Asymptotic expansion of ODE type solutions to nonlinear diffusion equations

著者	Eom Ｊｕｎｙｏｎｇ
number	86
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	理博第3223号
URL	http://hdl.handle.net/10097/00126090

（別紙様式５）

論　文　内　容　要　旨

（NO. 1）

氏　　名	Eom Junyong	提出年	令和　元年
学位論文の題　　　目	Asymptotic expansion of ODE type solutions to nonlinear diffusion equations (非線形拡散方程式に対する ODE 型の解の漸近展開)		

論　文　目　次

論　文　内　容

Chapter　1　Introduction

In general, the behavior of the solution for reaction-diffusion equations as time evolves is governed by the following three factors: diffusion, reaction and initial value. For a given initial value, the diffusion and the reaction will compete each other, and eventually, one of them can prevail over the other as time passes. Lots of researches have been done in this field for revealing which factor is dominant in view of large time behaviors of solutions by changing various conditions of the three factors.

The present study is motivated by the following conjecture:

Even if an overall behavior of u is dominated by only one factor as time goes to infinity, the other factor may appear in a higher order expansion of u.

In particular, when the diffusion is the Laplacian, the answer for the conjecture above is affirmative under suitable decaying conditions on reaction and initial value. In a series of papers written by Ishige and Kawakami, it is proved that a higher order expansion is possible and it can be described as a linear combination of derivatives of the Gauss kernel. As far as we know, there are few results on the study of higher order asymptotic expansions neither for nonlinear diffusions nor for semilinear parabolic systems.

In this thesis, we are concerned with the higher order asymptotic expansion of solutions as the time goes to infinity, when the reaction is dominant. Finally, we shall reveal how the effect of the diffusion appears in the higher order expansion. We propose the following two parabolic PDEs: One is nonlinear diffusion equations of porous medium type and the other is a weakly coupled system of linear diffusion, which are dealt with in Chapters 3 and 4, respectively.

Chapter 2 Preliminaries

In this Chapter, we introduce some notations and recall some properties of the Gauss kernel. Furthermore, we recall some known results on the higher order asymptotic expansion of the solutions to the heat equation with an inhomogeneous term.

Chapter 3 Equation of porous medium type

In this chapter, we obtain higher order asymptotic expansions for the solution to equations of porous medium type. By employing time rescale argument we obtain the heat equation plus inhomogeneous term but not a lower order term. By obtaining a gradient estimate for the solution we can apply the known arguments established by Ishige and Kawakami to derive higher order asymptotic expansions. As a result, it turns out that the asymptotic expansion is described as solutions of the heat equation and it is independent of the Barenblatt solution.

Chapter 4 Weakly coupled system of linear diffusion

In this chapter, we obtain higher order asymptotic expansions for the solution to a weakly coupled system of linear diffusion. We employ a new function by use of a symmetry of the system has. Then we obtain a nonlinear heat equation with a nice structure, which enable us to apply the general arguments to derive asymptotic expansions for each components of the solution to the system. As a result, it turns out that the asymptotic behavior reveals a sharp contrast with that of scalar equation.

別　紙

論文審査の結果の要旨

本審査論文は非線形偏微分方程式（系）に対する解の漸近展開に関する申請者の研究成果をまとめたものである。非線形偏微分方程式（系）は一般に解を具体的に求積することが困難なため，解の詳細な形状に関する情報を引き出すことは現代数学に於いて重要な問題として位置づけられている。申請者の Eom, Junyong 氏は反応拡散方程式（系）と呼ばれる非線形放物型偏微分方程式（系）に対して，反応項が支配的な状況下に於いて，拡散項の影響が解の高次展開に及ぼす影響を精密に分析した。本審査論文では，具体的に以下の各問題:

1)　多孔質媒体方程式などの濃度依存型拡散係数を有する非線形拡散方程式
2)　数理生物学や反応拡散系に現れる半線形放物型方程式の連立系

に対して，定数関数に可積分な摂動を加えた形で初期値を与えることによって，(方程式の反応項の効果を反映する) 空間一様解を中心とした解の漸近展開を行い，高次の項を熱半群や拡散方程式の基本解であるガウス核を用いて詳細に記述した。Eom 氏は方程式のスケール構造等を巧みに見抜き，また非斉次拡散方程式に対する解の漸近解析の理論を駆使することで，研究結果を得ている。このような非線形放物型方程式（系）の解の漸近展開に関する研究は，吸収項を伴う半線形熱方程式に対して石毛-小林（2013），石毛-川上-小林（2014）らの結果が知られているが，1) や 2)のタイプの問題に対しては未解決であった。

本審査論文の概要は以下の通りである。序章に於いて，この研究の根本となる問題意識や以降の章で扱う具体的な問題の紹介，またそれらに関連する研究の流れなど，導入的内容が提示される。2 章では以降の章で行う解析の基礎となるガウス核の諸性質や熱半群の減衰評価，さらに非斉次拡散方程式に対する解の漸近解析の理論のサーベイが与えられている。

3 章では上記 1)に対応する問題が論じられている。多孔質媒体方程式のような非線形拡散方程式では，拡散係数が解自体に依存する準線形方程式となるため，解を漸近展開する際には，高階微分を含む項を誤差項として処理する必要が生じる。ここでは時間変数に関する変数変換を巧みに行い，擬似時間変数を導入することで解の高次展開を得ている。この点は半線形熱方程式の研究では見られなかった特徴である。また高次モーメントが有限になるような重みつきルベーグ空間に含まれる初期値をとる解に対しては，モーメントの次数に応じて解が高次展開できること，さらにそれらが熱核の高階導関数を用いて表現できることを示している。非線形拡散方程式の解の漸近形の研究では，通常 1 次展開までしか結果が得られておらず，このような解の高次展開の結果を得ることは困難であった。

4 章では 2)に対応する問題として，ある半線形熱方程式の二元（弱）連立系について論じている。3 章と同様に，定数関数に可積分な摂動を加えた形で与えられる初期値からはじまる解を考え，それをある常微分方程式系の解として与えられる空間一様解を中心に漸近展開する。ここではまじめに，対応する常微分方程式系の解の漸近的性質を明らかにしているが，特に空間一様解の長時間挙動に於いては，主要部が初期値に依らないことを示し，また次に現れる項の増大度を特定している。それらに基づいて空間一様解を中心に解を展開すると，単独系の場合とは異なり，減衰が遅く誤差項としては扱えない項が生じてしまう。Eom 氏はそのような項の漸近的性質を的確に捉える補助的な関数を見つけ出し，それらを用いることで問題となる項から減衰が遅く，解の挙動に本質的な影響を与える部分を抜き出している。それによって連立系に対する問題を２つの解成分の差が満たす単独系の問題へと帰着し，解成分の差の高次展開を行い，その結果を用いることで元の方程式系の解それぞれの高次展開を行った。その結果，抜き出した項に由来する修正項が現れるなど，単独系では現れない連立系固有の現象を捉えることに成功している。

これらの成果はいずれも新規性が高く，また今後様々な問題に応用が可能な解析法を提案している。また Eom 氏が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを十分に示すものである。以上の理由から，Eom, Junyong 氏提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。