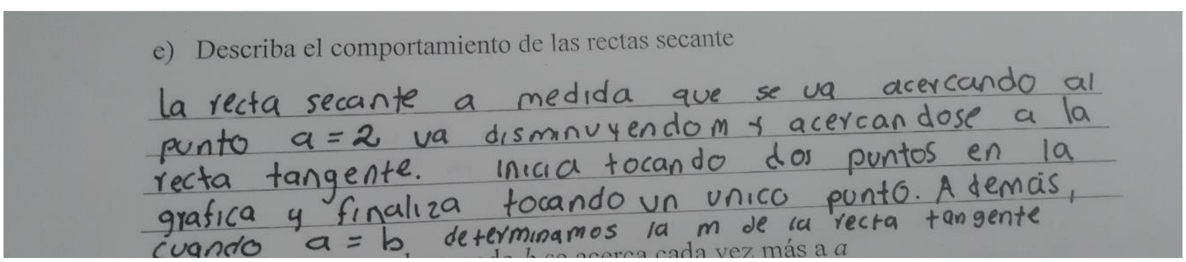
Figura 24. Red del análisis de la recta tangente como aproximación de secantes- fuente: elaboración propia. (ver anexo 7)

La figura 24 muestra la codificación de las respuestas de los estudiantes. Se tiene que el 60% (12 estudiantes) describen que cuando h tiende a cero, es cuando b se acerca al valor de a, determinando mediante lenguaje natural que la recta secante se acerca a la recta tangente, a tal punto de que cuando $b = a$, las rectas se sobreponen. Algunos mencionaron que el valor de la pendiente cambia y se va acercando a un mismo valor. Por otro lado, el 25%(5 estudiantes) describieron que cuando *b* se acerca al valor de *a*, el valor de la pendiente disminuye, además que la recta tangente no cambia de posición como lo hace la secante. Tres de ellos identificaron gráficamente el triángulo que se forma en la interpretación geométrica de la pendiente y comentaron que el triángulo se hace cada vez más pequeño, a tal punto de desaparecer.

Finalmente, el 15 %(3 estudiantes) describieron que las coordenadas de los putos *A* y *B* se van acercando hasta que se forma una sola coordenada.


f) Describa que sucede cuando *b* se acerca cada vez más a *a*

Cuando más se acerca b a a, el triangulo rectangulo disminuye su tamaño, hasta llegar al Punto que desaparece, y es cuando b = a
Si Dice que es una razon de cambio instantánea, debido a que la recta secante tiene igual valor de ... a la tangente


e) Describa el comportamiento de las rectas secante

la recta secante a medida que se va acercando al punto a = 2 va disminuyendo m y acercandose a la recta tangente. Inicia tocando dos puntos en la grafica y finaliza tocando un unico punto. Ademas, cuando a = b, determinamos la m de la recta tangente

Figura 25. Interpretación de un estudiante de la aproximación de la secante a la tangente.

En el inciso g) se muestra la representación gráfica de la función y la recta tangente al punto A con el propósito que pudieran realizar una conversión del registro tabular a un registro gráfico y así poder visualizar el cambio de posición de las rectas secantes con A fijo cuando se aproxima a la recta tangente a la gráfica en el punto A. se determinó que el 85% (17 estudiantes) trazaron correctamente las rectas secantes. Un 10%(2 estudiantes) dibujó los segmentos que se forman al unir el punto A con el punto B. Hubo un estudiante que representó la interpretación gráfica de la pendiente de cada recta resaltando los incrementos Δx y Δy.

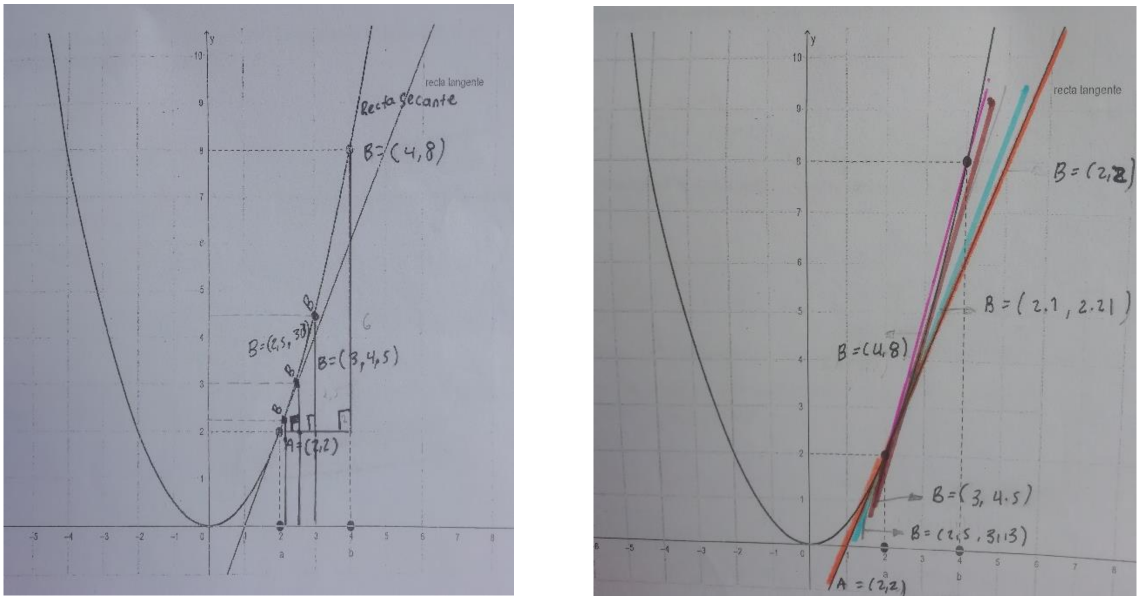


Figura 26. Interpretación gráfica por dos estudiantes de la aproximación de secantes.

Descripción de la actividad 4: Aproximación de rectas secantes.

Se observó que esta actividad no fue del agrado de los estudiantes, ya que las actividades propuestas estuvieron enfocadas a la descripción del triángulo que se forma cuando se interpreta geométricamente la pendiente de una recta secante y no al desarrollo de ejercicios algebraicos. El ambiente muestra dinámicamente la construcción geométrica de la pendiente de una recta secante con A fijo; esto con el fin de que los estudiantes llegaran a la expresión algebraica de la razón de cambio promedio, la razón de cambio instantánea y al mismo tiempo encontrar una relación entre ellas.

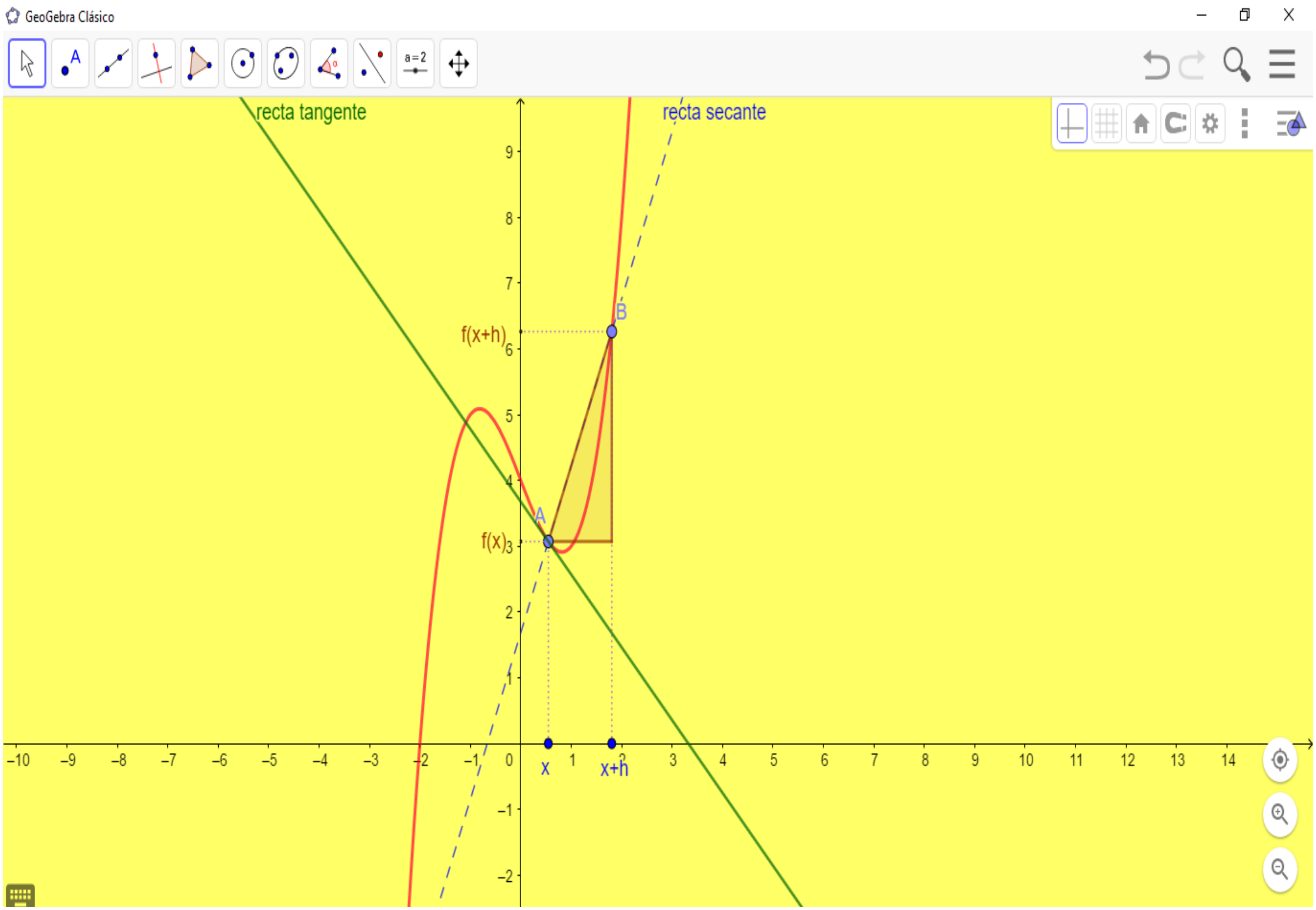


Figura 27. Representación gráfica del cuarto ambiente virtual – fuente: elaboración propia.

Como en la actividad no se les solicitó hacer cálculos numéricos todas las preguntas fueron de carácter interpretativo y no surgieron muchas dudas (Anexo 8). Se observó que en la caracterización del triángulo mencionan la existencia de un triángulo rectángulo, que tiene un ángulo de 90 grados, que el segmento $\overline{AB}$ es la hipotenusa, le asignan al cateto opuesto $CO = f(x+h) - f(x)$ y al cateto adyacente la expresión $CA = \ x + h - x$ y finalmente algunos determinan la expresión para la pendiente de la recta que pasa por el punto A y B

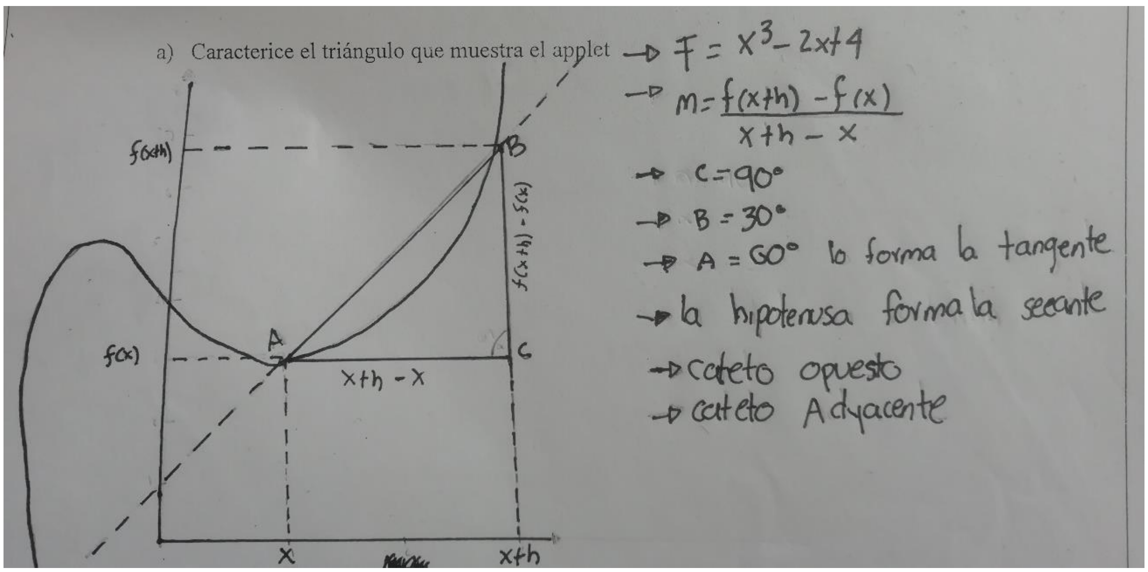


Figura 28. Interpretación geométrica por un estudiante de la pendiente de la recta.

Por otro lado, al observar y analizar la relación que determinaron entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea, se puede afirmar que existen dificultades al expresar en un lenguaje natural alguna relación que pueda tener una con la otra. Algunos comentaron que cuando el punto *B* se acercaba a *A*, el triángulo tendía a desaparecer; otros determinaron una relación correcta indicando que la razón de cambio promedio se usa para hallar la pendiente de la recta secante a A y B y la razón de cambio instantánea se utiliza para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A.

Finalmente, cuando se les preguntó por la incorporación del límite a la expresión de la pendiente, muchos no entendieron la pregunta, pensando que había que realizar el límite de alguna función;

pocos concluyeron que cuando se incorpora el límite a la pendiente es porque el valor de h tiende a cero y la expresión queda $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ siendo una razón de cambio instantánea para cualquier punto en la función.

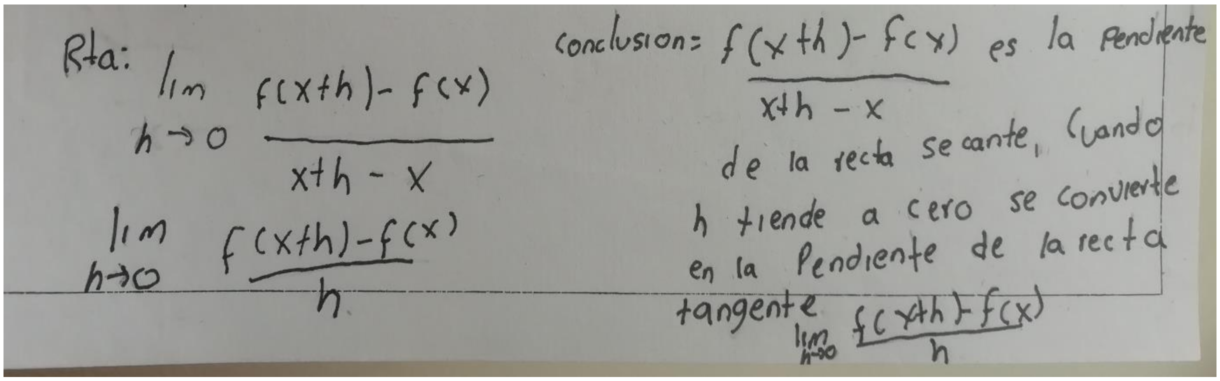


Figura 29. Expresión de un estudiante del límite cuando h tiende a cero de la pendiente.

Análisis cuarta sesión

En relación con las preguntas plateadas se esperaba que los estudiantes pudieran interpretar geométricamente las razones de cambio e interpretar la velocidad promedio en un intervalo como la pendiente de la recta secante, además que la velocidad instantánea se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, determinando una relación entre las distintas razones de cambio. Finalmente, la conversión del límite a partir de la sucesión de secantes.

En el inciso a) se observó que 80% (16 estudiantes) representaron gráficamente el dibujo dinámico que mostraba el ambiente virtual, pero caracterizando los elemento que para ellos eran conocidos como es el caso de la presencia del ángulo recto y otros dos ángulos agudos, 10 estudiantes identificaron la hipotenusa como el segmento $\overline{AB}$, 8 alumnos establecieron al cateto opuesto $CO = f(x+h) - f(x)$ y al cateto adyacente la expresión $CA = x + h - x$ esta expresión es importante puesto que el ambiente dinamiza el reemplazo del incremento Δx por h. Finalmente, 6 estudiantes determinan la expresión para la pendiente de la recta que pasa por el punto A y B como: $m = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$, el otro 20% (4 estudiantes) solo escribieron que se forma un triángulo sin dar ninguna caracterización ni justificación a su respuesta.

Como en la actividad 3 se trabajó la idea de la aproximación de la razón de cambio instantánea a partir del acotamiento del incremento Δx en el inciso b) se les preguntó por alguna relación que pudiera existir entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea se pudo observar que solo el 40 % (8 estudiantes) conocen la diferencia entre las razones, describiendo que la razón de cambio promedio indica la velocidad media y al mismo tiempo puede ser la pendiente de la recta secante en dos puntos. Además, que la razón de cambio instantánea implica el cambio en un instante, determinando la velocidad instantánea o la pendiente de la recta tangente de una función en un punto. El otro 60 % de los estudiantes presentaron dificultades para expresar en un lenguaje natural una descripción de cada una de ellas y su relación.

En el inciso c) al preguntar por el límite de la sucesión de pendientes de las rectas secantes cuando h tiende a cero se determinó que, la gran mayoría no entendieron la pregunta y trataron de buscar una respuesta numérica, solo el 35% (7 estudiantes) concluyeron que cuando se incorpora el límite a la sucesión de pendientes es porque el valor de h tiende a cero y la expresión queda $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ siendo una razón de cambio instantánea para cualquier punto en la función o el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto. Se evidencia que las preguntas descriptivas no son del agrado de los estudiantes, existe menos participación, bajo un poco el interés y la motivación por el aprendizaje de dicha temática.

Descripción de la actividad 5: Caracterización de la función derivada.

A continuación, se muestra el dibujo dinámico del quinto ambiente virtual.

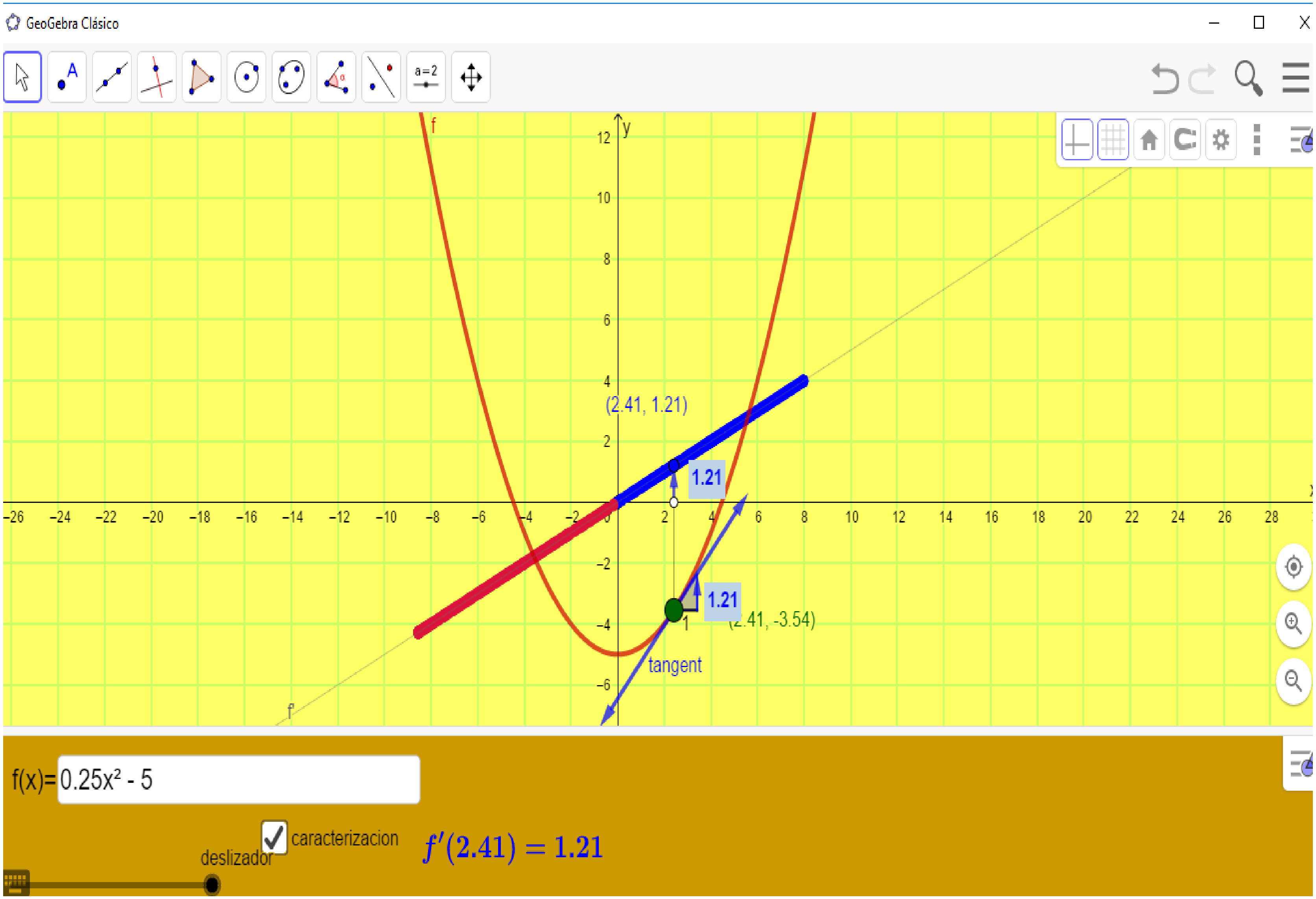


Figura 30. Representación gráfica del quinto ambiente virtual – fuente: elaboración propia.

Se dieron diez minutos para la observación y manipulación del ambiente. Posteriormente se dio inicio a la actividad (ver Anexo 9). Se les preguntó por la descripción del lugar geométrico de un punto a una función, al pasar cinco minutos se observó que ninguno de los estudiantes había descrito dicho lugar geométrico, se decide intervenir:

Profesor: ¿Qué sucede cuando se mueve el punto en la función?

Estudiantes: se mueve la recta tangente.

Profesor: muy bien, al momento de hacer uso del deslizador ¿Qué se puede observar?

Estudiantes: aparece la pendiente de la recta tangente y un nuevo punto.

Profesor: ¿Qué características tiene ese punto?

Estudiantes: que tiene la misma coordenada en x que el punto sobre la función y tiene como ordenada el valor de la pendiente.

Profesor: exacto ¿Qué representa ese nuevo punto?

Estudiantes: el valor de la derivada de la función en el punto, es decir la razón de cambio instantánea.

A pesar que se discutió sobre dicho lugar geométrico, a los estudiantes se les dificultó describir en un lenguaje natural dicha representación dinámica. Observando sus respuestas algunos determinan la recta tangente al punto y al mismo tiempo su pendiente, mencionando que cuando éste cambió también lo hace la recta tangente y que la pendiente puede dar positiva ó negativa ó cero. Pocos estudiantes describieron que el valor de la derivada en el punto es igual al valor de la pendiente de la recta tangente y que al mover el punto sobre la función el ambiente va mostrando todos los valores de la derivada, formando el gráfico de la derivada de la función.

Posteriormente el ambiente virtual facilitó la determinación de los valores que debería tomar la abscisa (x) para que la pendiente diera positivo o negativo; la mayoría de los alumnos determinaron que era positiva para los valores mayores que cero y negativa para los valores menores que cero, mientras que otros dieron su respuesta mediante un intervalo $(-\propto, 0)$ con pendiente negativa y $(0, \propto)$ con pendiente positiva.

Enseguida, en la descripción de la función derivada se determinó que la mayoría de los estudiantes detectaron aspectos importantes de la observación dinámica del ambiente. Entre sus respuestas se encontró que la función derivada es una función lineal, creciente y pasa por el origen; algunos mencionaron que es secante a la función inicialmente dada. Por otro lado, algunos estudiantes caracterizaron correctamente la función inicial $f(x) = 0.25x^2 - 5$, resaltando algunas características importantes como que es una función cuadrática que abre hacia arriba y con vértice en (0,-5), pero no daba respuesta a la pregunta inicial.

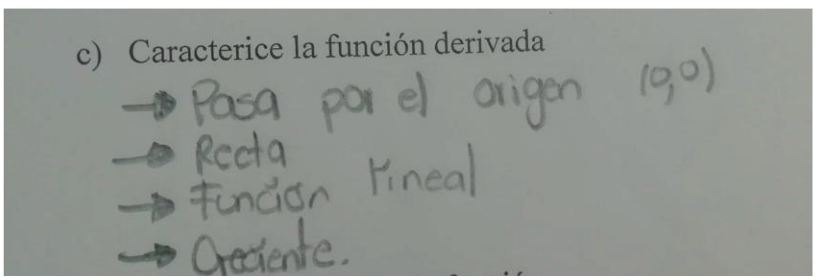


Figura 31. Caracterización de la función derivada.

Finalmente, se les pidió determinar la derivada de la función, en ésta última parte, todos los estudiantes entendieron que se tenía que solucionar mediante el paso al límite, que en clase anterior se había mencionado y trabajado mediante algunos ejemplos y ejercicios.

Los estudiantes que no pudieron hallar la derivada fue porque en su totalidad no resolvieron $f(x+h) - f(x)$ en este caso $[\frac{1}{4}(x+h)^2 - 5] - [\frac{1}{4}x^2 - 5]$. Se presentaron dificultades en la solución del producto notable; los que si resolvieron el producto notable no realizaron la distribución del factor $\frac{1}{4}$, llegando a un solución incorrecta para la derivada de la función. Por otro lado, los que si desarrollaron el problema pudieron dar con la expresión correcta para la derivada de la función, poniendo en evidencia las concepciones que han aprendido en las clases anteriores.

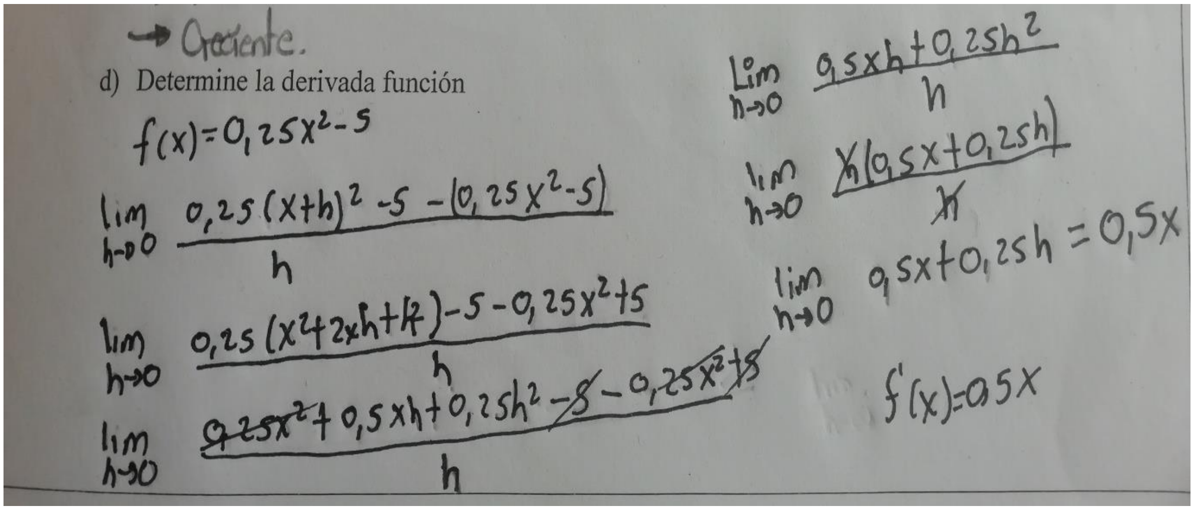


Figura 32. Deducción de la derivada mediante paso al límite.

Se terminó la sesión agradeciendo a los estudiantes por su participación y el compromiso adquirido en todas las actividades.

Análisis quinta sesión

En la última actividad se pretendió propiciar un ambiente, para que los alumnos puedan visualizar la gráfica de la función derivada, con la finalidad de describir y finalmente, que mediante el tratamiento en lenguaje algebraico, dedujeran la derivada de la función mediante el paso al límite.

En la exploración del ambiente virtual los alumnos visualizaron cómo se va formando el trazo de la derivada de la función $f(x) = 0{,}25x^2 - 5$; en el inciso a) se les pidió que describieran el lugar geométrico que se va formando al momento de mover un punto sobre la función. El ambiente mostraba todas las pendientes de la recta tangente y la ubicación de la derivada en el punto; se pudo observar que el 45%(9 estudiantes) describieron que el valor de la derivada en el punto es igual al valor de la pendiente de la recta tangente en el punto A y que al mover el punto A sobre la función, el ambiente va mostrando todos los valores de la derivada de $f(x)$ en el punto x; el lugar geométrico formado por dichos puntos $(x, f'(x))$ constituye la gráfica de la función derivada.

Una vez representada la función derivada en el ambiente, en el inciso c) se les preguntó por la caracterización de dicha función. Se determinó que el 90% (18 estudiantes) proporcionaron aspectos importantes, encontrando que la función derivada es una función lineal, función creciente, que pasa por el origen; asimismo, 12 (de los 18) mencionaron que es secante a la función inicialmente dada. El otro 10% describió la función $f(x)$ no contestando a la pregunta de forma correcta

En el inciso d) se buscó que los alumnos dedujeran la derivada mediante la definición de límite, conjeturando el tratamiento en un lenguaje algebraico con lo aprendido en las actividades anteriores. Trabajando la noción derivada desde un enfoque variacional se requiere que los estudiantes reconozcan la necesidad de involucrar el paso al límite para encontrar la razón de cambio instantánea, la pendiente de la recta tangente a la gráfica y la expresión algebraica de la derivada.

En la solución de la derivada se determinó que un 100% de los estudiantes entendieron que se tenía que utilizar el paso a límite de la función cuando h tiende a cero $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En el tratamiento algebraico se observó que el 60 % (12 estudiantes) calcularon correctamente llegando a la expresión $\lim_{h\to 0}\frac{0{,}25(x+h)^2-5-[0{,}25x^2-5]}{h} = 0.5\,x$, concluyendo que la función derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 0{,}5\,x$. El otro 40 % (8 estudiantes) resolvieron algunas operaciones, pero tuvieron dificultades en solucionar el producto notable $[\frac{1}{4}(x+h)^2 - 5]$, cuatro de estos estudiantes que sí resolvieron el producto notable no realizaron la distribución del factor $\frac{1}{4}$ llegando a un solución incorrecta para la derivada de la función.

Reflexiones a partir de la descripción

Se considera que la implementación de los ambientes virtuales y el tratamiento de las razones de cambio, en el estudio de la derivada aportaron herramientas en el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, en procesos de particularización, representación gráfica y conjeturación sobre propiedades detectadas en las situaciones planteadas, poniendo en contexto situaciones problemáticas en donde la modelación y el pensamiento variacional juegan un papel fundamental, dejando en un segundo plano la solución de algoritmos. Aunque prevaleció una inclinación de los estudiantes por el proceso algorítmico y una apatía por las descripciones verbales de los procesos matemáticos involucrados en la enseñanza de la matemática.

La incorporación del software GeoGebra en la clase de matemáticas fue de vital importancia ya que facilitó la visualización en sistemas de representación verbal, gráfico, tabular, numérico y algebraico, de distintos factores que son necesarios para el aprendizaje de la derivada, como lo es la identificación de la velocidad media y la velocidad instantánea; del mismo modo, la interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. De este modo, permitió a cada estudiante apropiar el concepto de derivada, no sólo desde el desarrollo de algoritmos, sino desde una perspectiva más amplia integrando los puntos de vista geométrico y físico.

Construcción del sentido de la experiencia

En la implementación y evaluación de las actividades hacia el aprendizaje de la derivada se presentaron algunas dificultades, que concuerdan con resultados de investigaciones descritas en los antecedentes respecto a la temática derivada. Se considera que los problemas más significativos son aquellos donde se requiere una interpretación desde distintas representaciones, el análisis y la descripción del comportamiento de varios fenómenos físicos.

Se consideró que todas las situaciones problemáticas cumplieron los objetivos planteados. Aunque se presentaron dificultades, dieron lugar a la reflexión de algunos aspectos variacionales de la derivada como el comportamiento y la cuantificación de los cambios, la identificación que dichos cambios no son constantes, la relación entre las razones con las velocidades media e instantánea y la necesidad de implementar el límite cuando h tiende a cero de la sucesión de pendientes de una recta secante para determinar la pendiente de la recta tangente.

Se intentó que en todas las actividades no se privilegiaran los registros del lenguaje algebraico, sino que se trabajaran de manera integrada con los sistemas semióticos de representación tabular, gráfico y lenguaje natural, de manera que aportara en la capacidad de análisis y el desarrollo del pensamiento variacional en cada uno de los estudiantes.

En el transcurso de cada una de las sesiones se observó que, en general permitieron despertar la curiosidad por comprender los fenómenos propuestos, se mejoró la actitud frente a la clase de matemáticas y generó confianza para resolver problemas y responder a las preguntas planteadas por el docente y por ellos mismo. La metodología de trabajo mediante la incorporación de los ambientes virtuales logró que todos los estudiantes participaran con agrado, de manera colaborativa, y más activa a la habitual.

Figura 33. Aplicación de los ambientes.

La resolución de la primera y segunda actividad requiere el tratamiento en los registros gráfico y numérico, la conversión entre ambos y la interpretación de lo realizado mediante una descripción en un lenguaje natural. Desarrollando el cálculo de los cambios del espacio a razón del tiempo en distintos intervalos de tiempo, estudiando el comportamiento de la velocidad media, a partir de identificación el valor de los incrementos que surgen del análisis de la representación gráfica de la función. Además, se presentaron situaciones con dificultades en donde se pretendía que los estudiantes descubrieran la imposibilidad de calcular la velocidad instantánea, de la misma manera que la velocidad media, esperando que reflexionaran que a medida que la amplitud del intervalo tiende a cero, la velocidad media se aproximaba a la velocidad instantánea.

Se considera la fuerte inclinación de los estudiantes por el desarrollo algorítmico (muchas veces sin haber comprendido el concepto), por sobre el análisis e interpretación de los gráficos que son soporte para la formalización del concepto derivada. Se presentaron dificultades en las descripciones físicas de las actividades planteadas, en relación al comportamiento de las velocidades, el desplazamiento y el tiempo. Se detectaron muy buenos resultados en el cálculo de las razones de cambio promedio. Pero en las preguntas donde la solución no requería de ningún calculo numérico, sino unas descripciones verbales, no se expresaron adecuadamente respecto a su significado físico.

A pesar de dichas dificultades, se considera que las actividades cumplieron con los objetivos, caracterizando aspectos como el signo del cambio considerando la dirección del movimiento. Además, los estudiantes demostraron cómo calcular la razón de cambio promedio y relacionarla con la velocidad media, identificando que los cambios no siempre son constantes; finalmente, se construyó la idea de la aproximación de la velocidad instantánea, cuando se hace cada vez más pequeño el incremento de la variable independiente.

En el análisis de las nociones presentadas en la tercera actividad, se considera que los estudiantes calcularon mediante el pensamiento visual la pendiente de la recta secante. Adicionalmente, dieron cuenta que los cálculos realizados son los mismos que en la velocidad promedio, a diferencia que el incremento en x se hace cada vez más pequeño, considerando una aproximación a la velocidad instantánea, y al mismo tiempo al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

Surgieron dificultades en la interpretación geométrica cuando se acerca el punto B al punto A (fijo). No todos los estudiantes descubrieron que la aproximación sucesiva de secantes (con A fijo) permite encontrar la pendiente de la recta tangente de la función al punto A. Aunque se evidenció la acertada descripción del comportamiento de la recta secante, dado que el ambiente virtual puede representar dinámicamente el movimiento de la recta secante, mientras se aproxima a la recta tangente.

Se comprobó que el uso de las herramientas tecnologías ayuda a superar dificultades respecto a los sistemas de representación gráfico, tabular y analítico, y son un inicio hacia la interpretación y el análisis que permite formalizar las ideas relativas al objeto derivada; así, de las distintas representaciones gráficas se obtuvieron datos relevantes para solucionar el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ estudiado para obtener la pendiente de la recta secante. Además, permitieron la representación dinámica de distintas situaciones problemáticas que son imposibles mostrar en el pizarrón.

La visualización toma parte fundamental en el diseño de las actividades ya que, en la cuarta y quinta actividad se buscó el análisis y la caracterización de la interpretación geométrica de la pendiente de una recta y el lugar geométrico de un punto, con la intensión de identificar algunas relaciones entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea. Se considera que surgieron algunas dificultades en la caracterización y en la descripción entre las distintas razones. Dichas dificultades surgen, talvez porque en clase de matemáticas, física u alguna otra ciencia, no se implementan situaciones problemáticas con preguntas de tipo descriptivo basadas en la observación. Siempre se piensa en el algoritmo para dar una solución a cualquier problema planteado en clase.

Competencias digitales respecto al diseño de los ambientes

Es importante dentro de la investigación hacer un análisis de las competencias digitales (Font, 2011) al explorar y experimentar los ambientes y dibujos dinámicos; se contextualizaron las competencias digitales respecto a tres dominios, de dibujo, de funcionamiento y de modelación (Laborde, 1998); asimismo se adaptaron unas tablas donde se describen de manera precisa las competencias digitales relativas al manejo y desempeño de los estudiantes con los ambientes y dibujos dinámicos en el aula elaborados en la aplicación GeoGebra (Suárez, 2018).

A continuación, se muestra el ambiente virtual que contiene los elementos elaborados con las herramientas básicas de dibujo y transformaciones que contiene el GeoGebra. Se hace un análisis general del desempeño en las competencias digitales de los estudiantes en cada uno de los seis ambientes. Se adopta una escala cualitativa consistente en valorar la competencia en cuatro ítems: excelente (E), bueno (B), aceptable (A), insuficiente (I).

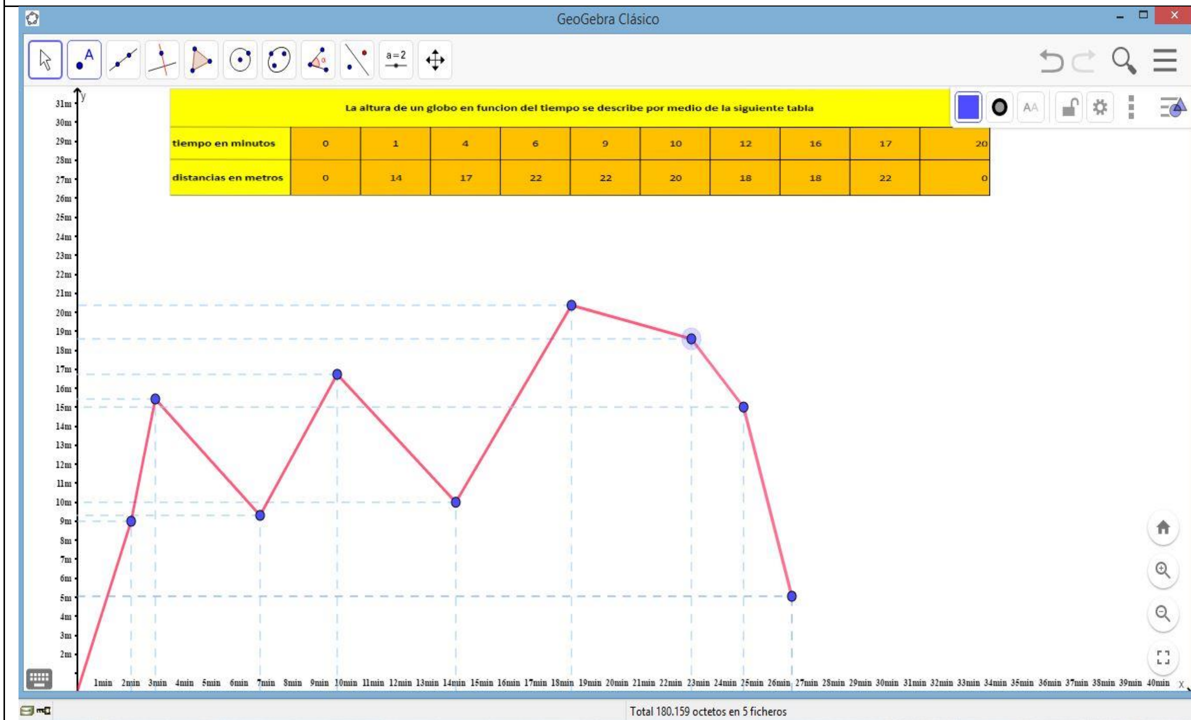
Ambiente 1: Representación gráfica a partir de registro tabular

Objetivos.

Representar coordenadas de un registro tabular a un registro gráfico.

Analizar problemas físicos que relacionan el desplazamiento con respecto al tiempo.

Calcular la velocidad media en distintos intervalos de tiempo.



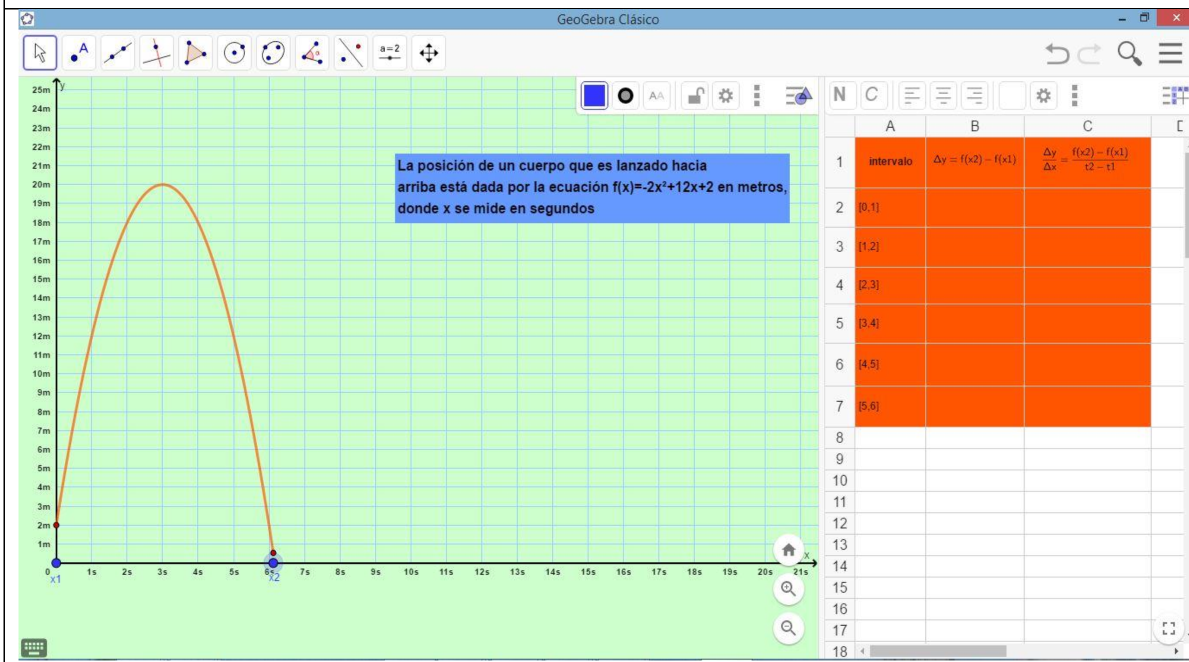
Ambiente 2: Representación gráfica a partir de registro algebraico

Objetivos.

Conocer la razón de cambio promedio dando solución a la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Analizar un registro gráfico que modela el comportamiento de un cuerpo que es lanzado parabólicamente.

Plantear el cálculo de la velocidad instantánea de un cuerpo que sigue una trayectoria parabólica.



Ambiente 3: Interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente.

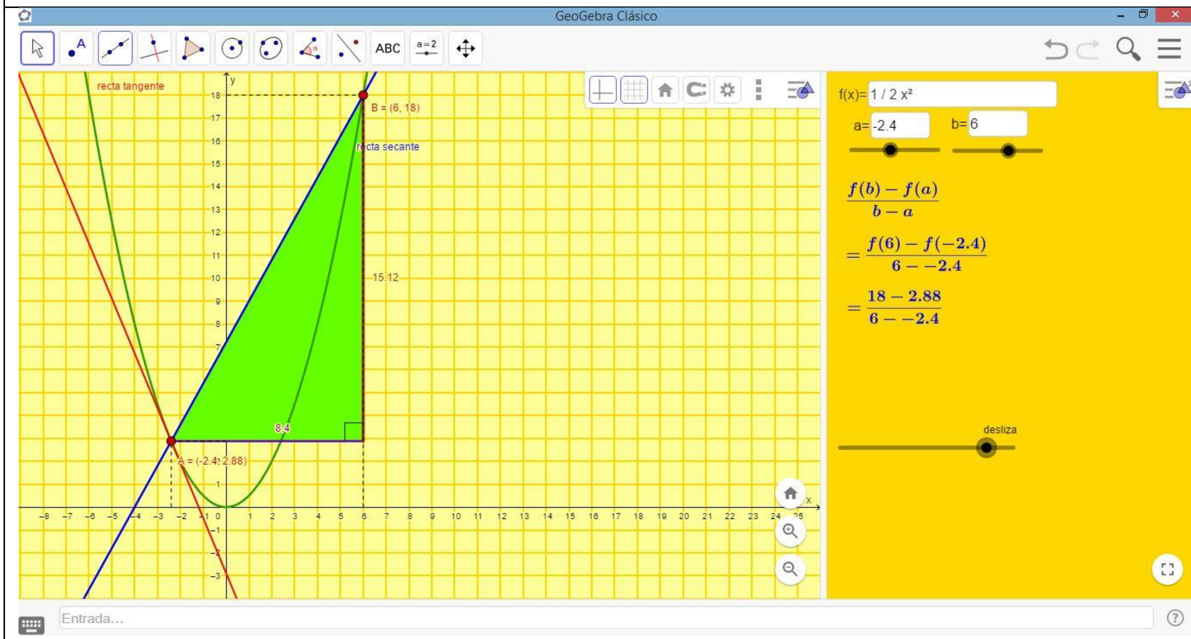
Objetivos.

Encontrar la relación entre la velocidad media y la pendiente de la recta secante.

Determinar la relación entre la velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente.

Representar gráficamente la recta tangente a una curva.

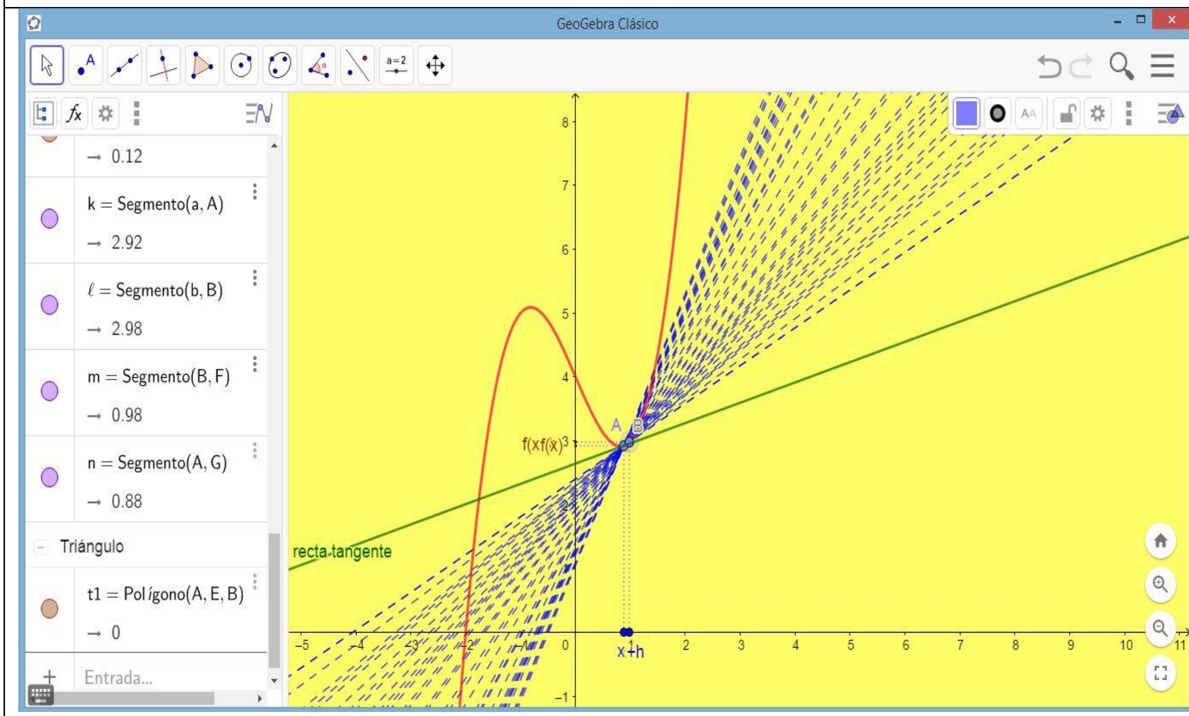
Describir en lenguaje natural del comportamiento cuando h se aproxima a cero.



Ambiente 4: Aproximación de rectas secantes.

Objetivos.

Describir el lugar geométrico del triángulo que se forma entre Δx , Δy y la recta secante.
Adoptar la definición de limite como fundamento de la noción de derivada.
Formalizar la noción de razón de cambio instantánea.



Ambiente 5: Caracterización de la función derivada.

Objetivos.

Encontrar el lugar geométrico correspondiente a la función derivada a partir del desplazamiento del punto en el cual se calcula la derivada puntual.

Plantear el cálculo de la derivada de una función con el paso al límite.

Determinar la expresión algebraica de la derivada de una función.

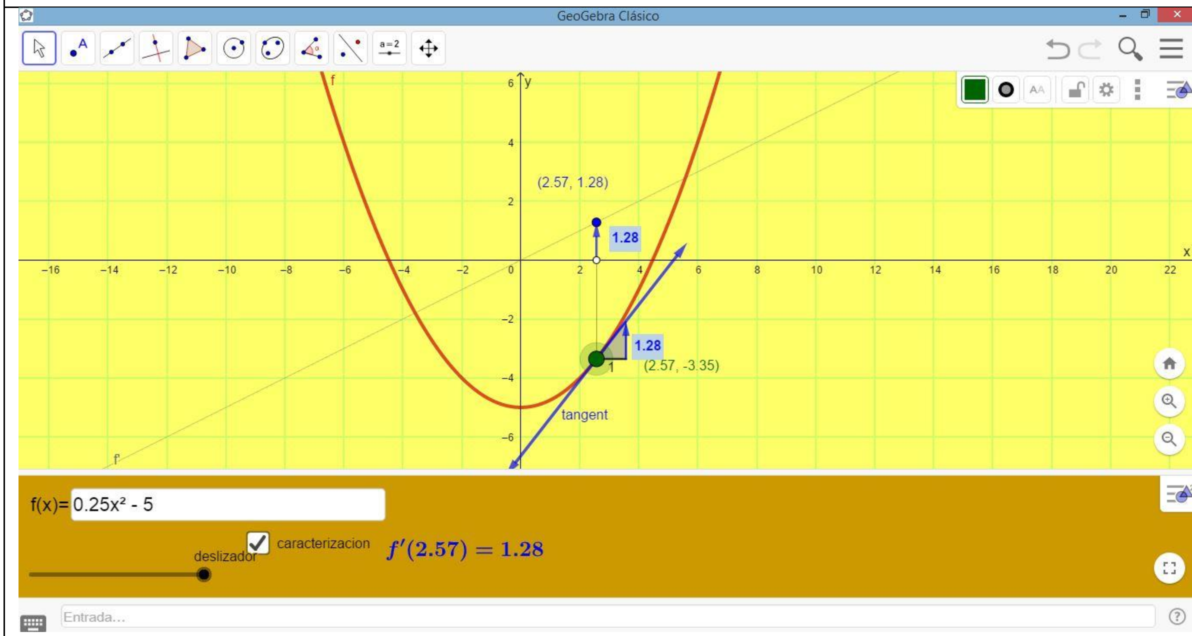


Tabla 4

Descripción de los ambientes. Competencia digital en relación al dibujo.

	Competencia Digital / valoración E-B-A-I	**Ambiente**				
	Descripción de la competencia	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
	Usa con propiedad las herramientas básicas de dibujo.	E	E	E	E	A
	Modifica los parámetros de las funciones dadas.	E	E	B	A	B
	Usa el desplazamiento de los puntos e identifica sus coordenadas claramente.	E	E	E	E	E
	Emplea las herramientas básicas de lugares geométricos.	B	E	A	A	B
	Maneja apropiadamente las herramientas básicas de transformaciones.	E	B	B	B	E
D I	Relaciona el valor de las coordenadas cartesianas con los valores hallados en las tablas.	E	E	B	B	B
B U J	Manipulan las herramientas que determinan las propiedades de los objetos dibujados (Color, textura, contorno).	E	B	B	B	E
O	Implementa las relaciones sobre las propiedades de los elementos de la construcción (poligonal, rectas, lados y ángulos.	E	B	E	B	E
	Utiliza las medidas de longitud, de los objetos dibujados.	E	E	E	E	E
	Aplica correctamente los comandos del programa para transformaciones como traslaciones, reflexiones, y rotaciones.	E	B	B	E	B
	Identifica apropiadamente los tipos de gráficas de las funciones involucradas.	E	E	E	E	E
	Identifica claramente las variables asignadas a cada uno de los ejes coordenados.	E	B	E	B	E
	Construye las figuras generadas al relacionar los elementos geométricos que intervienen en la configuración planteada.	E	E	E	E	E

Tabla 5

Descripción de los ambientes. Competencia digital en relación al funcionamiento.

	Competencia Digital / valoración E-B-A-I	**Ambiente**				
	Descripción de la competencia	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
FUNCIONAMIENTO	Identifica el significado geométrico y algebraico del rastro de los puntos de las figuras.	E	E	B	B	E
	Emplea apropiadamente los comandos de animación simple y múltiple sobre los elementos de la figura.	A	E	E	E	E
	Usa con propiedad los deslizadores para obtener configuraciones de la gráfica más claras y coherentes.	E	E	E	E	E
	Adopta una secuencia adecuada en la exploración en las construcciones para grabar los algoritmos de la construcción elaborada.	E	B	B	B	E
	Asocia los pasos de construcción a procedimientos claros y coherentes.	E	B	E	B	E
	Usa los comandos de relaciones de paralelismo y perpendicularidad, tangencia y similaridad, vinculados a los dibujos dinámicos.	A	A	E	B	E
	Relaciona los pasos de la construcción a instrucciones para descubrir sus propiedades.	E	E	B	B	B
	Las etapas de la construcción evidencian un propósito final que debe ser asimilado, entendido o descubierto, según el caso.	E	E	E	B	E
	Construye el significado de las propiedades de la actividad para expresarlo en lenguaje natural.	E	E	E	B	E
	Construye el significado de las propiedades de la actividad para expresarlo en lenguaje algebraico.	E	B	E	B	B

Tabla 6

Descripción de los ambientes. Competencia digital en relación a la modelación.

	Competencia Digital / valoración E-B-A-I	Ambiente				
	Descripción de la competencia	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
MODELACIÓN	Usa apropiadamente los deslizadores con parámetros para controlar las propiedades de la animación.	E	E	E	E	E
	Descompone construcciones complejas, en construcciones más sencillas para simplificar procedimientos del fenómeno simulado.	B	A	E	E	B
	Relaciona las variables que intervienen en la actividad, con el lenguaje gráfico y con expresiones algebraicas correctas.	B	E	B	B	E
	Las etapas de la modelación se evidencian fácilmente del fenómeno físico.	E	B	E	A	B
	Identifica las variaciones de fenómeno modelado, tanto desde la representación cartesiana como desde el registro tabular.	E	E	B	A	B
	Gráfica funciones que provienen de las relaciones algebraicas entre variables inmersas en la actividad o propiedad propuesta.	E	E	E	A	B
	Usa con propiedad diversas funciones que le permiten ampliar el rango de exploración de las configuraciones gráficas.	A	A	B	A	E
	Detecta aspectos geométricos y algebraicos invariantes en la actividad mediante movimientos en las figuras.	E	E	E	E	E
	Abstrae los fenómenos físicos hasta experimentar con su modelo de manera fluida y correcta.	A	B	B	A	A
	La modelación se realiza en un contexto coherente y reversible controlado por parámetros necesarios y optimizados.	E	E	B	B	E

Capítulo 6. Conclusiones

A continuación, se exponen algunas reflexiones y consideraciones finales que surgieron de la descripción e interpretación de los datos obtenidos en cada una de las sesiones donde se aplicaron los ambientes virtuales; el análisis textual y cualitativo de los datos permitió evidenciar el alcance de los objetivos expuestos y dieron respuesta a la pregunta de investigación planteada inicialmente, determinando finalmente la apropiación del objeto derivada como razón de cambio a partir del uso de situaciones modeladas y simuladas en entornos virtuales por parte del profesor, y su interpretación por parte de estudiantes de grado undécimo. Se espera que este trabajo sirva como referente a futuras investigaciones y motive a los docentes del área de matemáticas para incorporar ambientes virtuales en los procesos de enseñanza.

Se puede afirmar que, a lo largo de las actividades contenidas en los módulos virtuales elaborados por el investigador, surgieron aspectos importantes que fueron expresados por los estudiantes usando los diferentes registros semióticos de representación, entre los cuales se trabajaron el lenguaje natural, tabular, gráfico, numérico y algebraico. Se evidencia que aproximadamente un 70 % de los estudiantes mostraron un ligero avance en el desarrollo de su pensamiento matemático, pues exploraron los sistemas de representación ejemplificado en diversos ejemplos (particularización), formulando hipótesis respecto a las relaciones geométricas, métricas y analíticas respecto a la derivada como razón de cambio (conjeturación), detectando patrones y regularidades relacionados con invariantes en diversos casos particulares (generalización), argumentando correctamente la ocurrencia de fenómenos físicos relacionados con el movimiento y la velocidad (convencimiento).

Las actividades diseñadas a partir de la manipulación, visualización, utilización de plataformas educativas y el uso de diversos contextos o representaciones para el desarrollo del pensamiento matemático, permiten que los docentes mejoren significativamente sus herramientas de trabajo dentro del aula, además de convertirse en un reto y una forma de mostrar sus habilidades para diseñar e implementar situaciones que conlleve al uso de distintas representaciones de los objetos matemáticos, particularmente el de la derivada; es así que los estudiantes pudieron cambiar su percepción de la matemática, adoptando una nueva visión, acercándolos directamente a la búsqueda de diversos y adecuados resultados, generando en ellos un mayor sentido de curiosidad por comprender y analizar los distintos fenómenos expuestos desde la variación y el cambio.

Respecto al desempeño de los estudiantes en las actividades propuestas y evaluadas en el desarrollo de los seis ambientes en el aula, se pueden mencionar de manera particular los siguientes aspectos relevantes:

- La conversión entre los registros tabulares y coordenadas cartesianas en el plano se facilitó, encontrándolos como expresiones equivalentes.
- Detectaron las características de la velocidad media en distintos intervalos, algunos determinándola sin sus unidades correspondiente (metros por segundo).
- La descripción e interpretación de los fenómenos fiscos, en relación al movimiento y la velocidad se dio de manera natural al analizar, explorar y manipular los ambientes virtuales.
- La simulación gráfica y el uso de las herramientas del aplicativo GeoGebra permitió interpretar la recta tangente, como aproximación de rectas secantes.
- La caracterización, mediante lenguaje natural de los lugares geométricos se dificultó, describiendo aspectos irrelevantes a la situación problemática planteada.
- La conversión entre el registro gráfico y algebraico se facilitó, permitiendo determinar la expresión del límite de la pendiente de la recta secante cuando h tiende a cero.

- La deducción de derivada mediante la definición de límite fue desarrollada correctamente, evidenciando el tratamiento.
- El uso de los deslizadores, las traslaciones, las representaciones gráficas y la animación de los dibujos dinámicos proporcionó herramientas, que permitieron una mejor comprensión de la derivada.
- Con el análisis de las competencias digitales, se establece que, con la implementación e incorporación de aplicativos informáticos a la clase de matemáticas, se proporciona un desarrollo del pensamiento matemático y potencializan el aprendizaje de la derivada.

Mediante al análisis y la evaluación de resultados se pudo determinar que los estudiantes apropian el objeto derivada desde una perspectiva de la variación y el cambio, determinando que se puede aplicar para encontrar: la velocidad media e instantánea que experimenta un cuerpo, una razón de cambio entre los incrementos Δx y Δy y la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Del mismo modo, permitió encontrar la expresión algebraica de la derivada mediante el paso al límite.

Las formas de representación gráfica y analítica, contribuyeron a la apropiación y construcción del significado de la noción derivada, de modo que, los estudiantes extrajeron información relevante de uno o dos sistemas de representación, estableciendo algún tipo de relación entre los elementos matemáticos conocidos (conocimientos previos) y poder llegar a establecer propiedades, patrones, gráficos y datos numéricos.

En relación con la propuesta didáctica, lo original y novedoso consistió en el uso exhaustivo de los recursos tecnológicos. Se detectó con la implementación y evaluación de las prácticas realizadas en el aula, mediadas por ambientes virtuales propiciados por el GeoGebra, los estudiantes pudieron mejorar y desarrollar aspectos del pensamiento matemáticos, asociados a la observación, modelación, simulación y análisis de las representaciones, restando importancia a los procesos de memorización de contenidos.

El diseño de los ambientes virtuales se constituyó en un elemento central para que el uso de la modelación de fenómenos físicos relacionados con la velocidad y el cambio tuviera éxito. Evidentemente, no todos los estudiantes aprenden de la misma manera, ni logran profundizar en los conceptos como el docente se propone, pero puede decirse que los resultados obtenidos muestran con claridad las bondades de este acercamiento al aprendizaje de las matemáticas en relación con la derivada como razón de cambio.

La visualización dinámica de los ambientes fortalece en cada uno de los estudiantes el pensamiento visual, identificando fácilmente el comportamiento de algunos factores móviles presentados en los ambientes como las rectas secantes, la recta tangente, puntos sobre la función definida y los incrementos Δx y Δy, permitiendo expresar mediante diferentes sistemas de representación la solución de las situaciones problemáticas planteadas en cada una de las actividades.

Por último, las dificultades de algunos estudiantes en la definición formal de derivada radican, principalmente, en el aspecto epistemológico del paso de lo estático a lo dinámico al adoptar la noción de límite. Las gráficas dinámicas proporcionados por el GeoGebra son de carácter estático, y lo dinámico solo se visualiza en los sistemas semióticos de representación interna propios de la imaginación del estudiante y la experiencia que ha tenido en el trabajo con diversas representaciones.

Bibliografía

Arias, F. G. (2012). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica. 6ta.* Caracas: Episteme .

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática, 1*, 97-140.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 1*(1), 40-55.

Azcarate, C., Bosch, D., Casadevall, M., & Casellas, E. (1996). *Calculo diferencial e integral.* Madrid : sintesis .

Badillo Jimenez, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia (La derivada, un concepto a caballo entre la Matemática y la Física). *(Tesis Doctoral).* Universitat Autònoma de Barcelona. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, Ballaterra.

Biembengut, M., & Hein, N. (1999). Modelación Matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. *Educación Matemática, 11*(1), 119-134.

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, 42*(14), 353-372.

Cantoral, R., & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(2), 133-154.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., & Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trilla.

Cardona Aguirre, R. (2012). Una propuesta para la enseñanza de la derivada como razón de cambio a estudiantes de grado undécimo. *(Tesis de maestria).* Universidad Nacional de Colombia, Bogota.

Dolores, C. (2007). Elementos para una aproximación variacional a la derivada. Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* (Vol. II). (F. Hitt, Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa, Mexico: Cinvestav.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.). Investigaciones en Matemática Educativa.

Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano.* Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. *Semiotics in mathematics education*, 39-61.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas.* (págs. 61-94). Bogotá : Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Espinosa, R. C., & Jiménez, E. A. (2014). Construcción del concepto de razón y razón constante desde la óptica socioepistemológica. *Praxis & Saber, 5*(9), 53-80.

Ferrini-Mundy, J. &. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits,derivates and integrals. (E. Dubinsky, & J. Kaput, Edits.) *Research issues in undergraduate mathematics learning*, 19-26.

Fiallo, J. E., & Parada, S. E. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista científica, 3*(20), 56-71.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques: aplicacions a les derivades.* Universitat de Barcelona.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Ed.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (págs. 111-128). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Font, V. (2009). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Colección Digital Eudoxus*(11), 1-34.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión, 26*, 9-25.

Font, V., & contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 33-52.

Fúneme, C. (2018). Idoneidad didáctica en la enseñanza de la derivada a través de un ambiente virtual. *(Tesis de maestria).* Universidad Pedagogica y Tecnologica de Colombia, Tunja, Colombia.

Gallardo, E. E. (2017). *Metodología de la Investigación: manual autoformativo interactivo.* Huancayo: Universidad Continental.

Gavilán Izquierdo, J. M. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* España: Universidad de Sevilla.

Gracia Obando, G. (2018). Potenciando pensamiento variacional y uso de sistemas algebraicos con Geogebra. *(Tesis de maestria).* Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Manizales.

Gruszycki, A. E., Oteiza, L. N., Maras, P. M., Gruszycki, L. O., & Balles, H. A. (2012). GeoGebra y los sistemas de representación semióticos. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C, 27*, 2169-2176.

Hernández, S. R., Fernández, C. C., & Baptista, L. P. (2010). *Metodología de la investigación* (Vol. 3). México: McGraw-Hill.

Kendal, M., & Stacey, K. (2001). The Impact of Teacher Privileging on. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(2), 143-165.

Laborde, C. (1998). *Cabri Geometry: una nueva relación con la geometría.* Grenoble: Universidad Joseph Fourier.

López Rayón, A. E., Escalera, S., & Ledesma, R. (2002). Ambientes virtuales de aprendizaje. *Instituto Politécnico Nacional. Mexico, DF.*

Lupiáñez Gómez, J., & Moreno, L. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically* . Harlow.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares.* Santafé de Bogota.

Ministerio de Educación Nacional . (2003). *Estándares Básicos de Competencias* . Santafé de Bogotá .

Moreno, A. (2014). Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje. (E. Cacheiro, Ed.) *Educación y tecnología: estrategias didácticas para la integración de las TIC*, 8-23.

Moreno, C. J., & Montoya, G. L. (2015). Uso de un entorno virtual de aprendizaje ludificado como estrategia didáctica en un curso de pre-cálculo: Estudio de caso en la Universidad Nacional de Colombia. *RISTI - Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação*(16), 1-16.

Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235-250.

Pantoja, A., & Zwierewicz, M. (2008). Procesos de orientación en entornos virtuales de aprendizaje. *Revista Española de Orientación y Psicopedagogía, 19*(3), 282-290.

Porzio, D. T. (1997). *Effects of different instructional approaches on calculus student's understanding of the relationship between slope, rate of change and the first derivate.* (Vols. 2, pp. 37-44). (A. D. John, J. O. Swafford, M. P. Dossey, & D. Anne E, Edits.) Bloomington-Normal, Chicago Illinois: Psychology of Mathematics Education.

Ruiz, K., CORDÓBA, Y., & RENDÓN, C. (2015). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de Geogebra como propuesta didáctica. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1*(1), 125-130.

Sanchez-Matamoros , G., Garcia , M., & Llinares, S. (2008). La comprención de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, XI*(2), 267-296.

Sanchez-Matamoros, G. (2004). Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de Universidad sobre la noción matemática de derivada. *(Tesis Doctoral).* Universidad de Sevilla, Sevilla.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* México: Cengage Learning.

Suárez, P. (2018). Formación inicial y permanente de profesores de matemáticas con ambientes virtuales para la enseñanza de las geometrías. *(Tesis de Doctorado en Educación).* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación - La búsqueda de significados.* Buenos Aires: Paidos.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa, 9*(46).

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática*, *9.* Blumenau.

Vidal Ledo, M., Llanusa Ruiz, S., Diego Olite, F., & Vialart Vidal, N. (2008). Entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje. *Educación Médica Superior*, *22*(1), 1-9.

Villa-Ochoa, J. A. (2013). El estudio de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada. En S. Roa, S. E. Parada, & J. Fiallo (Ed.), *4to Seminario Taller de Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación* (págs. 31-44). Bucaramanga: Publicaciones UIS.

Vrancken, S. (2011). la construcción de la derivada desde la variación y el cambio articulando distintos sistemas de representación. *(Tesis de maestría).* Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.

Anexos

Anexo 1 Actividad 0: Práctica experimental

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

INSTITUTO TÉCNICO EDUCATIVO FRANCISCO LUCEA

Nombre ____

Actividad 0: Practica experimental de un movimiento rectilíneo uniforme

- Realizar una tabla de datos de x espacio en centímetros vs t tiempo en segundos, teniendo en cuenta que la primera fotocelda es fija y la segunda es móvil, desplazándola de a 10 cm hacia la derecha después de cada lectura del cronometro.

Tabla de datos

Espacio(cm)									
Tiempo (s)									

- Posteriormente se pide realizar una gráfica en el plano cartesiano que represente el movimiento del cuerpo.

- ¿Qué sucede cada vez que se hace más pequeño el espacio entre las fotoceldas?____

  ____

  ____

  ____

- Determinar el valor de la velocidad media que experimenta el cuerpo entre x=10cm y x=30cm

- Determinar el valor de la velocidad media que experimenta el cuerpo entre x=30cm y x=50cm

- ¿Qué puede concluir respecto a la velocidad media según el registro tabular del desplazamiento?____

  ____

  ____

  ____

Anexo 2 Actividad 1: **Representación gráfica a partir de registro tabular**

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

INSTITUTO TÉCNICO EDUCATIVO FRANCISCO LUCEA

Nombre ____

Actividad 1

La altura de un globo en función del tiempo se describe por medio de la siguiente tabla:

Tiempo en minutos	0	1	4	6	9	10	12	16	17
Altura en metros	0	14	17	22	22	20	18	18	22

a) Realice un gráfico donde represente la altura del globo en función del tiempo.

b) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el globo? y ¿cuánto tiempo duró el viaje?

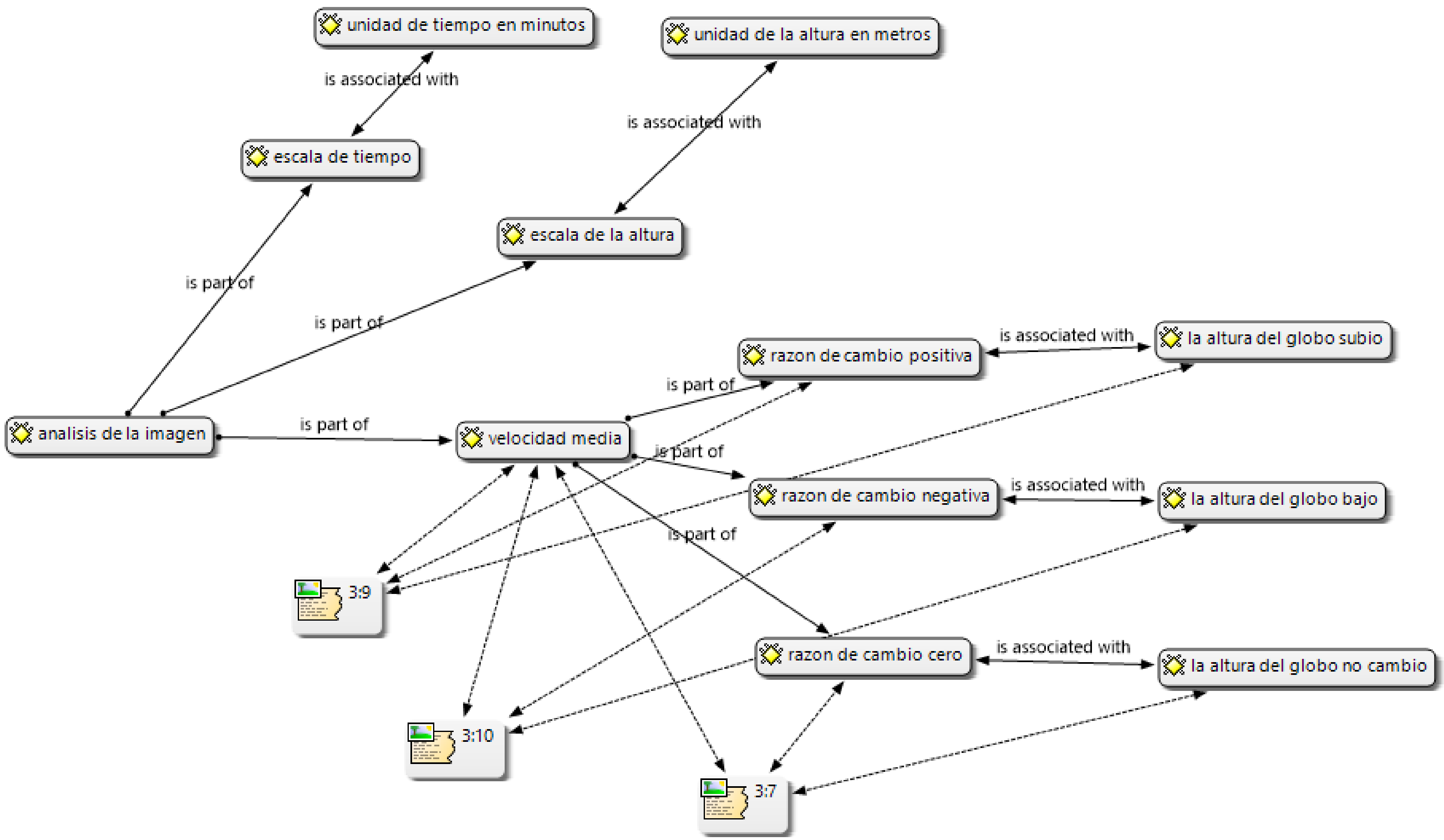
c) ¿Cuál es la velocidad media en el instante t=4 y t=6? y ¿qué se puede decir del movimiento?

d) ¿Cuál es la velocidad media en el instante t=6 y t=9? y ¿qué se puede decir del movimiento?

e) ¿Cuál es la velocidad media en el instante t=9 y t=12? y ¿qué se puede decir del movimiento?

f) ¿Qué se puede decir sobre el movimiento del globo en todo el trayecto?

Anexo 3. . Red del análisis de la interpretación gráfica



Anexo 4. Actividad 2: Representación gráfica a partir de registro algebraico

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.
INSTITUTO TÉCNICO EDUCATIVO FRANCISCO LUCEA

Nombre ____

Actividad 2

La trayectoria de un cuerpo que fue lanzado verticalmente hacia arriba está dada por la ecuación $f(x)= -2x^2+12x+2$ en metros, donde x se mide en segundos.

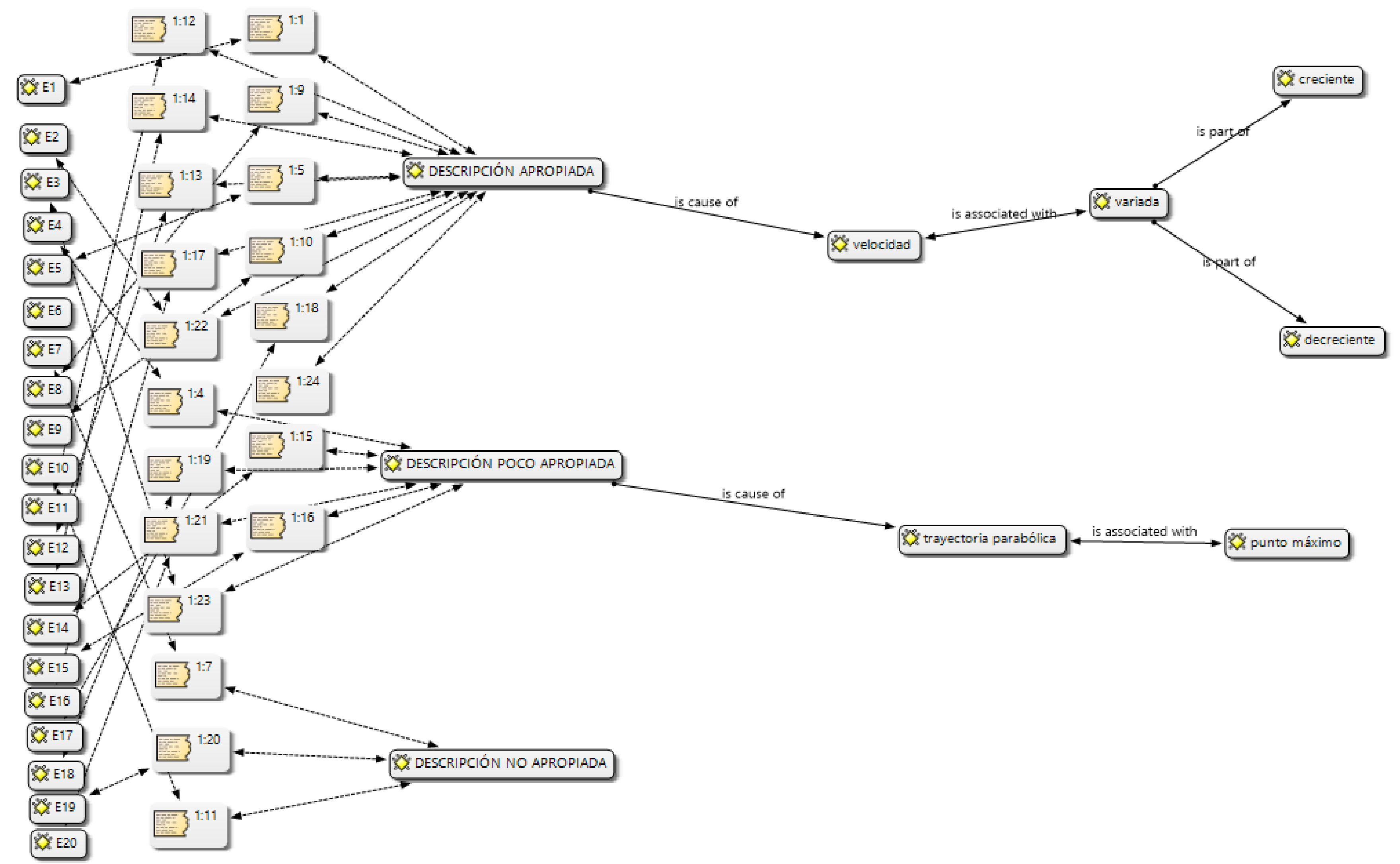
a) Después de realizar la gráfica complete la tabla.

Intervalo	$\Delta y = f(x2) - f(x1)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}$
[0,1]		
[1,2]		
[2,3]		
[3,4]		
[4,5]		

Describa la velocidad que experimenta el cuerpo en toda su trayectoria.

g) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo a los 4 segundos de haber iniciado su movimiento?

Anexo 5. Red del análisis de la interpretación de la velocidad



Anexo 6. Actividad 3: Interpretación geométrica de la pendiente de la recta tangente.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

INSTITUTO TÉCNICO EDUCATIVO FRANCISCO LUCEA

Nombre ____

Actividad 3

Se ha dibujado una función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y una recta tangente a la gráfica, adicionalmente se tiene dos coordenadas *a* y *b* sobre el eje x. Observe y analice las siguientes situaciones:

a) Ponga la abscisa *a*=2 y la abscisa *b*=4. Determine la pendiente de la recta secante que pasa por (*a, f(a)) y (a, f(b))*

b) Ponga la abscisa *a*=2 y la abscisa *b*=3. Determine la pendiente de la recta secante que pasa por *(a, f(a)) y (a, f(b))*

c) Ponga la abscisa *a*=2 y la abscisa *b*=2,5. Determine la pendiente de la recta secante que pasa por *(a, f(a)) y (a, f(b))*

d) Ponga la abscisa *a*=2 y la abscisa *b*=2,1. Determine la pendiente de la recta secante que pasa por *(a, f(a)) y (a, f(b))*

e) Describa el comportamiento de las rectas secante

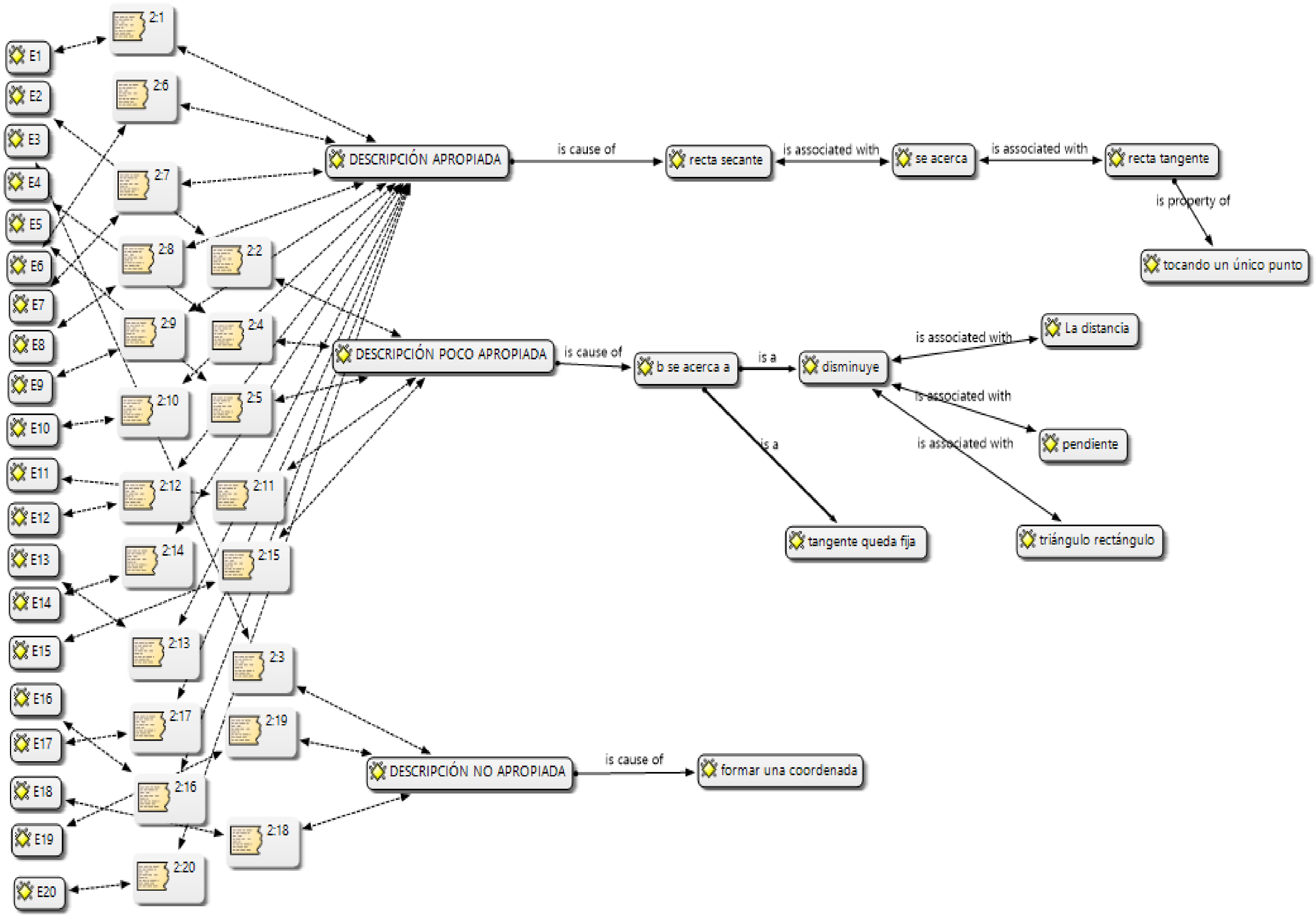
____
____
____
____

f) Describa qué sucede cuando *b* se acerca cada vez más a *a*

____
____
____
____
____

g) Realice en la gráfica las rectas de las situaciones anteriormente planteadas.

Anexo 7. Red del análisis de la recta tangente como aproximación de secante



Anexo 8. Actividad 4: Aproximación de rectas secantes.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

INSTITUTO TÉCNICO EDUCATIVO FRANCISCO LUCEA

Nombre ____

Actividad 4

En el applet se muestra la gráfica de una función, adicionalmente un punto A y B que se pueden mover sobre la gráfica.

a) Caracterice el triángulo que muestra el applet

b) ¿qué relación existe entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea?

c) ¿Cuál será el límite de la secesión de pendientes de rectas secantes a *A* y *B* con (*A* fijo) cuando h tiende a cero? Justifique

Anexo 9. Actividad 5: Caracterización de la función derivada.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

INSTITUTO TÉCNICO EDUCATIVO FRANCISCO LUCEA

Nombre ____

Actividad 5

En el applet se muestra un punto *A* que tiene como abscisa el valor de *x*, y como ordenada el valor de su derivada

a) Describa el lugar geométrico de dicho punto cuando se varía *x*

b) ¿En qué valor de *x* la pendiente de la recta tangente es positiva? y ¿En qué valor de *x* la pendiente de la recta tangente es negativa? Justifique

c) Caracterice la función derivada

d) Determine la derivada de la función

Anexo 10.Carta de intención para participar en la investigación

Carta de Intención para participar en la investigación procesos del pensamiento matemático que se adelantará durante el año 2018

Queridos(as) padres de familia,

Esta carta tiene como propósito contextualizar nuestra intención investigativa dentro de las actividades formativas que se desarrollan al interior de la clase de matemáticas. Se pretende desarrollar un trabajo investigativo en la Línea de Investigación en Formación de Profesores de Matemáticas y **tiene como objetivo principal: determinar los procesos del pensamiento matemático en el aprendizaje de la derivada.** Por lo anterior se considera de gran importancia solicitar su colaboración para alcanzar esta intención.

En esta investigación se tiene previsto hacer uso de las siguientes fuentes de información: entrevistas semiestructuradas, narrativas de aprendizaje, grabaciones de audio de sesiones del grupo, y diarios de campo narrativos de las prácticas pedagógicas matemáticas. El proceso de análisis de estas fuentes de información comprende: transcripción y edición de lo discutido y analizado, y presentación de esto a cada participante involucrado; aclaración, discusión y profundización de lo dicho por cada participante. Aprobación y autorización del participante involucrado para utilizar lo dicho como objeto de investigación y publicación.

Si ustedes consideran que bajo las especificaciones señaladas se debe hacer alguna modificación o delimitación más específica, estaremos atentos a recibir las sugerencias. Si está de acuerdo y es su deseo hacer parte de esta investigación, entonces se deberá hacer constar que fue informado mediante esta carta de presentación y, además, deberá autorizar que los análisis de la información obtenida sean publicados. La participación en esta investigación es absolutamente voluntaria y el manejo de la información recolectada será totalmente confidencial. Se destaca que Usted puede, si así lo considera en cualquier momento, desistir de participar en la investigación y si participara y decide no autorizar el uso de la información, puede hacerlo.

Agradecemos de antemano su colaboración,

Cesar Fabián Riveros Panqueva

(Investigador)

Firma en constancia de ser enterado padre de familia

____

Nombre: _________________________________

Lugar y fecha: _______________________________

Firma en constancia de ser enterado estudiante

____

Nombre: _________________________________

Lugar y fecha: __________________________