

# Transportspektroskopie an Quantenpunkten im Kondo-Regime

Von der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
- Dr. rer. nat. -  
genehmigte Dissertation  
von

Dipl.-Phys. Alexander Wieland Heine  
geboren am 18. Mai 1984 in Bückeburg

2016

Referent: Prof. Dr. Rolf J. Haug  
Korreferentin: Prof. Dr. Gertrud Zwicknagl

Tag der Promotion: 13.07.2016

# Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der experimentellen Untersuchung des Kondo-Effekts in Quantenpunkten. Die verwendeten Quantenpunkte sind auf Basis eines flachen zweidimensionalen Elektronengases mit lokaler anodischer Oxidation strukturiert. Das System beinhaltet zwei laterale Quantenpunkte, die sich in einem Abstand von etwa 500 nm voneinander befinden und einen Durchmesser von etwa 125 bis 150 nm aufweisen. Sie sind mit Tunnelbarrieren an einen gemeinsamen Source-Kontakt und je einen individuellen Drain-Kontakt gekoppelt. Die Tunnelbarrieren und die chemischen Potentiale der Quantenpunkte werden mit lateralen Elektroden eingestellt. Die Transportmessungen werden bei tiefen Temperaturen durchgeführt. Zum Erreichen der Temperaturen wird ein  $^4\text{He}/^3\text{He}$  Entmischungskryostat verwendet, in dem eine Basistemperatur von bis zu 20 mK erreicht wird. In dem Kryostaten ist eine supraleitende Spule vorhanden, mit der ein Magnetfeld von bis zu 7 T erzeugt wird.

Der Kondo-Effekt ist ein Wechselwirkungseffekt zwischen freien Elektronen in den Zuleitungen und dem lokalisierten Spin des Quantenpunktes. Die freien Elektronen schirmen das magnetische Moment des lokalisierten Spins ab und es entsteht ein Vielteilchenzustand, der als Maximum in der Zustandsdichte des Quantenpunktes zu beobachten ist. Dadurch zeigt sich ein Maximum in der differentiellen Leitfähigkeit des Quantenpunktes, das trotz Coulomb-Blockade ohne eine angelegte Vorspannung auftritt. Dieses Maximum wird zero bias anomaly genannt und ist die Signatur des Kondo-Effektes in Quantenpunkten.

Untersucht wird die Bestimmung der Kondo-Temperatur aus der Halbwertsbreite und dem temperaturabhängigen Verhalten der zero bias anomaly. Unterschiedliche Resultate dieser beiden Methoden werden auf die Verbreiterung der Coulomb-Resonanzen zurückgeführt. Es wird eine Methode zum Abzug dieses Hintergrundes dargestellt. Die Ergebnisse werden

mit theoretischen Berechnungen verglichen.

Im parallelen Magnetfeld wird die Zeeman-Aufspaltung der zero bias anomaly untersucht. Abweichendes Verhalten vom erwarteten Zeeman-Effekt wird durch den Vergleich mit der Theorie mit einer Renormalisierung des Landé-Faktors erklärt.

Messungen im senkrechten Magnetfeld zeigen eine Abnahme der Zeeman-Aufspaltung mit zunehmendem Magnetfeld und eine sprunghafte Änderung der Aufspaltung bei einem ganzzahligen Füllfaktor in den Zuleitungen. Dies ist die Folge der Renormalisierung des Landé-Faktors und der Restrukturierung der Randkanäle in den zweidimensionalen Zuleitungen.

In einem System mit zwei Quantenpunkten wird analysiert, wie sich das Verändern der Elektronenkonzentration in der Probe durch Anlegen einer Backgatespannung auf die Transporteigenschaften der Quantenpunkte auswirkt. Dabei wird erläutert, ob sich diese Methode zur Beeinflussung der RKKY-Wechselwirkung zwischen zwei Quantenpunkten eignet.

**Schlagerworte:** Quantenpunkte, Kondo-Effekt, Quanten-Hall-Effekt

# Abstract

This thesis treats the experimental examination of the Kondo effect in quantum dots. The employed structures are defined on a shallow two-dimensional electron gas by local anodic oxidation. The system contains two lateral quantum dots with a distance to each other of about 500 nm and diameters of about 125 to 150 nm. They are coupled via tunnel-barriers to a common source contact and individual drain contacts. The tunnel-barriers and the chemical potentials of the quantum dots are tuned by in-plane gates. Transport measurements are performed at low temperatures. These temperatures were achieved using a  $^4\text{He}/^3\text{He}$  dilution refrigerator with a base temperature of down to 20 mK. A superconductive coil is contained in the refrigerator, that generates a magnetic field of up to 7 T.

The Kondo effect is a interaction effect between free electrons in the leads and the localized spin of the quantum dot. The free electrons screen the localized spin's magnetic moment and a many particle state emerges, that yields a peak in the density of states of the quantum dot. Therefore a maximum in the differential conductance of the quantum dot can be observed, although the quantum dot is Coulomb blocked and no bias is applied. This maximum is called the zero bias anomaly and is the signature of the Kondo effect in quantum dots.

The Kondo temperature is determined by analyzing the half width at half maximum of the zero bias anomaly and by fitting the temperature dependence at zero bias. Differences between these methods are attributed to the broadening of the coulomb peaks and a method for subtracting the background is demonstrated. The results are compared to theoretical calculations.

The Zeeman splitting of the zero bias anomaly is investigated in a parallel magnetic field. Its behaviour differs from the expected Zeeman effect.

Comparing the results to theory, this deviation is explained by a renormalization of the Landé g-factor.

Measurements in a perpendicular magnetic field show a decrease of the Zeeman splitting with increasing magnetic field and a discontinuous jump in the splitting when the filling-factor in the two-dimensional leads reaches an integer value. This behaviour is caused by the renormalization of the Landé g-factor and the reconstruction of the edge channels in the leads.

The electron concentration of the system is varied by applying a backgate voltage. The influence of this backgate voltage on the transport properties of the quantum dots is analyzed. It is illustrated, if this method is suitable to influence the RKKY interaction between the dots.

**Keywords:** quantum dots, Kondo effect, quantum Hall effect

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>7</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>9</b>
<b>Abkürzungen und Symbole</b>	<b>13</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>17</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>21</b>
2.1. Niederdimensionale Elektronensysteme . . . . .	21
2.2. Das zweidimensional Elektronengas im Magnetfeld . . . . .	24
2.2.1. Der integrale Quanten-Hall-Effekt . . . . .	26
2.2.2. Das Randkanalbild . . . . .	29
2.3. Elektronische Zustände im nulldimensionalen Elektronengas	32
2.3.1. Transportspektroskopie an Quantenpunkten . . . . .	36
2.4. Der Kondo-Effekt . . . . .	40
2.4.1. Der Kondo-Effekt in Quantenpunkten . . . . .	42
2.4.2. Kondo-Effekt im Transport . . . . .	46
2.4.3. Kondo-Effekt im Magnetfeld . . . . .	47
<b>3. Experimentelle Grundlagen</b>	<b>53</b>
3.1. Die Probenherstellung . . . . .	53
3.1.1. Die Halbleiterheterostruktur . . . . .	53
3.1.2. Die Probenstrukturierung . . . . .	53
3.2. Die Proben . . . . .	56
3.3. Transportmessungen bei tiefen Temperaturen . . . . .	57
3.3.1. Der $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostat . . . . .	58
3.3.2. Elektrischer Messaufbau . . . . .	61

*Inhaltsverzeichnis*

<b>4. Kondo-Effekt an Einzelquantenpunkten</b>	<b>63</b>
4.1. Bestimmung der Kondo-Temperatur im gemischt-valenten Regime . . . . .	63
4.2. Zusammenfassung . . . . .	75
<b>5. Kondo-Effekt im Magnetfeld</b>	<b>77</b>
5.1. Messungen im parallelen Magnetfeld . . . . .	78
5.2. Messungen im senkrechten Magnetfeld . . . . .	81
5.2.1. Änderung des Spin-Zustandes in Landau-Niveau 0 .	92
5.3. Zusammenfassung . . . . .	94
<b>6. Manipulation der Elektronendichte zwischen zwei Quantenpunkten</b>	<b>97</b>
6.1. Einfluss einer Backgatespannung ein 2DEG . . . . .	98
6.2. Einfluss einer Backgatespannung auf die Quantenpunkte . .	100
6.3. Anwendung einer Backgatespannung im Kondo-Schachbrett	101
6.4. Zusammenfassung . . . . .	108
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>111</b>
<b>A. Untersuchung der Kondo-Temperatur im Doppelquantenpunktsystem</b>	<b>115</b>
<b>B. Minima im Kondo-Schachbrett</b>	<b>121</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>133</b>
<b>Publikationen</b>	<b>135</b>
<b>Danksagung</b>	<b>137</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1. Zustandsdichten in 3d, 2d und 1d . . . . .	22
2.2. Zustandsdichte eines nulldimensionalen Elektronengases . . .	24
2.3. Landau-Niveaus im 2DEG . . . . .	26
2.4. 2D Zustandsdichte im Magnetfeld . . . . .	27
2.5. Schematische Darstellung eines Hall-Bars . . . . .	28
2.6. Landau-Niveaus in Proben endlicher Ausdehnung . . . . .	30
2.7. Vierpunktmessung mit Randkanälen . . . . .	31
2.8. Das Fock-Darwin-Spektrum . . . . .	34
2.9. Schaltbild eines Quantenpunktes . . . . .	35
2.10. Elektrischer Transport in Quantenpunkten . . . . .	37
2.11. Leitfähigkeit als Funktion der Gatespannung . . . . .	38
2.12. Leitfähigkeit als Funktion der Vorspannung . . . . .	39
2.13. Schematische Darstellung der Coulomb-Rauten . . . . .	41
2.14. Schema des Kondoeffekts in Quantenpunkten . . . . .	43
2.15. Kondo-Effekt bei Variation einer Gatespannung . . . . .	47
2.16. Die <i>zero-bias anomaly</i> . . . . .	48
2.17. Das Kondo-Schachbrett . . . . .	49
2.18. Verteilung der Landau-Niveaus auf einem Quantenpunkt . .	50
3.1. GaAs/AlGaAs Hetrostruktur . . . . .	54
3.2. Schematische Darstellung der optischen Lithographie . . . .	55
3.3. Probe D040330A . . . . .	57
3.4. Probe D080220A . . . . .	58
3.5. Vereinfachtes Schemabild eines Entmischungskryostaten . .	60
4.1. Coulomb-Raute mit Kondo-Effekt . . . . .	64
4.2. ZBA von Quantenpunkt 1 . . . . .	65

## Abbildungsverzeichnis

4.3.	Temperaturabhängigkeit der ZBA . . . . .	67
4.4.	Anpassung des Hintergrundes einer ZBA . . . . .	68
4.5.	Breite der Coulomb-Resonanzen als Funktion der Temperatur	69
4.6.	ZBA nach Abzug des Hintergrundes . . . . .	70
4.7.	Temperaturabhängigkeit der differentiellen Leitfähigkeit nach Abzug des Hintergrundes . . . . .	71
4.8.	Numerische Berechnung der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit . . . . .	73
4.9.	Der $s$ -Parameter als Funktion der Kopplungskonstante . . .	74
4.10.	Coulomb-Raute mit Kondo-Effekt aus einem zweiten Ab- kühlprozess . . . . .	75
4.11.	ZBA nach Abzug des Hintergrundes in einem zweiten Ab- kühlprozess . . . . .	76
5.1.	Die Kondo-Resonanz im parallelen Magnetfeld . . . . .	80
5.2.	Aufspaltung der Kondo-Resonanz im parallelen Magnetfeld	80
5.3.	Renormalisierung des Landé-Faktors . . . . .	81
5.4.	Kondo-Schachbrett in Probe D040330A . . . . .	82
5.5.	Nichtlinearer Transport im Kondo-Schachbrett . . . . .	83
5.6.	Extraktion der Peakposition . . . . .	84
5.7.	Aufspaltung der ZBA als Funktion des Magnetfeldes . . . .	85
5.8.	Strom durch den Quantenpunkt im Magnetfeld . . . . .	86
5.9.	Strom-Spannungs-Kennlinie im Kondo-Schachbrett . . . . .	88
5.10.	Ladeenergie im Magnetfeld . . . . .	89
5.11.	Randkanäle im Magnetfeld . . . . .	90
5.12.	Kondo-Temperatur als Funktion des Magnetfeldes . . . . .	91
5.13.	Aufspaltung und einzelnes Maximum im Magnetfeld . . . .	93
6.1.	Shubnikov-de Haas-Oszillationen . . . . .	99
6.2.	Ladungsträgerkonzentration abhängig von der Backgate- spannung . . . . .	100
6.3.	Ladungsdiagramm von Quantenpunkt 2 . . . . .	101
6.4.	Kondo-Schachbretter beider Quantenpunkte . . . . .	103
6.5.	Schnitt durch das Kondo-Schachbrett . . . . .	104

6.6.	Differentielle Leitfähigkeit der Quantenpunkte als Funktion einer Backgatespannung . . . . .	106
6.7.	Differentielle Leitfähigkeit an Quantenpunkte 2 bei negativer Backgatespannung . . . . .	106
6.8.	Einfluss einer hohen Backgatespannung auf $G_2$ . . . . .	107
6.9.	Vergleich von $G_2$ bei verschiedenen Backgatespannungen . .	108
A.1.	Differentielle Leitfähigkeit in den Quantenpunkten als Funktion der Temperatur . . . . .	116
A.2.	Abzug des Hintergrundes im Kondo-Schachbrett . . . . .	117
A.3.	Einteilung des Hintergrundes für $G_1$ . . . . .	118
A.4.	Kondo-Temperatur in den Quantenpunkten . . . . .	119
B.1.	Kondo-Schachbrett mit Minima zwischen den Landau-Niveaus	122
B.2.	Temperaturabhängigkeit der Minima . . . . .	123
B.3.	Temperaturabhängigkeit eines Minimums in der differentiellen Leitfähigkeit . . . . .	124
B.4.	Abhängigkeit eines Minimums in der differentiellen Leitfähigkeit von der Vorspannung . . . . .	124



# Abkürzungen und Symbole

## Abkürzungen

2DEG	zweidimensionales Elektronengas
AFM	Rasterkraftmikroskop
Al	Aluminium
As	Arsen
Co	Kobalt
DAC	Digital-Analog-Konverter
D1, D2	Drain 1, Drain 2
Fe	Eisen
$G_i$	Gate $i$
Ga	Gallium
$H_2O_2$	Wasserstoffperoxid
$H_3PO_4$	Phosphorsäure
He	Helium, mit Isotopen $^3\text{He}$ und $^4\text{He}$
IVC	innere Vakuumkammer (engl. <i>inner vacuum chamber</i> )
LAO	lokale anodische Oxidation
LL0, LL1	Landau-Niveaus
NRG	numerische Renormalisierungsgruppe
OVC	äußere Vakuumkammer (engl. <i>outer vacuum chamber</i> )
S	Source
Si	Silizium
QHE	Quanten-Hall-Effekt
ZBA	zero-bias anomaly

## Symbole

$\vec{A}$	Vektorpotential
$A_l, A_r$	Parameter der sech-Funktion
$\vec{B}$	magnetisches Feld
$b$	Breite
$c_{k\sigma}^\dagger, c_{k\sigma}$	Erzeuge-, Vernichtungsoperator
$C_s, C_d, C_g$	Kapazität zu Source, Drain und zu einem Gate
$C_\Sigma$	Gesamtkapazität
$d$	Dimension
$d_{bg}$	Abstand des backgates vom 2DEG
$d_\sigma^\dagger, d_\sigma$	Erzeuge-, Vernichtungsoperator
$D$	Zustandsdichte
$D_d$	Zustandsdichte in $d$ Dimensionen
$e$	Elementarladung
$E$	Energie
$E_c$	Ladeenergie
$E_f$	Fermienergie
$E_N$	Energie des $N$ -ten Niveaus
$f(x)$	Funktion von $x$
$g$	Leitfähigkeit
$G$	differentielle Leitfähigkeit
$G_{1,2}$	differentielle Leitfähigkeit durch Quantenpunkt 1,2
$G_0$	$G$ bei $T = 0$
$G_{NRG}$	numerisch berechnete Leitfähigkeit
$g^*$	Landé-Faktor
$H$	Hamiltonoperator
$h$	plancksches Wirkungsquantum
$\hbar$	reduziertes plancksches Wirkungsquantum
$i$	Index
$j$	Index
$I$	Stromstärke
$I_i$	Strom durch Kontakt $i$
$J$	Wechselwirkungsstärke

$\vec{k}$	Wellenvektor
$\vec{k}_f$	Fermiwellenvektor
$k$	Betrag des Wellenvektors
$k_f$	Betrag des Fermiwellenvektors
$k_x, k_y, k_z$	Komponenten des Wellenvektors
$k_B$	Boltzmannkonstante
$L$	Länge
$l$	Drehimpulsquantenzahl
$l_B$	magnetische Länge
$m$	Masse
$m_e$	Elektronenmasse
$m^*$	effektive Masse
$N$	Anzahl
$N_Z$	Anzahl der Zustände
$n_e$	Elektronenkonzentration
$n, n_x, n_y, n_z$	Quantenzahlen
$n_L$	Anzahl der Elektronen in einem Landau-Niveau
$n_{\uparrow(\downarrow)}$	Anzahloperator
$r$	Radius
$r_{ij}$	Reflektionskoeffizient zwischen Kontakten $i$ und $j$
$S$	Spin
$T$	Temperatur
$T_K$	Kondotemperatur
$t_{ij}$	Transmissionskoeffizient zwischen Kontakten $i$ und $j$
$U_g$	Gatespannung
$U_{gi}$	Gatespannung an Gate $i$
$U_H$	Hallspannung
$U_{RMS}$	Amplitude der Wechselspannung
$U_{sd}$	Spannung zwischen Source und Drain
$U_{sd}^l, U_{sd}^r$	Parameter einer Anpassungsfunktion
$U_{xx}$	Längsspannung
$V$	Volumen
$v_f$	Fermigeschwindigkeit
$w$	Wilsonzahl

## Abkürzungen und Symbole

$x$	$x$ -Koordinate
$y$	$y$ -Koordinate
$z$	$z$ -Koordinate
$\alpha$	Hebelfaktor
$\alpha_{vst}$	Verstärkungsfaktor
$\beta_1, \beta_2$	Steigungen der Kanten der Coulomb-Rauten
$\gamma$	Entartung
$\Gamma$	Kopplungskonstante
$\Delta E$	Energieintervall
$\Delta t$	Zeitintervall
$\Delta U_{sd}$	Aufspaltung der ZBA
$\Delta_Z$	Zeeman-Energie
$\Delta_{ZBA}$	Halbwertsbreite der Kondo-Resonanz
$\delta(x)$	Deltafunktion
$\epsilon_0$	Energie des lokalisierten Zustandes
$\epsilon_N$	Einteilchenenergie
$\varepsilon$	Dielektrizitätszahl
$\varepsilon_0$	Dielektrizitätskonstante des Vakuums
$\lambda_B$	de Broglie-Wellenlänge
$\mu$	chemisches Potential
$\mu_B$	bohrsches Magneton
$\mu_e$	Elektronenbeweglichkeit
$\mu_i$	chemisches Potential des Kontakts $i$
$\mu_s, \mu_d$	chemisches Potential von Source, Drain
$\nu$	Füllfaktor
$\Phi$	Potential
$\Phi_0$	Flussquantum
$\rho$	spezifischer Widerstand
$\sigma$	Elektronenspin
$\Theta(x)$	Stufenfunktion
$\xi_K$	Kondo-Abschirmlänge
$\omega_0$	Eigenfrequenz
$\omega_c$	Zyklotronfrequenz



# 1. Einleitung

Seit Jahrzehnten schreitet die Miniaturisierung der Mikroelektronik immer weiter voran. Waren Computer lange Zeit aufgrund ihrer Größe Forschungs- oder Industrieprojekten vorbehalten, haben sie seit Erfindung des PCs auch Einzug in die Privathaushalte gefunden. Durch die Verkleinerung der einzelnen Bauteile auf Taschenformat führt beinahe jeder ein oder mehrere Computer als Mobiltelefon oder Armbanduhr mit sich. Lange folgte der Trend der Miniaturisierung dem 1965 aufgestellten und 1975 korrigierten Gesetz von Moore, das besagt, dass sich die Anzahl der Transistoren auf einem Computerchip durch technische Entwicklung etwa alle zwei Jahre verdoppelt [1]. In den letzten Jahren hat sich dieser Trend etwas verlangsamt, sodass z.B. Intel jetzt angibt, dass die Zeit zur Verdopplung der Transistoren pro Chip nun zweieinhalb Jahre beträgt [2]. Die Strukturen auf diesen Chips sind nun so klein, dass Abstände von 14 nm realisierbar sind und eine weitere Verkleinerung in naher Zukunft ist absehbar.

Diese Miniaturisierung stößt allerdings dort an Grenzen, wo die Gesetzmäßigkeiten der Quantenmechanik für die Beschreibung der physikalischen Eigenschaften eines Systems relevant werden. Das geschieht zum Beispiel, wenn elektrisch leitende Schichten in einer oder mehreren Dimensionen so sehr verkleinert werden, dass eine freie Bewegung der Ladungsträger nicht mehr möglich ist. Diese Einschränkung der Bewegungsfreiheit führt zu entscheidenden Änderungen im Verhalten der Ladungsträger [3].

Die quantenmechanischen Eigenschaften sind aber nicht nur eine Beschränkung der Weiterentwicklung der digitalen Technik, sondern bieten die Möglichkeiten, Daten auf neuartige Art und Weise zu verarbeiten. Die Rede ist vom Quantencomputer. Während in der digitalen Datenverarbeitung mit Bits gearbeitet wird, die die Werte 0 oder 1 annehmen können, besteht ein so genanntes Qbit des Quantencomputers aus der Superposition zweier quantenmechanischer Zustände. Damit lassen sich

## 1. Einleitung

bestimmte Rechenoperationen deutlich effizienter ausführen als mit den herkömmlichen Rechenmaschinen. Bisher wurden schon Quantencomputer mit wenigen hundert Qbits demonstriert, die einfache logische Operationen durchführen können [4]. Die Suche nach geeigneten Systemen, in denen sich Qbits präparieren, speichern und auslesen lassen, ist weiterhin Gegenstand aktueller Forschung [5]. Damit soll es möglich werden, leistungsfähige Quantencomputer zu bauen, um komplexe physikalische Berechnungen zu lösen oder sichere Kryptographie zu ermöglichen.

Eine mögliche Repräsentation eines Qbits stellt der Spin eines Quantenpunktes dar [6]. Als Quantenpunkt wird hier ein Objekt bezeichnet, in dem Ladungsträger in allen drei Raumrichtungen in ihrer Bewegung eingeschränkt sind [7]. Sie können sich daher nicht mehr frei bewegen, weswegen ein Quantenpunkt physikalisch auch als nulldimensional bezeichnet wird. Dadurch kommt es zu einer vollständigen Quantisierung der Energieniveaus, in denen sich die Ladungsträger befinden können. Diese Quantisierung ist der Situation der Elektronen in einem Atom ähnlich und es ist auch die Bezeichnung des künstlichen Atoms für die Quantenpunkte üblich. Im Folgenden sollen als Ladungsträger Elektronen gewählt werden. Spin des Quantenpunktes wird die Summe der Eigendrehimpulse der Elektronen genannt, die den Quantenpunkt besetzen. Dieser ist endlich, wenn eine ungerade Anzahl an Elektronen auf dem Quantenpunkt vorhanden ist.

Um den Spin eines Quantenpunktes als Qbit zu verwenden, ist es nötig, ihn hinreichend gut zu präparieren und auch wieder auslesen zu können. Dies kann z. B. durch optische Anregung mit einem Laser geschehen [8]. Möchte man Qubits jedoch in einen Chip integrieren und mit digitaler Elektronik verknüpfen, ist es einfacher, einen Quantenpunkt mit Hilfe seiner Transporteigenschaften zu kontrollieren. Eine mögliche Wechselwirkung zwischen magnetischen Momenten ist die RKKY-Wechselwirkung [9, 10, 11]. Sie ist eine indirekte Austauschwechselwirkung, die von den Leitungselektronen vermittelt wird. Die Spins der Quantenpunkte stellen ein magnetisches Moment dar und werden durch die RKKY-Wechselwirkung ferromagnetisch oder antiferromagnetisch gekoppelt. Untersucht man ein System mit zwei Quantenpunkten, kann diese Wechselwirkung durch die Untersuchung des ebenfalls an magnetischen Momenten auftretenden Kondo-Effektes nachgewiesen werden [12, 13, 14, 15].

Der Kondo-Effekt ist ein Vielteilchen-Wechselwirkungseffekt, bei dem ein magnetisches Moment durch Leitungselektronen abgeschirmt wird [16]. Zuerst wurde er in Metallen mit magnetischen Verunreinigungen festgestellt, an denen Streuprozesse an diesen Störstellen zu einem Anstieg des Widerstandes unterhalb der Kondo-Temperatur führen [17]. Dabei sind allerdings viele magnetische Störstellen beteiligt. Quantenpunkte liefern die Möglichkeit, den Kondo-Effekt an einzelnen, fein einstellbaren magnetischen Momenten zu studieren [18, 19]. Das ermöglicht zum Beispiel eine genaue Untersuchung verschiedener Transportregime wie beispielsweise dem Kondo-Regime und dem gemischt-valenten Regime [20] oder den Beweis universeller Skalierungsgesetze der Kondo-Resonanz Energieänderungen [21]. Neuere Untersuchungen beschäftigen sich mit dem Verhalten des Kondo-Effektes bei Ankopplung eines Quantenpunktes an einen Resonator für elektronische Zustände [22].

Diese gute Kenntnis des Kondo-Effektes wird benötigt, wenn man ihn als spektroskopische Methode zum Nachweis der RKKY-Wechselwirkung nutzen möchte. Die hier vorliegende Arbeit untersucht deshalb den Kondo-Effekt an einem Quantenpunkt-System, in dem dieser Nachweis möglich ist [23]. In Kapitel 2 werden dafür zunächst die theoretischen Grundlagen der behandelten Themen beschrieben. Angefangen mit den Zustandsdichten in verschiedenen Dimensionen werden die elektronischen Eigenschaften von zwei- und null-dimensionalen Systemen betrachtet. Das Verhalten dieser Systeme im Magnetfeld spielt dabei eine besondere Rolle. Des Weiteren wird der Kondo-Effekt in Bezug auf die Transportspektroskopie an Quantenpunkten erklärt.

Kapitel 3 befasst sich mit den experimentellen Grundlagen der hier präsentierten Versuchsergebnisse. Diese beinhalten die Herstellung der untersuchten Quantenpunktstrukturen, eine genaue Beschreibung der Proben selbst, sowie die Vorstellung des Versuchsaufbaus. Bei letzterem wird insbesondere auf Messungen bei tiefen Temperaturen und den elektrischen Versuchsaufbau eingegangen.

Anschließend folgt in Kapitel 4 eine Untersuchung der Kondo-Resonanz eines Einzelquantenpunktes im gemischt-valenten Regime. Im Mittelpunkt steht die Bestimmung der Kondo-Temperatur, wenn die Verbreiterung der Coulombmaxima zu einer stark erhöhten Hintergrundleitfähigkeit im Be-

## 1. Einleitung

reich der Kondo-Resonanz führt. Es wird untersucht, wie dieser Hintergrund abgezogen werden kann und die Ergebnisse werden mit denen theoretischer Berechnungen verglichen.

In Kapitel 5 wird eine Aufspaltung der Kondo-Resonanz in magnetischen Feldern analysiert. Dazu werden sowohl Messdaten bei Feldern parallel als auch senkrecht zur Probenoberfläche untersucht. Im Fall eines Magnetfelds parallel zur Probenoberfläche wird bei einem Vergleich mit der Theorie auf eine Renormalisierung des Landé-Faktors durch den Kondo-Effekt geschlossen. Die daraus erhaltenen Ergebnisse werden genutzt, um Beobachtungen im senkrechten Magnetfeld zu erklären. Dort wird die Aufspaltung der Kondo-Resonanz im so genannten Kondo-Schachbrett untersucht. Das Kapitel schließt mit einer Untersuchung zu unterschiedlichen Spin-Konfigurationen im untersten Landau-Niveau, die im senkrechten Magnetfeld auftreten.

Das letzte Kapitel über Messergebnisse, das Kapitel 6, beschäftigt sich mit der Frage, inwiefern das Anlegen einer Backgatenspannung an die Probe dazu geeignet ist, Phänomene zu untersuchen, die sensitiv auf die Änderung der Elektronenkonzentration zwischen verschiedenen Quantenpunkten sind.

Am Ende werden die Ergebnisse in Kapitel 7 noch einmal zusammengefasst und es wird ein Ausblick auf weiterführende Experimente gegeben.

## 2. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die theoretischen Grundlagen zum Verständnis der durchgeführten Experimente und ihrer Interpretation beschrieben werden. Zunächst wird die Zustandsdichte eines Elektronengases in verschiedenen Dimensionen vorgestellt. Dann folgen genauere Betrachtungen eines zweidimensionalen Elektronengases im Magnetfeld und der Energiezustände in Quantenpunkten. Abschließend sollen der Kondo-Effekt und seine Signatur in Quantenpunkten eingeführt werden.

### 2.1. Niederdimensionale Elektronensysteme

Die in dieser Arbeit untersuchten Strukturen schränken die Bewegung der Elektronen in ein oder mehrere Raumrichtungen ein. Geschieht diese Einschränkung in der Größenordnung der De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda_B$ , kommt es zu einer Quantisierung der Energie, die die Ladungsträger annehmen können. Im Folgenden sollen die Eigenschaften dieser niederdimensionalen Systeme genauer betrachtet werden. Dabei wird die Besetzung der Zustände durch die Zustandsdichte  $D_d(E)$  beschrieben. Sie zählt die Anzahl der Zustände  $N_Z(E) = D_d(E)dE$  in einem Energieintervall  $[E, E + dE]$  ab und hängt stark von der Dimension  $d$  ab. Zur Bestimmung der Zustandsdichte wird zunächst die Anzahl der Zustände in Abhängigkeit des Wellenvektors  $\vec{k}$  abgezählt. In einem periodischem Kristall mit dem Volumen  $V = L^d$  sind die Zustände im  $k$ -Raum äquidistant mit Abstand  $\frac{2\pi}{L}$  verteilt. Ein Zustand besetzt somit ein Volumen von  $(\frac{2\pi}{L})^d$ . Für  $d = 3$  befinden sich in einer Kugelschale mit Radius  $k = |\vec{k}|$  und Breite  $dk$  somit  $\frac{4\pi k^2}{(2\pi/L)^3} \gamma dk$  Zustände.  $\gamma$  gibt hierbei die Entartung der Zustände an. Die Zustandsdichte ist dann

## 2. Theoretische Grundlagen

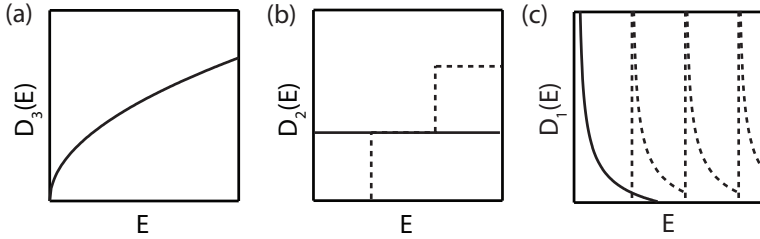


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung der Zustandsdichte für ein drei- (a), zwei- (b) und eindimensionales (c) Elektronengas. Die gestrichelten Linien zeigen den quasi-zweidimensionalen bzw. quasi-eindimensionalen Fall.

$$D_3(k) = \gamma \frac{L^3}{2\pi^2} k^2. \quad (2.1)$$

Um daraus  $D_3(E)$  zu erhalten, nutzt man die Dispersionsrelation  $E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ . Dabei ist  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  das reduzierte plancksche Wirkungsquantum und  $m^*$  die effektive Masse der Elektronen. Mit  $\frac{dk}{dE} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2 E}}$  erhält man

$$D_3(E) = \gamma \frac{L^3}{4\pi^2} \left( \frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E}. \quad (2.2)$$

Das Ergebnis ist in Abb. 2.1 (a) schematisch dargestellt. Analog kann man die Zustandsdichten für  $d = 2$  und  $d = 1$  berechnen und erhält[3]

$$D_2(E) = \frac{\gamma m^*}{2\pi \hbar^2} \quad (2.3)$$

und

$$D_1(E) = \gamma \frac{\sqrt{2m^*}}{2\pi \hbar} \frac{1}{\sqrt{E}}. \quad (2.4)$$

## 2.1. Niederdimensionale Elektronensysteme

Diese Ergebnisse gelten für ideale ein- bzw. zweidimensionale Systeme. Diese werden bei der Realisierung niederdimensionaler Systeme in Halbleiter-Heterostrukturen jedoch nicht erreicht. Schränkt man die Bewegung der Elektronen in  $z$ -Richtung durch ein harmonisches Potential  $\Phi(z) = \frac{1}{2}m^*\omega_0 z^2$  mit Eigenfrequenz  $\omega_0$  ein, erhält man für die Energie

$$E(k_x, k_y, n_z) = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2) + \hbar\omega_0(n_z + \frac{1}{2}). \quad (2.5)$$

Dabei beschreiben  $k_x$  und  $k_y$  Komponenten von  $\vec{k}$ , während  $n_z = 0, 1, 2, \dots$  die Quantenzahlen in  $z$ -Richtung angibt. In der eingeschränkten Raumrichtung können so mehrere Zustände mit Energie  $E(n_z) = \hbar\omega_0(n_z + \frac{1}{2})$  besetzt werden und man spricht daher von einem quasi-zweidimensionalen System mit  $n_z$  besetzten Subbändern. Die Zustandsdichte ändert sich dadurch zu

$$D_2(E) = \frac{\gamma m^*}{2\pi\hbar^2} \sum_{n_z} \Theta(E - E(n_z)) \quad (2.6)$$

mit der Stufenfunktion  $\Theta(E - E(n_z))$ . Sie ist in Abb. 2.1 (b) zu sehen. Analog dazu gibt es auch quasi-eindimensionale Systeme, bei denen mehrere Subbänder besetzt sind, wie in Abb. 2.1 gezeigt wird. Ein Quantenpunkt ist ein quasi-nulldimensionales System. Dabei liegt eine Quantisierung der Energie in allen drei Raumrichtungen vor. Das führt mit einem isotropen Einschlusspotential zu der Zustandsdichte

$$D_0(E) = \gamma\delta(E - \hbar\omega_0(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})). \quad (2.7)$$

$D_0$  ist in Abb. 2.2 abgebildet. Aufgrund der Analogie zu den quantisierten Energieniveaus in der Atomphysik werden diese nulldimensionalen Systeme auch künstliche Atome genannt.

## 2. Theoretische Grundlagen

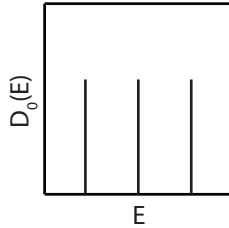


Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung der Zustandsdichte für ein nulldimensionales Elektronengas. Es liegt eine vollständige Quantisierung der Energieniveaus vor.

## 2.2. Das zweidimensional Elektronengas im Magnetfeld

Die verwendeten Quantenpunktstrukturen werden auf Grundlage eines zweidimensionalen Elektronengases (2DEG) hergestellt und haben somit zweidimensionale Zuleitungen. Ein Magnetfeld senkrecht zur Probenoberfläche hat einen starken Einfluss auf die elektronischen Eigenschaften des 2DEGs und beeinflusst damit auch den Transport durch den Quantenpunkt.

Der Hamiltonoperator für ein 2DEG im Magnetfeld, das in  $z$ -Richtung durch das Potential  $\Phi(z)$  eingeschlossen ist, lautet [24]:

$$H = \frac{(\vec{p} + |e|\vec{A})^2}{2m^*} + \Phi(z). \quad (2.8)$$

Hierbei ist  $\vec{p}$  der Impuls,  $e$  die Elementarladung und  $\vec{A}$  das Vektorpotential. Für letzteres wählt man  $\vec{A} = (-By, 0, 0)$ , sodass das resultierende Magnetfeld  $\vec{B} = (0, 0, B)$  in  $z$ -Richtung ausgerichtet ist. Damit kann die Schrödingergleichung durch Separation des Hamiltonoperators in  $H = H_{xy} + H_z$  gelöst werden. Der  $z$ -Anteil  $H_z = p_z^2/2m^* + \Phi(z)$  führt zu der in Abschnitt 2.1 schon beschriebenen Quantisierung der Energie in



## 2.2. Das zweidimensional Elektronengas im Magnetfeld

$z$ -Richtung. Für  $H_{xy}$  erhält man:

$$H_{xy} = \frac{(p_x - eBy)^2 + p_y^2}{2m^*}. \quad (2.9)$$

Die dazugehörige Schrödingergleichung lässt sich als eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Zyklotronfrequenz  $\omega_c = eB/m^*$  lösen und ergibt die quantisierten Eigenwerte

$$E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (2.10)$$

mit der Quantenzahl  $n=0,1,2,\dots$ . Die zu einem bestimmten  $n$  gehörenden Energie-Niveaus werden als *Landau-Niveaus* bezeichnet und sind durch konstante Energieabstände  $\hbar\omega_c$  voneinander getrennt. Diese so genannte Landau-Quantisierung führt zu einem Übergang von der konstanten Zustandsdichte im 2DEG bei  $B = 0$  zu einer diskreten Energieverteilung nach Anlegen eines senkrechten Magnetfeldes. Jedes Landau-Niveau kann mit  $n_L = eB/h$  entarteten Zuständen besetzt werden [24]. Bei einer gegebenen Elektronendichte  $n_e$  des 2DEGs kann man die Anzahl besetzter Landau-Niveaus  $\nu$  bestimmen:

$$\nu = \frac{n_e}{n_L} = \frac{n_e \hbar}{|e|B}. \quad (2.11)$$

$\nu$  wird als Füllfaktor bezeichnet und nimmt mit zunehmendem Magnetfeld ab. Erreicht er einen ganzzahligen Wert  $\nu = N - 1$ , wird das  $N$ -te Landau-Niveau gerade ganz entvölkert. Dadurch kommt es zu Diskontinuitäten in der Fermienergie  $E_F$ , wie in Abb. 2.3 zu sehen ist.

Neben der Landau-Quantisierung tritt im Magnetfeld noch die Zeeman-Aufspaltung auf, die die Spinartung aufhebt. Dies führt zu einer Aufspaltung der Landau-Niveaus und verändert die Eigenenergien zu

$$E_n^\pm = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2}g^*\mu_B B, \quad (2.12)$$

wobei  $g^*$  den Landé-Faktor und  $\mu_B$  das bohrsche Magneton beschreiben. Die resultierende Zustandsdichte wird in Abb. 2.4 gezeigt. Da es in einem

## 2. Theoretische Grundlagen

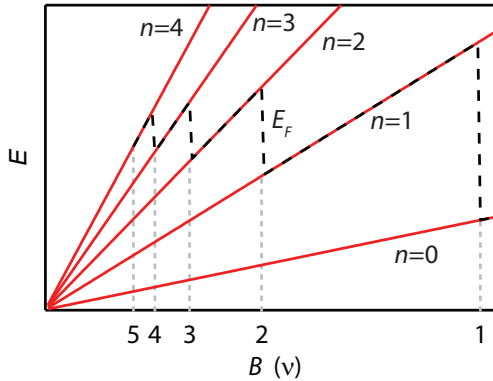


Abbildung 2.3.: Landau-Niveaus ohne Berücksichtigung der Spinaufspaltung abhängig von  $B$ . Die Fermienergie ist als schwarze gestrichelte Linie angegeben. Die grauen gestrichelten Linien kennzeichnen ganzzahlige Füllfaktoren.

realen 2DEG z.B. durch Verunreinigungen oder Wachstumsdefekte zu Potentialfluktuationen kommt, sind die Landau-Niveaus durch Streuung an diesen Potentialfluktuationen verbreitert. Die gestreuten Elektronen werden dabei in der Probe lokalisiert und nehmen nicht mehr am Transport teil. Dadurch kommt es zu den im nächsten Abschnitt beschriebenen Effekten.

### 2.2.1. Der integrale Quanten-Hall-Effekt

Lässt man durch einen zweidimensionalen Leiter, der Einfachheit halber ein so genannter Hall-Bar wie in Abb. 2.5 abgebildet, einen Strom  $I$  fließen und legt senkrecht zur Leiterebene ein Magnetfeld an, kann man senkrecht zur Flussrichtung des Stromes eine Hall-Spannung  $U_H$  messen. Dieser Effekt wird Hall-Effekt genannt und der Widerstand  $R_H = U_H/I$  heißt Hall-Widerstand. Dabei ist  $R_H$  proportional zum Betrag des Magnetfeldes.

## 2.2. Das zweidimensional Elektronengas im Magnetfeld

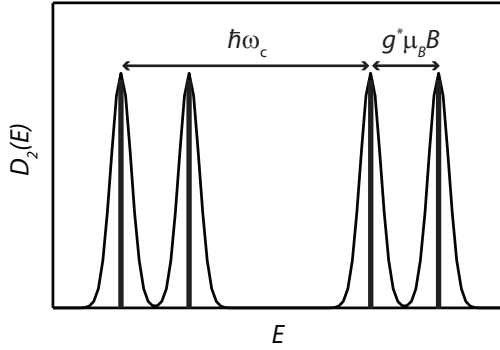


Abbildung 2.4.: Zweidimensionale Zustandsdichte im senkrechten Magnetfeld. Die Landau-Niveaus im Abstand  $\hbar\omega_c$  spalten durch aufhebung der Spinartung in zwei Niveaus mit Abstand  $g^*\mu_B B$ . Die Landau-Niveaus sind durch Streuung verbreitert.

des  $B$ . Führt man eine solche Messung in einem 2DEG bei einer Temperatur durch, die kleiner als der Abstand der Landau-Niveaus ist, treten bei ganzzahligen Füllfaktoren Plateaus im Hall-Widerstand auf. Die Plateaus haben die Werte

$$R_H = \frac{h}{ie^2}, \quad (2.13)$$

sie hängen also nur von den Naturkonstanten  $e$  und  $h$  und einer natürlichen Zahl  $i=1,2,3,\dots$  ab, die den ganzzahligen Füllfaktoren entspricht. Das Auftreten des quantisierten Hall-Widerstandes wurde erstmals von Klaus von Klitzing an einem Metal-Oxid-Feldeffekttransistor gemessen und wird integraler Quanten-Hall-Effekt (QHE) genannt [25, 26]. Von Klitzing wurde für die Entdeckung des QHE 1985 mit dem Nobel-Preis für Physik ausgezeichnet.

Während sich im Hallwiderstand Plateaus ausbilden, zeigt die Spannung

## 2. Theoretische Grundlagen

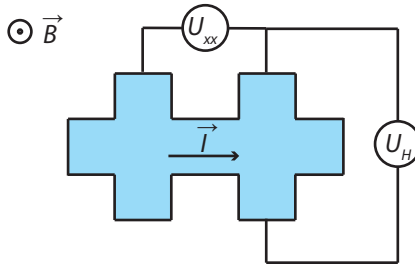


Abbildung 2.5.: Hall-Bar im senkrechten Magnetfeld. Die Spannung  $U_{xx}$  wird parallel zum Strom  $I$  gemessen, die Spannung  $U_H$  senkrecht dazu.

$U_{xx}$  parallel zum Strom so genannte Shubnikov-de Haas-Oszillationen. Zu jedem Plateau in  $R_H$  zeigt  $U_{xx}$  ein Minimum.

Diese beiden Effekte lassen sich mit dem Auftreten der lokalisierten und delokalisierten Zustände erklären. Erhöht man das Magnetfeld, vergrößert man den Abstand der Landau-Niveaus, sodass die Landau-Niveaus zu höheren Energien geschoben werden. Wird dadurch ein Landau-Niveau über die Fermienergie gehoben, wird es vollständig entleert und die Elektronen verteilen sich in tiefere Landau-Niveaus um. Durch die Verschiebung treten an der Fermienergie abwechselnd lokalisierte und delokalisierte Zustände auf.

Befindet sich ein delokalisierte Zustand an der Fermienergie, findet der elektrische Transport über die Probe statt und es kann eine endliche Längsspannung gemessen werden. Durch die abnehmende Besetzung des delokalisierten Zustandes bei weiterem Erhöhen des Magnetfeldes kommt es zum Anstieg des Hallwiderstandes.

Wird der lokalisierte Zustand an der Fermienergie von einem delokalisierten Zustand abgelöst, ändert sich durch weiteres Erhöhen des Magnetfeldes die Anzahl der delokalisierten Zustände nicht und der Hallwiderstand bleibt konstant, es bildet sich ein Plateau. Zwischen den Längs-

kontakten findet kein Transport mehr statt und es kann keine endliche Leitfähigkeit mehr gemessen werden.

### 2.2.2. Das Randkanalbild

Ein weiteres Modell zur Erklärung des QHE ist das Randkanalbild. Es beachtet die endlichen Ausdehnung des 2DEGs. Dabei wird angenommen, dass sich am Probenrand durch das Einschlusspotential die Landau-Niveaus verbiegen, wie es in Abb. 2.6 dargestellt ist. Dort, wo die verbogenen Landau-Niveaus die Fermienergie schneiden, ist Transport in eindimensionalen Randkanälen möglich. Die Anzahl der Randkanäle entspricht dem ganzzahligen Füllfaktor  $\nu$ .

Eine quantitative Beschreibung der Rankanäle wird mit dem Landauer-Büttiker-Formalismus [27, 28] erreicht. Dabei wird einem Kontakt  $i$  an einer Probe ein chemisches Potential  $\mu_i$  zugeordnet und sie werden durch Reflektionskoeffizient und Transmissionskoeffizienten charakterisiert. Die Kontakte können durch einen oder mehrere eindimensionale Randkanäle miteinander verbunden sein, die jeweils den Strom  $e/h$  tragen. Der Strom  $I_i$  durch einen Kontakt, der mit  $N$  Randkanälen verbunden ist, ist dann

$$I_i = \frac{e}{h} \left( (N - r_{ii})\mu_i - \sum_{i \neq j} t_{ij}\mu_j \right). \quad (2.14)$$

Dabei ist  $r_{ij}$  der Reflektionskoeffizient zwischen den Kontakten  $i$  und  $j$ , während  $t_{ij}$  den Transmissionskoeffizienten zwischen  $i$  und  $j$  beschreibt. Im Falle einer idealen Vierpunktmessung, wie in Abb. 2.7 gezeigt, sind die Reflektionskoeffizienten 0. Der Strom soll zwischen den Kontakten 1 und 3 geleitet werden, während die Spannung zwischen den Kontakten 2 und 4 detektiert wird. Es führen also die Kontakte 1 und 3 den Strom  $I$  und es ist  $I_2 = I_4 = 0$ . Wählt man die Transmissionskoeffizienten so, dass entlang der in Abb. 2.7 eingezeichneten Randkanäle  $t_{ij} = 1$  ist und sonst verschwindet, erhält man eine Spannung  $U_{24} = (\mu_2 - \mu_4)/e$ , die zwischen den Kontakten 2 und 4 abfällt. Mit Gleichung 2.14 kann man daraus den Widerstand  $R_{24} = h/e^2$  ableiten, was dem Wert des Hall-Plateaus bei

## 2. Theoretische Grundlagen

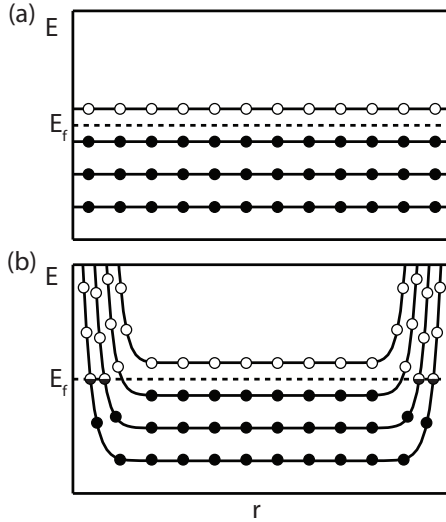


Abbildung 2.6.: Landau-Niveaus in Proben unendlicher (a) und endlicher (b) Ausdehnung. Am Probenrand verbiegen sich die Landau-Niveaus und schneiden die Fermienergie, sodass sich ein-dimensionale Randkanäle bilden.

Füllfaktor  $\nu = 1$  entspricht. Für den Widerstand zwischen zwei gegenüberliegenden Kontakten in einem Hall-Bar erhält man verallgemeinert  $R_H = \frac{h}{e^2} \frac{1}{N}$ , wobei  $N$  die Anzahl der ein-dimensionale Randkanäle ist [28]. Dies entspricht den im Experiment gefundenen Werten für den integralen QHE.

Die räumliche Verteilung der Randkanäle kann durch ein elektrostatisches Modell beschrieben werden. Ein solcher Ansatz wurde von Chklovskii *et al.* [29] verfolgt. Das Ergebnis ihrer Berechnungen lieferte sich abwechselnde kompressible und inkompressible Streifen am Rand einer zweidimensionalen Probe. Dabei sind kompressible Streifen diejenigen, in denen Elektronen in freie Zustände gestreut werden können. In kompressiblen

## 2.2. Das zweidimensional Elektronengas im Magnetfeld

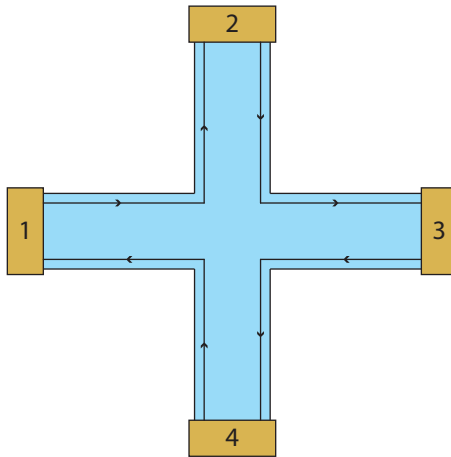


Abbildung 2.7.: Schematische Darstellung einer Vierpunktmessung zur Bestimmung des Hall-Widerstands. Die Kontakte 1-4 sind hier jeweils durch einen eindimensionalen Randkanal mit dem nächsten Kontakt verbunden.

## 2. Theoretische Grundlagen

Streifen sind die Elektronen lokalisiert und nehmen nicht am elektrischen Transport teil [30]. Die Anzahl der inkompressiblen Streifen entspricht dem Füllfaktor  $\nu$ , womit der Rand der Probe in ebenfalls  $\nu$  kompressible Randkanäle geteilt wird.

### 2.3. Elektronische Zustände im nulldimensionalen Elektronengas

Die Zustandsdichte in einem nulldimensionalen Elektronengas oder Quantenpunkt wurde in Abschnitt 2.1 beschrieben. Hier soll eine genauere Betrachtung der energetischen Zustände in einem solchen System folgen. Das Spektrum des Quantenpunktes setzt sich aus zwei verschiedenen Beiträgen zusammen. Zum einen ist dies der Anteil des Einschlusspotentials, das zur oben beschriebenen Quantisierung der Energie führt. Dieser Teil wird Anregungsspektrum genannt. Zum Anderen wird bei der geringen Größe des Quantenpunktes die Coulomb-Abstoßung zwischen den Elektronen relevant. Die daraus resultierenden Energiebeiträge werden Additionsspektrum genannt.

#### Das Anregungsspektrum

Ein Quantenpunkt wird durch das Einschränken der freien Bewegung der Elektronen in allen drei Raumrichtungen erzeugt. Die Bewegung wird dabei auf die Größenordnung der de-Broglie Wellenlänge  $\lambda_B = 2\pi/k$  eingeschränkt. In den hier benutzten lateralen Quantenpunkten liegt eine starke Einschränkung in Richtung des 2DEGs vor, sodass der Quantenpunkt als Kreisscheibe beschrieben werden kann und effektiv zweidimensional wird. Für ein näherungsweise harmonisches Einschlusspotential erhält man den Hamilton-Operator [31]

$$H = \frac{1}{2m^*} \left( \vec{p} + |e|\vec{A} \right)^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2. \quad (2.15)$$

Die Eigenenergien dieses Hamilton-Operators können analytisch bestimmt



### 2.3. Elektronische Zustände im nulldimensionalen Elektronengas

werden und man erhält [31, 32]

$$\epsilon_{n,l} = (2n + l + 1)\hbar\sqrt{\frac{1}{4}\omega_c^2 + \omega_0^2} - \frac{\hbar}{2}l\omega_c. \quad (2.16)$$

Hierbei ist  $n$  die Hauptquantenzahl und  $l$  die Drehimpulsquantenzahl in der Ebene der Kreisscheibe. Zuerst wurde diese Lösung von Fock [33] und Darwin [34] gezeigt, weswegen das resultierende Spektrum Fock-Darwin-Spektrum genannt wird. Der Anteil der Eigenenergien, der die Zyklotronenergie  $\omega_c$  beinhaltet, wird nur im Magnetfeld relevant. Dort kommt es durch den Zeeman Effekt zusätzlich zur Aufhebung der Spinentartung und die Gesamtenergie im Magnetfeld  $B$  wird zu

$$\epsilon_{n,l,\sigma} = \epsilon_{n,l} + \sigma g^* \mu_B B. \quad (2.17)$$

Hierbei ist  $\sigma = \pm\frac{1}{2}$  der Spin des Elektrons. Das Fock-Darwin-Spektrum ist für ein Einschlusspotential  $\omega_0 = 20$  meV in Abhängigkeit vom Magnetfeld in Abb. 2.8 zu sehen. Bei einem Magnetfeld von 5 T beträgt die Zeemanaufspaltung in GaAs mit einem Volumen-Landéfaktor  $g^* = 0.44$  etwa  $60 \mu\text{eV}$  und ist deswegen in dem dargestellten Bereich vernachlässigbar. Bei kleinen Magnetfeldern unter 3 T kreuzen sich die Zustände des Fock-Darwin-Spektrums. Über 3 T sieht man die Bildung der Landau-Niveaus, die analog zum 2DEG auftreten.

### Das Additionsspektrum

Das Additionsspektrum kommt durch die Coulomb-Abstoßung zwischen den Elektronen auf dem Quantenpunkt zustande. Befinden sich  $N$  Elektronen auf dem Quantenpunkt, benötigt man neben der Anregungsenergie einen zusätzlichen Energiebetrag, um die Coulomb-Abstoßung zu überwinden und den Quantenpunkt mit einem zusätzlichen Elektron zu besetzen. Diese Energie  $E_c$  wird als Ladeenergie bezeichnet.

In Abb. 2.9 ist das typische Schaltbild eines Quantenpunktes dargestellt: der Quantenpunkt ist an zwei Zuleitungen Source und Drain über Tunnelbarrieren gekoppelt und es besteht eine kapazitive Kopplung zu einer zusätzlichen Elektrode, einem so genannten *Gate*. Jedem Kontakt

## 2. Theoretische Grundlagen

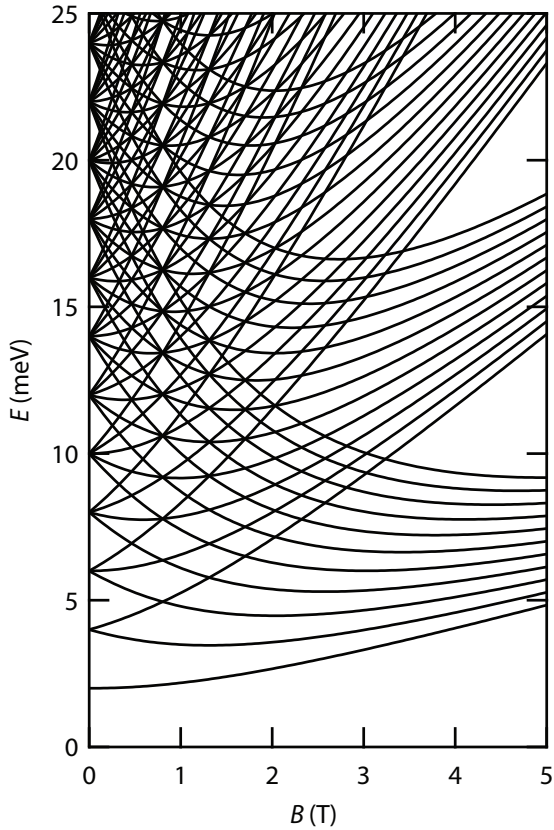


Abbildung 2.8.: Das Fock-Darwin-Spektrum für  $\omega_0 = 2$  meV. Die Aufhebung der Spinartung durch den Zeeman-Effekt wurde in dieser Darstellung nicht berücksichtigt.

### 2.3. Elektronische Zustände im nulldimensionalen Elektronengas

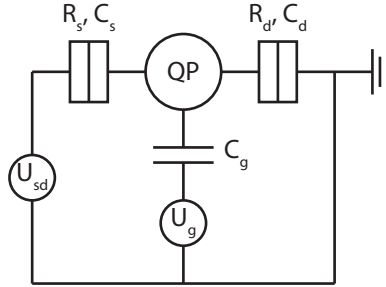


Abbildung 2.9.: Schaltbild eines Quantenpunktes, der über Tunnelbarrieren mit den Tunnelwiderständen  $R_{s,d}$  und Kapazitäten  $C_{s,d}$  an die Zuleitungen und mit der Kapazität  $C_g$  n kapazitiv an ein Gate gekoppelt ist.

kann dann eine Kapazität zugeordnet werden. Diese sind in dem gezeigten Beispiel die Kapazität zu Source  $C_s$ , Drain  $C_d$  und dem Gate  $C_g$ . Die Gesamtkapazität des Quantenpunktes ist dann die Summe der einzelnen Kapazitäten:

$$C_\Sigma = C_s + C_d + C_g. \quad (2.18)$$

Die Energie des  $N$ -ten besetzten Niveaus des Quantenpunktes ist damit [7]

$$E_N = \epsilon_N + \frac{N(N-1)e^2}{2C_\Sigma} - \alpha e U_g. \quad (2.19)$$

Hier sind  $\epsilon_N$  die Einteilchenenergie und  $U_g$  die Spannung, die an das Gate angelegt wird. Der Faktor  $\alpha = C_g/C_\Sigma$  wird oft auch als Hebelfaktor bezeichnet. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen einer Gatespannung und der Energie, um die  $E_N$  bei Anlegen dieser Spannung beeinflusst wird. Der Unterschied zwischen den Energien  $E_N$  und  $E_{N+1}$  ist das chemische Potential des  $N$ -ten Zustandes:

## 2. Theoretische Grundlagen

$$\mu_N = E_{N+1} - E_N = \epsilon_{N+1} - \epsilon_N + \frac{Ne^2}{C_\Sigma}. \quad (2.20)$$

Das chemische Potential ist also die Energie, die benötigt wird, um einem mit  $N$  Elektronen besetzten Quantenpunkt ein weiteres Elektron hinzuzufügen. Aus der Differenz zweier aufeinander folgender chemischer Potentiale erhält man dann die Ladeenergie  $E_c$ . Ist die Differenz zwischen den Einteilchenenergien  $\epsilon_{N+1} - \epsilon_N \ll \frac{e^2}{C_\Sigma}$ , was bei den in dieser Arbeit verwendeten Quantenpunkten typischerweise der Fall ist, erhält man daraus:

$$E_c = \frac{e^2}{C_\Sigma}. \quad (2.21)$$

### 2.3.1. Transportspektroskopie an Quantenpunkten

Die Energieniveaus des Quantenpunktes sollen in dieser Arbeit mittels elektrischer Transportmessungen abgefragt werden. Ein energetisches Schema des Quantenpunktes, der über Tunnelbarrieren mit Source und Drain verbunden ist, ist in Abb. 2.10 (a) zu sehen. Hier ist kein Transport über den Quantenpunkt möglich, da das höchste freie Energieniveau des Quantenpunktes über den chemischen Potentialen von Source und Drain liegt. Somit können Elektronen von Source oder Drain nicht in den Quantenpunkt hinein tunneln, ohne dass zusätzliche Energie aufgebracht wird. Es liegt die so genannte Coulomb-Blockade vor.

Um den Transport über den Quantenpunkt zu ermöglichen gibt es nun zwei verschiedene Vorgehensweisen: zum einen kann das chemische Potential  $\mu_N$  des Quantenpunktes durch das Anlegen einer Gatespannung  $U_g$  beeinflusst werden. Dieses verschiebt die Lage des Energieniveaus wie in Gl. 2.19 beschrieben. Erreicht  $\mu_N$  dadurch eine Resonanz mit den chemischen Potentialen von Source  $\mu_s$  und Drain  $\mu_d$ , d.h.  $\mu_N = \mu_s = \mu_d$ , ist resonanter Transport über den Quantenpunkt möglich. Diese Situation wird in Abb. 2.10 (b) gezeigt. Durch das Verändern einer Gatespannung in eine bestimmte Richtung können so sukzessive Energieniveaus des Quantenpunktes in Resonanz mit Source und Drain gebracht werden. Wird

### 2.3. Elektronische Zustände im nulldimensionalen Elektronengas

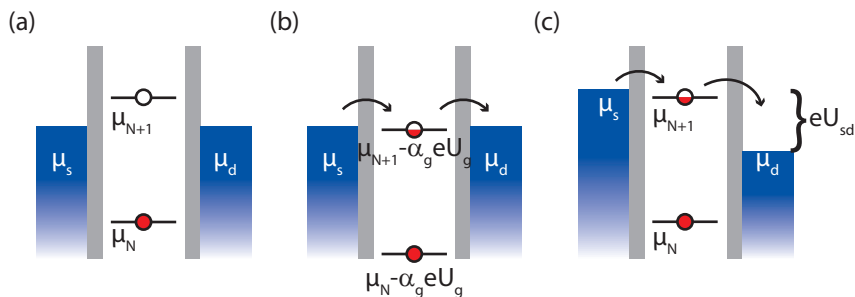


Abbildung 2.10.: Schematische Darstellung des Transports in einem Quantenpunkt: (a) Coulomb-Blockade. (b) Resonanter Transport mit angelegter Gatespannung  $U_g$ . (c) Nicht-linearer Transport mit angelegter Vorspannung  $U_{sd}$ .

dabei die Leitfähigkeit  $g = I/U$  über Source und Drain gemessen, erhält man eine Abfolge von Maxima, wie in Abb. 2.11 dargestellt. Die Maxima werden *Coulomb-Peaks* genannt. Der Abstand zweier Coulomb-Peaks ist durch die Ladeenergie gegeben:  $\Delta U_g = E_c/e\alpha$ . Die Breite der Coulomb-Peaks wird durch die Tunnelraten und die Temperatur bestimmt [7]. Bei Überschreiten einer solchen Resonanz ändert sich die Anzahl der Elektronen auf dem Quantenpunkt um eins.

Die zweite Möglichkeit, einen Strom über den Quantenpunkt zu treiben, ist das Anlegen einer Vorspannung  $U_{sd}$  zwischen Source und Drain. Dadurch werden die chemischen Potentiale  $\mu_s$  und  $\mu_d$  um den Betrag der Spannung verschoben, sodass sich ein Transportfenster der Größe  $\mu_s - \mu_d = eU_{sd}$  bildet, wie es in Abb. 2.10 (c) zu sehen ist. Liegt  $\mu_N$  in diesem Transportfenster, kann ein Elektron von Source auf den Quantenpunkt und von dort in freie Zustände auf der Drainseite tunneln. Durch

## 2. Theoretische Grundlagen

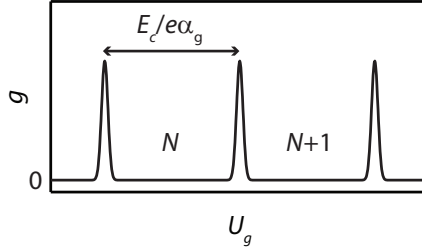


Abbildung 2.11.: Die Leitfähigkeit eines Quantenpunktes als Funktion der Gatespannung. Das Überschreiten eines Coulomb-Peaks erhöht die Anzahl der Elektronen auf dem Quantenpunkt um 1.

weiteres Erhöhen von  $U_{sd}$  kann das Transportfenster so vergrößert werden, dass weitere Energieniveaus des Quantenpunktes am Transport teilnehmen können. Eine Messung von  $g$  als Funktion von  $U_{sd}$  liefert demnach einen stufenartigen Verlauf, der in Abb. 2.12 schematisch abgebildet ist. Bei jedem Stufenanstieg gelangt ein weiteres Energieniveau in das Transportfenster. Misst man dabei die differentiellen Leitfähigkeit  $G = dI/dU$  sind an den Positionen der Stufen Spitzen zu sehen, da dort die Änderung in  $g$  endlich ist.

Bei einer gleichzeitigen Variation der Vorspannung  $U_{sd}$  und einer Gatespannung  $U_g$  erhält man eine rautenförmige Struktur, wie sie in Abb. 2.13 zu sehen ist. In den weiß eingefärbten Rauten liegt die Coulomb-Blockade vor und es findet kein Transport statt. In der Darstellung sind die Bereiche gezeigt, in denen ein (grau) bzw. zwei (schwarz) Zustände im Transportfenster liegen.

Anhand der Coulomb-Rauten lassen sich Aussagen über die Ladeenergie  $E_c$  und die Kapazitäten  $C_\Sigma$ ,  $C_s$  und  $C_g$  treffen. Die Ladeenergie kann man an den Spitzen der Coulomb-Rauten ablesen, wie es in Abb. 2.13 markiert ist. Dort wird das Transportfenster so groß, dass entweder  $\mu_{N+1}$  mit Source oder  $\mu_N$  mit Drain in Resonanz ist. Diese Differenz ist gerade  $E_c/e$ . Mit  $E_c$  ist durch Anwenden der Gl. 2.21 auch die Gesamtkapazität

### 2.3. Elektronische Zustände im nulldimensionalen Elektronengas

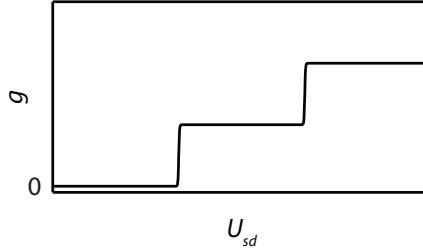


Abbildung 2.12.: Die Leitfähigkeit eines Quantenpunktes als Funktion der Vorspannung.

$C_\Sigma$  des Quantenpunktes bekannt.

Beim Übergang zwischen den Rauten treten Kannten mit charakteristischen Steigungen  $\beta_1$  und  $\beta_2$  auf. Entlang den Kanten mit positiver Steigung  $\beta_1$  befindet sich das chemische Potential des N-ten Zustandes in Resonanz mit dem chemischen Potential des Source-Kontakts. Wird die Spannung  $U_{sd}$  an Source angelegt, ist  $\mu_s = \mu_d - eU_{sd}$ . Das chemische Potential des N-ten Zustandes wird sowohl durch die Spannung  $U_g$  als auch durch die kapazitive Kopplung zu Source beeinflusst und wird nach Ref. [35] zu

$$\mu'_N = \mu_N - e \frac{C_g}{C_\Sigma} U_g - e \frac{C_s}{C_\Sigma} U_{sd} = \mu_d - eU_{sd}. \quad (2.22)$$

Durch Umstellen der rechten Seite nach  $U_g$  erhält man

$$U_g = \frac{C_\Sigma - C_s}{C_g} U_{sd} + \frac{C_\Sigma}{eC_g} (\mu_N - \mu_d). \quad (2.23)$$

Mit dem Zusammenhang  $\beta_1 = \partial U_g / \partial U_{sd}$  kann man nun die positive Steigung angeben:

$$\beta_1 = \frac{C_\Sigma - C_s}{C_g}. \quad (2.24)$$

## 2. Theoretische Grundlagen

Die negative Steigung  $\beta_2$  beschreibt dagegen eine Resonanz mit dem Drain-Kontakt. Mit  $\mu'_N = \mu_d$  kann man analog zu Gl. 2.22 und Gl. 2.23 für  $\beta_2$  herleiten:

$$\beta_2 = -\frac{C_s}{C_g}. \quad (2.25)$$

Aus den so bestimmten Kapazitäten lassen sich die Hebelfaktoren der Zuleitungen und des Gates bestimmen mit

$$\alpha_{s,d,g} = \frac{C_{s,d,g}}{C_\Sigma}. \quad (2.26)$$

Sind die Tunnelbarrieren symmetrisch erhält man typischerweise  $C_s = C_d \approx 1/2$  mit  $C_g \ll C_s$ .

## 2.4. Der Kondo-Effekt

Der Kondo-Effekt ist ein Vielteilchenwechselwirkungseffekt, der zum ersten Mal in Metallen mit magnetischen Verunreinigungen nachgewiesen wurde. Misst man den elektrischen Widerstand von Metallen bei tiefen Temperaturen, erwartet man, dass der Widerstand mit sinkender Temperatur abnimmt. Ab einer bestimmten Temperatur kommt es durch Streuung an Verunreinigungen und Gitterdefekten zu einer Sättigung des Widerstandes. Sind in dem Metall allerdings magnetische Verunreinigungen wie z.B. Co oder Fe enthalten, durchläuft der Widerstand bei einer charakteristischen Temperatur ein Minimum und steigt danach wieder an. Dieses Verhalten wurde 1934 zuerst von de Haas *et al.* an verunreinigten Golddrähten nachgewiesen [36]. Später wurde gezeigt, dass die Temperatur, bei der das Minimum des Widerstandes auftritt, von der Konzentration der magnetischen Verunreinigungen abhängt [37, 38].

Trotz der vielfältigen experimentellen Untersuchungen konnte lange keine theoretische Erklärung für dieses Phänomen gefunden werden. Erst 30 Jahre nach der experimentellen Entdeckung stellte J. Kondo eine Theorie auf, die das Ansteigen des Widerstandes beschreiben konnte [17]. Er



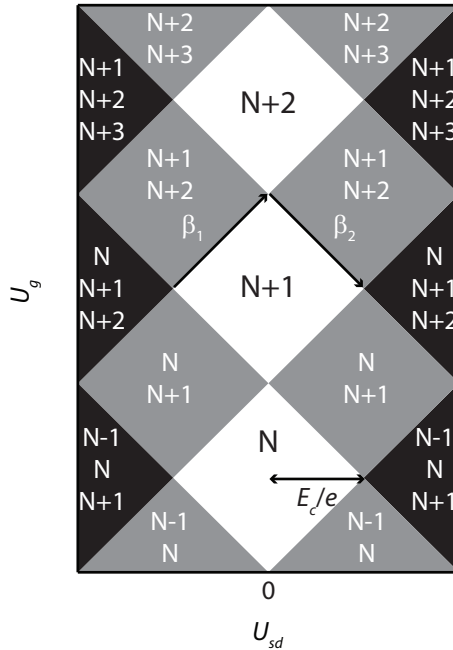


Abbildung 2.13.: Die Leitfähigkeit eines Quantenpunktes als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$  und einer Gatespannung  $U_g$  nach Ref. [35]. In den weißen Rauten liegt Coulomb-Blockade vor, in den grau (schwarz) gefärbten Rauten befindet sich ein (zwei) elektronische Zustände im Transportfenster.

## 2. Theoretische Grundlagen

wandte das so genannten s-d Modell an, bei dem im Metall vorhandene, lokalisierte Spins mit den freien Ladungsträgern über eine Wechselwirkung einen gebundenen Zustand bilden. Durch Störungsrechnung in höherer Ordnung der Wechselwirkungsstärke  $J$  konnte er zeigen, dass die Wechselwirkung zu einem logarithmischen Term im spezifischen Widerstand  $\rho_K \propto \log T$  führt. Dieser Term wird bei tiefen Temperaturen entscheidend für das experimentell beobachtete Minimum und den folgenden Anstieg des Widerstandes, wenn die Wechselwirkung anti-ferromagnetisch ist, d. h.  $J < 0$ .

Mit dem s-d Modell und der Störungsrechnung in  $J$  konnte Kondo zwar das Auftreten des Widerstandsminimums und den Anstieg des Widerstandes beschreiben, allerdings lieferte es divergentes Verhalten des Widerstandes im Grenzfall  $T \rightarrow 0$  [16]. Kondos Ergebnisse sind also nur gültig für Temperaturen  $T \gg T_K$ , während sie für  $T \ll T_K$  keine korrekten Resultate liefern. Die Temperatur  $T_K$  wird Kondo-Temperatur genannt. Zur Lösung dieses Problems, das als Kondo-Problem bekannt ist, nutzte Anderson die Skalierungs-Theorie [39]. Daraus folgten schließlich die Arbeiten von Wilson zur numerischen Renormalisierungsgruppe [40], mit der der Grundzustand des Kondo-Problems und das Verhalten bei tiefen Temperaturen berechnet werden konnten. Für seine Arbeiten an diesem Werkzeug der theoretischen Physik wurde Wilson 1982 der Nobel-Preis in Physik verliehen. Die numerische Renormalisierungsgruppe liefert viele Erkenntnisse auf dem Gebiet des Kondo-Effektes. Für eine detaillierte Übersicht soll hier auf das Buch von Hewson [16] verwiesen werden.

### 2.4.1. Der Kondo-Effekt in Quantenpunkten

Während in Volumenmaterial die Streuung an magnetischen Verunreinigungen unterhalb der Kondo-Temperatur zu einem Anstieg des Widerstandes führt, wird beim Kondo-Effekt in Quantenpunkten nur eine magnetische Störstelle untersucht. Diese Störstelle stellt der Quantenpunkt selber da, wenn er einen endlichen Spin aufweist, d. h. von einer ungeraden Anzahl an Elektronen besetzt ist. Dieses führt zu einer zum Volumenmaterial sehr unterschiedlichen experimentellen Beobachtung, die im Folgenden beschrieben werden soll.

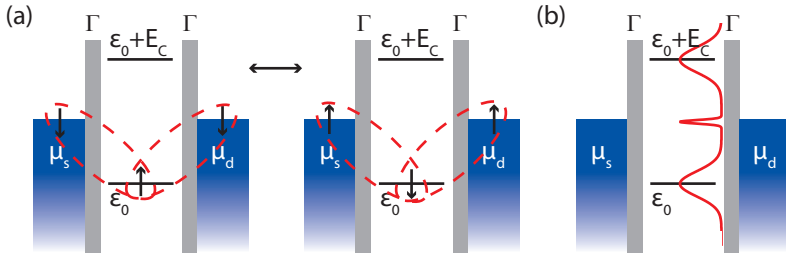


Abbildung 2.14.: (a) Schematische Darstellung des Kondo-Effekts in Quantenpunkten. Es sind die beiden entarteten Zustände des Singletts gezeigt, die durch Austausch der lokalisierte Spins ineinander übergehen. (b) Zustandsdichte des Quantenpunktes im Kondo-Regime. Der Kondo-Effekt liefert eine zusätzliche Spitze am chemischen Potential der Zuleitung. Die Breite dieser Spitze ist durch die Kondo-Temperatur bestimmt.

Wie in Abschnitt 2.3 gezeigt, ist kein elektrischer Transport über einen Quantenpunkt möglich, wenn das höchste besetzte Niveau des Quantenpunktes  $\epsilon_0$  unter dem chemischen Potential der Zuleitungen liegt. Der Quantenpunkt ist dann Coulomb-blockiert, wie in Abb. 2.14 (a) gezeigt wird. Dort ist  $\epsilon_0 = -E_c/2$ . Ist die Anzahl der Elektronen auf dem Quantenpunkt ungerade, ist der Spin des Quantenpunktes endlich und es gibt ein lokalisiertes magnetisches Moment. Die Leitungselektronen in den Zuleitungen mit einem Spin antiparallel zum lokalisierten Moment wechselwirken mit dem Spin auf dem Quantenpunkt und es entsteht ein Singlett-Zustand mit Spin  $S = 0$ . Das lokalisierte magnetische Moment wird dabei abgeschirmt und ist außerhalb der Abschirmlänge  $\xi_K$  nicht mehr sichtbar [16]. Das Singlett hat die Energie, die der Fermienergie der Zuleitungen entspricht. Dort tritt in der Zustandsdichte des Quantenpunktes eine zusätzliche Spitze auf, die in Abb. 2.14 dargestellt ist [18, 20].

Der zusätzliche Singlett-Zustand an der Fermikante der Zuleitungen

## 2. Theoretische Grundlagen

macht den Transport über den Coulomb-blockierten Quantenpunkt möglich. Damit ein Elektron mit der Energie  $\epsilon_0 < \mu_s = \mu_d = 0$  den Quantenpunkt verlassen kann, muss nach Energieerhaltung die Energie  $-\epsilon_0$  aufgewendet werden. Allerdings liefert die heisenbergsche Unschärferelation  $\Delta t \Delta E \geq \hbar$  [41] die Möglichkeit, dass das Elektron für ein Zeitintervall  $\Delta t \leq \hbar/\epsilon_0$  den Quantenpunkt in Richtung Drain verlässt und in einen energetisch verbotenen virtuellen Zustand übergeht. Dieses Elektron kann dann innerhalb des Intervalls  $\Delta t$  von einem Elektron mit entgegengesetztem Spin von Source ersetzt werden. So ändert der Spin des Quantenpunktes seine Orientierung. Durch ständiges Austauschen des Spins durch diesen Mechanismus wird der Quantenpunkt transparent, ohne dass eine Vorspannung angelegt wird. Im Experiment kann man daher ein Spitze in der differentiellen Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$  messen. Dieses Phänomen wird *zero-bias anomaly* (ZBA) genannt. Die ZBA, also die erhöhte Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$ , ist das charakteristische Merkmal des Kondo-Effektes in Quantenpunkten [42]. Sie wurde an einem Quantenpunkt in Halbleiterheterostrukturen erstmals 1998 von Goldhaber-Gordon *et al.* experimentell nachgewiesen [18, 20].

Die Abschirmlänge  $\xi_K$  beschreibt auch die Ausdehnung der so genannten Kondo-Wolke [43]. Dies sind die Elektronen im Abstand  $\xi_K$  um das lokalisierte Moment, die an der Kondo-Wechselwirkung teilnehmen. Sie kann mit der Fermigeschwindigkeit  $v_f$  und der Kondo-Temperatur  $T_K$  bestimmt werden [44]:

$$\xi_K = \hbar v_f / k_B T_K. \quad (2.27)$$

Entscheidend dafür, ob man Kondo-Physik in einem Quantenpunkt beobachten kann, ist die Energieskala der Wechselwirkung zwischen dem lokalisierten magnetischen Moment und den freien Elektronen in den Zuleitungen. Die Energieskala, auf der der Kondo-Effekt auftritt, wird durch die Kondo-Temperatur gegeben. Man kann den Kondo-Effekt beobachten, wenn  $T < T_K$  ist. Die Kondo-Temperatur wird wie folgt durch die Parameter des Quantenpunktes bestimmt [45, 20]:

$$k_B T_K = \frac{\sqrt{\Gamma E_c}}{2} \exp(\pi \epsilon_0 (\epsilon_0 + E_c) / \Gamma E_c). \quad (2.28)$$

Dieses Ergebnis lässt sich theoretischen aus dem Anderson-Modell eines Quantenpunktes herleiten. Es ist ein theoretisches Modell, das Anderson 1961 zur Beschreibung magnetischer Störstellen in Wechselwirkung mit freien Elektronen in Metallen entwickelt hat [46]. Das s-d-Modell, mit dem Kondo das Minimum in der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit eines verunreinigten Metalls erklären konnte, geht als ein Grenzfall aus diesem Anderson-Modell hervor [16]. Der Hamiltonian für das Anderson-Modell eines Quantenpunktes unterscheidet sich nicht sehr stark von dem ursprünglichen Modell von Anderson und lässt sich schreiben als [47, 48]:

$$H = H_S + H_D + H_{QD} + H_I. \quad (2.29)$$

Dabei ist

$$H_{(S,D)} = \sum_{k,\sigma} \epsilon_{(S,D)k} c_{(S,D)k\sigma}^\dagger c_{(S,D)k\sigma} \quad (2.30)$$

der Anteil für die freien Elektronen in Source (S) und Drain (D) mit dem Erzeugungsoperator (Vernichtungsoperator)  $c_{(S,D)k\sigma}^\dagger$  ( $c_{(S,D)k\sigma}$ ) eines Elektrons mit Energie  $\epsilon_{(S,D)k}$  und Spin  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ .

Der Quantenpunkt wird beschrieben mit

$$H_{QD} = \sum_{\sigma} \epsilon_0 d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma} + E_c n_{\uparrow} n_{\downarrow}. \quad (2.31)$$

$\epsilon_0$  ist die Energiedifferenz des lokalisierten Elektrons zum chemischen Potential und  $d_{\sigma}^\dagger$  ( $d_{\sigma}$ ) ist der dazugehörige Erzeugungsoperator (Vernichtungsoperator). Die Coulomb-Abstoßung zwischen den Elektronen auf dem Quantenpunkt wird mit  $E_c n_{\uparrow} n_{\downarrow}$  berücksichtigt, wobei  $n_{\uparrow(\downarrow)} = d_{\uparrow(\downarrow)}^\dagger d_{\uparrow(\downarrow)}$  der Anzahloperator für Elektronen mit Spin  $\uparrow$  ( $\downarrow$ ) ist. Wenn ein Elektron mit Spin  $\sigma$  das lokalisierte Niveau besetzt, muss die Ladeenergie  $E_c$  aufgewendet werden, um ein zweites Elektron mit entgegengesetztem Spin auf den Quantenpunkt zu bringen.

Die Wechselwirkung zwischen dem lokalisierten Spin und den Elektronen in den Zuleitungen wird schließlich durch

## 2. Theoretische Grundlagen

$$H_I = \sum_k V_{S k \sigma} [c_{S k \sigma}^\dagger d_\sigma + \text{h.c.}] + \sum_k V_{D k \sigma} [c_{D k \sigma}^\dagger d_\sigma + \text{h.c.}] \quad (2.32)$$

ausgedrückt.  $V_{S k \sigma}$  und  $V_{D k \sigma}$  sind hier die Hybridisierungskonstanten zwischen dem lokalisierten Elektron und den Zuständen in Source bzw. Drain.

### 2.4.2. Kondo-Effekt im Transport

Wie bereits erwähnt, ist die Signatur des Kondo-Effekts in einem Quantenpunkt die ZBA, eine erhöhte Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$ . In linearen Messungen wird das durch eine erhöhte endliche Leitfähigkeit zwischen den Coulomb-Resonanzen deutlich. Diese erhöhte Leitfähigkeit tritt dann auf, wenn der Kondo-Effekt möglich ist, d.h. wenn der Quantenpunkt mit einer ungeraden Anzahl an Elektronen besetzt ist. Ein Beispiel ist in Abb. 2.15 gezeigt. Dort ist die Leitfähigkeit eines Quantenpunktes in Abhängigkeit von einer Gatespannung gezeigt, wobei für ungerade Elektronenzahlen die Leitfähigkeit nicht auf null sinkt sondern endlich bleibt. Im unitären Limit beträgt die Kondo-Leitfähigkeit zwischen den Coulomb-Spitzen  $2e^2/h$  [49], was der Leitfähigkeit eines spinentarteten 1d-Kanals entspricht. In realen Messungen wird dieses Ergebnis selten erreicht, da die Temperatur weit unter der Kondo-Temperatur liegen und der Quantenpunkt symmetrisch an Source und Drain gekoppelt sein muss [47, 50].

In nichtlinearen Messungen wird die ZBA deutlicher sichtbar. Misst man in einem Bereich mit erhöhter Leitfähigkeit im Coulomb-blockierten Bereich die differentielle Leitfähigkeit  $G$  abhängig von  $U_{sd}$ , so sieht man ein scharfes Maximum bei  $U_{sd} = 0$ , wie in Abb. 2.16 gezeigt. Die Halbwertsbreite der Resonanz  $\Delta_{ZBA}$  hängt dabei von der Energie des Vielteilchenzustands ab. Zwischen der Kondo-Temperatur und  $\Delta_{ZBA}$  gibt es folgenden Zusammenhang [16]:

$$T_K = \frac{\pi w \Delta_{ZBA}}{4k_B}. \quad (2.33)$$

Hier ist  $w = 0,4128$  die Wilson-Zahl.

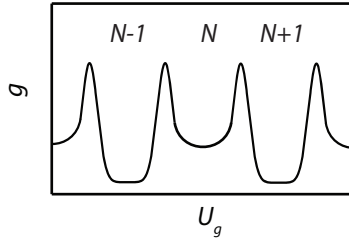


Abbildung 2.15.: Schematische Darstellung der Leitfähigkeit  $g$  eines Quantenpunktes als Funktion der Gatespannung  $U_g$ . Die Zahl der Elektronen auf dem Quantenpunkt ist hier bei  $N$  ungerade, sodass der Kondo-Effekt auftritt.

Ein weiteres Charakteristikum für den Kondo-Effekt ist die Temperaturabhängigkeit der ZBA. Die Höhe der Resonanz ist stark Temperaturabhängig und folgt dem Zusammenhang [20]

$$G(T, U_{sd} = 0) = G_0 \left( 1 + \frac{T}{T_K^*} \right)^{-s}, \quad (2.34)$$

wobei  $G_0$  die Leitfähigkeit bei  $T = 0$  ist. Aus  $T_K^*$  erhält man die Kondo-Temperatur mittels

$$T_K = T_K^* \sqrt{2^{1/s} - 1}. \quad (2.35)$$

Diese empirische Gleichung folgt aus Anpassungen an Ergebnisse der numerischen Renormalisierungsgruppe. Der  $s$ -Parameter für Spin- $\frac{1}{2}$ -Systeme ist  $s = 0.22$ . Die Kondo-Temperatur ist derart definiert, dass  $G(T_K) = G_0/2$  ist.

### 2.4.3. Kondo-Effekt im Magnetfeld

Ein magnetisches Feld  $B$  führt dazu, dass durch den Zeeman-Effekt die Spinartung des lokalisierten Niveaus aufgehoben wird. Es spaltet sich in zwei Niveaus mit der Energie

## 2. Theoretische Grundlagen

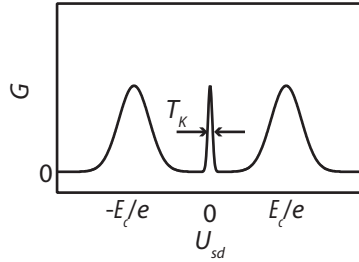


Abbildung 2.16.: Differentielle Leitfähigkeit  $G$  eines Quantenpunktes als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$ . Das Auftreten des Kondo-Effektes wird durch die Leitfähigkeitsspitze bei  $U_{sd} = 0$  deutlich, die so genannte *zero-bias anomaly*. An der Breite der ZBA kann man die Kondo-Temperatur  $T_K$  ablesen.

$$\epsilon_{\pm} = \epsilon_0 \pm \frac{1}{2} g^* \mu_B B \quad (2.36)$$

auf. Die beiden Spin-Niveaus sind durch die Zeemanenergie  $\Delta_Z = g^* \mu_B B$  getrennt. Damit ein Transport über den oben beschriebenen Spinaustausch möglich ist, muss nun diese Energie  $\Delta_Z$  durch die Vorspannung bereitgestellt werden. Daher werden statt der Spitze in der Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$  nun zwei Maxima bei  $U_{sd} = \pm \Delta_Z$  sichtbar. Die gemessene Aufspaltung der Kondo-Resonanz entspricht damit der doppelten Zeemanenergie:  $\Delta U_{sd} = 2\Delta_Z$  [42].

### Das Kondo-Schachbrett

Wird das Magnetfeld senkrecht zur Probenoberfläche angelegt, lässt sich ein besonderes Muster in der differentiellen Leitfähigkeit beobachten. Ein Beispiel ist in Abb. 2.17 dargestellt. Zu sehen ist die differentielle Leitfähigkeit  $G$  als Funktion des Magnetfeldes  $B$  und einer Gatespannung  $U_g$ . Sie bildet ein regelmäßiges Muster mit sich abwechselnden Bereichen



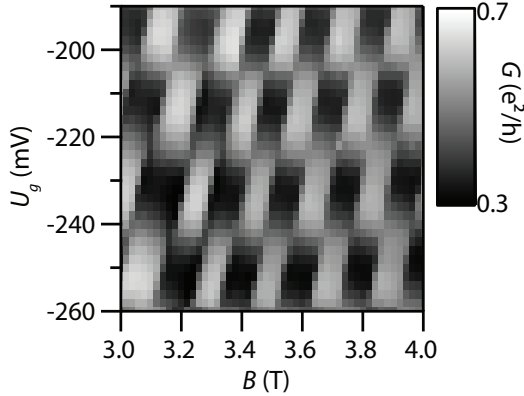


Abbildung 2.17.: Differentielle Leitfähigkeit  $G$  eines Quantenpunktes als Funktion des senkrechten Magnetfeldes  $B$  und einer Gatespannung  $U_g$ , die die Elektronenzahl auf dem Quantenpunkt variiert.

hoher und niedriger Leitfähigkeit aus, das Kondo-Schachbrett genannt wird [51, 52, 53]. In den Bereichen hoher differentieller Leitfähigkeit findet Transport über den Kondo-Mechanismus statt, der in den Bereichen niedriger differentieller Leitfähigkeit unterdrückt wird.

Um dieses Phänomen zu erklären, muss man die innere Struktur des Quantenpunktes näher betrachten. Wie bereits in Abschnitt 2.3 gezeigt wurde, bilden sich im senkrechten Magnetfeld Landau-Niveaus. In dem Bereich des Kondo-Schachbretts sind nur noch zwei Landau-Niveaus besetzt. Die räumliche Aufteilung dieser Landau-Niveaus im Quantenpunkt ist in Abb. 2.18 gezeigt. Dies ist das Ergebnis einer selbstkonsistenten Berechnung des Additionsspektrums eines Quantenpunktes unter Berücksichtigung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung von McEuen *et al.* [54]. Sind nur noch zwei Landau-Niveaus in dem Quantenpunkt besetzt, verteilen sich die Elektronen des unteren Landau-Niveaus (LL0) über die gesamte Fläche des Quantenpunktes während die Elektronen des höheren

## 2. Theoretische Grundlagen

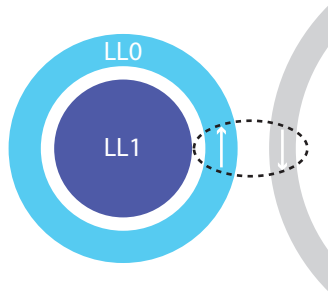


Abbildung 2.18.: Schematische Darstellung der räumlichen Aufteilung der untersten beiden Landau-Niveaus in einem Quantenpunkt. Durch den kleineren Abstand des LL0 zu den Zuleitungen nehmen nur Zustände dieses LL am Kondo-Transport teil.

Niveaus (LL1) sich nahe des Mittelpunktes aufhalten. Diese Verteilung führt zu unterschiedlichen Tunnelkopplungen der Landau-Niveaus an die Zuleitungen.

Die Stärke der Kopplung zwischen Zuleitungen und dem lokalisierten Spin ist einer der bestimmenden Parameter für die Bindungsenergie des Singlett-Zustandes, den die Leitungselektronen mit dem lokalisierten Spin bilden. Eine schwache Kopplung zu LL1 führt dazu, dass keine Zustände in diesem Landau-Niveau am Kondo-Transport teilnehmen können und nur noch Zustände in LL0 an der Bildung des Singletts beteiligt sind. Deswegen bestimmt die Anzahl der Elektronen in LL0, ob Kondo-Transport stattfindet oder nicht: wenn LL0 durch eine ungerade Anzahl an Elektronen besetzt ist und ein endliches magnetisches Moment aufweist, erhöht sich die Leitfähigkeit über den Quantenpunkt.

Die Anzahl der Elektronen in LL0 lässt sich durch zwei verschiedene Mechanismen ändern. Zum einen kann man die Anzahl der Elektronen auf dem gesamten Quantenpunkt verändern, was durch die Veränderung der Gatespannung geschieht. Die Modulation der Leitfähigkeit als Funktion

von  $U_g$  zeigt, dass damit auch die Anzahl an Elektronen in LL0 variiert wird. Zum anderen kann man bei einer konstanten Elektronenzahl auf dem Quantenpunkt die Elektronen zwischen den Landau-Niveaus umverteilen, indem man das Magnetfeld verändert. Beim Addieren eines magnetischen Flussquants  $\Phi_0 = h/e$  wird ein Elektron von LL1 in LL0 übertragen. Beide Mechanismen zusammen führen zum Kondo-Schachbrett [53].

Ein regelmäßiges Schachbrett wie in Abb. 2.17 tritt nur in einem begrenzten Magnetfeldintervall auf. Bei tieferen Magnetfeldern sind höhere Landau-Niveaus besetzt und die Leitfähigkeit zeigt weitere Strukturen, die nicht mit diesem einfachen Bild erklärbar sind. Bei zu hohen Magnetfeldern sind auch die Landau-Niveaus in den Zuleitungen spinpolarisiert und es können nicht mehr beide Spinorientierungen auf dem Quantenpunkt abgeschirmt werden.



# 3. Experimentelle Grundlagen

In diesem Kapitel werden die experimentellen Grundlagen dieser Arbeit behandelt. Im ersten Abschnitt wird der Herstellungsprozess beschrieben, danach werden die verwendeten Proben vorgestellt. Daran anschließend folgt eine Beschreibung des Messsystems und des elektrischen Versuchsaufbaus.

## 3.1. Die Probenherstellung

### 3.1.1. Die Halbleiterheterostruktur

Als Grundlage für die Herstellung der Quantenpunktstrukturen wurde eine GaAs/AlGaAs Heterostruktur verwendet. Das Material wurde von W. Wegscheider und D. Schuh an der Universität Regensburg mittels Molekularstrahlepitaxie hergestellt [55, 56]. Bei dieser Methode werden GaAs und AlGaAs schichtweise auf ein Substrat aus hochreinem GaAs aufgewachsen, sodass sich durch eine Bandverbiegung zwischen den unterschiedlichen Schichten ein Potentialtopf bildet, in dem die Ladungsträger eingeschlossen werden. Die genaue Struktur des Materials ist in Abb. 3.1 gezeigt. Es bildet sich ein 2DEG 37 nm unter der Probenoberfläche aus.

Die verwendeten Proben wurden auf zwei verschiedenen Materialien hergestellt. Diese Materialien weisen die gleiche Struktur auf, unterscheiden sich aber in den elektronischen Eigenschaften. Auf die Unterschiede wird in Abschnitt 3.2 eingegangen.

### 3.1.2. Die Probenstrukturierung

Das zweidimensionale Elektronengas wurde mittels unterschiedlicher Lithographieverfahren weiter strukturiert. Im ersten Schritt wird mittels

### 3. Experimentelle Grundlagen

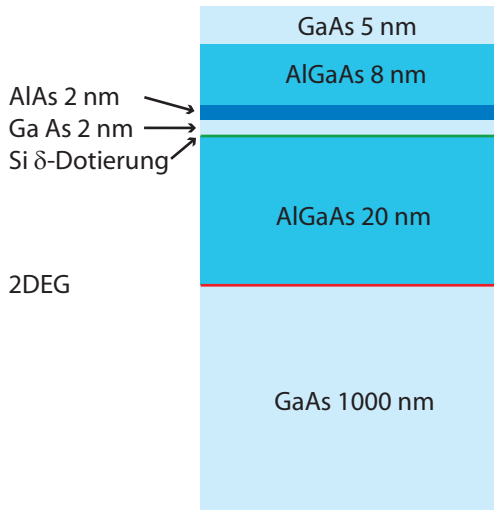


Abbildung 3.1.: Struktur des Probenmaterials nach dem Wachstumsprotokoll von W. Wegscheider und D. Schuh, Universität Regensburg. Die rote Linie Kennzeichnet die Lage des 2DEGs 37 nm unter der Oberfläche.

optischer Lithographie eine so genannte Mesa hergestellt. Das Prinzip der optischen Lithographie ist in Abb. 3.2 schrittweise dargestellt. Zuerst wird ein Lack gleichmäßig auf die Probe aufgebracht, der empfindlich auf die Bestrahlung mit UV-Licht reagiert. Danach wird die Probe mit einer Maske bedeckt und mit UV-Licht bestrahlt. Die verwendete Maske bildet die gewünschte Struktur ab, die man in das Material ätzen oder durch Aufdampfen darauf auftragen möchte. Sie wird mit einem so genannten *mask aligner* (deutsch: Maskenausrichter) auf die Probe ausgerichtet. Je nach verwendetem Lack können nun die bestrahlten Regionen mit Hilfe eines Entwicklers leicht entfernt werden (Positivprozess) oder werden schwerer löslich, sodass man die unbestrahlten Stellen entfernen kann (Negativpro-

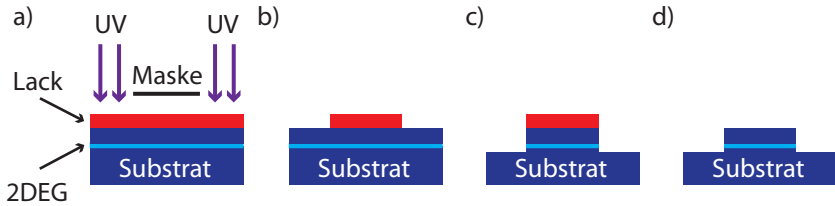


Abbildung 3.2.: Schematische Darstellung der optischen Lithographie zur Herstellung der Mesa: (a) Substrat mit Lack und Maske. Das UV-Licht ist durch Pfeile dargestellt. (b) Substrat und Lack nach dem Entwickeln. (c) Substrat und Lack nach dem Ätzen. (d) Mesa nach Entfernen des Lacks.

zess). Nach dem Entwickeln des Lackes werden die nun lackfreien Stellen mit einer Lösung aus  $\text{H}_2\text{O}_2$  und  $\text{H}_3\text{PO}_4$  geätzt. Dabei wird so tief geätzt, dass das 2DEG nur noch in dem übrig bleibenden Plateau (engl. *mesa*) vorhanden ist. Nach dem Ätzen wird der verbliebene Lack entfernt.

Im nächsten Lithographieschritt wird das 2DEG mit so genannten ohmschen Kontakten versehen. Diese Kontakte heißen ohmsch, da sie eine lineare Strom-Spannungs-Kennlinie aufweisen. In diesem Schritt wird eine etwas andere Maske auf die vorstrukturierte Probe ausgerichtet. Anstatt nach dem Entwickeln des Lacks zu ätzen, wird nun die Probe in einer Aufdampfanlage mit verschiedenen Metallen bedampft. Das Bedampfen findet im Hochvakuum statt. Im Falle der ohmschen Kontakte werden Germanium, Gold und Nickel aufgedampft. Die Kontakte werden nach dem Aufdampfen in das Probenmaterial einlegiert. Dadurch wird einerseits ein Kontakt zum tiefer liegenden 2DEG hergestellt, andererseits kommt es durch das Germanium zu einer n-Dotierung des Halbleitermaterials. Dadurch wird der Schottky-Kontakt zwischen Halbleiter und Metall zu einem ohmschen Kontakt.

Die Mesa wird mittels lokaler anodischer Oxidation (LAO) [57, 58] weiter strukturiert. Dabei wird mit einem Rasterkraftmikroskop (engl. *ato-*

### 3. Experimentelle Grundlagen

*mic force microscope*, AFM) die Oberfläche des Probenmaterials oxidiert. Die Bandstruktur wird dadurch so verändert, dass das 2DEG unter dem aufgetragenen Oxid verarmt wird. So lässt sich das 2DEG zu ein- oder nulldimensionalen Strukturen verändern. Da im Rahmen dieser Arbeit auf schon bestehende Proben zurückgegriffen wurde, wird für die Details der Herstellung auf die Arbeiten von B. Popescu [59] und D. Tutuc [23] verwiesen.

## 3.2. Die Proben

In dieser Arbeit wurden Messungen an zwei verschiedenen Proben durchgeführt, die auf unterschiedlichem Material hergestellt wurden und eine leicht unterschiedliche Struktur aufweisen. Sie unterscheiden sich ebenfalls leicht in den Beweglichkeiten und Elektronenkonzentrationen. Alle angegebenen Beweglichkeiten und Elektronenkonzentrationen sind den Wachstumsprotokollen entnommen. Die lithographischen Daten stammen aus Ref. [23].

### Probe D040330A

Die Probe D040330A ist in Abb. 3.3 abgebildet. Die Elektronenbeweglichkeit und die Ladungsträgerdichte des 2DEG betragen bei 4,2 K  $\mu_e = 4,5 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  beziehungsweise  $n_e = 3,95 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Die Oxidlinien formen zwei Quantenpunkte (gestrichelte Kreise), die einen Abstand von ca. 500 nm haben und durch Tunnelkontakte mit den Zuleitungen verbunden sind. Dabei teilen sich beide Quantenpunkte einen gemeinsamen Source-Kontakt S und haben jeweils einen individuellen Drain-Kontakt, D1 und D2. Die Tunnelkontakte und die Energieniveaus der Quantenpunkte können mit sechs planaren Gates (G1-G6) gesteuert werden. Aus den lithographischen Abmessungen kann man für Quantenpunkt 1 einen Durchmesser von ca. 125 nm ablesen, Quantenpunkt 2 hat einen Durchmesser von ca. 140 nm.



### 3.3. Transportmessungen bei tiefen Temperaturen

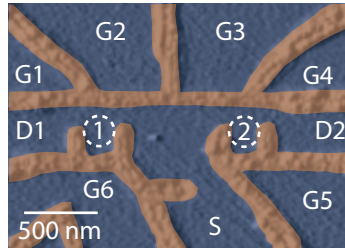


Abbildung 3.3.: AFM-Bild der Probe D040330A, angefertigt von D. Tutuc. Die Oxidlinien sind orange eingefärbt. Die gestrichelten Kreise zeigen die Lage der Quantenpunkte an, die mit 1 und 2 nummeriert sind.

#### Probe D080220A

Abbildung 3.4 zeigt die Probe D080220A. In diesem Material betragen Elektronenbeweglichkeit und Ladungsträgerdichte  $\mu_e = 4,5 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  beziehungsweise  $n_e = 4,02 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^{-2}$ . Die Struktur ist ähnlich zu der Probe D040330A. Der Abstand der beiden Quantenpunkte beträgt in etwa 700 nm, allerdings sind die Quantenpunkte selbst etwas größer: sie haben beide einen Durchmesser von ungefähr 150 nm.

## 3.3. Transportmessungen bei tiefen Temperaturen

Die elektrischen Transportmessungen wurden bei Temperaturen unter 1 K durchgeführt. Diese Temperaturen sind nötig, um die kleinen Energieabstände zwischen den einzelnen Quantenniveaus auflösen zu können. Um diese Temperaturen zu erreichen, wurden zwei verschiedene  $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten (Kelvinox 300 und Kelvinox TLM der Firma Oxford) eingesetzt. In diesem Abschnitt wird zunächst die Funktionsweise der Kryostaten kurz erklärt. Anschließend soll der elektrische Messaufbau

### 3. Experimentelle Grundlagen

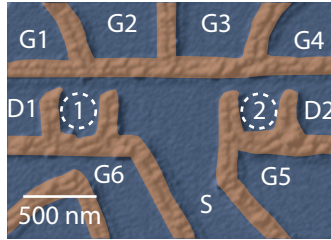


Abbildung 3.4.: AFM-Bild der Probe D080220A, angefertigt von D. Tutuc. Die Oxidlinien sind orange eingefärbt. Die gestrichelten Kreise zeigen die Lage der Quantenpunkte an. Sie sind mit 1 und 2 nummeriert.

vorgestellt werden.

#### 3.3.1. Der $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostat

In einem  $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten wird ein verdünntes Gemisch aus  $^3\text{He}$  und  $^4\text{He}$  genutzt, um die Probenumgebung auf Subkelvin-Temperaturen abzukühlen. Dabei wird ausgenutzt, dass sich in einer solchen Mischung zwei Phasen bilden, eine  $^3\text{He}$ -reiche Phase und eine  $^3\text{He}$ -arme Phase. Beim Übergang des  $^3\text{He}$  von der  $^3\text{He}$ -reichen Phase in die  $^3\text{He}$ -arme Phase wird der Umgebung Wärme entzogen. Für jedes Mol  $^3\text{He}$  beträgt diese Wärmemenge  $-84T^2 \text{ J/K}^2$  [60].

Um eine kontinuierliche Kühlung in dem Kryostaten zu erreichen, wird das  $^3\text{He}$  in einem Kreislauf gepumpt. Die wichtigsten Schritte dieses Kreislaufes sind in Abb. 3.5 schematisch dargestellt. Zunächst wird die zirkulierende Mischung durch den so genannten 1K-Topf geleitet. Der 1k-Topf ist mit einem  $^4\text{He}$ -Bad verbunden. Über ein Nadelventil wird flüssiges  $^4\text{Helium}$  in den Topf gelassen, das dort bei einem Druck von etwa 1 mBar verdampft wird. Dadurch wird in dem Topf eine Temperatur von ca. 1,5 K erreicht. Das nun vorgekühlte  $^3\text{He}$  wird danach durch eine Durchflussimpedanz geführt, wo es bei erhöhtem Druck kondensiert. Anschließend wird

### 3.3. Transportmessungen bei tiefen Temperaturen

es in verschiedenen Wärmetauschern weiter abgekühlt, bevor es in die  $^3\text{He}$ -reiche Phase in der Mischungskammer geleitet wird. In der Mischungskammer liegen die beiden Phasen vor und hier findet die Entmischung statt. An der Phasengrenze wird die angestrebte Temperatur von einigen mK erreicht.

Die  $^3\text{He}$ -arme Phase wird über einen Auslass an der Unterseite der Mischungskammer in den Verdampfer geleitet, wobei sie schon durch die Wärmetauscher erwärmt wird. Der Verdampfer wird mit einem Heizwiderstand geheizt. Da der Dampfdruck von  $^3\text{He}$  niedriger ist als der des  $^4\text{He}$ , verdampft hier fast nur  $^3\text{He}$ . Es wird aus dem Verdampfer abgepumpt. Nach durchlaufen der Pumpen wird es in zwei verschiedenen Kühlfallen bei 77 K (flüssiger Stickstoff) und 4,2 K (flüssiges Helium) gereinigt und dann wieder in den Kühlkreislauf gepumpt.

Damit die tiefen Temperaturen in der Mischungskammer erreicht werden können, ist zusätzlich eine gute thermische Abschirmung der Mischungskammer nötig. Diese geschieht in verschiedenen Stufen. Die erste Stufe ist die so genannte inneren Vakuumkammer (engl. *inner vacuum chamber*, IVC), die Mischungskammer, Verdampfer und 1K-Topf umschließt. Die IVC wird von dem  $^4\text{He}$ -Hauptbad umgeben, in dem sich flüssiges  $^4\text{He}$  unter Normaldruck mit einer Temperatur von 4,2 K befindet. Je nach Bauart des Kryostaten folgt nun entweder ein zusätzlicher Stickstoffschild (nur Kelvinox TLM) oder direkt die äußere Vakuumkammer (engl. *outer vacuum chamber*, OVC). Der Stickstoffschild ist ebenfalls durch ein Vakuum von dem Hauptbad getrennt.

Bei beiden Kryostaten befindet sich im Hauptbad eine supraleitende Spule, mit der ein hohes Magnetfeld erzeugt werden kann. Mit diesen Spulen können Magnetfelder von bis zu 15 T (Kelvinox 300) bzw. 20 T (Kelvinox TLM) erreicht werden. Um die maximalen Felder zu erreichen, ist ein zusätzliches Abkühlen der Spulen auf 2,2 K nötig.

Der Einbau der Probe erfolgt bei den Kryostaten auf unterschiedliche Weise. Beim Kelvinox TLM wird die Probe direkt mit einem Probenstab in die Mischungskammer geschoben und dort gekühlt. Dagegen ist die Probe beim Kelvinox 300 mit einem Kühlfinger an die Mischungskammer gekoppelt. Die Proben werden so in den Kryostaten eingebaut, dass sie sich in der Mitte der Spule senkrecht zum Magnetfeld befinden.

3. Experimentelle Grundlagen

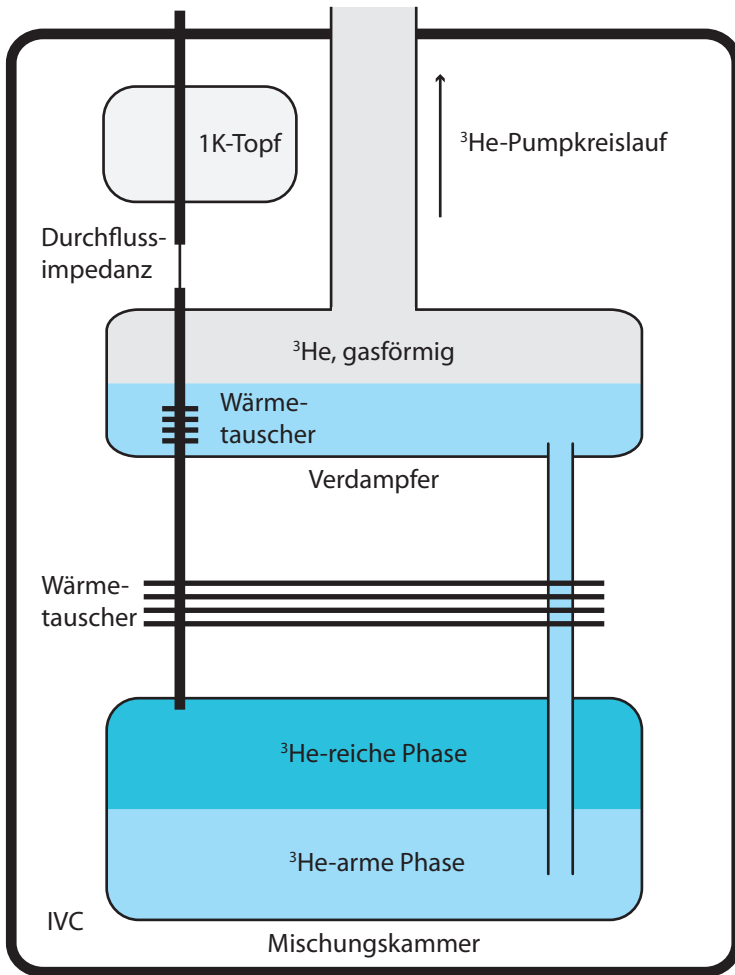


Abbildung 3.5.: Vereinfachtes Schemabild der IVC eines Mischungskryostaten.

#### 3.3.2. Elektrischer Messaufbau

Um die Proben in einen elektrischen Messaufbau integrieren zu können, werden sie in so genannten Chipträgern befestigt. Die einzelnen Kontakte der Probe werden mit Golddrähten mit den inneren Kontakten des Chipträgers verbunden. Dieser Vorgang wird als *Bonden* bezeichnet. Der Chipträger ist so aufgebaut, dass die Kontakte einzeln nach außen geführt werden. Bei den verwendeten Chipträgern ist ein Kontakt mit der Rückseite des Trägers verbunden. Dieser kann dazu genutzt werden um z.B. eine Backgatespannung anzulegen. In speziellen Probenhaltern können diese Kontakte dann abgenommen und mit den einzelnen Messgeräten verbunden werden. Bei Messungen im Kryostaten werden dazu die einzelnen Kabel in verdrehten Paaren durch den Probenstab aus dem Kryostaten geführt und an ein Schaltbrett angeschlossen. An dem Schaltbrett kann jede Leitung einzeln kontaktiert werden.

Es wurden sowohl Gleich- als auch Wechselstrommessungen durchgeführt. Als Spannungsquelle für Gleichspannung wurden Digital-Analog-Konverter (DAC) verwendet. Dabei wurden das Modell DAC488HR/4 der Firma Iotech und ein selbst gebauter DAC eingesetzt. Mit dem DAC-488HR/4 können von 4 Anschlüssen Spannungen im Intervall  $\pm 2$  V mit einer Auflösung von 16 Bit angelegt werden. Das entspricht einer minimalen Schrittweite von ca.  $60 \mu\text{V}$ . Der selbst gebaute DAC hat einen Arbeitsbereich von  $\pm 10$  V und eine Auflösung von 20 Bit. Das entspricht einer minimalen Schrittweite von ca.  $19 \mu\text{V}$ . Er verfügt über 12 Anschlüsse. Die DACs wurden sowohl als Spannungsquelle für die Gates als auch für die Source-Drain-Spannung genutzt. Bei Anschluss des DAC488HR/4 an die Gates wurde ein 1 Hz Tiefpass eingebaut, um das elektrische Rauschen dieser DACs zu unterdrücken. Die Source-Drain-Spannung wurde über einen Spannungsteiler im Verhältnis 1:2000 an die Probe angelegt, d.h. 1 V am DAC entsprechen  $0.5 \text{ mV}$  an der Probe.

Für die Wechselstrom-Messungen wurden verschiedene Lock-In Verstärker der Firma EG&G/Ametek eingesetzt (Modelle 5209, 5210, 5302, 7260, 7270). Dabei wurde ein Lock-In Verstärker als Spannungsquelle für den Wechselstromanteil der Source-Drain-Spannung genutzt. Es wurde typischerweise eine Wechselspannung mit der Amplitude  $U_{RMS} = 1 \text{ V}$  und der

### 3. Experimentelle Grundlagen

Frequenz 83.333 Hz angelegt. Diese wurde ebenfalls mit einem Spannungsteiler im Verhältnis 1:10000 verkleinert und dann mit der Gleichspannung addiert.

Der Strom wurde an beiden Drain-Kontakten jeweils mit einem Ithaco 1211 Stromverstärker detektiert. Die Stromverstärker geben eine Spannung  $U = \alpha_{vst} I$  aus mit dem Verstärkungsfaktor  $\alpha_{vst}$ . Dieser wurde je nach Messung auf  $10^7$  V/A bzw.  $10^8$  V/A eingestellt. Die Spannung wurde dann mit den Lock-In Verstärkern (Wechselstromanteil) bzw. Multimetern des Typs Keithley 2000 (Gleichstromanteil) gemessen. Vor den Eingängen der Multimeter wurden ebenfalls 1 Hz Tiefpässe angeschlossen.

# 4. Kondo-Effekt an Einzelquantenpunkten

In diesem Kapitel wird die Bestimmung der Kondo-Temperatur an Einzelquantenpunkten betrachtet. Ist die Tunnelkopplung  $\Gamma$  zwischen einem Quantenpunkt und den Zuleitungen so groß, dass  $\Gamma \approx E_c$  wird, kommt es zu einem Überlapp der Coulombpeaks. Dieser Überlapp führt zu einem signifikanten Hintergrund in der differentiellen Leitfähigkeit bei Teilchen-Loch-Symmetrie und erschwert die genaue Bestimmung der Kondo-Temperatur. Eine Verbesserung dieser Bestimmung soll im folgenden diskutiert werden.

## 4.1. Bestimmung der Kondo-Temperatur im gemischt-valenten Regime

Der Kondo-Effekt in Quantenpunkten wird durch ein Maximum in der Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$  sichtbar. Aus diesem Maximum lässt sich auf verschiedene Weise die charakteristische Energie des Wechselwirkungseffektes – die Kondo Temperatur  $T_K$  – bestimmen. Zum einen kann man die Halbwertsbreite der Kondo Resonanz untersuchen und zum anderen die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$  auswerten, wie in Abschnitt 2.4.2 beschrieben. Diese beiden Methoden führen in der Regel zu unterschiedlichen Ergebnissen für  $T_K$  [23]. Hier soll anhand der von D. Tutuc aufgenommenen Daten gezeigt werden, wie man die Auswertung des Maximums in der differentiellen Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$  verbessern kann, um die Diskrepanz der beiden Methoden zu verringern.

In Abb. 4.1 ist die differentielle Leitfähigkeit des Quantenpunktes 1 auf

#### 4. Kondo-Effekt an Einzelquantenpunkten

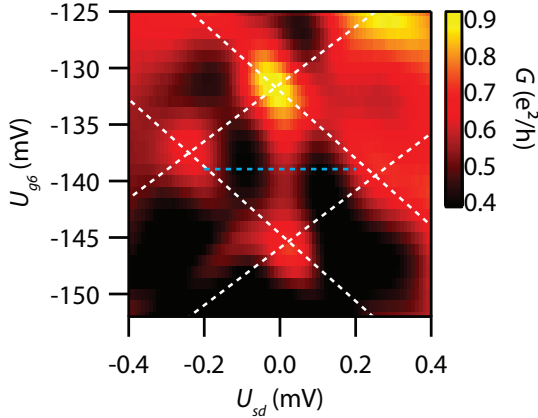


Abbildung 4.1.: Differentielle Leitfähigkeit  $G$  eines Quantenpunktes als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$  und der Gatespannung  $U_{g6}$ . Die weißen gestrichelten Linien heben die Coulomb-Raute hervor.

der Probe D040330A zu sehen. Sie wurde als Funktion der Gatespannung  $U_{g6}$  und der Vorspannung  $U_{sd}$  gemessen. Das Resultat ist eine Coulomb-Raute, die mit gestrichelten Linien verdeutlicht wird. Aus dem Abstand der Coulombpeaks in  $U_{sd}$ -Richtung kann man eine Ladeenergie von  $E_c \approx 250 \mu\text{eV}$  ablesen. Anhand der Steigungen der eingezeichneten Linien lässt sich nach Gleichung 2.26 ein Hebelfaktor  $\alpha_s = 0,48 \text{ eV/V}$  für den Source-Kontakt bestimmen. Zwischen den beiden Coulomb-Resonanzen bei  $U_{sd} = 0$  kann man eine Linie erhöhter Leitfähigkeit erkennen. Diese Erhöhung ist die durch den Kondo-Effekt verursachte ZBA.

In Abb. 4.2 ist die differentielle Leitfähigkeit eines Quantenpunktes dargestellt, die bei  $U_{sd} = 0$  das für den Kondo-Effekt charakteristische Maximum aufweist. Diese Messung wurde entlang der blauen, gestrichelten Linie in Abb. 4.1 bei einer konstanten Gatespannung  $U_{g6} = -139 \text{ mV}$  durchgeführt. Die Breite dieser ZBA wird mit der Anpassung einer Gauss-



#### 4.1. Bestimmung der Kondo-Temperatur im gemischt-valenten Regime

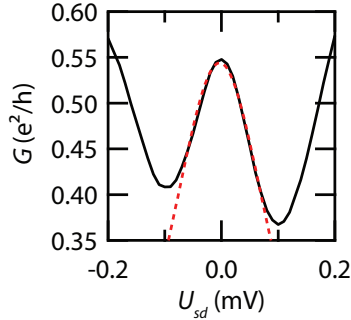


Abbildung 4.2.: Differentielle Leitfähigkeit  $G$  als Funktion der Vorspannung  $U_{sd} = 0$  entlang der blauen gestrichelten Linie in Abb. 4.1 . Die rote gestrichelte Linie zeigt eine Anpassung mit Gleichung 2.33.

Funktion bestimmt, wie in der Abbildung anhand der roten Linie demonstriert wird. Das Ergebnis ist eine Halbwertsbreite  $\Delta_{ZBA} = 120 \mu\text{V}$ , was mit Gleichung 2.33 zu  $T_K = 450 \text{ mK}$  führt.

Die andere Methode zur Bestimmung von  $T_K$  ist in Abb. 4.3 dargestellt. Dort sieht man in (a)  $G$  als Funktion von  $U_{sd}$  für verschiedene Temperaturen. Die Temperaturabhängigkeit bei  $U_{sd} = 0$  wird in (b) gezeigt. Die Anpassung mit Gleichung 2.34 liefert die Parameter  $s = 0,09$  und  $T_K^* = 50 \text{ mK}$ . Damit erhält man  $T_K = 2,6 \text{ K}$ . Dieser Wert ist eine Größenordnung größer als die typischen Kondo-Temperaturen in dem untersuchten Quantenpunkt. Auch der s-Parameter stimmt nicht mit dem erwarteten Wert  $s = 0.22$  für eine Spin- $\frac{1}{2}$  Störstelle [20] überein. Auffällig an den Messwerten ist, dass  $G$  ab einer Temperatur von  $300 \text{ mK}$  wieder ansteigt und nicht weiter fällt, wie man es für die Leitfähigkeit einer Kondo-Resonanz erwarten würde. Mit diesem untypischen Verhalten bei höheren Temperaturen kann man auch das Abweichen des s-Parameters und die sehr hohe Kondo-Temperatur erklären. An den in Abb. 4.3 (a) dargestellten Kurven kann man bereits erkennen, wodurch der Anstieg

#### 4. Kondo-Effekt an Einzelquantenpunkten

der Leitfähigkeit bei höheren Temperaturen verursacht wird. Neben der ZBA bei  $U_{sd} = 0$  sind noch weitere Maxima bei endlicher Vorspannung zu beobachten. Dies sind die Coulomb-Resonanzen, die auftreten, sobald das durch  $U_{sd}$  geöffnete Transportfenster groß genug ist, um den Transport über den Quantenpunkt zu ermöglichen. Mit zunehmender Temperatur verbreitern sich diese Resonanzen. Ab etwa 300 mK wird der Überlapp der beiden Resonanzen bei  $U_{sd} = 0$  so groß, dass die Leitfähigkeit dort trotz Abnahme der ZBA anwächst.

Die zusätzliche Leitfähigkeit durch den Überlapp der Coulomb-Resonanzen muss für eine genauere Betrachtung der ZBA abgezogen werden. Die Resonanzen haben die Form einer  $\text{sech}^2$  Funktion [61] und werden daher mit folgender Funktion angepasst:

$$f(U_{sd}) = A_l \text{sech}^2 \left( 1,76 \frac{U_{sd} - U_{sd}^l}{b} \right) + A_r \text{sech}^2 \left( 1,76 \frac{U_{sd} - U_{sd}^r}{b} \right). \quad (4.1)$$

Hier sind  $U_{sd}^l$  bzw.  $U_{sd}^r$  die Positionen der beiden Resonanzen links und rechts des Nullpunktes,  $A_r$  und  $A_l$  sind die Amplituden der Maxima. Durch das Einfügen des Faktors 1,76 ergibt  $b$  die volle Breite bei der Hälfte des Maximums der  $\text{sech}^2$  Funktion. Bei der Anpassung wurde angenommen, dass beide Resonanzen links und rechts des Nullpunktes die gleiche Breite  $b$  aufweisen. Diese Annahme wurde aufgrund der Symmetrie der Coulomb-Raute in Abb. 4.1 vorgenommen, da diese auf etwa gleiche Tunnelraten an der linken bzw. rechten Tunnelbarriere schließen lässt. Die Datenpunkte der ZBA um  $U_{sd} = 0$  wurden für die Anpassung entfernt. Das Ergebnis der Anpassung ist in Abb. 4.4 für eine Gatespannung von  $U_{g6} = -116$  mV und eine Temperatur  $T = 25$  mK zu sehen. Die Anpassung ist nur zwischen den Maxima der beiden Coulomb-Resonanzen gültig, also etwa in dem Intervall  $U_{sd} = [-0,38 \text{ mV}; 0,35 \text{ mV}]$ . Außerhalb dieses Bereiches steigt die differentielle Leitfähigkeit an, anstatt wie erwartet abzusinken. Dieses Verhalten stammt wahrscheinlich von Cotunnelprozessen, die aufgrund der starken Kopplung des Quantenpunktes zu Source und Drain auftreten. Die resultierende Anpassungsfunktion hat die Parameter  $A_l = 0,565 e^2/h$ ,  $A_r = 0,672 e^2/h$ ,  $U_{sd}^l = -0,223$  mV,  $U_{sd}^r = 0,289$  mV und  $b = 0,313$  mV.

#### 4.1. Bestimmung der Kondo-Temperatur im gemischt-valenten Regime

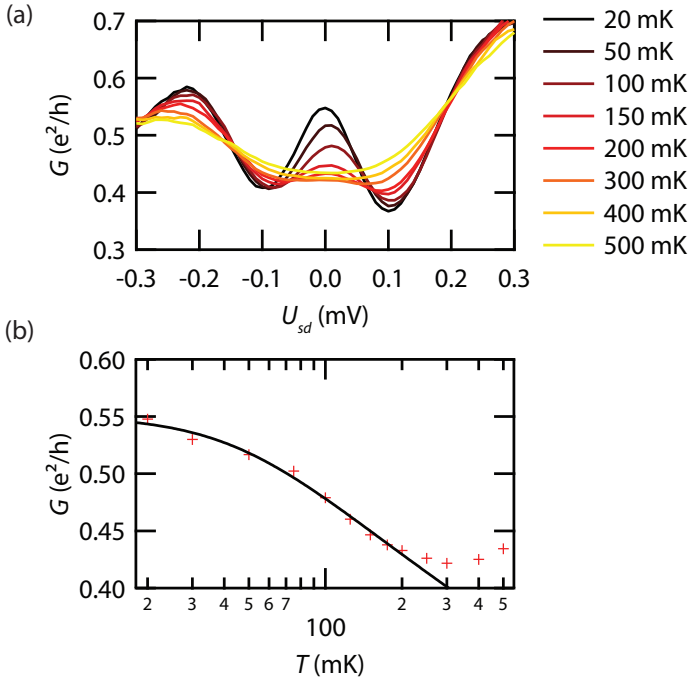


Abbildung 4.3.: (a) Differentielle Leitfähigkeit  $G$  als Funktion von  $U_{sd} = 0$  für verschiedene Temperaturen. (b) Differentielle Leitfähigkeit  $G$  bei  $U_{sd} = 0$  als Funktion der Temperatur. Die schwarze Linie zeigt eine Anpassung mit Gleichung 2.34.

Bei der Anpassung waren die Amplituden und die Positionen der sechs<sup>2</sup> Funktionen freie Parameter. Die Breite  $b$  wurde jedoch vorgegeben. Um  $b$  festzulegen, wurde die Anpassung zunächst mit einem freien Parameter  $b$  für die unterschiedlichen Temperaturen durchgeführt. Die Ergebnisse für  $b$  sind in Abb. 4.5 zu sehen. Sie wurden mit dem Zusammenhang zwischen der Breite der Coulomb-Resonanzen und der Temperatur verglichen:

#### 4. Kondo-Effekt an Einzelquantenpunkten

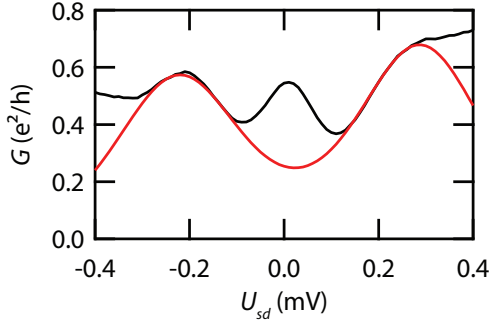


Abbildung 4.4.: Anpassung des Hintergrundes (rot) an die differentielle Leitfähigkeit (schwarz) mit Gleichung 4.1. Gezeigt ist die Anpassung bei der tiefsten Temperatur  $T = 25$  mK aus Abb. 4.3.

$\alpha_s b = 0,78\Gamma + 3,5k_B T$  [62]. Dabei ist  $\Gamma$  die Kopplung zwischen dem Quantenpunkt und den Zuleitungen. Die graue, gestrichelte Gerade in Abb. 4.5 hat die Steigung  $3,5k_B/\alpha_s$  mit dem aus dem Coulomb-Diamanten bestimmten Hebelfaktor  $\alpha_s = 0,48$  mV/eV. Man sieht, dass die Ergebnisse für  $b$  nicht mit der Theorie übereinstimmen. Ein Grund dafür kann sein, dass die Temperaturen von einigen 100 mK einigen  $10 \mu\text{eV}$  entsprechen und damit im Vergleich zu einer erwarteten Kopplung von etwa  $150 \mu\text{eV}$  klein sind. Diese Abschätzung für  $\Gamma$  ergibt sich aus  $b \approx 300 \mu\text{V}$  bei der tiefsten Temperatur von 20 mK. Das Bestimmen der Kopplung über eine lineare Anpassung der Temperaturabhängigkeit von  $b$  liefert nur richtige Ergebnisse für  $T > \Gamma$ , da ansonsten eine Sättigung in  $b$  eintritt. Zu dieser Sättigung kommt es im Experiment, da die Temperatur des Kryostaten und die Temperatur der Elektronen nicht immer übereinstimmen. Durch Wärmeeintrag über die Zuleitungen kann die Elektronentemperatur über der gemessenen Temperatur liegen, weswegen  $b$  ab einer bestimmten Temperatur nicht mehr so stark abnimmt, wie es theoretisch vorhergesagt wird.

#### 4.1. Bestimmung der Kondo-Temperatur im gemischt-valenten Regime

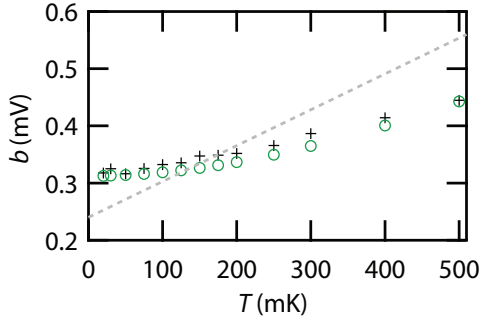


Abbildung 4.5.: Der Parameter  $b$ , der die Breite der Coulomb-Resonanzen beschreibt, als Funktion der Temperatur. Die schwarzen Kreuze sind die Ergebnisse einer Anpassung mit  $b$  als freien Parameter, die grünen Kreise sind die mit Gleichung 4.2 berechneten Werte. Die gestrichelte Linie zeigt den theoretischen Zusammenhang von  $b$  und  $T$  als lineare Funktion mit einer Steigung  $3.5k_B/\alpha_s$ .

Die Sättigung in  $b$  soll hier durch die Einführung einer empirischen Formel für den Zusammenhang zwischen  $b$  und  $T$  berücksichtigt werden:

$$b = \frac{1}{\alpha_s} \sqrt{\Gamma^2 + k_B^2 T^2}. \quad (4.2)$$

Mit dieser Gleichung wurde  $b$  für verschiedene Werte von  $\Gamma$  berechnet und mit dem Ergebnis als fester Parameter wurden die Coulomb-Resonanzen für alle gemessenen Temperaturen angepasst. Die beste Übereinstimmung wurde für  $\Gamma = 150 \mu\text{eV}$  erzielt. Die entsprechenden Werte für  $b$  sind in Abb. 4.5 in grün eingezeichnet. Sie stimmen sehr gut mit den Ergebnissen für den freien Parameter  $b$  überein. Der ermittelte Hintergrund durch das Überlappen der Coulomb-Resonanzen kann von den Messdaten abgezogen werden. Das Ergebnis für  $T = 20 \text{ mK}$  ist in Abb. 4.6 dargestellt. Zur Bestimmung der Kondo-Temperatur wird diese ZBA wieder mit einer Gauss-Funktion angepasst, was eine Breite  $\Delta_{ZBA} = 0,058 \text{ mV}$  ergibt.

#### 4. Kondo-Effekt an Einzelquantenpunkten

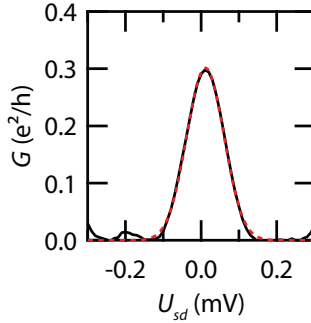


Abbildung 4.6.: Die ZBA bei  $U_{g6} = -139$  mV nach Abzug des Hintergrundes. Die gestrichelte rote Linie ist eine Anpassung mit einer Gauss-Funktion zur Bestimmung der Breite der ZBA.

Daraus erhält man eine Kondo-Temperatur von  $T_K = 220$  mK.

Bei der Bestimmung der Kopplung  $\Gamma$  wurde der Hintergrund für alle gemessenen Temperaturen bestimmt, sodass man nach Abzug auch den Anteil der Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$  berechnen kann, der nur durch den Kondo-Effekt verursacht wird. In Abb. 4.7 wird dieser Anteil als Funktion der Temperatur gezeigt. Diese Daten werden wiederum mit der Gleichung 2.34 angepasst, um die Kondo-Temperatur zu bestimmen. Das Ergebnis dieser Anpassung ist als schwarze Linie eingezeichnet. Die Parameter sind dabei  $G_0 = 0,29 e^2/h$ ,  $T_K^* = 96$  mK und  $s = 0,42$ . Damit ist die Kondo-Temperatur  $T_K = 200$  mK. Dieser Wert stimmt nun sehr gut mit der aus der Breite der ZBA bestimmten Kondo-Temperatur von 220 mK überein. Der s-Parameter  $s = 0,42$  ist nun allerdings um einen Faktor 2 größer als der erwartete  $s = 0,22$ . Diese Abweichung wird später noch einmal aufgegriffen.

Aus der Halbwertsbreite der Coulombpeaks wurde die Kopplung zwischen dem Quantenpunkt und den Zuleitungen  $\Gamma = 150 \mu\text{eV}$  bestimmt. Damit kann man nun auch die Kondo-Temperatur mit Gleichung 2.28 be-

#### 4.1. Bestimmung der Kondo-Temperatur im gemischt-valenten Regime

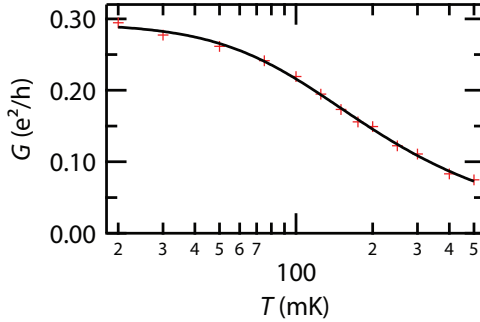


Abbildung 4.7.: Die differentielle Leitfähigkeit  $G$  bei  $U_{sd} = 0$  nach Abzug des Hintergrundes. Die schwarze Linie zeigt eine Anpassung mit Gleichung 2.34.

rechnen. Dabei wird angenommen, dass sich der Quantenpunkt am Punkt der Teilchen-Loch-Symmetrie befindet, d.h.  $\epsilon_0 = -E_c/2 = -0,75 \mu\text{V}$ . Diese Berechnung liefert  $T_K = 304 \text{ mK}$  und weicht damit um 50% von den experimentell bestimmten Werten ab. Ein Grund dafür ist, dass Gleichung 2.28 streng genommen nur für  $\Gamma \ll E_c$  gilt [45]. Aus den Messdaten ergibt sich jedoch  $\Gamma/E_c = 0.6$ , womit diese Bedingung nicht erfüllt wird. Der Quantenpunkt befindet sich nahe dem gemischt-valenten Regime, in dem  $\Gamma \gtrsim E_c$  ist [20].

Um die Ergebnisse mit theoretischen Resultaten in Beziehung zu setzen, werden sie mit Berechnungen von  $G(T)$  verglichen, die aus dem Anderson-Modell mittels der numerischen Renormalisierungsgruppe (NRG) hervorgehen. Diese Berechnungen wurden von R. Žitko am Jozef Stefan Institut in Ljubljana durchgeführt und beschreiben die Leitfähigkeit  $G_{NRG}$  einer einzelnen magnetischen Störstelle als Funktion der Temperatur und des Verhältnisses  $\Gamma/E_c$  [63]. In Abb. 4.8 (a) sind die Ergebnisse dieser Rechnungen für verschiedene Werte von  $\Gamma/E_c$  dargestellt. Die Leitfähigkeit ist dabei auf  $G_0 = G(T = 0)$  normiert und die Temperatur wird in Einheiten von  $T_K$  dargestellt. Wie man sieht, folgen die Berechnungen der Definition

#### 4. Kondo-Effekt an Einzelquantenpunkten

von  $T_K$ , bei der  $G_{NRG}(T_K) = 0.5G_0$  ist.

Die theoretischen Ergebnisse werden mit den nach Abzug des Hintergrundes erhaltenen Daten verglichen, indem eine Anpassung mit der Funktion  $G(T) = G_0 G_{NRG}(T/T_K, \Gamma/E_c = 0.6)$  vorgenommen wird. Freie Parameter bei dieser Anpassung sind  $G_0$  und die Kondo-Temperatur  $T_K$ . Als Ergebnis der Anpassung erhält man  $G_0 = 0,328 e^2/h$  und  $T_K = 175$  mK. Die entsprechende Anpassungsfunktion ist in Abb. 4.8 (b) als schwarze Linie dargestellt. Dort sieht man, dass die theoretischen Daten mit den experimentellen sehr gut übereinstimmen. Auch das Resultat für die Kondo-Temperatur liegt nahe an dem aus der Breite der ZBA ermittelten Wert von 220 mK. Diese Übereinstimmung zeigt, dass die beim Anpassen des Hintergrundes getroffenen Annahmen über den Zusammenhang zwischen  $b$ ,  $\Gamma$  und  $T$  (Gleichung 4.2) zu sinnvollen Ergebnissen führen.

Ohne Abzug des Hintergrundes liefert die Analyse der Halbwertsbreite der ZBA einen Wert, der die Kondo-Temperatur zwar überschätzt, aber in der richtigen Größenordnung liegt. Die Analyse der Temperaturabhängigkeit bei  $U_{sd}$  ist jedoch ohne diesen Abzug im gemischt-valenten Regime nicht geeignet, um eine sinnvolle Abschätzung der Kondo-Temperatur zu erhalten. Nachdem der Hintergrund abgezogen wurde, ist diese Methode aber wieder verlässlich. Das Abweichen des  $s$ -Parameters von dem für ein Spin- $\frac{1}{2}$  System erwarteten Wert  $s = 0,22$  kann daran liegen, dass dieser empirische Wert nicht für den Fall einer hohen Kopplung  $\Gamma \approx E_c$  gültig ist. Führt man eine Anpassung der von R. Žitko berechneten Daten mit Gleichung 2.34 durch, erhält man für höhere Kopplung einen höheren  $s$ -Parameter von etwa  $s \approx 0,3$ , wie in Abb. 4.9 gezeigt wird. Dieser Wert stimmt zwar nicht mit dem aus den experimentellen Daten ermittelten  $s = 0,42$  überein, aber die Abweichung ist deutlich geringer.

An dem gleichen Quantenpunkt wurde bei einem anderen Abkühlprozess die Messung der Temperaturabhängigkeit bei etwas verschiedenen Parametern des Quantenpunktes wiederholt. Ein Bild der entsprechenden Coulomb-Raute ist in Abb. 4.10 gezeigt. Auch hier ist zwischen den Coulomb-Resonanzen bei  $U_{sd} = 0$  eine ZBA zu erkennen. Die Ladeenergie beträgt in diesem Fall  $E_c = 350 \mu\text{eV}$ . Beim Abziehen des Hintergrundes wurde analog zum vorherigen Vorgehen  $\Gamma = 190 \mu\text{eV}$  ermittelt, sodass man  $\Gamma/E_c = 0,54$  erhält. Diese zur ersten Messung abweichenden Parameter



#### 4.1. Bestimmung der Kondo-Temperatur im gemischt-valenten Regime

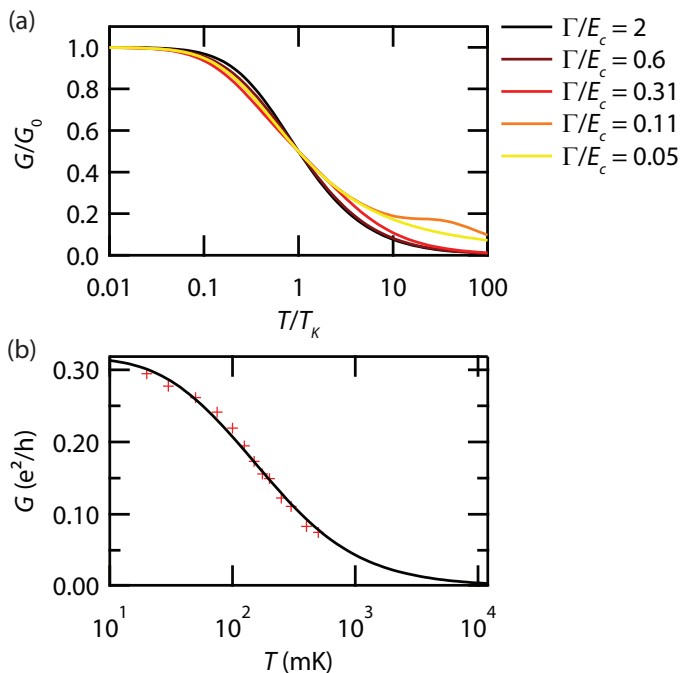


Abbildung 4.8.: (a) Ergebnisse der numerischen Berechnung der Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$  einer einzelnen Anderson-Störstelle als Funktion der Temperatur. Die Leitfähigkeit  $G$  ist auf ihren Wert  $G_0 = G(T = 0)$  normiert, die Temperatur  $T$  auf die Kondo-Temperatur  $T_K$ . Die Daten wurden von R. Žitko berechnet. (b) Anpassung der experimentellen Daten mit den numerischen Ergebnissen für  $\Gamma/E_c = 0,6$ .

#### 4. Kondo-Effekt an Einzelquantenpunkten

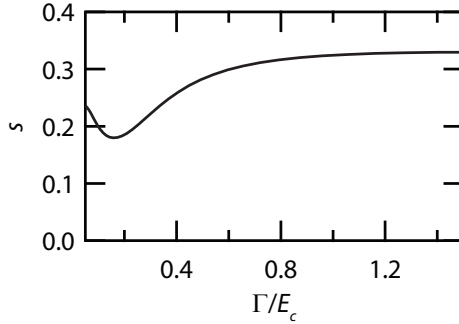


Abbildung 4.9.: Die Ergebnisse für den  $s$ -Parameter aus den Anpassungen der berechneten Leitfähigkeit  $G_{RNG}(T)$  von R. Žitko mit Gleichung 2.34 als Funktion der Kopplung  $\Gamma$ .

können unterschiedliche Gründe haben: zum einen können beim Abkühlen unterschiedliche Störstellen im 2DEG einfrieren und die elektrostatische Umgebung des Quantenpunktes verändern. Zum anderen sind die Spannungen an den Gates verschieden, was Auswirkungen auf die Größe des Quantenpunktes und seine Ankopplung an die Zuleitungen hat. Daher sind solche Veränderungen bei einem erneuten Abkühlen des Quantenpunktes nicht ungewöhnlich.

Auch bei dieser Messung wurden die Breite der ZBA und die Temperaturabhängigkeit bei  $U_{sd} = 0$  entlang der gestrichelten weißen Linie in Abb. 4.10 analysiert. Nach Abzug des Hintergrundes erhält man die ZBA, die in Abb. 4.11 (a) dargestellt ist. Die Halbwertsbreite beträgt hier  $\Delta_{ZBA} = 64 \mu\text{V}$ , was  $T_K \approx 240 \text{ mK}$  entspricht. Daneben ist in (b) die Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$  als Funktion der Temperatur aufgetragen. Aus der Anpassungsfunktion erhält man die Parameter  $G_0 = 0,2 e^2/h$ ,  $s = 1,27$  und  $T_K^* = 160 \text{ mK}$ . Aus  $s$  und  $T_K^*$  erhält man die Kondo-Temperatur  $T_K = 136 \text{ mK}$ . In diesem Fall stimmen die beiden Ergebnisse also nicht sehr gut überein. Der große Wert für den  $s$ -Parameter könnte hierbei einen Ansatz für eine Erklärung liefern: er ist abhängig von dem lokalisierten

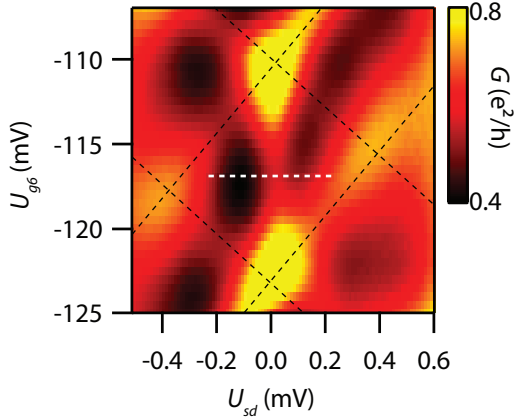


Abbildung 4.10.: Differentielle Leitfähigkeit  $G$  des Quantenpunktes als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$  und der Gatespannung  $U_{g6}$ . Die weißen gestrichelten Linien heben die Coulomb-Raute hervor. Diese Messung wurde in einem zweiten Abkühlprozess durchgeführt.

Spin der magnetischen Störstelle und dem Verhältnis  $\Gamma/E_c$  [20]. Letzteres ist in dem hier untersuchten Fall  $\Gamma/E_c = 0,55$ , was nach dem in Abb. 4.9 dargestellten Ergebnis  $s = 0,29$  erwarten lässt. Die Abweichung davon ist sehr groß. Daher lässt sich eher darauf schließen, dass in dem untersuchten Fall evtl. eine Spinkonfiguration mit  $S = 1$  oder höher vorliegt und es deswegen zu dem beobachteten Unterschied kommt.

## 4.2. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie die überlappenden Coulomb-Peaks nahe des gemischt-valenten Regimes die Bestimmung der Kondo-Temperatur  $T_K$  aus den Messdaten erschweren. Es wurde eine Methode zur Anpassung des Hintergrundes beschrieben, bei der die Kopplung  $\Gamma$  mittels einer

#### 4. Kondo-Effekt an Einzelquantenpunkten

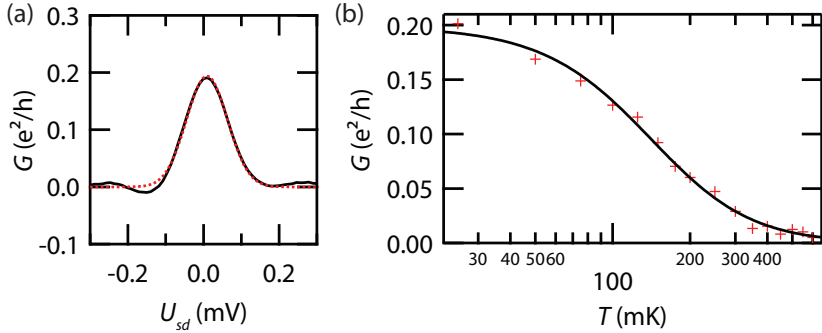


Abbildung 4.11.: Ergebnisse nach Abzug des Hintergrunds aus einem zweiten Abkühlprozess: (a)  $G$  als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$ . Die Messung wurde entlang der weißen gestrichelten Linie in Abb. 4.10 durchgeführt. Die Rote gestrichelte Linie ist eine Anpassung mit einer Gauss-Funktion. (b)  $G$  als Funktion der Temperatur. Die schwarze Linie zeigt eine Anpassung mit Gleichung 2.34.

empirischen Abschätzung berechnet wird. Nach Abzug des Hintergrunds kann  $T_K$  mit unterschiedlichen Methoden bestimmt und die verschiedenen Ergebnisse verglichen werden. Dabei wurde für den zuerst präsentierten Datensatz eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen aus den Messdaten und den theoretischen Berechnungen mittels NRG festgestellt.

Bei einem weiteren Datensatz, der in einem zweiten Abkühlprozess gemessen wurde, kommt es zu größeren Abweichungen zwischen den Anpassungsparametern und den erwarteten Werten. Insbesondere der  $s$ -Parameter aus der Anpassung der Temperaturabhängigkeit stimmt nicht mit seinem Erwartungswert für ein Spin- $\frac{1}{2}$  System überein. Ein Grund dafür könnte eine Änderung in der Spinkonfiguration des Quantenpunktes sein. Dass Änderungen des Gesamtspins auf einem Quantenpunkt den Kondo-Transport beeinflussen, wird bei Messungen des Kondo-Effektes in senkrechten Magnetfeldern weiter untersucht.

# 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

Die in dieser Arbeit untersuchten Proben wurden mit dem Ziel konzipiert, eine indirekte Wechselwirkung zwischen zwei Quantenpunkten nachzuweisen, wie es zuvor an einem Doppelquantenpunktsystem mit mittels Topgates geformten Quantenpunkten gelungen ist [13]. Dabei wurde die RKKY-Wechselwirkung zwischen zwei Quantenpunkten durch eine Aufspaltung der ZBA identifiziert. RKKY steht für die Physiker Rudermann, Kittel, Kasuya und Yosida, die diese indirekte Wechselwirkung zwischen magnetischen Momenten zuerst theoretisch beschrieben haben [9, 10, 11]. Sie wirkt entweder ferromagnetisch oder antiferromagnetisch zwischen den magnetischen Momenten, d.h. die Gesamtspins zweier wechselwirkender Quantenpunkte werden entweder parallel oder anti-parallel ausgerichtet [12]. Dieses Verhalten steht im Gegensatz zu der ständigen Umkehr des Spins, die beim Kondo-Transport durch einen Quantenpunkt auftritt. Daher stehen diese beiden Effekte in einer Art Wettbewerb zueinander [64]. Je nachdem, ob die Bindungsenergie des Kondo-Singletts oder die Wechselwirkungsstärke der RKKY-Wechselwirkung größer ist, dominiert einer der beiden Effekte das Verhalten der Spins. Experimentell kann dabei eine Unterdrückung des Kondo-Effektes beobachtet werden, sobald die RKKY-Wechselwirkung stark genug ist [65]. Im Experiment an Quantenpunkten ist dieser Effekt als Aufspaltung der Kondo-Resonanz sichtbar, sobald ein zweiter Quantenpunkt in der Nähe ebenfalls ein nicht verschwindendes magnetisches Moment aufweist [13, 15, 14].

In der vorliegenden Probe D040330A wurde die RKKY-Wechselwirkung von D. Tutuc ebenfalls durch eine Aufspaltung der ZBA demonstriert. Diese Messungen fanden jedoch ohne ein externes Magnetfeld statt [15]. Zwar wurde die RKKY-Wechselwirkung in dieser Probe auch in einem senkrechten Magnetfeld im so genannten Kondo-Schachbrett nachgewiesen, aber dabei wurde die ZBA nicht untersucht. In Abschnitt 2.4.3 wurde beschrie-

## 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

ben, dass es im Magnetfeld durch den Zeeman-Effekt zur Aufhebung der Spinartung kommt und eine Aufspaltung der ZBA in zwei Maxima mit dem Abstand  $\Delta U_{sd} = 2\Delta_Z$  erwartet wird. Um diese Aufspaltung von einem möglichen Einfluss der RKKY-Wechselwirkung unterscheiden zu können, ist es nötig, den Einfluss eines Magnetfeldes auf die ZBA zu studieren.

Bisherige Messungen der Kondo-Resonanz in magnetischen Feldern mit paralleler Orientierung bezüglich der Probenoberfläche haben Ergebnisse erbracht, die von dem erwarteten Verhalten einer Zeemanaufspaltung abweichen: zunächst kann man beobachten, dass die Aufspaltung der ZBA nur bei Magnetfeldern über einem gewissen Schwellenwert  $B_t$  auftritt. Dieser Schwellenwert entspricht etwa  $g^*\mu_B B_t \approx k_B T_K/2$  [66, 67]. Des weiteren wurde festgestellt, dass die Aufspaltung den erwarteten Wert  $\Delta U_{sd} = 2\Delta_Z$  oberhalb des Schwellenwertes  $B_T$  übertrifft [68, 67, 69]. Diese Beobachtungen stimmen qualitativ mit den Vorhersagen theoretischer Berechnungen der Leitfähigkeit überein [70, 71]. Bei der Größe der Aufspaltungen gibt es jedoch Unterschiede zwischen den theoretischen Berechnungen und den experimentellen Befunden.

Das Ziel dieses Kapitels ist, das Verhalten der ZBA im Magnetfeld zu untersuchen. Schwerpunkt bildet dabei die Untersuchung der ZBA im senkrechten Magnetfeld. Zunächst soll jedoch ein kurzer Abschnitt das Verhalten der ZBA in parallelen Feldern aus einer vorherigen Arbeit rekapitulieren und einen neuen Erklärungsversuch für das beobachtete Verhalten liefern. Daraufhin werden Messungen im senkrechten Magnetfeld präsentiert und mit Bezug zu den Ergebnissen des ersten Abschnittes interpretiert.

### 5.1. Messungen im parallelen Magnetfeld

Messungen in einem parallelen Magnetfeld wurden an dem hier untersuchten rechten Quantenpunkt der Probe D040330A von D. Tutuc im Rahmen seiner Dissertation durchgeführt [23]. Eine Darstellung der Messdaten ist in Abb. 5.1 zu sehen. Dort kann man bei  $B = 0$  ein Maximum um  $U_{sd} = 0$  erkennen, die erwartete ZBA. Die Halbwertsbreite

### 5.1. Messungen im parallelen Magnetfeld

der ZBA beträgt  $\Delta_{ZBA} = 50 \pm 9 \mu\text{eV}$ , was einer Kondo-Temperatur von  $T_K = 188 \pm 34 \text{ mK}$  entspricht [72].

Die Aufspaltung der ZBA in Folge des Zeeman-Effektes kann bei einem Schwellenwert  $B_t = 0.5 \pm 0.1 \text{ T}$  beobachtet werden. Hier ist zunächst jedoch nur eine Verschiebung des Maximums zu negativen Vorspannungen zu erkennen. Eine mögliche Erklärung dafür ist eine asymmetrische Ankopplung des Quantenpunktes an die Zuleitungen [23]. Bei  $B = 1,6 \text{ T}$  erscheint dann auch ein Maximum bei positiver Vorspannungen und man kann deutlich eine Aufspaltung sehen. Mit dem Landé-Faktor für GaAs Volumenmaterial  $g^* = 0.44$  kann man berechnen, dass der Schwellenwert einer Aufspaltung von  $g^* \mu_B B_t = 13 \pm 3 \mu\text{eV}$  entspricht. Diese ist also einen Faktor 3 kleiner als die Breite  $\Delta_{ZBA}$ . Das spricht dafür, dass die Zeeman-Aufspaltung der Kondo-Resonanz gegenüber einer Aufspaltung eines einzelnen, nicht abgeschirmten Niveaus verstärkt ist.

Um eine Aussage über die Entwicklung der Aufspaltung der ZBA  $\Delta U_{sd}$  zu machen, wurde die Größe der Aufspaltung anhand des linken Maximums abgeschätzt. Diese Abschätzung ist in Abb. 5.2 zu sehen. Dabei wurde  $\Delta U_{sd}$  auf die einfach Zeeman-Aufspaltung  $\Delta_Z$  normiert. Es wird deutlich, dass die Entwicklung der Aufspaltung nicht monoton ist, sondern ein Maximum durchläuft.

Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten ist die Renormalisierung des g-Faktors. Berechnungen des g-Faktors mit Hilfe der NRG von Hewson *et al.* haben gezeigt, dass der g-Faktor von dem Verhältnis des Magnetfeldes  $B$  zur Kondo-Temperatur  $T_K$  abhängt [73, 74]. Ihre Ergebnisse werden in Abb. 5.3 gezeigt. Dort sieht man den Verstärkungsfaktor  $\eta = \tilde{g}^*/g^*$ , der das Verhältnis zwischen dem renormalisierten g-Faktor  $\tilde{g}^*$  und seinem unrenormalisierten Wert  $g^*$  beschreibt. Der Verstärkungsfaktor läuft zwischen den Werten  $\eta = 2$  und  $\eta = 1$  durch ein Maximum.

Vergleicht man die Messergebnisse aus Abb. 5.2 mit den Resultaten für  $\eta$ , fällt auf, dass die Verstärkung im Experiment kleiner ausfällt und das Maximum der Aufspaltung schon bei  $B = 1 \text{ T}$  erreicht wird. Die Abweichungen von den theoretischen Ergebnissen lassen sich damit erklären, dass die Berechnungen für den Fall  $E_c \gg \Gamma$  durchgeführt wurden. Wie in Abschnitt 4.1 gezeigt, liegt bei dem untersuchten Quantenpunkt  $\Gamma$  in der Größenordnung der Ladeenergie  $E_c$ . Für eine bessere Übereinstimmung

## 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

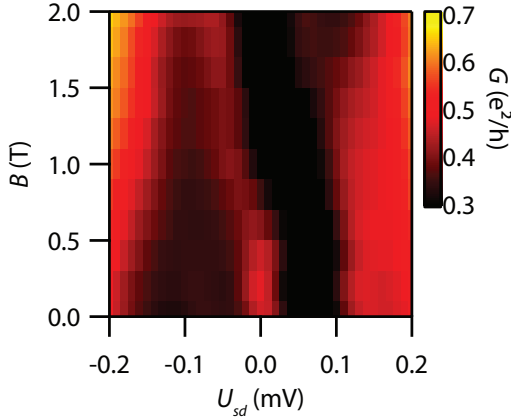


Abbildung 5.1.: Differentielle Leitfähigkeit  $G$  des Quantenpunktes als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$  und eines Magnetfeldes  $B$ , das parallel zur Probenoberfläche orientiert ist. Die Daten sind aus Referenz [23], Abb. 5.1 entnommen.

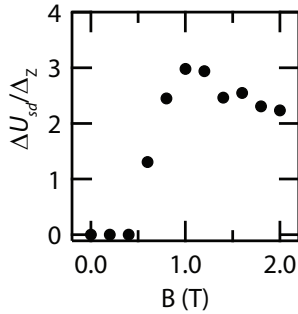


Abbildung 5.2.: Die Aufspaltung der ZBA  $\Delta U_{sd}$  in einem parallelen Magnetfeld der Stärke  $B$ .  $\Delta U_{sd}$  ist auf die einfache Zeeman-Aufspaltung  $\Delta_Z$  normiert.



## 5.2. Messungen im senkrechten Magnetfeld

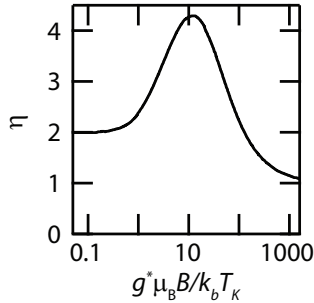


Abbildung 5.3.: Verstärkungsfaktor  $\eta$  als Funktion des Verhältnisses von Magnetfeld und Temperatur  $g^* \mu_B B / k_b T_K$ . Die Daten sind aus Referenz [73], Abb. 3 entnommen.

zwischen Berechnung und Experiment müssen bei der Berechnung die tatsächlichen Parameter des Quantenpunktes beachtet werden. Dies wurde von G. Zwicknagl an der TU Braunschweig durchgeführt und das Ergebnis ist in Ref. [72] in Abb. 4 (d) zu finden. Es liefert eine qualitativ bessere Übereinstimmung mit den Messdaten, wobei auch diese Berechnung noch einige Unterschiede zu den experimentellen Resultaten aufweist. Diese können unter anderem mit der bei der Berechnung vorgenommenen Vereinfachung des Quantenpunktes zu einem Ein-Niveau-System erklärt werden. Bei dem im Experiment mit ca. 50 Elektronen besetzten Quantenpunkt kann z.B. die Kondo-Temperatur deutlich von dem erwarteten  $T_K$  eines Ein-Niveau-Systemes abweichen [75].

## 5.2. Messungen im senkrechten Magnetfeld

Im senkrechten Magnetfeld kann man bei bestimmten Magnetfeldern das in Abschnitt 2.4.3 beschriebene Kondo-Schachbrett beobachten. Hier soll die Entwicklung der ZBA in diesem Bereich des Schachbretts untersucht werden. Eine Messung der differentiellen Leitfähigkeit als Funktion des

## 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

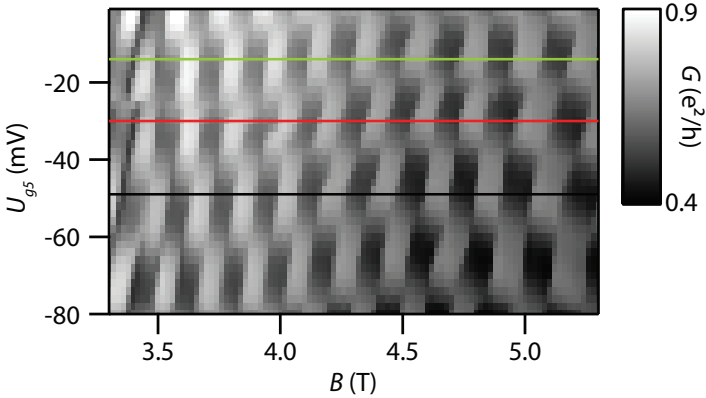


Abbildung 5.4.: Differentielle Leitfähigkeit  $G$  des Quantenpunktes 2 als Funktion des Magnetfelds  $B$  und der Gatespannung  $U_{g5}$ . Entlang der Linien wurden nicht-lineare Messungen zur Bestimmung der Aufspaltung der ZBA durchgeführt. Die Symbole kennzeichnen die Positionen der Messungen, die in Abb. 5.5 gezeigt sind.

senkrechten Magnetfeldes und der Spannung an Gate 5 ist in Abb. 5.4 gezeigt. Das Schachbrett-Muster ist deutlich ausgeprägt. Die Position der Coulomb-Resonanzen ist vom Magnetfeld abhängig, sodass die Übergänge zwischen den einzelnen Elektronenzahlen etwas verbogen sind.

Zur Untersuchung der Aufspaltung der ZBA wurde entlang der farbigen Linien in Abb. 5.4 die Leitfähigkeit in Abhängigkeit der Vorspannung gemessen, wie in Abb. 5.5 dargestellt ist. Dort wird die differentielle Leitfähigkeit an drei verschiedenen Stellen in dem Schachbrett gezeigt. Abb. 5.5 (a) zeigt die Aufspaltung bei  $B = 4,39$  T. Es sind zwei Schultern in der differentielle Leitfähigkeit zu erkennen. Sie haben den Abstand  $\Delta U_{sd} = 0.38 \pm 0.02$  mV. Dieser Wert wurde durch Anpassung einer Gauß-Funktion mit einem kubischen Hintergrund an die Schultern bestimmt. Ein Beispiel für diese Prozedur ist in Abb. 5.6 zu sehen. In Abb. 5.5 (b)

## 5.2. Messungen im senkrechten Magnetfeld

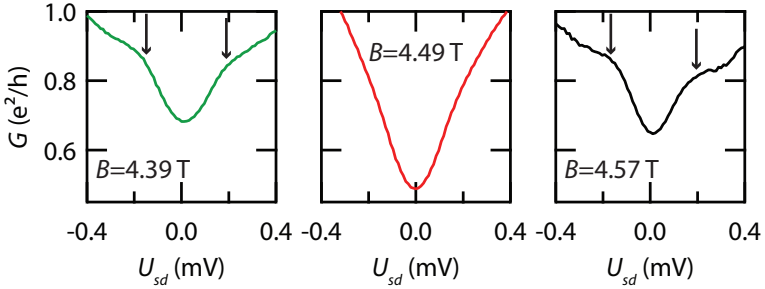


Abbildung 5.5.: Messungen der differentiellen Leitfähigkeit als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$  für drei verschiedene Magnetfelder. Die Messungen wurden bei einer konstanten Gatespannung  $U_{g5} = -30$  mV durchgeführt. Die Schultern, die die Aufspaltung der ZBA zeigen, sind mit Pfeilen markiert. In (a) ist an der linken Schulter die angepasste Kurve zu sehen, mit der die Position der Schulter bestimmt wurde.

wird der Fall gezeigt, in dem die Leitfähigkeit nicht durch den Kondo-Effekt erhöht ist. Es wird deutlich, dass die zuvor beobachteten Schultern hier nicht auftreten. Schließlich ist in Abb. 5.5 (c) bei einem Magnetfeld von  $B = 4,57$  T wieder eine Aufspaltung zu erkennen. Diesmal ist der Abstand der beiden Schultern  $\Delta U_{sd} = 0.32 \pm 0.02$  mV. Diese Aufspaltung ist kleiner, als die bei der geringeren Magnetfeldstärke von 4,49 T. Eine solche Beobachtung kann man mit dem erwarteten Zeeman-Effekt nicht einfach erklären, da dabei die Aufspaltung proportional zum Magnetfeld anwächst.

Zur weiteren Analyse der Beziehung zwischen der Größe der Aufspaltung und der Magnetfeldstärke wurde für drei verschiedene Gatespannungen entlang der farbigen Linien in Abb. 5.4 die differentielle Leitfähigkeit  $G$  als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$  gemessen. Die drei Gatespannungen wurden so gewählt, dass sich die Anzahl der Elektronen auf dem Quantenpunkt zu der jeweils positiveren Gatespannung um 1 erhöht. Aus

## 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

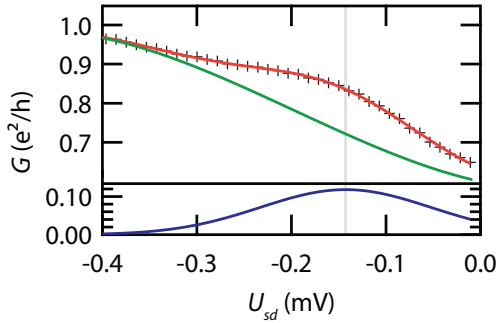


Abbildung 5.6.: Bestimmung der genauen Position einer linken Schulter in  $G$ . Die Messdaten sind als schwarze Kreuze dargestellt. Die grüne Kurve zeigt den kubischen Hintergrund. Die Gauß-Funktion, mit der die Position der Schulter bestimmt wurde, ist in blau zu sehen. Die resultierende Anpassungskurve ist rot. Sie ist die Summe aus Hintergrund und Gauß-Funktion. In grau ist die Position der Schulter markiert.

diesen Messungen wurde, wie in Abb. 5.6 demonstriert, die Größe der Aufspaltung  $\Delta U_{sd}$  bestimmt. Das Ergebnis wird in Abb. 5.7 gezeigt. Die Aufspaltung  $\Delta U_{sd}$  wurde dabei auf die einfache Zeeman-Aufspaltung  $\Delta_Z$  normiert. Sie weist einen für den Zeeman-Effekt untypischen Verlauf auf: im Gegenteil zu jenem nimmt  $\Delta U_{sd}$  mit zunehmendem Magnetfeld ab. Zudem sieht man bei  $B = 4,1$  T einen Sprung, bei dem die Aufspaltung von  $\Delta U_{sd} \approx \Delta_Z$  auf  $\Delta U_{sd} \approx 4\Delta_Z$  anwächst. Nach dem Sprung nimmt die Aufspaltung wieder ab.

Im Folgenden soll der Sprung in der Aufspaltung um  $B = 4,1$  T betrachtet werden. An dieser Stelle ändert sich die Aufspaltung sehr stark, aber das Magnetfeld bleibt quasi konstant. Eine mögliche Erklärung für die Änderung der Aufspaltung ist die im vorherigen Abschnitt beschriebene Renormalisierung des Landé-Faktors. An dem Sprung liegt dann eine Än-

## 5.2. Messungen im senkrechten Magnetfeld

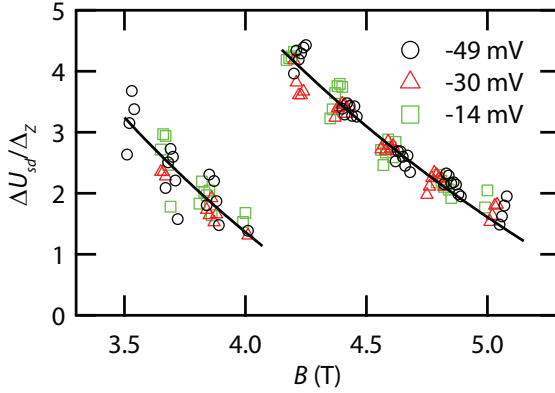


Abbildung 5.7.: Der Abstand der Schultern in der differentiellen Leitfähigkeit  $\Delta U_{sd}$  als Funktion von  $B$ . Dargestellt sind Messungen für drei verschiedene Gatespannungen  $U_{g6}$ , die entlang der farbigen Linien in Abb. 5.4 durchgeführt wurden. Die Elektronenzahl nimmt ausgehend  $U_{g5} = -49$  mV jeweils um eins zu.  $\Delta U_{sd}$  ist auf die einfache Zeeman-Energie  $\Delta_Z$  normiert.

derung des Verstärkungsfaktors von  $\eta \approx 1$  zu  $\eta \approx 4$  vor. Der Vergleich mit Abb. 5.3 zeigt, dass diese Aufspaltungen zu einem Verhältnis  $B/T_K$  passen, die rechts des Maximums in  $\eta$  liegen. Da das Magnetfeld am Sprung näherungsweise unverändert bleibt, findet dort eine starke Änderung der Kondo-Temperatur statt. Die Kondo-Temperatur ist nach Gleichung 2.33 eine Funktion der Kopplung  $\Gamma$  und der Ladeenergie  $E_c$ . Änderungen der Ankopplung des Quantenpunktes an die Zuleitungen kann man im Transport an der Stromstärke ablesen: eine höhere Tunnelrate bedeutet, dass mehr Elektronen pro Zeitintervall den Quantenpunkt passieren können, was zu einem höheren Strom führt. In Abb. 5.8 ist der Strom durch den Quantenpunkt bei einer festen Vorspannung  $U_{sd} = 0.5$  mV als Funktion des Magnetfeldes  $B$  dargestellt. Dabei wurden die drei festen Gatespan-

## 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

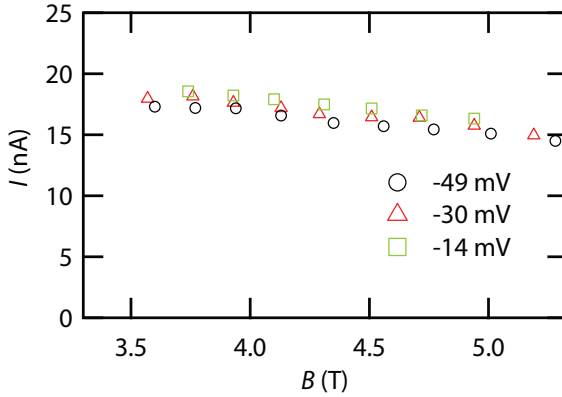


Abbildung 5.8.: Strom  $I$  durch den Quantenpunkt bei einer konstanten Vorspannung  $U_{sd} = 0,5$  mV. Es sind die Daten für die Gatespannungen aus Abb. 5.7 dargestellt.

nungen aus Abb. 5.7 untersucht. Man sieht, dass die Stromstärke mit zunehmendem Magnetfeld nur sehr leicht sinkt. Diese Abnahme ergibt sich aus der Kompression der Elektronwellenfunktionen in dem Quantenpunkt durch das Magnetfeld. Dadurch wird der Abstand zwischen den Zuleitungen und dem Quantenpunkt erhöht. Die Kopplung ist in dem untersuchten Bereich nicht von der Anzahl der Elektronen abhängig. Eine Unstetigkeit bei  $B \approx 4,1$  T ist nicht zu beobachten.

Die Ladeenergie des Quantenpunktes wird normalerweise, wie in Abschnitt 2.3.1 gezeigt, aus der Messung von Coulomb-Diamanten bestimmt. Diese Messung wurde im Magnetfeld jedoch nicht durchgeführt. Um trotzdem eine Abschätzung der Ladeenergie zu erhalten, kann man die Strom-Spannungs-Kennlinie des Quantenpunktes betrachten. Eine solche ist in Abb. 5.9 zu sehen. Die Kennlinie besteht in diesem Fall aus zwei linearen Teilen und einem Plateau um  $U_{sd} = 0$  mV. Das Plateau zeigt den Bereich, in dem der Transport durch Coulomb-Blockade unterdrückt ist. Die Breite des Plateaus kann man abschätzen, indem man Asymptoten an die

## 5.2. Messungen im senkrechten Magnetfeld

linearen Bereiche der Kennlinie anpasst und ihren Abstand bestimmt. Der Abstand der Asymptoten entspricht  $E_c/2$  [76].

Die so bestimmten Ladeenergie ist als Funktion des Magnetfeldes und der Elektronenzahl in Abb. 5.10 dargestellt. Die Ladeenergie wurde hier nur in den Bereichen bestimmt, in denen die Leitfähigkeit nicht durch den Kondo-Effekt erhöht ist. Zum einen kann man eine leichte Abhängigkeit von der Elektronenzahl erkennen. Sie nimmt mit zunehmender Elektronenzahl ab. Ein steigendes Magnetfeld führt zu einer steigenden Ladeenergie  $E_c$ . Wie bei der Kopplung kann dieses Verhalten mit einer Kompression der Wellenfunktionen auf dem Quantenpunkt erklärt werden. Eine kleinere Ausdehnung des Quantenpunktes bedeutet nach Gl. 2.21 eine Erhöhung der Ladeenergie. Zum anderen ist auch in dem Verlauf von  $E_c$  keine un stetige Veränderung um  $B = 4,1$  T zu sehen.

Aus der Analyse der Kopplung und der Ladeenergie folgt also, dass die abrupte Änderung der Kondo-Temperatur bei  $B = 4,1$  T nicht auf diese beiden Größen zurückzuführen ist. Eine weitere Besonderheit der in Abb. 5.7 dargestellten Aufspaltung ist, dass ihr Verhalten unabhängig von der Elektronenzahl ist. Die Werte für  $\Delta U_{sd}$  liegen für die drei eingestellten Gatespannungen auf einer Linie und der Sprung bei  $B = 4,1$  T tritt gleichfalls für diese Messungen auf. Das weist darauf hin, dass der Grund für diesen Verlauf nicht in inneren Mechanismen des Quantenpunktes sondern in der Wechselwirkung des Quantenpunktes mit den Zuleitungen zu finden ist. Die Zuleitungen sind zweidimensionale Strukturen und zeigen im senkrechten Magnetfeld den QHE mit der Ausbildung von Randkanälen. Dass Randkanäle in den Zuleitungen der verwendeten Probe auftreten, wurde in Ref. [15] gezeigt und wird auch in Kapitel 6 behandelt. Berechnet man aus Magnetfeld und Elektronenkonzentration den Füllfaktor, erhält man für  $B \approx 4,1$  T den Wert  $\nu = 4$ . Wenn ein solcher ganzzahliger Füllfaktor auftritt, ändert sich die Struktur der Randkanäle in den Zuleitungen [29, 77, 78].

Um den Einfluss der Randkanalstruktur in den Zuleitungen auf den Kondo-Mechanismus abschätzen zu können, muss man die charakteristischen Längen vergleichen. Die Ausdehnung der Randkanäle liegt typischerweise in der Größenordnung von 100 nm [24]. Eine genaue Abschätzung ist in dem verwendeten System schwierig, da die Ausdehnung der

## 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

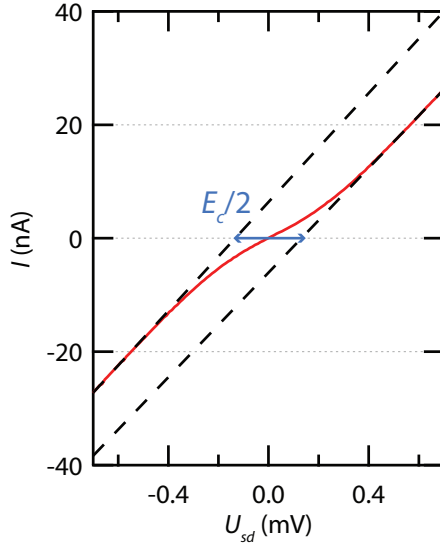


Abbildung 5.9.: Der Strom  $I$  durch den Quantenpunkt als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$ . Die Messung wurde bei einer Gate-Spannung von  $U_{g5} = -30$  mV und einem Magnetfeld von  $B = 4,13$  T durchgeführt. Die gestrichelten Linien sind lineare Funktionen, die an die Asymptoten der Kennlinie angepasst sind. Der Abstand der beiden Funktionen bei  $I = 0$  entspricht  $E_c/2$  und ist in blau markiert.



## 5.2. Messungen im senkrechten Magnetfeld

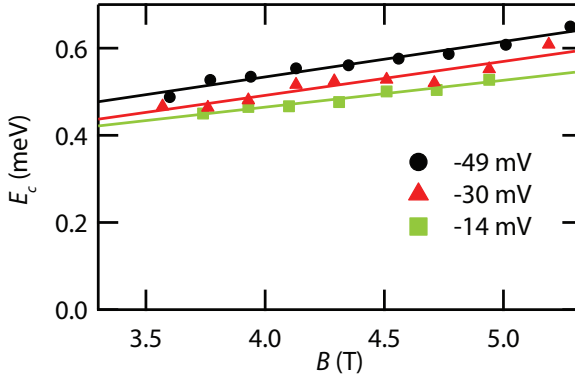


Abbildung 5.10.: Ladeenergie des Quantenpunktes als Funktion des Magnetfeldes für drei verschiedene Gatespannungen.

zweidimensionalen Zuleitungen an den Tunnelbarrieren etwa in der Größenordnung von 500 nm liegt, wie man am AFM Bild der Probe in Abb. 3.3 abschätzen kann. Dies erlaubt einen Abstand der Randkanäle vom Rand des 2DEGs von einigen 10 bis 100 nm, was in der Größenordnung des Bohrradius  $a_b = 4\pi\epsilon\epsilon_0\hbar^2\epsilon_r/m^*e^2 = 10$  nm liegt. Dabei ist  $\epsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante des Vakuums,  $\epsilon = 12,53$  die Dielektrizitätszahl von GaAs und  $m^* = 0,067m_0$  die effektive Masse von GaAs [24]. Damit sind die Abschätzungen von Chklovskii *et al.* [29] nicht mehr gültig. Sie setzen voraus, dass  $a_B$  sehr viel kleiner als der Abstand des äußersten Randkanals vom Probenrand ist. Die Kondo-Abschirmlänge ergibt sich nach Gleichung 2.27 mit  $v_f = \hbar\sqrt{2\pi n}/m^*$  und der in Abschnitt 5.1 bestimmten Kondo-Temperatur bei  $B = 0$  zu  $\xi_K \approx 5000$  nm.

Die Abschirmung des Kondo-Effektes findet damit in den Regionen der Probe statt, in denen die Randkanäle auftreten. Berücksichtigt man die lithographische Ausdehnung der Probe von etwa 1  $\mu\text{m}$ , sieht man, dass große Bereiche des 2DEGs mit dem Quantenpunkt in Wechselwirkung stehen. Damit lässt sich nun der Sprung in der Aufspaltung bei 4,1 T erklären. Zur Abschirmung des lokalisierten magnetischen Momentes kön-

## 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

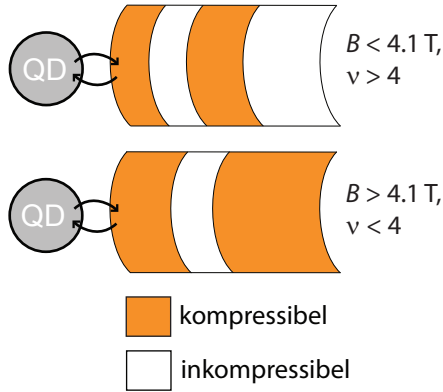


Abbildung 5.11.: Schematische Darstellung der kompressiblen und inkompressiblen Streifen um  $B = 4,1 \text{ T}$ .

nen nur Elektronen in den kompressiblen Bereichen des 2DEGs beitragen, die lokalisierten Elektronen in den inkompressiblen Streifen zwischen den Randkanälen jedoch nicht. Direkt vor dem Erreichen eines ganzzahligen Füllfaktors wie bei  $4,1 \text{ T}$  sind diese inkompressiblen Streifen sehr breit. Es liegt eine Situation vor, wie im oberen Teil von Abb. 5.11 zu sehen ist. Die Abschirmung des magnetischen Momentes wird schwächer und  $T_K$  sinkt. Für ein kleines  $T_K$  wird das Verhältnis  $B/T_K$  größer und der Verstärkungsfaktor  $\eta$  geht gegen 1. Dies bedeutet eine Aufspaltung der ZBA von etwa  $\Delta U_{sd} = \Delta_Z$ . Nachdem der ganzzahlige Füllfaktor erreicht wurde, wird ein Landau-Niveau komplett entleert und es verschwindet ein Randkanal. Die inkompressiblen Streifen werden abrupt schmaler und es können mehr Elektronen am Abschirmprozess teilnehmen. Diese Situation wird im unteren Teil von Abb. 5.11 gezeigt. Durch die stärkere Abschirmung kann die Kondo-Temperatur ansteigen. Dadurch wird das Verhältnis  $B/T_K$  kleiner, was zu einem Anstieg von  $\eta$  führt. Die Aufspaltung steigt dadurch auf  $\Delta U_{sd} = 4\Delta_Z$  an. Auch dass die Aufspaltung abseits des Sprunges abnimmt, kann mit diesem Mechanismus erklärt werden: mit

## 5.2. Messungen im senkrechten Magnetfeld

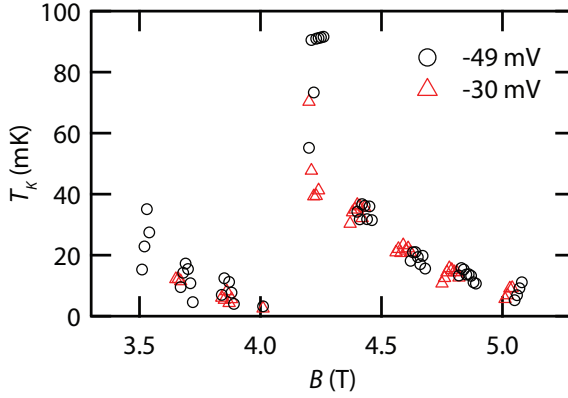


Abbildung 5.12.: Aus der Aufspaltung der ZBA bestimmte Kondo-Temperatur  $T_K$  als Funktion des Magnetfeldes  $B$  für zwei verschiedene Gatespannung  $U_{g5}$ .

zunehmendem Magnetfeld nimmt die Breite der inkompressiblen Streifen zu, womit stetig die Anzahl der Elektronen abnimmt, die an der Abschirmung teilnehmen können. Das hat eine Abnahme der Kondo-Temperatur zur Folge, womit wiederum  $\eta$  stetig verkleinert wird.

Zur Überprüfung der Erklärung für die Entwicklung von  $\Delta U_{sd}$  im Magnetfeld, kann man die Kondo-Temperaturen mit Hilfe der Daten aus Abb. 5.3 abschätzen. Dazu vergleicht man die Aufspaltung der ZBA mit dem Verstärkungsfaktor, wobei wie oben angenommen wird, dass die vorliegende Messung rechts des Maximums in  $\eta$  stattgefunden hat. Damit erhält man einen Wert für  $B/T_K$ , aus dem mit dem eingestellten Magnetfeld auf  $T_K$  geschlossen werden kann. Die Ergebnisse für  $T_K$  sind in Abb. 5.12 als Funktion des Magnetfeldes abgebildet.  $T_K$  folgt dem Verhalten der Aufspaltung und erreicht unmittelbar vor  $B = 4,1$  T einen Minimalwert von wenigen mK. Als Maximalwert wurde 100 mK bestimmt.  $T_K$  liegt zum Teil in der Größenordnung der Basistemperatur des Kryostaten von 20 mK und im Minimum sogar darunter. Damit stellt sich zum einen die

## 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

Frage, ob der Kondo-Effekt bei Temperaturen oberhalb von  $T_K$  gemessen werden kann. Nach der Definition der Kondo-Temperatur aus Gleichung 2.34 fällt die erhöhte Leitfähigkeit bei  $T_K$  auf den halben Wert des Maximums bei  $T = 0$  und ist daher auch darunter noch zu beobachten, wie in Referenz [20] gezeigt wurde. Dass bei den entsprechenden Magnetfeldern die Schultern in der differentiellen Leitfähigkeit nur noch sehr schwach zu sehen sind, spricht ebenfalls für eine niedriges  $T_K$ . Zum anderen ist zu beachten, dass die Berechnungen von Hewson *et al.*, die zur Bestimmung von  $T_K$  benutzt worden sind, nur für Temperaturen  $T < T_K$  Gültigkeit haben [73]. Die Bestimmung von  $T_K$  ist in den Fällen sehr kleiner Kondo-Temperaturen mit diesen Daten nicht möglich und stellt nur eine sehr grobe Abschätzung dar. Diese grobe Abschätzung liefert jedoch noch plausible Kondo-Temperaturen und unterstützt damit die hier präsentierte Erklärung.

### 5.2.1. Änderung des Spin-Zustandes in Landau-Niveau 0

Neben der Aufspaltung der ZBA konnten auch Fälle beobachtet werden, in denen die ZBA im Magnetfeld nicht aufspaltet. Ein solcher Fall wurde an dem rechten Quantenpunkt der Probe D0040330A gemessen. Die Messung fand nach Aufwärmen und wiederholtem Abkühlen der Probe statt. Durch das erneute Abkühlen verändern sich die Eigenschaften des Quantenpunktes leicht, da z.B. unterschiedliche Störstellen in der Nähe des Quantenpunktes geladen oder entladen werden können. Ein Kondo-Schachbrett aus dem zweiten Abkühlprozess ist in Abb. 5.13 (a) zu sehen. An den markierten Stellen in diesem Schachbrett wurde die Abhängigkeit der differentiellen Leitfähigkeit von der Vorspannung gemessen. Zunächst sieht man bei  $B = 4,53$  T und  $U_{g5} = -44$  mV (Abb. 5.13 (b)) deutlich eine Aufspaltung der ZBA. Die Größe der Aufspaltung von  $\Delta U_{sd} \approx 2\Delta_Z$  ist kleiner, als die beim vorhergehenden Abkühlprozess gemessene. Dort wurde bei einem vergleichbaren Magnetfeld ein  $\Delta U_{sd} \approx 2,8\Delta_Z$  gemessen. Der Unterschied kann leicht durch verschiedene Kondo-Temperaturen erklärt werden.

Betrachtet man nun die bei  $B = 4,59$  T und  $U_{g5} = -64$  mV gemessene differentielle Leitfähigkeit (Abb. 5.13 (b)), erkennt man keine Aufspaltung

## 5.2. Messungen im senkrechten Magnetfeld

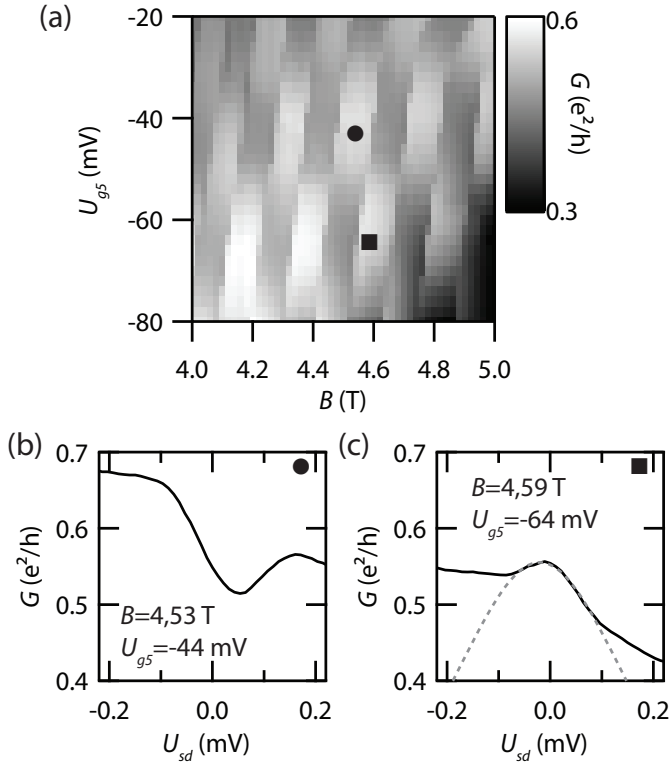


Abbildung 5.13.: (a) Kondo-Schachbrett aus einem zweiten Abkühlzyklus. (b,c) Differentielle Leitfähigkeit  $G$  als Funktion der Vorspannung  $U_{sd}$ . Die Messungen wurden an den in (a) markierten Stellen aufgenommen. Die gestrichelte graue Linie in (c) zeigt eine Anpassung mit einer Lorentzfunktion zur Bestimmung der Kondo-Temperatur.

## 5. Kondo-Effekt im Magnetfeld

der ZBA mehr. Stattdessen wird ein lokales Maximum bei  $U_{sd} = 0$  sichtbar. Eine Erklärung dafür könnte sein, dass sich bei der Änderung der Elektronenzahl auf dem Quantenpunkt eine neue Spinkonfiguration im untersten Landau-Niveau LL0 einstellt. Es ist bekannt, dass eine solche Veränderung der Spin-Konfiguration in einem Kondo-Schachbrett möglich ist [79]. Bei einem Übergang von einem Spin- $\frac{1}{2}$  Kondo-Effekt zu einem Spin-1 Kondo-Effekt wurde eine Erhöhung der Kondo-Temperatur beobachtet [80]. Zur Überprüfung der Kondo-Temperatur wurde die Breite des Maximums mit einer Lorentz-Funktion bestimmt. Um dabei einen Wert zu erhalten, den man mit dem Fall  $B = 0$  aus Abschnitt 5.1 vergleichen kann, wurde die Anpassung wie dort ohne Berücksichtigung eines Hintergrundes durchgeführt. Das Ergebnis der Anpassung ist eine Halbwertsbreite von  $\Delta_{ZBA} = 270 \pm 10 \mu\text{V}$ . Damit ist sie etwa fünfmal größer als die bei  $B = 0$  bestimmte  $\Delta_{ZBA} = 50 \pm 9 \mu\text{eV}$ . Dies bedeutet eine starke Erhöhung der Kondo-Temperatur.

Daher liegt der Schluss nahe, dass es sich bei dem Maximum um einen Spin-1 Kondo-Effekt handelt. Die Variation der Elektronenzahl verändert demnach den Spinzustand im untersten Landau-Niveau. Im Unterschied zu Ref. [79] ändert sich dabei nicht nur die Ausrichtung des Spins, sondern es ist ein Übergang von  $S = \frac{1}{2}$  zu  $S = 1$  zu beobachten, der bei der Änderung der Elektronenzahl stattfindet.

### 5.3. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Auswirkungen von magnetischen Feldern auf die ZBA eines Quantenpunktes untersucht. Im Fall eines Feldes parallel zur Probenoberfläche wurde eine Erhöhung der Aufspaltung der ZBA gegenüber dem normalen Zeeman-Effekt beobachtet, die mit einer Renormalisierung des Landé-g-Faktors erklärt wurde. Im Fall des senkrechten Magnetfelds wurde ein ungewöhnliches Abnehmen der Aufspaltung bei zunehmendem Magnetfeld beobachtet, die zudem eine Diskontinuität aufweist. Die Diskontinuität tritt bei einem Magnetfeld auf, bei dem in den zweidimensionalen Zuleitungen ein ganzzahliger Füllfaktor vorliegt. Dieses ungewöhnliche Verhalten wurde durch den Einfluss der inkompressi-

### 5.3. Zusammenfassung

blen Streifen in den Zuleitungen auf die Abschirmeigenschaften des 2DEGs erklärt. Es konnte zudem eine Änderung des Spinzustandes im untersten Landau-Niveau durch ein Ausbleiben der Aufspaltung der ZBA im Kondo-Schachbrett nachgewiesen werden.





## 6. Manipulation der Elektronendichte zwischen zwei Quantenpunkten

Wie bereits erwähnt, wurde die hier verwendeten Proben konzipiert, um eine indirekte Wechselwirkung zwischen den Quantenpunkten zu detektieren. Der Nachweis einer Wechselwirkung in der untersuchten Probe gelang D. Tutuc und wurde als RKKY-Wechselwirkung identifiziert [23, 15]. Bei der RKKY-Wechselwirkung handelt es sich um eine indirekte Austauschwechselwirkung zwischen magnetischen Momenten, die von freien Elektronen vermittelt wird. Die Stärke dieser Wechselwirkung ist abhängig von dem Abstand der magnetischen Momente  $r$  und dem Betrag des Fermiwellenvektors  $k_f$  [12]. Während  $r$  zwischen den Quantenpunkten durch die Geometrie der untersuchten Probe festgelegt ist, lässt sich  $k_f = \sqrt{2\pi n_e}$  durch eine Veränderung der Elektronendichte  $n_e$  beeinflussen. Damit ließe sich also theoretisch die Stärke der RKKY-Wechselwirkung einstellen und der Einfluss der Wechselwirkungsstärke auf das Verhalten der Kondo-Temperatur untersuchen.

Eine Veränderung von  $n_e$  wird in einem System, bei dem das 2DEG nur wenige Nanometer unter der Oberfläche liegt, gewöhnlich durch den elektrischen Feldeffekt bei Anlegen einer Spannung an eine von oben aufgebrachte Elektrode erreicht. Eine solche Elektrode wird Topgate genannt. Die hier verwendeten Proben weisen jedoch kein solches Topgate auf. Eine Veränderung der Ladungsträgerkonzentration im Bereich zwischen den Quantenpunkten durch die vorhandenen Sidegates ist für eine solche Messung ebenfalls nicht möglich, da dadurch die Eigenschaften der Quantenpunkte zu stark beeinflusst werden würden. Als zusätzliche Option,  $n_e$

## 6. Manipulation der Elektronendichte zwischen zwei Quantenpunkten

global zu manipulieren, gibt es einen kontaktierten Rückkontakt, an den man eine Spannung anlegen kann. Ein solches Gate auf der Rückseite der Probe wird als Backgate bezeichnet.

In diesem Kapitel soll zunächst die Wirkung dieses Backgates auf die Ladungsträger untersucht werden. Danach wird der Einfluss der Backgatespannung auf den Transport in den Quantenpunkten betrachtet.

### 6.1. Einfluss einer Backgatespannung ein 2DEG

Um den Einfluss einer Backgatespannung auf die Ladungsträgerkonzentration zu bestimmen, wurden Magnetotransportmessungen an der Probe durchgeführt. Dabei wurde über einen hochohmigen Vorwiderstand eine Wechselspannung zwischen dem den Kontakten D1 und D2 der Probe D040330A angelegt. Der hohe Vorwiderstand von  $1\text{ M}\Omega$  bewirkt, dass ein konstanter Strom durch die Probe getrieben wird. Bei einer Spannung am Widerstand von  $2\text{ mV}$  beträgt dieser Strom somit  $2\text{ nA}$ . Um die Durchlässigkeit der Tunnelbarrieren zu gewährleisten, wurden an die Gates  $G_1$  bis  $G_4$  positive Spannungen von je  $300\text{ mV}$  angelegt. Bei so hohen Spannungen ist in den Quantenpunkten keine Coulomb-Blockade mehr messbar, eine nulldimensionale Struktur wird nicht mehr geformt.

Der Spannungsabfall zwischen D1 und D2 wurde nun in Abhängigkeit des Magnetfeldes gemessen. Das Beispiel einer solchen Messung für  $U_{bg} = 0\text{V}$  ist in Abb. 6.1 zu sehen. Hier wurde die gemessene Spannung  $U_{xx}$  über dem Inversen des Magnetfeldes  $B^{-1}$  aufgetragen. Es werden Oszillationen mit konstantem Abstand zwischen den Maxima  $\Delta B^{-1}$  sichtbar. Dies sind die Shubnikov-de Haas-Oszillationen. Aus dem Abstand  $\Delta B^{-1}$  lässt sich die Elektronenkonzentration mittels

$$n_e = \frac{2e}{h\Delta B^{-1}} \quad (6.1)$$

bestimmen [3]. Aus den Oszillationen in Abb. 6.1 wurde  $\Delta B^{-1} = 0,103 \pm 0,005\text{ T}^{-1}$  ermittelt, was zu  $n_e = 4,71 \pm 0,24 \cdot 10^{11}\text{ cm}^{-2}$  führt. Dieser Wert ist etwas höher als der für das Probenmaterial angegebene  $n_e =$

## 6.1. Einfluss einer Backgatespannung ein 2DEG

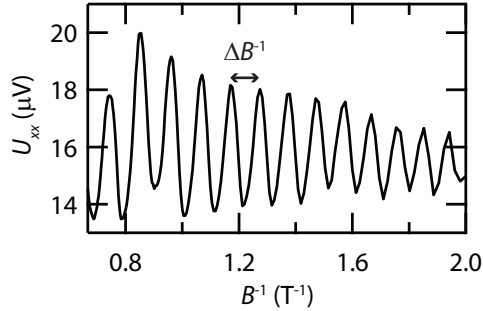


Abbildung 6.1.: Shubnikov-de Haas-Oszillationen zwischen den Kontakten D1 und D2.

$3,95 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Diese Abweichung ist zu erwarten, da an den Gates des Quantenpunktes positive Spannungen angelegt sind, die die Ladungsträgerkonzentration stärker beeinflussen können als das Backgate.

Die Bestimmung der Ladungsträgerkonzentration wurde für verschiedene Backgatespannungen wiederholt und das Ergebnis ist in Abb. 6.2 abgebildet. Man sieht einen leichten linearen Anstieg von  $n_e$  als Funktion von  $U_{bg}$ . Die Anpassung mit einer linearen Funktion ergibt eine Steigung von  $dn_e/dU_{bg} = 1,6 \pm 1,0 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{ V}^{-1}$ . Der schwache Einfluss der Backgatespannung liegt am Abstand  $d_{bg}$  zwischen dem Backgate und dem 2DEG, den man näherungsweise berechnen kann, indem man das Backgate als Plattenkondensator beschreibt. Dabei erhält man den Zusammenhang

$$d_{bg} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 U_{bg}}{en_e}. \quad (6.2)$$

Aus der Steigung ergibt sich mit  $\varepsilon_r = 12,53$  für GaAs ein Abstand von  $d_{bg} = 44 \pm 27 \text{ } \mu\text{m}$ . Typische Topgates, die zur Änderung der Ladungsträgerkonzentration eines 2DEGs verwendet werden, haben dagegen einen Abstand in der Größenordnung von 100 nm, womit eine starke Änderung erreicht werden kann [81]. In der untersuchten Probe verändert sich  $n_e$  daher bei einer Spannungsdifferenz von 10 V nur um etwa 0,25 %.

## 6. Manipulation der Elektronendichte zwischen zwei Quantenpunkten

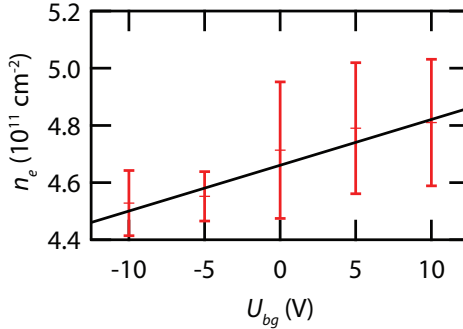


Abbildung 6.2.: Die aus den Shubnikov-de Haas-Oszillationen bestimmte Ladungsträgerkonzentration  $n_e$  als Funktion der Backgatespannung  $U_{bg}$ . Die schwarze Linie ist eine Anpassung mit einer linearen Funktion.

## 6.2. Einfluss einer Backgatespannung auf die Quantenpunkte

Das zusätzliche Anlegen einer Spannung an das Backgate verändert auch das chemische Potential des Quantenpunktes. Diese Verschiebung muss durch eine Spannung an Gate 6 (Quantenpunkt 1) bzw. Gate 5 (Quantenpunkt 2) ausgeglichen werden. Um den Einfluss des Backgates auf das chemische Potential der Quantenpunkte zu bestimmen wurden jeweils Ladediagramme aufgenommen, bei denen  $G_{1,2}$  als Funktion des Backgatespannung und des Gates 5 bzw. 6 gemessen wurde. Hier steht  $G_1$  ( $G_2$ ) für die differentielle Leitfähigkeit, die an Quantenpunkt 1 (Quantenpunkt 2) gemessen wird. Als Beispiel für eine solche Messung wird in Abb. 6.3 ein Ladediagramm von Quantenpunkt 2 gezeigt, das bei einem senkrechten Magnetfeld  $B = 4,2 \text{ T}$  aufgenommen wurde. Dort sind zwei Ladungslinien zu erkennen, die eine Steigung  $dU_{bg}/dU_{g5} = -200$  aufweisen. Das heißt, dass das Erhöhen der Backgatespannung um 1 V mit einer zusätzlichen Spannung von -5 mV an Gate 5 ausgeglichen werden muss. Analog wurde

### 6.3. Anwendung einer Backgatespannung im Kondo-Schachbrett

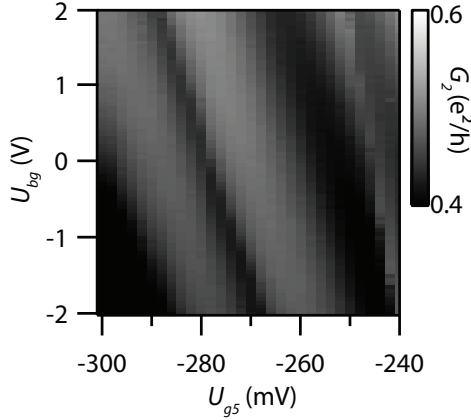


Abbildung 6.3.: Die differentielle Leitfähigkeit  $G_2$  als Funktion von  $U_{bg}$  und  $U_{g5}$ .

für Quantenpunkt 1 der Zusammenhang  $dU_{bg}/dU_{g6} = -217$  bestimmt.

Soll der Transport durch beide Quantenpunkte zugleich gemessen werden, muss zudem der Einfluss der beiden Gates auf den jeweils anderen Quantenpunkt beachtet werden. Ausgehend von den mittels Ladediagrammen bestimmten Ausgleichswerten, wurde empirisch bestimmt, wie man die Spannungen an den Gates 5 und 6 an die Backgatespannung anpassen muss. Die besten Resultat wurden mit  $dU_{bg}/dU_{g5} = -207$  und  $dU_{bg}/dU_{g6} = -221$  erreicht.

## 6.3. Anwendung einer Backgatespannung im Kondo-Schachbrett

Bevor der Einfluss der Backgatespannung auf eine Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten der Quantenpunkte untersucht werden kann, müssen zunächst Parameter identifiziert werden, bei denen bei-

## 6. Manipulation der Elektronendichte zwischen zwei Quantenpunkten

de Quantenpunkte Kondo-Transport – und damit auch ein magnetisches Moment – aufweisen. Dafür wurden die Tunnelbarrieren beider Quantenpunkte geöffnet und  $G_{1,2}$  wurden simultan in Abhängigkeit von  $B$  und  $U_{g5}$  gemessen. Die Spannungen an den anderen Gates waren dabei konstant und betragen  $U_{g1} = -300$  mV,  $U_{g2} = -107$  mV,  $U_{g3} = -40$  mV,  $U_{g4} = -200$  mV und  $U_{g6} = -104$  mV.

Das Ergebnis der Messung ist in Abb. 6.4 dargestellt. In (b) sieht man, wie erwartet, ein gewöhnliches Schachbrettmuster in der differentiellen Leitfähigkeit von Quantenpunkt 2. Vergleicht man dazu  $G_1$  in (a), fällt auf, dass dort eine Art "Negativ" dieses Musters zu sehen ist, in dem zusätzliche senkrechte Strukturen sichtbar sind. Dieses Verhalten geht von der chiralen Kopplung der beiden Quantenpunkte aus: im senkrechten Magnetfeld fließt der Strom durch den Bereich zwischen den Quantenpunkten über Randkanäle. Diese Randkanäle verlaufen bei der gewählten Polarisation des Magnetfeldes gegen den Uhrzeigersinn, sodass Änderungen im elektrostatischen Potential an Quantenpunkt 2 im Transport durch Quantenpunkt 1 sichtbar werden. Der Quantenpunkt 2 wird in diesem Fall nicht durch den Transport an Quantenpunkt 1 beeinflusst [23]. Eine weitere Auffälligkeit in  $G_2$  sind zwei etwas verwischt aussehende Linien, die bei  $U_{g5} = -208$  mV und  $U_{g5} = -246$  mV durch das Schachbrettmuster verlaufen und nicht vom Magnetfeld beeinflusst werden. Bei diesen Linien handelt es sich um Umladungseffekte, die an Störstellen in der Nähe der Quantenpunkte auftreten können. Weitere Messungen werden abseits dieser Linien durchgeführt, wo die Leitfähigkeit der Quantenpunkte nicht durch solche äußeren Effekte beeinflusst wird.

Das Muster in  $G_1$ , das das Negativ des Schachbrettes überlagert, ist nur sehr schwach zu erkennen. An einigen Stellen lassen sich jedoch parallel zur  $U_{g5}$ -Achse verlaufende Streifen erkennen. Ein solches Streifenmuster kann man erwarten, da der Einfluss von einer Spannung an Gate 5 auf den Quantenpunkt 1 aufgrund der Entfernung nur sehr gering ist. Ein voll ausgebildetes Schachbrett würde man dann erwarten, wenn  $U_{g5}$  in einem größeren Intervall verändert wird. Zum Identifizieren eines Bereiches, in dem nun beide Quantenpunkte eine ungerade Anzahl an Elektronen im untersten Landau-Niveau aufweisen, muss man sich Schnitte in den Schachbrettern genauer anschauen. Ein solcher Schnitt bei  $U_{g5} = -288$  mV,

### 6.3. Anwendung einer Backgatespannung im Kondo-Schachbrett

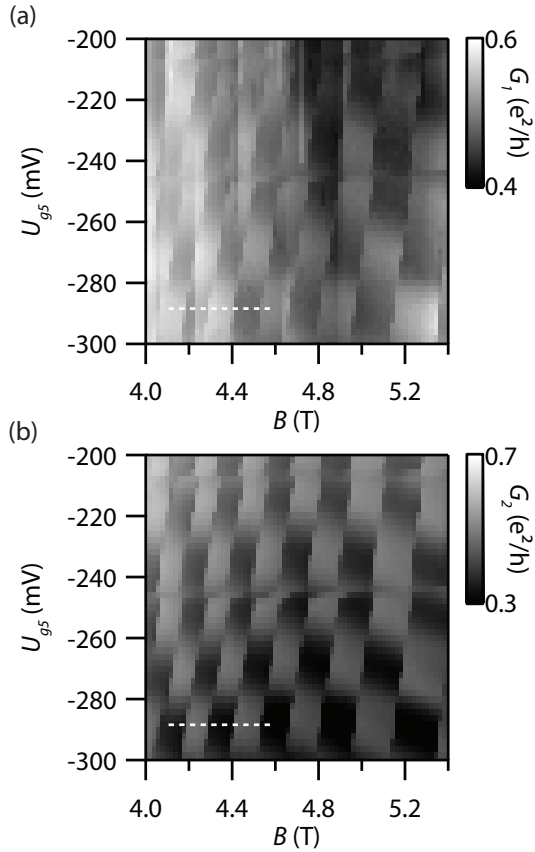


Abbildung 6.4.: Die differentielle Leitfähigkeit durch Quantenpunkt 1 (a) und Quantenpunkt 2 (b) als Funktion von  $U_{g5}$  und  $B$ .

## 6. Manipulation der Elektronendichte zwischen zwei Quantenpunkten

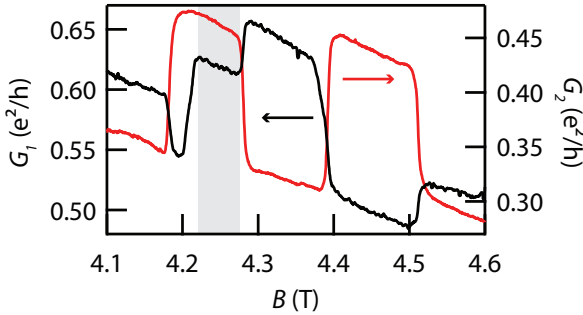


Abbildung 6.5.: Ein Schnitt durch  $G_1$  (schwarz, linke Achse) und  $G_2$  (rot, rechte Achse) bei  $U_{g5} = -288$  mV. Die Messung wurde entlang der weißen gestrichelten Linien in Abb. 6.4 aufgenommen. In dem grau unterlegten Bereich tritt in beiden Quantenpunkten der Kondo-Effekt auf.

entlang der weißen gestrichelten Linien in Abb. 6.4, wird in Abb. 6.5 gezeigt. Dort sieht man in  $G_1$  die starke Empfindlichkeit auf Änderungen in  $G_2$ : immer wenn es einen Sprung in  $G_2$  gibt, ist dieser mit entgegengesetzter Richtung auch in  $G_1$  zu beobachten. Zudem kann man in dem grau unterlegten Bereich eine Magnetfeldintervall zwischen 4,22 und 4,26 T identifizieren, in dem beide Quantenpunkte eine durch den Kondo-Effekt erhöhte Leitfähigkeit aufweisen. Allerdings konnte in diesem Bereich keine RKKY-Wechselwirkung über die Untersuchung der Kondo-Temperatur nachgewiesen werden (siehe in Anhang A). Trotzdem soll der Einfluss einer Backgatesspannung auf die Quantenpunkte untersucht werden.

Dazu wurden  $G_1$  und  $G_2$  in dem in Abb. 6.5 gezeigten Magnetfeldbereich als Funktion der Backgatesspannung gemessen. Dabei wurden die Spannungen  $U_{g5}$  und  $U_{g6}$  wie im vorherigen Abschnitt beschrieben nachgeregelt, damit die Quantenpunkte möglichst in einem unveränderten Zustand bleiben. Das Resultat ist in Abb. 6.6 zu sehen. In  $G_1$  (a) ist dabei wieder sehr deutlich das Negativ des Musters in  $G_2$ , weswegen hier nur letzteres ge-



### 6.3. Anwendung einer Backgatespannung im Kondo-Schachbrett

nauer betrachtet werden soll. Bei Backgatespannungen von  $-7$  V bis  $7$  V sieht man, dass das breite Kondo-Maximum seine Position im Magnetfeld nicht verändert. Dort funktioniert die Kompensation der Backgatespannung durch die Spannung an den Gates 5 und 6. Bei höheren Spannungsbeträgen kommt es jedoch zu Abweichungen: über  $7$  V verschiebt sich das Maximum nach links zu kleinerem  $B$ . Diese Verschiebung ist untypisch, da bei Messungen ohne Änderungen an Gate 5 und 6 eine höhere Backgatespannung zu einer Verschiebung des Kondo-Maximums zu höheren Magnetfeldern führt, was auch dem Verlauf des Fock-Darwin-Spektrums entsprechen würde. Die hier beobachtete Verschiebung in die dazu entgegengesetzte Richtung kann verschiedene Gründe haben. Zum einen können Störstellen in der Nähe des Quantenpunktes zu solchen Änderungen führen, wenn sie durch die Backgatespannung ge- oder entladen werden. Diese Änderungen sehen in den Messungen aber oft sehr abrupt aus, wie die weiter oben erwähnten Umladungen, die in Abb. 6.4 sichtbar sind. Zudem wurde der untersuchte Bereich so gewählt, dass solche Störstellen keine Rolle spielen. Eine wahrscheinlichere Erklärung ist ein Fehler beim Einstellen der Spannungen  $U_{g5,6}$ . Durch das gleichzeitige Verändern beider Spannungen kann es zu einer leichten Überkompensation der Backgatespannung kommen, die sich erst bei höheren Spannungen auswirkt.

Betrachtet man die Veränderung bei negativen Spannungen, fällt jedoch eine noch stärkere Änderung auf. Hier bilden sich links und rechts des Kondo-Plateaus zwei weitere Stufen aus, die mit abnehmendem  $U_{bg}$  breiter werden. Dabei ist das linke Plateau höher als das Ursprüngliche, das rechte niedriger. Dieses kann man genauer in einem Schnitt bei  $U_{bg} = -9,8$  V in Abb. 6.7 erkennen. Diese Abfolge dreier Stufen in  $G_2$  ist mit einer einfachen Umladung oder einer Spannung an anderen Gates nicht zu erklären. Die Backgatespannung beeinflusst hier möglicherweise die innere Struktur des Quantenpunktes. Zu einer genaueren Untersuchung wäre eine Messung bei höheren Backgatespannungen nötig, um den Verlauf dieser drei Plateaus weiter zu verfolgen. Dieses war aufgrund eines Defektes an der Probe D040330A nicht möglich.

Stattdessen wurden Messungen mit höheren Backgatespannungen an der Probe D080220A durchgeführt. Um die hohen Spannungswerte zu erreichen, wurde die Spannung nicht mit einem DAC, sondern mit einem

6. Manipulation der Elektronendichte zwischen zwei Quantenpunkten

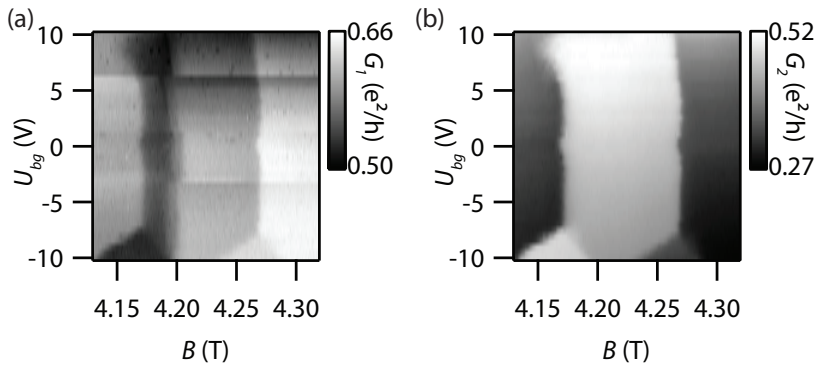


Abbildung 6.6.: Die differentielle Leitfähigkeit durch Quantenpunkt 1 (a) und Quantenpunkt 2 (b) als Funktion von  $U_{bg}$  und  $B$ .

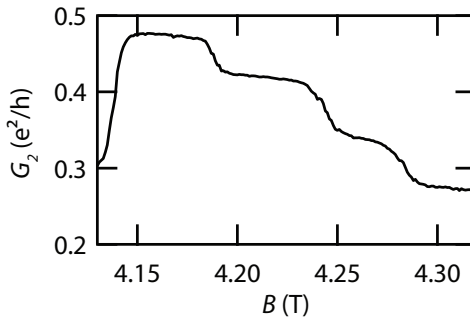


Abbildung 6.7.: Die differentielle Leitfähigkeit durch Quantenpunkt 2 als Funktion des Magnetfelds bei  $U_{bg} = -9,8$  V.

### 6.3. Anwendung einer Backgatespannung im Kondo-Schachbrett

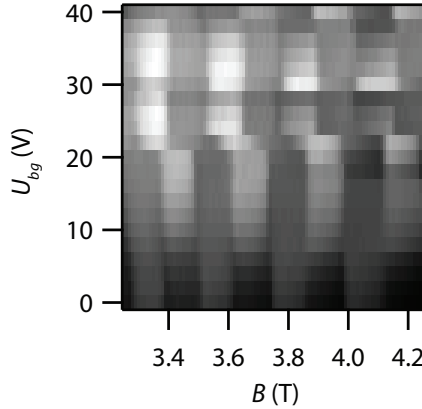


Abbildung 6.8.: Die differentielle Leitfähigkeit durch Quantenpunkt 2 der Probe D080220 als Funktion des Backgatespannung und des Magnetfelds.

Keithley 2400 Sourcemeter angelegt. Auch hier wurden simultan zu  $U_{bg}$  die Spannungen an Gate 5 und Gate 6 verändert. Die dabei an Quantenpunkt 2 gemessene Leitfähigkeit ist in Abb. 6.8 abgebildet. Man sieht deutlich, dass die Verschiebung der Maxima bis  $U_{bg} = 20$  V kompensiert werden kann. Es tritt jedoch eine andere Veränderung auf dem Quantenpunkt auf: ab etwa 9 V kehren sich die Positionen der Maxima und Minima um. Dieses ist genauer in Abb. 6.9 zu erkennen, wo der Verlauf von  $G_2$  bei 0 V und 16 V am Backgate gezeigt ist. Es findet also eine Umverteilung der Elektronen zwischen den Landau-Niveaus statt, wie sie auch im Kondo-Schachbrett beobachtet wird.

Damit lässt sich sagen, dass das Anlegen einer Backgatespannung nur dann eine geeignete Methode zur Manipulation einer Wechselwirkung zwischen den Quantenpunkten ist, wenn diese schon bei sehr kleinen Änderungen von ungefähr 1 % der Ladungsträgerkonzentration zu beobach-

## 6. Manipulation der Elektronendichte zwischen zwei Quantenpunkten

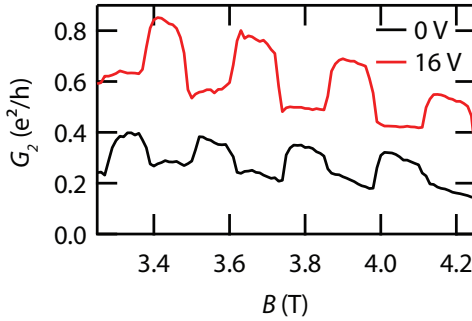


Abbildung 6.9.:  $G_2$  als Funktion des Magnetfeldes für  $U_{bg} = 0$  V und  $U_{bg} = 16$  V.

ten sind. Andernfalls sorgt die Umverteilung der Elektronen zwischen den Landau-Niveaus dafür, dass eine neue Situation entsteht, in der die Kondobereiche der Quantenpunkte für andere Werte des Magnetfelds überlappen und man keine gesicherten Erkenntnisse über eine Beeinflussung der Wechselwirkung für feste Parameter gewinnen kann.

### 6.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das Verändern der Elektronendichte zwischen den Quantenpunkten durch Anlegen einer Backgatespannung betrachtet. Es wurde durch Auswertung von Shubnikov-de Hass-Oszillationen gezeigt, dass mit einer Backgatespannung bei dem vorhandenen Probenmaterial eine kleine Veränderung der Elektronendichte erreicht werden kann. Dabei ist jedoch die globale Auswirkung der Backgatespannung auf den Quantenpunkt zu beachten. Diese kann bei kleinen Backgatespannungen durch das Regeln einer zusätzlichen Spannung lokal am Quantenpunkt kompensiert werden.

Bei höheren Spannungen nahe  $\pm 10$  V ist jedoch eine Umverteilung der Elektronen zwischen den Landau-Niveaus zu beobachten. Damit ver-

schwinden die magnetischen Momente der Quantenpunkte dort, wo man eine Wechselwirkung zwischen ihnen mit Hilfe des Kondo-Effektes nachweisen kann. Die Manipulation der Ladungsträgerdichte durch eine Back-gatespannung ist somit nur dann sinnvoll, wenn schon eine sehr kleine Änderung die mögliche RKKY-Wechselwirkung beeinflusst.

Ob das der Fall ist, konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden, da der Nachweis einer RKKY-Wechselwirkung zwischen den Quantenpunkten nicht eindeutig möglich war (siehe Anhang A).



# 7. Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Phänomene rund um den Kondo-Effekt an einzelnen magnetischen Störstellen untersucht. Als Störstellen wurden Quantenpunkte mit einer ungeraden Anzahl an Elektronen benutzt, die ein magnetisches Moment aufweisen. Der Kondo-Effekt wird daran im elektrischen Transport in der Ausbildung einer ZBA sichtbar. Die genaue Untersuchung dieser ZBA liefert Erkenntnisse über die Stärke der Kondo-Wechselwirkung.

Da die hier untersuchten Quantenpunkte eine starke Kopplung aufweisen und die Verbreiterung der Coulomb-Resonanzen für einen starken Hintergrundleitfähigkeit sorgen, wurde gezeigt, wie man diesen Hintergrund bei der Bestimmung der Kondo-Temperatur abziehen kann. Beim Abzug des Hintergrundes kann man eine gute Abschätzung für die Kopplungskonstante  $\Gamma$  erhalten. Damit war ein Vergleich mit theoretischen NRG Berechnungen der Leitfähigkeit im gemischt-valenten Regime möglich. Diese zeigten eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Nach Abzug des Hintergrundes wurde auch eine Übereinstimmung der Kondo-Temperaturen erreicht, die aus der Breite der ZBA und dem temperaturabhängigen Abfall der differentiellen Leitfähigkeit bei  $U_{sd} = 0$  errechnet wurden. Diese gute Übereinstimmung wird jedoch nur erreicht, wenn bei der Anpassung von  $G(T)$  ein zu einem Spin- $\frac{1}{2}$  passender  $s$ -Parameter erhalten wird.

Im Magnetfeld wurde die Aufspaltung der Kondo-Resonanz genauer betrachtet, die aufgrund des Zeeman-Effektes auftritt. Dabei wurde beim Vergleich der Aufspaltung im parallel zur Probenoberfläche angelegten Magnetfeld eine verstärkte Aufspaltung festgestellt, die auf einen durch den Kondo-Effekt renormalisierten Landé-Faktor zurückgeführt wurde.

## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Diese Renormalisierung wurde besonders sichtbar bei Messungen in einem senkrechten Magnetfeld. Hier konnte eine Aufspaltung der ZBA beobachtet werden, die nicht mehr allein mit dem Zeeman-Effekt erklärbar ist: die Aufspaltung nimmt mit zunehmendem Magnetfeld ab und zeigt eine sprunghafte Änderung, wenn ein ganzzahliger Füllfaktor in den zweidimensionalen Zuleitungen auftritt. An dem Zusammenspiel zwischen der Bildung von Randkanälen in den Zuleitungen und der Renormalisierung des Landé-Faktors konnte demonstriert werden, wie die kompressiblen und inkompressiblen Bereiche der Zuleitungen die Kondo-Abschirmung beeinflussen. Die inkompressiblen Zustände nehmen nicht an der Abschirmung teil, sodass die Kondo-Temperatur fällt, wenn bei einer Entleerung eines Landau-Niveaus die inkompressiblen Bereiche einen größeren Teil der Zuleitungen einnehmen.

Eine weitere Erkenntnis bei der Messung der Aufspaltung der ZBA im Kondo-Schachbrett ist, dass es zum Ausbleiben der Aufspaltung kommen kann. Stattdessen kann in einigen Bereichen des Schachbretts wieder ein einzelnes Maximum bei  $U_{sd} = 0$  beobachtet werden. Dieses weist im Vergleich zu  $B = 0$  eine erhöhte Halbwertsbreite auf, was auf einen Kondo-Effekt eines Zustandes mit Spin 1 im untersten Landau-Level hinweist.

Zum Abschluss wurde der Einfluss einer Backgatespannung auf das Kondo-Schachbrett untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass vergleichsweise große Spannungen nötig sind, um eine kleine Veränderung der Elektronendichte in der Probe zu erreichen. Diese Spannungen beeinflussen jedoch die Eigenschaften der Quantenpunkte so stark, dass eine ungestörte Beobachtung des Kondo-Effekts in Hinblick auf die Detektion einer möglichen RKKY-Wechselwirkung zwischen zwei Quantenpunkten nicht möglich ist.

Insbesondere der letzte Teil bietet Anknüpfungsmöglichkeiten für weiterführende Arbeiten. Statt die Ladungsträgerkonzentration mit Hilfe des Backgates zu manipulieren, bietet sich an, ein lokales Topgate über dem Bereich zwischen den Quantenpunkten anzubringen. Damit ließe sich die Ladungsträgerkonzentration schon mit sehr viel kleineren Spannungen beeinflussen, da der Abstand zum 2DEG nur etwa 30 nm betrüge. Auch dürfte durch eine gut gewählte Breite dieses Topgates der Einfluss auf die Quantenpunkte und die inneren Tunnelbarrieren reduziert werden oder



zumindest besser kompensierbar sein.

Eine so konzipierte Probe könnte auch dazu genutzt werden, den Einfluss der Randkanäle auf die Aufspaltung der ZBA eines einzelnen Quantenpunktes genauer zu studieren. Man hätte die Möglichkeit, den Füllfaktor der Zuleitungen lokal zu ändern und den Einfluss auf die Aufspaltung direkt zu beobachten. Dieses würde einen detaillierten Einblick in die Abschirmeigenschaften von kompressiblen und inkompressiblen Zuständen in den Zuleitungen des Quantenpunktes ermöglichen.



# A. Untersuchung der Kondo-Temperatur im Doppelquantenpunktsystem

Um zwischen den beiden Quantenpunkten der Probe D040330A die Präsenz der RKKY-Wechselwirkung nachzuweisen, wurden in Ref. [23] die Kondo-Temperaturen in den beiden Quantenpunkten untersucht und beim Überlapp der Kondo-Bereiche eine Veränderung in ihrem monotonen Verlauf als Kennzeichen für die RKKY-Wechselwirkung festgestellt. Dieses Verfahren sollte in dieser Arbeit angewendet werden, um einen Einfluss einer Backgatespannung auf die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten der Quantenpunkte zu untersuchen. Daher wurde ein Bereich zur Untersuchung der Kondo-Temperaturen ausgesucht, in dem beide Quantenpunkte den Kondo-Effekt zeigen und somit ein endliches magnetisches Moment aufweisen. Dieser Bereich wurde in Abb. 6.5 gezeigt.

Zur Bestimmung der Kondo-Temperaturen wurden  $G_{1,2}$  in Abhängigkeit der Temperatur gemessen, um sie dann mit Gl. 2.34 anzupassen. Die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeiten für den in Abb. 6.5 gezeigten Bereich ist in Abb. A.1 zu sehen. Insbesondere bei  $G_2$  fällt auf, dass der Hintergrund zwischen den Kondo-Maxima ebenfalls eine sehr starke Abhängigkeit von der Temperatur zeigt. Diese ist so stark, dass  $G_2$  sich in den Bereichen zwischen den Kondo-Plateaus stärker ändert als auf den Kondo-Plateaus selbst. Deswegen wurde wie in Ref. [23] vorgegangen und ein Hintergrund vor dem Anpassen abgezogen. Dieser wurde durch Anpassung eines Polynoms dritter Ordnung ermittelt. Ein Beispiel einer solchen Anpassung von  $G_2$  wird in Abb. A.2 (a) gezeigt. Für die Anpassung wur-

## A. Untersuchung der Kondo-Temperatur im Doppelquantenpunktsystem

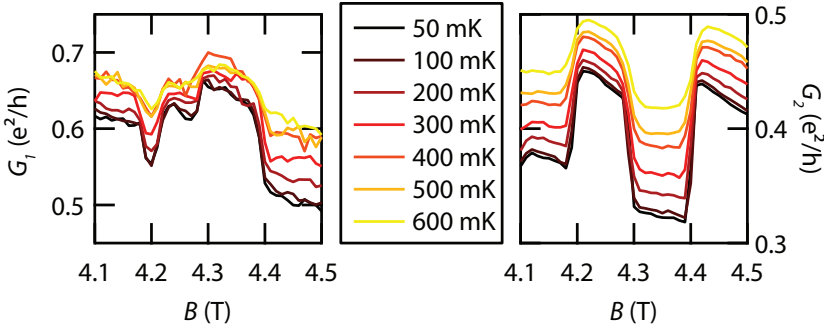


Abbildung A.1.: Die differentielle Leitfähigkeit durch Quantenpunkt 1 (links) und Quantenpunkt 2 (rechts) als Funktion von  $B$  für verschiedene Temperaturen.

den die Punkte des Maximums nicht berücksichtigt. Das Ergebnis nach Abzug des entsprechenden Hintergrunds ist in Abb. A.2 (b) ebenfalls für  $G_2$  gezeigt. Der Bereich neben dem Maximum ist nun Null, so dass bei der Anpassung der Temperaturabhängigkeit nur noch der durch den Kondo-Effekt erhöhte Wert berücksichtigt wird.

Die Anpassung des Hintergrundes von  $G_1$  gestaltete sich schwieriger: durch den Einfluss von Änderungen an Quantenpunkt 2 auf die Messung an Quantenpunkt 1 ist der Hintergrund nicht immer gleich: dort, wo  $G_2$  ein Maximum zeigt, ist er niedriger als in Bereichen, in denen  $G_2$  nicht erhöht ist. Daher wurden in diesem Fall zwei Bereiche ausgewählt, in denen der Hintergrund unabhängig voneinander bestimmt wurde. Diese Bereiche sind in Abb. A.3 in unterschiedlichen Farben hinterlegt.

Nach dem Abzug des Hintergrundes wurde für beide Quantenpunkte die Kondo-Temperatur als Funktion des Magnetfeldes bestimmt. Das Ergebnis ist in Abb. A.4 zu sehen. In dem grau unterlegten Bereich überlappen sich die Kondo-Bereiche in beiden Quantenpunkten und man sollte eine starke Veränderung im Verlauf von  $T_K$  sehen. Dies kann nur für Quantenpunkt 1 beobachtet werden. Durch die Wahl zweier verschiedener Bereiche zum

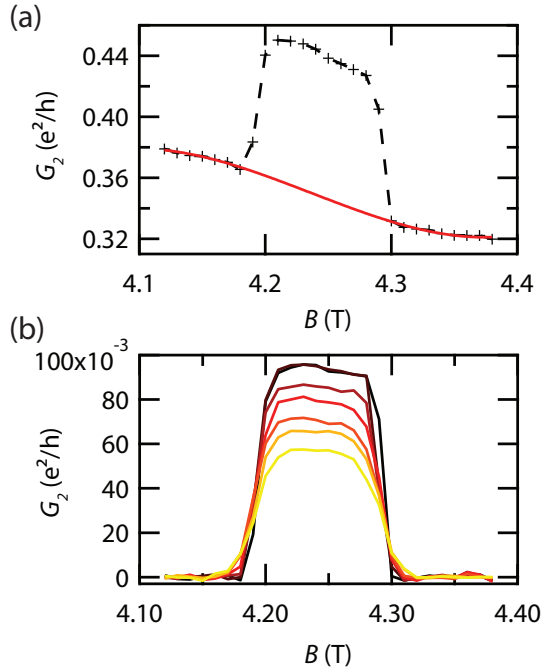


Abbildung A.2.: (a) In schwarz ist  $G_2$  als Funktion von  $B$  bei  $T = 50$  mK dargestellt. Die rote Linie zeigt ein Polynom dritter Ordnung, mit dem der Hintergrund angepasst wurde. (b) Das Kondo-Maximum in der differentiellen Leitfähigkeit von Quantenpunkt 2 nach Abzug des Hintergrundes für verschiedene Temperaturen. Die Farben entsprechen den gleichen Temperaturwerten wie in Abb. A.1

## A. Untersuchung der Kondo-Temperatur im Doppelquantenpunktsystem

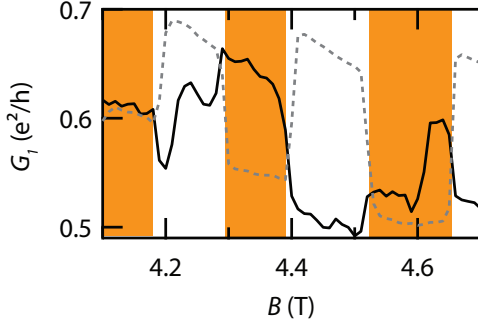


Abbildung A.3.: Zum Abzug des Hintergrundes wurde  $G_1$  in verschiedene Bereiche unterteilt. In grau ist  $G_2$  eingezeichnet, das in den orangen Bereichen keine Erhöhung zeigt, wohingegen in den weißen Bereichen Kondo-Transport in Quantenpunkt 2 stattfindet.

Abzug des Hintergrundes kann dieses Ergebnis jedoch auch ein Artefakt aus eben dieser Analyse sein. Ohne einen Abzug des Hintergrundes war jedoch bei den Messdaten für  $G_1$  keine Anpassung mit Gl. 2.34 möglich, um den Trend zu bestätigen.

Dieses Problem bestand bei der Auswertung der Kondo-Temperatur in Quantenpunkt 2 nicht. Jedoch ist hier kein signifikanter Sprung in  $T_K$  erkennbar, sobald Quantenpunkt 1 den Kondo-Effekt zeigt. Deswegen ist ein eindeutiger Hinweis auf eine RKKY-Wechselwirkung und die damit verbundenen Änderung des Grundzustandes in dieser Messung nicht möglich gewesen. Ein Grund für das Ausbleiben dieses Effektes kann die starke Abhängigkeit der Wechselwirkungsstärke zwischen den Quantenpunkten von der Symmetrie der Tunnelkopplungen der beiden Quantenpunkte sein. Hierbei kann eine kleine Änderung einer Tunnelkopplung an einem Quantenpunkt die Wechselwirkung zwischen zwei magnetischen Verunreinigungen stark unterdrücken [82].

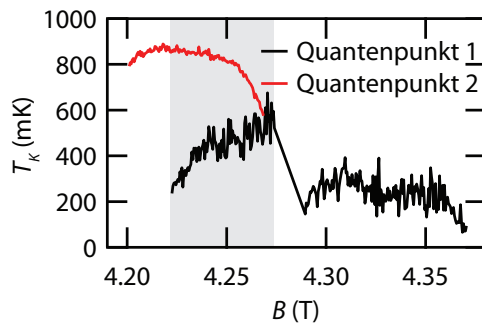


Abbildung A.4.: Die differentielle Leitfähigkeit durch Quantenpunkt 1 (links) und Quantenpunkt 2 (rechts) als Funktion von  $B$  für verschiedene Temperaturen.





## B. Minima im Kondo-Schachbrett

Untersucht man einen Quantenpunkt in einem genügend hohen Magnetfeld, kann man das sehr regelmäßige und leicht erklärbare Muster des Kondo-Schachbrettes messen. Bei kleineren Magnetfeldern sind mehr als zwei Landau-Niveaus im Quantenpunkt besetzt und das Bild wird komplizierter. Ein Bild des Kondo-Schachbretts in Abb. B.1 zeigt einen solchen Bereich, der im Quantenpunkt 1 der Probe D088022A gemessen wurde. Für  $B > 3,4$  T kann man das sehr regelmäßige Schachbrettmuster beobachten. In diesem Bereich ist nur die Besetzung des untersten LLs entscheidend dafür, ob Kondo-Transport möglich ist oder nicht.

Bei kleineren Magnetfeldern, also  $B < 3,4$  T wird das regelmäßige Muster des Schachbretts durch unregelmäßigere Strukturen abgelöst. Auffallend dabei sind Linien sehr geringer Leitfähigkeit, die mit einer bestimmten Steigung durch das Schachbrettmuster verlaufen. Zwei solche Linien sind in Abb. B.1 markiert. Zum einen fällt auf, dass sie sich zwar beim Anwachsen der Gatespannung zu höheren Magnetfeldern verschieben, aber dass es ansonsten keinen Einfluss der Elektronenzahl auf dieses Minima gibt. Der Verlauf der Minima entlang des Kondo-Schachbretts lässt darauf schließen, dass sie zwei verschiedene Konfigurationen der Landau-Niveaus des Quantenpunktes voneinander trennen.

Um die Herkunft dieser charakteristischen Minima näher zu untersuchen, wurde das Verhalten der differentiellen Leitfähigkeit bei ansteigender Temperatur untersucht. In Abb. B.2 ist  $G$  als Funktion von  $B$  für verschiedene Temperaturen abgebildet. Man kann für die kleinste Temperatur  $T = 25$  mK deutlich die Minima in  $G$  erkennen. Auffällig ist der starke Anstieg dieser Minima für zunehmende Temperaturen. Bei  $T = 600$  mK sind die Minima dann nur noch sehr schwach ausgeprägt. Der Anstieg der

B. Minima im Kondo-Schachbrett

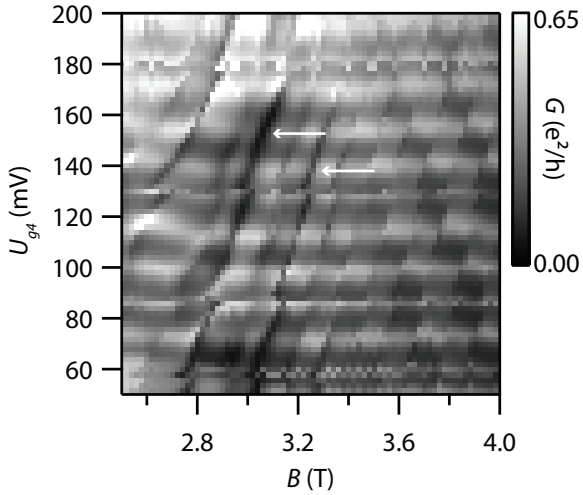


Abbildung B.1.: Ein Kondo-Schachbrett, das bei kleineren Magnetfeldern markante Minima bei Änderung der Anzahl der Flussquanten auf dem Quantenpunkt zeigt. Die Minima sind mit weißen Pfeilen markiert.

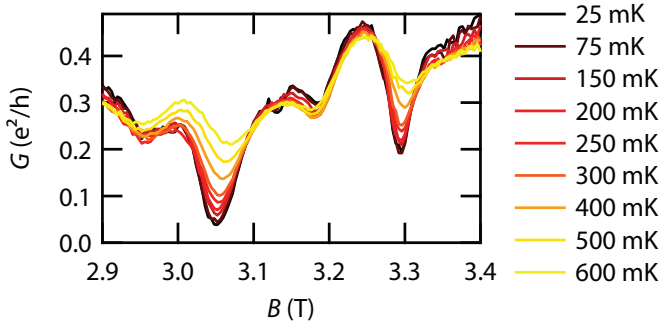


Abbildung B.2.: Differentielle Leitfähigkeit als Funktion des Magnetfelder für verschieden Temperaturen. Die Gatespannung an Gate 4 ist  $U_{g4} = 92$  mV.

Temperatur hat dagegen nur wenige Auswirkungen auf  $G$  abseits der beiden Minima. Die genaue Temperaturabhängigkeit bei  $U_{g4} = 92$  mV und  $B = 3,05$  T ist in Abb. B.2 aufgetragen.

Neben der Temperaturabhängigkeit wurde auch der Einfluss einer Vorspannung auf die Minima untersucht. Sie ist in Abb. B.4 für ebenfalls  $U_{g4} = 92$  mV und  $B = 3,05$  T zu finden. Der Verlauf ist qualitativ ähnlich zu dem der Temperaturabhängigkeit. Ein solch ähnliches Verhalten zwischen Temperaturabhängigkeit und Spannungsabhängigkeit lässt sich auch beim Kondo-Effekt beobachten und ist auf ein universelles Verhalten bei Störung des Kondo-Systems zurückzuführen [21]. Dieses könnte den Schluss zulassen, dass es sich bei der Ausbildung der Minima um einen Wechselwirkungseffekt handelt, der ein höheres Landau-Niveau betrifft.

B. Minima im Kondo-Schachbrett

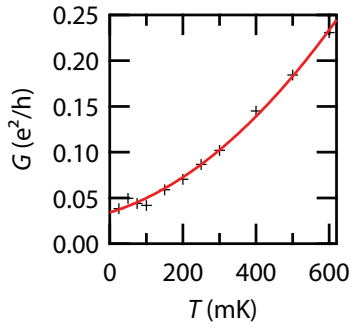


Abbildung B.3.: Differentielle Leitfähigkeit als Funktion der Temperatur für  $U_{g4} = 92$  mV und  $B = 3,05$  T.

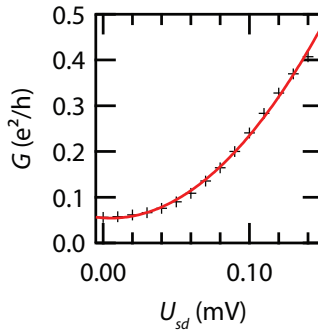


Abbildung B.4.: Differentielle Leitfähigkeit als Funktion der Vorspannung für  $U_{g4} = 92$  mV und  $B = 3,05$  T.

# Literaturverzeichnis

- [1] Moore, G. E. *Cramming More Components Onto Integrated Circuits*. Proceedings of the IEEE **86**, 82 – 85 (1998).
- [2] Stiller, A. *Prozessorgeflüster*. c't **17/2015**, 18 (2015).
- [3] Heinzl, T. *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures*. Wiley-VCH, Weinheim, Deutschland (2003).
- [4] Dahl, E. D. *Programming with D-Wave: Map Coloring Problem*. Technical report, D-Wave Systems (2013).
- [5] Ladd, T. D., Jelezko, F., Laflamme, R., Nakamura, Y., Monroe, C. und O'Brien, J. L. *Quantum computers*. Nature **464**, 45–53 (2010).
- [6] Loss, D. und DiVincenzo, D. P. *Quantum computation with quantum dots*. Phys. Rev. A **57**, 120–126 (1998).
- [7] Kouwenhoven, L. P., Marcus, C. M., McEuen, P. L., Tarucha, S., Westervelt, R. M. und Wingreen, N. S. *Electron Transport in Quantum Dots*. In L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven und G. Schön (Herausgeber), *Mesoscopic Electron Transport*, Ausgabe 345 von *Nato Science Series E: Applied Sciences*, 105 – 214. Springer Netherlands, Dordrecht, Niederlande (1997).
- [8] Bracker, A. S., Stinaff, E. A., Gammon, D., Ware, M. E., Tischler, J. G., Shabaev, A., Efros, A. L., Park, D., Gershoni, D., Korenev, V. L. und Merkulov, I. A. *Optical Pumping of the Electronic and Nuclear Spin of Single Charge-Tunable Quantum Dots*. Phys. Rev. Lett. **94**, 047402 (2005).

- [9] Ruderman, M. A. und Kittel, C. *Indirect Exchange Coupling of Nuclear Magnetic Moments by Conduction Electrons*. Phys. Rev. **96**, 99–102 (1954).
- [10] Kasuya, T. *A Theory of Metallic Ferro- and Antiferromagnetism on Zener's Model*. Progress of Theoretical Physics **16**, 45–57 (1956).
- [11] Yosida, K. *Magnetic Properties of Cu-Mn Alloys*. Phys. Rev. **106**, 893–898 (1957).
- [12] Jones, B. A. und Varma, C. M. *Study of two magnetic impurities in a Fermi gas*. Phys. Rev. Lett. **58**, 843–846 (1987).
- [13] Craig, N. J., Taylor, J. M., Lester, E. A., Marcus, C. M., Hanson, M. P. und Gossard, A. C. *Tunable Nonlocal Spin Control in a Coupled-Quantum Dot System*. Science **304**, 565–567 (2004).
- [14] Sasaki, S., Kang, S., Kitagawa, K., Yamaguchi, M., Miyashita, S., Maruyama, T., Tamura, H., Akazaki, T., Hirayama, Y. und Takayanagi, H. *Nonlocal control of the Kondo effect in a double quantum dot–quantum wire coupled system*. Phys. Rev. B **73**, 161303 (2006).
- [15] Tutuc, D., Popescu, B., Schuh, D., Wegscheider, W. und Haug, R. J. *Tunable nonlocal coupling between Kondo impurities*. Phys. Rev. B **83**, 241308 (2011).
- [16] Hewson, A. C. *The Kondo Problem to Heavy Fermions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1993).
- [17] Kondo, J. *Resistance Minimum in Dilute Magnetic Alloys*. Progress of Theoretical Physics **32**, 37–49 (1964).
- [18] Goldhaber-Gordon, D., Shtrikman, H., Mahalu, D., Abusch-Magder, D., Meirav, U. und Kastner, M. A. *Kondo effect in a single-electron transistor*. Nature **391**, 156–159 (1998).
- [19] Cronenwett, S. M., Oosterkamp, T. H. und Kouwenhoven, L. P. *A Tunable Kondo Effect in Quantum Dots*. Science **281**, 540–544 (1998).

- [20] Goldhaber-Gordon, D., Göres, J., Kastner, M. A., Shtrikman, H., Mahalu, D. und Meirav, U. *From the Kondo Regime to the Mixed-Valence Regime in a Single-Electron Transistor*. Phys. Rev. Lett. **81**, 5225–5228 (1998).
- [21] Grobis, M., Rau, I. G., Potok, R. M., Shtrikman, H. und Goldhaber-Gordon, D. *Universal Scaling in Nonequilibrium Transport through a Single Channel Kondo Dot*. Phys. Rev. Lett. **100**, 246601 (2008).
- [22] Rössler, C., Oehri, D., Zilberberg, O., Blatter, G., Karalic, M., Pijnenburg, J., Hofmann, A., Ihn, T., Ensslin, K., Reichl, C. und Wegscheider, W. *Transport Spectroscopy of a Spin-Coherent Dot-Cavity System*. Phys. Rev. Lett. **115**, 166603 (2015).
- [23] Tutuc, D. *Electron correlation effects in lateral quantum dots*. Dissertation, Leibniz Universität Hannover (2011).
- [24] Ihn, T. *Semiconductor Nanostructures*. Oxford University Press, Oxford, United Kingdom (2012).
- [25] Klitzing, K. v., Dorda, G. und Pepper, M. *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*. Phys. Rev. Lett. **45**, 494–497 (1980).
- [26] Klitzing, K. v. *The quantized Hall effect*. Rev. Mod. Phys. **58**, 519–531 (1986).
- [27] Landauer, R. *Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction*. IBM Journal of Research and Development **1**, 223 – 231 (1957).
- [28] Büttiker, M. *Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors*. Phys. Rev. B **38**, 9375–9389 (1988).
- [29] Chklovskii, D. B., Shklovskii, B. I. und Glazman, L. I. *Electrostatics of edge channels*. Phys. Rev. B **46**, 4026–4034 (1992).
- [30] Beenakker, C. W. J. *Edge channels for the fractional quantum Hall effect*. Phys. Rev. Lett. **64**, 216–219 (1990).

## Literaturverzeichnis

- [31] Jacak, L., Wójs, A. und Hawrylak, P. *Quantum Dots*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Deutschland (1998).
- [32] Kouwenhoven, L. P., Austing, D. G. und Tarucha, S. *Few-electron quantum dots*. Rep. Prog. Phys. **64**, 701–736 (2001).
- [33] Fock, V. *Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld*. Zeitschrift für Physik **47**, 446–448 (1928).
- [34] Darwin, C. G. *The Diamagnetism of the Free Electron*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **27**, 86–90 (1931).
- [35] Fricke, C. *Der Quantenpunkt als Ladungsdetektor in der Transportspektroskopie*. Dissertation, Leibniz Universität Hannover (2009).
- [36] de Haas, W. J., de Boer, J. und van den Berg, G. J. *The electrical resistance of gold, copper and lead at low temperatures*. Physica **1**, 1115–1124 (1934).
- [37] de Haas, W. J. und van den Berg, G. J. *The electrical resistance of gold and silver at low temperatures*. Physica **3**, 440–449 (1936).
- [38] Pearson, W. B. *CIV. Electron transport in copper and dilute alloys at low temperature*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **46**, 920–923 (1955).
- [39] Anderson, P. W. *A poor man's derivation of scaling laws for the Kondo problem*. J. Phys. C **3**, 2436 (1970).
- [40] Wilson, K. G. *The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem*. Rev. Mod. Phys. **47**, 773–840 (1975).
- [41] Schwabl, F. *Quantenmechanik*. Springer-Verlag, Berlin, Deutschland (1998).
- [42] Wingreen, N. S. und Meir, Y. *Anderson model out of equilibrium: Noncrossing-approximation approach to transport through a quantum dot*. Phys. Rev. B **49**, 11040–11052 (1994).



- [43] Affleck, I. *The Kondo screening cloud: what it is and how to observe it*. arXiv:0911.2209v2 (2010).
- [44] Mitchell, A. K., Becker, M. und Bulla, R. *Real-space renormalization group flow in quantum impurity systems: Local moment formation and the Kondo screening cloud*. Phys. Rev. B **84**, 115120 (2011).
- [45] Haldane, F. D. M. *Scaling Theory of the Asymmetric Anderson Model*. Phys. Rev. Lett. **40**, 416–419 (1978).
- [46] Anderson, P. W. *Localized Magnetic States in Metals*. Phys. Rev. **124**, 41–53 (1961).
- [47] Glazman, L. I. und Raikh, M. *Resonant Kondo transparency of a barrier with quasilocal impurity states*. JETP Lett. **47**, 452–455 (1988).
- [48] Chang, A. M. und Chen, J. C. *The Kondo effect in coupled-quantum dots*. Rep. Prog. Phys. **72**, 096501 (2009).
- [49] van der Wiel, W. G., Franceschi, S. D., Fujisawa, T., Elzerman, J. M., Tarucha, S. und Kouwenhoven, L. P. *The Kondo Effect in the Unitary Limit*. Science **289**, 2105–2108 (2000).
- [50] Kretinin, A. V., Shtrikman, H., Goldhaber-Gordon, D., Hanl, M., Weichselbaum, A., von Delft, J., Costi, T. und Mahalu, D. *Spin- $\frac{1}{2}$  Kondo effect in an InAs nanowire quantum dot: Unitary limit, conductance scaling, and Zeeman splitting*. Phys. Rev. B **84**, 245316 (2011).
- [51] Schmid, J., Weis, J., Eberl, K. und v. Klitzing, K. *Absence of Odd-Even Parity Behavior for Kondo Resonances in Quantum Dots*. Phys. Rev. Lett. **84**, 5824–5827 (2000).
- [52] Fühner, C., Keyser, U. F., Haug, R. J., Reuter, D. und Wieck, A. D. *Flux-quantum-modulated Kondo conductance in a multielectron quantum dot*. Phys. Rev. B **66**, 161305 (2002).

- [53] Stopa, M., van der Wiel, W. G., Franceschi, S. D., Tarucha, S. und Kouwenhoven, L. P. *Magnetically Induced Chessboard Pattern in the Conductance of a Kondo Quantum Dot*. Phys. Rev. Lett. **91**, 046601 (2003).
- [54] McEuen, P. L., Foxman, E. B., Kinaret, J., Meirav, U., Kastner, M. A., Wingreen, N. S. und Wind, S. J. *Self-consistent addition spectrum of a Coulomb island in the quantum Hall regime*. Phys. Rev. B **45**, 11419–11422 (1992).
- [55] Cho, A. Y. und Arthur, J. R. *Molecular beam epitaxy*. Prog. Solid State Chem. **10**, 157–191 (1975).
- [56] Panish, M. B. *Molecular beam epitaxy*. Science **208**, 916–922 (1980).
- [57] Held, R., Vancura, T., Heinzl, T., Ensslin, K., Holland, M. und Wegscheider, W. *In-plane gates and nanostructures fabricated by direct oxidation of semiconductor heterostructures with an atomic force microscope*. Appl. Phys. Lett. **73**, 262–264 (1998).
- [58] Keyser, U. F., Schumacher, H. W., Zeitler, U., Haug, R. J. und Eberl, K. *Fabrication of a single-electron transistor by current-controlled local oxidation of a two-dimensional electron system*. Appl. Phys. Lett. **76**, 457–459 (2000).
- [59] Popescu, B. *Fabrication an Characterization of a Two-Quantum-Dot System*. Masterarbeit, Leibniz Universität Hannover (2009).
- [60] Enss, C. und Hunklinger, S. *Tieftemperaturphysik*. Springer-Verlag, Berlin, Deutschland (2000).
- [61] Beenakker, C. W. J. *Theory of Coulomb-blockade oscillations in the conductance of a quantum dot*. Phys. Rev. B **44**, 1646–1656 (1991).
- [62] Foxman, E. B., Meirav, U., McEuen, P. L., Kastner, M. A., Klein, O., Belk, P. A., Abusch, D. M. und Wind, S. J. *Crossover from single-level to multilevel transport in artificial atoms*. Phys. Rev. B **50**, 14193–14199 (1994).

- [63] Žitko, R. Korrespondenz per Email.
- [64] Lee, M., Choi, M.-S., López, R., Aguado, R., Martinek, J. und Žitko, R. *Two-impurity Anderson model revisited: Competition between Kondo effect and reservoir-mediated superexchange in double quantum dots*. Phys. Rev. B **81**, 121311 (2010).
- [65] Prüser, H., Dargel, P. E., Bouhassoune, M., Ulbrich, R. G., Pruschke, T., Lounis, S. und Wenderoth, M. *Interplay between the Kondo effect and the Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida interaction*. Nat Commun **5**, – (2014).
- [66] Costi, T. A. *Kondo Effect in a Magnetic Field and the Magnetoresistivity of Kondo Alloys*. Phys. Rev. Lett. **85**, 1504–1507 (2000).
- [67] Amasha, S., Gelfand, I. J., Kastner, M. A. und Kogan, A. *Kondo temperature dependence of the Kondo splitting in a single-electron transistor*. Phys. Rev. B **72**, 045308 (2005).
- [68] Kogan, A., Amasha, S., Goldhaber-Gordon, D., Granger, G., Kastner, M. A. und Shtrikman, H. *Measurements of Kondo and Spin Splitting in Single-Electron Transistors*. Phys. Rev. Lett. **93**, 166602 (2004).
- [69] Liu, T.-M., Hemingway, B., Kogan, A., Herbert, S. und Melloch, M. *Magnetic-Field-Induced Crossover to a Nonuniversal Regime in a Kondo Dot*. Phys. Rev. Lett. **103**, 026803 (2009).
- [70] Schmitt, S. und Anders, F. B. *Nonequilibrium Zeeman Splitting in Quantum Transport through Nanoscale Junctions*. Phys. Rev. Lett. **107**, 056801 (2011).
- [71] Smirnov, S. und Grifoni, M. *Nonequilibrium Kondo transport through a quantum dot in a magnetic field*. New J. Phys. **15**, 073047 (2013).
- [72] Heine, A. W., Tutuc, D., Zwicky, G. und Haug, R. J. *Competition between Kondo screening and quantum Hall edge reconstruction*. Phys. Rev. Lett. **116**, 096802 (2016).

- [73] Hewson, A. C., Bauer, J. und Koller, W. *Field dependent quasiparticles in a strongly correlated local system*. Phys. Rev. B **73**, 045117 (2006).
- [74] Bauer, J. und Hewson, A. C. *Field-dependent quasiparticles in a strongly correlated local system. II.* Phys. Rev. B **76**, 035119 (2007).
- [75] Garate, I. und Affleck, I. *Kondo Temperature in Multilevel Quantum Dots*. Phys. Rev. Lett. **106**, 156803 (2011).
- [76] van Bentum, P. J. M., van Kempen, H., van de Leemput, L. E. C. und Teunissen, P. A. A. *Single-Electron Tunneling Observed with Point-Contact Tunnel Junctions*. Phys. Rev. Lett. **60**, 369–372 (1988).
- [77] Zhitenev, N. B., Haug, R. J., Klitzing, K. v. und Eberl, K. *Time-resolved measurements of transport in edge channels*. Phys. Rev. Lett. **71**, 2292–2295 (1993).
- [78] Siddiki, A. und Gerhardts, R. R. *Incompressible strips in dissipative Hall bars as origin of quantized Hall plateaus*. Phys. Rev. B **70**, 195335 (2004).
- [79] Rogge, M. C., Fühner, C. und Haug, R. J. *Multiple Transitions of the Spin Configuration in Quantum Dots*. Phys. Rev. Lett. **97**, 176801 (2006).
- [80] van der Wiel, W. G., De Franceschi, S., Elzerman, J. M., Tarucha, S., Kouwenhoven, L. P., Motohisa, J., Nakajima, F. und Fukui, T. *Two-Stage Kondo Effect in a Quantum Dot at a High Magnetic Field*. Phys. Rev. Lett. **88**, 126803 (2002).
- [81] Bockhorn, L. *Untersuchung der Magnetotransporteigenschaften von hochbeweglichen zweidimensionalen Elektronengasen*. Dissertation, Leibniz Universität Hannover (2013).
- [82] Kroha, J. und Nejati, A. Email Korrespondenz miz R. J. Haug.

# Lebenslauf

Alexander Wieland Heine,  
geboren am 18. Mai 1984 in Bückeburg

- 1997 - 2003 Besuch des Wilhelm Busch Gymnasiums  
Stadthagen, Abschluss Abitur
- 2003 - 2004 Grundwehrdienst beim EloKaBtl 932  
Frankenberg/Eder
- 2004 - 2011 Studium der Physik an der  
Leibniz Universität Hannover,  
Abschluss Diplom Physiker
- 2009 - 2010 Anfertigung der Diplomarbeit mit dem Titel  
*Präparation und Charakterisierung von Mono-  
und Bilagen Graphenstrukturen* am Institut  
für Festkörperphysik der Leibniz Universität  
Hannover
- seit 2011 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut  
für Festkörperphysik der Leibniz Universität  
Hannover, Vorbereitung der Dissertation



# Publikationen

- *RKKY interaction in a chirally coupled double quantum dot system.* Heine, A. W., Tutuc, D., Zwicknagl, G., Schuh, D., Wegscheider, W. und Haug, R. J., AIP Conf. Proc. **1566**, 305 (2013).
- *Exchange interaction in chirally coupled quantum dots.* Tutuc, D., Heine, A. W., Schuh, D., Wegscheider, W. und Haug, R. J., J. Phys.: Conf. Ser. **456**, 012014 (2013).
- *Competition between Kondo Screening and Quantum Hall Edge Reconstruction.* Heine, A. W., Tutuc, D., Zwicknagl, G. und Haug, R. J., Phys. Rev. Lett. **116**, 096802, (2016).





# Danksagung

Am Ende gilt es, all denen zu danken, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. An erster Stelle steht dabei Prof. Dr. Rolf J. Haug, der mir die Arbeit in der Abteilung Nanostrukturen ermöglicht hat und immer mit Anregungen, Ratschlägen und auch Korrekturen bereit stand, wenn es nötig war.

Danken möchte ich auch Prof. Dr. Gertrud Zwicknagl. Zum einen dafür, dass sie das Korreferat für diese Arbeit übernimmt, zum anderen aber auch für die gute Zusammenarbeit und die hilfreiche Unterstützung bei theoretischen Fragen zum Kondo-Effekt und der RKKY-Wechselwirkung.

Für eine gute Betreuung in der Anfangsphase meiner Arbeit danke ich Dr. Daniel Tutuc, der mir bei der Einarbeitung in die physikalischen und technischen Grundlagen der Experimente eine unschätzbare Hilfe war.

In einem Physiklabor funktioniert kein Gerät ewig. Daher ist es umso wichtiger, dass bei einem Ausfällen und Defekten jemand mit der nötigen Fachkenntniss zur Reparatur bereit steht. Dieser jemand war oft Ronny Hüther, dem ich hier dafür danken möchte. Weitere Hilfe bei technischen Problemen und Ratschläge zur Messtechnik leisteten Dr. Lina Bockhorn, Dr. Niels Ubbelohde, Dr. Maximilian Rogge und Dr. Alexei Agafonov.

Bürokollegen spielen eine nicht zu unterschätzende Rolle: sie sorgen für gute Stimmung oder helfen bei kleineren Fragen schnell weiter. Dafür danke ich Dr. Niels Maire, Dr. Daniel Tutuc, Dr. Maximilian Rogge, Timo Wagner, Felix Busse, Jan Kühne und Gunnar Schneider.

Besonderer Danke geht auch an diejenigen, dich mich während der Zeit bei den Nanos begleitet haben und immer für gute Laune auf Konferenzen, während der Arbeitszeit und nach Feierabend gesorgt haben. Ganz herzlich danke ich dafür Dr. Dmitri Smirnov, Dr. Lina Bockhorn, Monika Kotzian und Timo Wagner.

## *Literaturverzeichnis*

Für ihre unermüdliche Arbeit im administrativen und organisatorischen Bereich danke ich Yvonne Griep, Klara Wernecke und Florin Riechers.

Mein Dank geht auch an Dr. Fabian Berski, Johannes Rode, Johannes Bayer, Christopher Belke, Hendrik Kuhn, Dr. Ramin Dahbashi, Jan Gerrit Lonnemann, Julia Wiegand und alle übrigen Mitarbeiter und Studenten der Abteilung Nanostrukturen für eine schöne Zeit.

Abschließend möchte ich meinen Eltern und meinen Geschwistern danken, die mich bis hierhin in allen Lebenslagen unterstützt haben.