

УДК 621.3.01

М.М. Резинкина<sup>1</sup>, О.Л. Резинкин<sup>2</sup>, Г.В. Лисачук<sup>2</sup>, Е.В. Сосина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины,  
ул. Индустриальная, 19, а/я 72, г. Харьков, 61106, Украина e-mail: marinar2@mail.ru

<sup>2</sup> Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт",  
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПОМОЩЬЮ СКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

*Приведены постановки задач расчета электромагнитных полей в электротехнических системах в терминах скалярного и векторного потенциалов, реализованные с помощью численного метода конечного интегрирования. Описаны примеры расчета электрических и магнитных полей в квазистационарном приближении, а также процесса распространения электромагнитной волны в среде с нелинейными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Библи. 10, рис. 1.*

**Ключевые слова:** потенциал электромагнитного поля, квазистационарное приближение, электромагнитная волна, нелинейный диэлектрик, метод конечного интегрирования.

*Наведені постановки задач розрахунку електромагнітних полів в електротехнічних системах в термінах скалярного і векторного потенціалів, реалізовані за допомогою чисельного методу*

скінченного інтегрування. Описані приклади розрахунку електричних і магнітних полів в квазістационарному наближенні, а також процесу розповсюдження електромагнітної хвилі в середовищі з нелінійними діелектричною і магнітною проникністю. Бібл. 10, рис. 1.

**Ключові слова:** потенціал електромагнітного поля, квазістационарне наближення, електромагнітна хвиля, нелінійний діелектрик, метод скінченного інтегрування.

### Введение

При разработке электротехнических устройств требуется информация о распределении напряженностей изменяющихся во времени электрических и магнитных полей. Это относится, например, к высоковольтным линиям электропередачи (ЛЭП), конденсаторам, высоковольтным формирующим линиям и др. Использование скалярного ( $\varphi$ ) и векторного ( $\vec{A}$ ) потенциалов электромагнитного поля при расчетах двух- и трехмерных распределений электромагнитных полей (ЭМП) позволяет уменьшить количество неизвестных, облегчив тем самым получение решения.

При этом  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля (ЭП) и  $\vec{B}$  - индукцию магнитного поля (МП) записывают в виде (см. например [7]):

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}; \quad (1)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t. \quad (2)$$

При таком задании электромагнитные потенциалы определены неоднозначно и требуется еще одно связывающее их калибровочное уравнение (см. например [7]). К наиболее распространенным относятся калибровка Кулона ( $\text{div}\vec{A} = 0$ ), калибровка Лоренца ( $\text{div}\vec{A} = -\mu_0\gamma \cdot \varphi - \mu_0\epsilon_0 \cdot \partial\varphi/\partial t$ , где  $\epsilon$ ,  $\mu$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;  $\epsilon_0 = 0.885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $\gamma$  – удельная электропроводность среды) и калибровка Вейля ( $\varphi = 0$ ) [1].

При расчете распределений квазистационарных электрического и магнитного полей в одной и той же расчетной системе используется различное представление  $\vec{E}$  через электромагнитные потенциалы. Так, при расчете ЭП может быть принято допущение  $\text{grad}\varphi \gg \partial\vec{A}/\partial t$ , а при расчете МП –  $\text{grad}\varphi \ll \partial\vec{A}/\partial t$ . Целью данной работы является обоснование вида представления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  через  $\vec{A}$  и  $\varphi$  для случаев квазистационарных электрических и магнитных полей, а также при распространении электромагнитной волны в среде с нелинейными диэлектрической и магнитной проницаемостями.

### Расчет квазистационарных электрических полей в терминах скалярного потенциала

Рассмотрим задачу расчета квазистационарных электрических полей для случая моделирования распределения ЭП в окрестности воздушных линий электропередачи, например ЛЭП-110, при нахождении в их охранной зоне человека. Будем полагать, что токопроводы имеют потенциалы, сдвинутые по фазе на  $120^\circ$  и изменяющиеся по синусоидальному закону с частотой 50 Гц, причем при отсутствии в охранной зоне объектов распределения ЭМП одинаковы в сечениях, перпендикулярных направлению осей токопроводов.

Ток такой ЛЭП не превышает 500 А. Оценки показывают, что величина действующего значения векторного потенциала ( $A_{RMS}$ ) даже в непосредственной близости от токопроводов составляет менее  $10^{-3}$  Тл·м. Тогда для промышленной частоты значение  $|\partial\vec{A}/\partial t| \sim \omega \cdot A_{RMS} < 0.3$  В/м. В то же время, величина  $\text{grad}\varphi$  в воздухе в окрестности проводов на 4–5 порядков превышает этот уровень. Таким образом, изменение во времени магнитной индукции в данном случае не оказывает влияния на величину напряженности ЭП, и при расчетах в терминах электромагнитных потенциалов вместо (2) следует использовать:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad (3)$$

поскольку для таких систем выполняется условие:

$$\text{grad}\varphi \gg \partial\vec{A}/\partial t. \quad (4)$$

Рассмотрим также использование математического моделирования электромагнитных процессов в конденсаторах, работающих при частотах ЭМП до десятков килогерц. Поскольку размеры секций рассматриваемых конденсаторов не превышают 1 м, расчет ЭМП может быть выполнен в квазистационарном приближении. Известно, что напряженность вихревого ЭП, вызванная изменением магнитной индукции между обкладками конденсатора, намного меньше, чем напряженность электрического поля зарядов конденсатора [7, с. 413]. Покажем, что и в данном случае выполняется условие (4).

При приложении к обкладкам конденсатора напряжения с временем нарастания не менее десятков микросекунд и характерных размерах системы не более единиц метров, волновые процессы при расчете могут не учитываться. При этом токи проводимости протекают только по обкладкам конденсатора, а токи утечки в диэлектрике существенно меньше токов смещения. Нетрудно показать, что влиянием изменения во времени МП токов проводимости обкладок на величину напряженности ЭП можно пренебречь, т.к. выполняется (4): как и в предыдущем случае,  $grad\varphi$  на 3 порядка и более превышает  $|\partial\vec{A}/\partial t|$ . Поэтому при решении задачи расчета ЭП также следует применять (3).

Для расчета ЭП может быть использовано уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения заряда (см. например [7, с. 425]):

$$div\vec{J} = -\partial\rho/\partial t, \quad (5)$$

где  $\vec{J} = \gamma\vec{E}$  - плотность тока проводимости;  $\rho$  - плотность заряда.

В результате интегрирования (5) по объемам элементарных ячеек, на которые разбита исследуемая расчетная область, использования уравнения Максвелла  $div\vec{D} = \rho$ , подстановки  $\vec{E}$  в виде (3) и применения теоремы Гаусса, получено решаемое уравнение (подробнее см. [3]):

$$\oint_S (-\gamma \cdot grad\varphi - \epsilon_0\epsilon \cdot grad \frac{\partial\varphi}{\partial t}) ds = 0, \quad (6)$$

где  $S$  – боковая поверхность ячеек расчетной схемы.

При численной реализации (6) операции дифференцирования заменялись их разностными аналогами. Такой подход, когда для получения численного решения используется один из законов сохранения, называется методом конечного интегрирования (см. например [9]). Преимуществом метода конечного интегрирования является то, что при его использовании условия на границах раздела сред выполняются автоматически, и их не требуется вводить дополнительно при получении решения. Пример расчета ЭП с помощью описанного подхода показан на рис. 1а, где представлены распределения линий равного потенциала (в кВ/м) в сечении, перпендикулярном проводам ЛЭП-110 (1 – провода ЛЭП; 2 – человек, находящийся в охранной зоне ЛЭП).

#### Расчет квазистационарных магнитных полей в терминах векторного потенциала электромагнитного поля

Рассмотрим случай расчета МП в квазистационарном приближении, например, в системе «трехфазная линия электропередачи – электропроводный экран» (рис. 1б: 1, 2 – электропроводные экраны, 3 – токопроводы). Учитывая существенную протяженность ЛЭП, при решении таких задач токи токопроводов полагаются заданными, изменяющимися по синусоидальному закону с частотой  $f=50$  Гц и не зависящими от наличия в их окрестности проводящих объектов, в частности экранов (см. например [8]). При использовании для экранирования низкочастотных МП проводящих пластин, выполненных из листов алюминия или меди, толщина которых существенно меньше глубины скин-слоя, снижение МП ЛЭП происходит в результате появления встречно направленного МП токов, индуцированных в этих пластинах. Поскольку токи смещения, как в проводниках, так и в окружающих их диэлектрических и слабопроводящих средах (воздух, изоляция высоковольтных кабелей, грунт) существенно меньше токов проводимости, их влиянием на величину магнитной индукции пренебрегают.

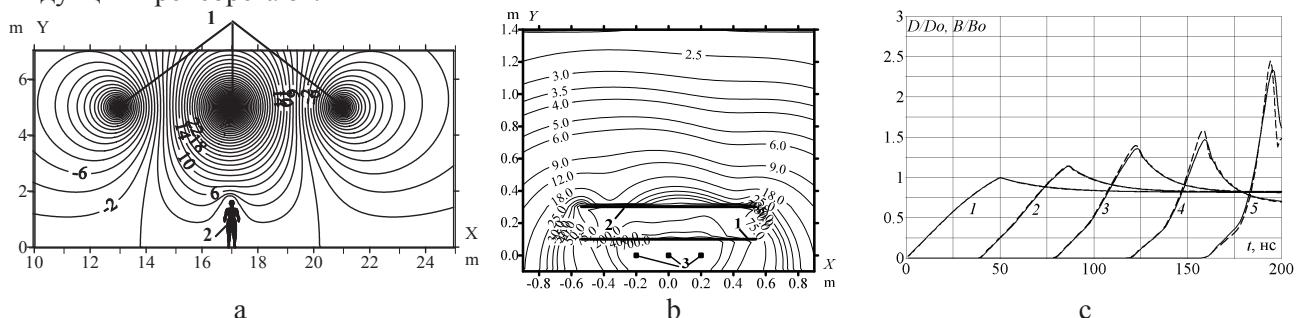


Рис. 1

Для расчета МП в данном случае может быть использован так называемый модифицированный векторный потенциал  $\vec{A}^*$  электромагнитного поля (см. например [10]):

$$\vec{E} = -\partial\vec{A}^* / \partial t, \quad (7)$$

$$\text{где } \vec{A}^* = \vec{A} + \int_0^t \text{grad}\phi \cdot dt, \quad (8)$$

и калибровка Кулона, примененная к векторному потенциалу:

$$\text{div}\vec{A} = 0. \quad (9)$$

В результате из решаемых уравнений исключается скалярный потенциал, который, при необходимости, может быть найден из (8) по рассчитанному  $\vec{A}^*$  следующим образом. Применим операцию  $\text{div}$  к (8), учтя (9):

$$\text{div}\vec{A}^* = \int_0^t \Delta\phi \cdot dt.$$

Тогда при нулевых начальных условиях для  $\vec{A}^*$  и  $\phi$ :

$$\Delta\phi = \frac{\partial(\text{div}\vec{A}^*)}{\partial t}. \quad (10)$$

В ряде случаев нахождение распределения квазистационарного магнитного поля упрощается, и использование модифицированного векторного потенциала электромагнитного поля становится излишним. Так например, при решении рассматриваемой задачи экранирования МП ЛЭП проводящими пластинами, к которым не подключены сторонние источники, можно полагать, что  $\text{grad}\phi \ll \partial\vec{A} / \partial t$ . Покажем, когда выполняется последнее соотношение.

Известно, что при отсутствии сторонних электродвижущих сил свободные объемные заряды в проводнике в установившемся режиме отсутствуют (см. например [7, с. 491]). Таким образом, свободные заряды в данном случае не могут служить причиной появления ненулевых  $\phi$  и  $\text{grad}\phi$  в проводнике.

Источником  $\text{grad}\phi$  в проводнике может являться подключенная к нему сторонняя э.д.с. – см. например [6, с. 192–193], где отмечается, что для переменных ЭМП первое слагаемое в правой части (2) –  $\text{grad}\phi$  можно представить как долю сторонней э.д.с., приходящуюся на единицу длины пути тока в данном его сечении, а левая часть (2) пропорциональна падению напряжения. В рассматриваемой же системе сторонние э.д.с. отсутствуют. В предыдущем подразделе было показано, что при расчете ЭП в системе трехфазных токопроводов ЛЭП  $\text{grad}\phi$  отличен от нуля и существенно превышает  $\partial\vec{A} / \partial t$  в области диэлектрика. В области же проводящих экранов выполняется условие  $\text{grad}\phi \rightarrow 0$  вследствие того, что  $\gamma \gg 2\pi f \epsilon \epsilon_0$  (где  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика,  $\gamma$  – удельная электропроводность проводника). При расчете МП в таких системах следует учитывать, что электрическое поле влияет на магнитную индукцию только вследствие наличия токов, индуцированных в проводящих пластинах. Значения же  $\text{grad}\phi$  в диэлектрике влияния на МП не оказывают вследствие малой их скорости изменения во времени (токи смещения не учитываются). Это видно из уравнения Максвелла (см. например [7]):

$$\text{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{ext}, \quad (11)$$

где  $\vec{H}$  – напряженность МП;  $\vec{D}$  – электрическая индукция;

$\vec{J}^{ext}$  – плотность тока сторонних источников (в нашем случае это провода ЛЭП).

В рассматриваемой задаче расчета МП из-за малости токов смещения в правой части (11) остаются только первое и третье слагаемые. Причем,  $\gamma\vec{E}$  отлично от нуля лишь в областях, обладающих проводимостью, т.е. как раз там, где  $\text{grad}\phi \rightarrow 0$ .

Поэтому при использовании пластин с описанными выше параметрами величиной  $\text{grad}\phi$  можно пренебречь, записав (2) в виде:

$$\vec{E} = -\partial\vec{A} / \partial t. \quad (12)$$

Решаемое уравнение было получено путем подстановки в (11)  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$  в виде (1) и  $\vec{E}$  в виде (12) с учетом условия  $\partial\vec{D} / \partial t \rightarrow 0$ , интегрирования полученного уравнения по сечениям

элементарных ячеек, на которые разбита расчетная область, использования теоремы Стокса и перехода от дифференциальных выражений к их разностным аналогам (подробнее см. [2]). Поскольку при получении решаемых уравнений использовался закон полного тока, численное решение получено с помощью метода конечного интегрирования (см. например [9]). Пример рассчитанного распределения линий равной магнитной индукции (в мкТл) при экранировании трехфазного токопровода 3, (ток – 500 А) системой плоских проводящих незамкнутых алюминиевых пластин 1, 2 (толщина каждой пластины - 1.5 мм) представлены на рис. 1б.

**Расчет распространения электромагнитной волны в средах с нелинейными диэлектрической и магнитной проницаемостями в терминах модифицированного векторного потенциала.**

Рассмотрим случай распространения электромагнитной волны в нелинейной формирующей линии (ФЛ), состоящей из двух параллельных плоских проводящих электродов, между которыми помещена неоднородная нелинейная среда, состоящая из слоев сегнетоэлектрика и магнетодиэлектрика (подробнее см. [4]). Причем, удельная электропроводность каждой из сред рассматриваемой системы полагается одинаковой и неизменной во времени. Для описания процесса деформации волнового фронта и образования ударной электромагнитной волны может быть использован модифицированный векторный потенциал. Преимуществом такого подхода является упрощение решаемых уравнений, описывающих ЭМП в средах с нелинейными  $\epsilon$  и  $\mu$ , а также сокращение количества неизвестных из-за исключения скалярного потенциала (подробнее см. [4, 5]).

Решаемое уравнение было получено в результате подстановки в (11)  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$  в виде (1) и  $\vec{E}$  в виде (7), интегрирования полученного уравнения по сечениям элементарных ячеек, на которые разбита расчетная область, использования теоремы Стокса и перехода от дифференциальных выражений к их разностным аналогам (подробнее см. [4]).

Пример расчета распределения ЭМП для этого случая приведен на рис. 1с, где показаны зависимости изменения во времени электрической и магнитной индукции в различных поперечных сечениях нелинейной формирующей линии, заполненной слоистым сегнетомагнитным композитом: 1 -  $Z=0$ ; 2 -  $Z=0.2 \cdot Z_{max}$ ; 3 -  $Z=0.4 \cdot Z_{max}$ ; 4 -  $Z=0.6 \cdot Z_{max}$ ; 5 -  $Z=0.8 \cdot Z_{max}$ ;  $Z_{max}$  - длина ФЛ. Сплошные линии на рис. 1с соответствуют распределению  $D(t)$ , пунктирные –  $B(t)$ . Данный расчет произведен для нелинейной ФЛ с композитной активной диэлектрической средой, состоящей из чередующихся слоев сегнетоэлектрика и магнетодиэлектрика, причем границы раздела данных слоев расположены параллельно проводящим электродам линии. Общее количество слоев диэлектриков, составляющих композит, было равно пяти: три слоя сегнетоэлектрика толщиной по 0.5 мм ( $\epsilon = 3600 \cdot \kappa^*(E, H)$ ,  $\mu=1$ ) и пять слоев магнетодиэлектрика толщиной по 0.075 мм ( $\epsilon=360$ ,  $\mu = 10 \cdot \kappa^*(E, H)$ ). Полагалось, что электроды формирующей линии прилегают к сегнетоэлектрическим слоям. При этом состав магнетодиэлектрика был подобран так, что величина параметра  $\kappa^*(E, H)$ , выражающего вид нелинейности диэлектрической и магнитной проницаемостей, изменялась одинаково для сегнетоэлектрика и магнетодиэлектрика. Форма зависимости  $\kappa^*(E, H)$  соответствует композиту, составленному из слоев сегнетокерамики  $Ba_{0,75}Sr_{0,25}Ti_{0,95}Zr_{0,05}O_3$  и смеси феррита М60НН-2 с полимерным связующим (подробнее см. [5]).

### Заключение

Использование модифицированного векторного потенциала электромагнитного поля для расчета квазистационарных МП, а также процессов распространения электромагнитной волны (в том числе в средах с нелинейными диэлектрической и магнитной проницаемостями) позволяет уменьшить количество неизвестных, облегчив тем самым получение решения. В ряде частных случаев одним из слагаемых уравнения (2) можно пренебречь. В этих случаях нахождение распределения квазистационарного магнитного поля упрощается, и использование модифицированного векторного потенциала электромагнитного поля становится излишним.

### Список литературы

1. Прохоров Л. В. Калибровочные условия и калибровочные преобразования // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1996. – Т. 27, вып. 5. – С. 1400 – 1468.
2. Резинкина М. М. Использование численных расчетов для выбора средств экранирования от действия магнитного поля // Журнал технической физики – 2007. – Т. 77, № 11. – С. 17–24.
3. Резинкина М. М., Резинкин О. Л. Расчет распределения напряженности трехмерного электрического поля в неоднородном диэлектрике // Электричество. – 1995. – № 7. – С. 62–66.

4. Резинкина М. М., Резинкин О. Л. Моделирование процессов обострения фронта электромагнитной волны в нелинейном диэлектрике // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81, № 3. – С. 91–97.
5. Резинкин О. Л., Резинкина М. М., Лисачук Г. В. Численное исследование процессов образования ударной электромагнитной волны в композитной среде с синхронно изменяющимися диэлектрической и магнитной проницаемостями // Техн. электродинамика. Тем. вып. "Силовая электроника та енергоефективність". – 2012. – Ч.2. – С. 163–168.
6. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. – Москва: Энергия, 1975. – 295 с.
7. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – Москва: Наука, 1966. – 624 с.
8. Cardelli E., Faba A., Pirani A. Nonferromagnetic open shields at industrial frequency rate // IEEE Transactions on Magnetics. – 2010. – V. 46, № 3. – P. 889–898.
9. Clemens M., Weiland T. Regularization of eddy current formulations using discrete grad-div operators // IEEE Transactions on Magnetics. – 2002. – Vol. 38, № 2. – P. 569–572.
10. Emson C. R. I., Simkin J. An optimal method for 3-D eddy currents // IEEE Transactions on Magnetics. – 1983. – V. 19, № 6. – P. 2450–2452.

### MATHEMATICAL MODELING OF ELECTROMAGNETIC FIELDS IN ELECTRICAL TECHNICAL SYSTEMS BY SCALAR AND VECTOR POTENTIALS

M.M. Rezinkina<sup>1</sup>, O.L. Rezinkin<sup>2</sup>, G.V. Lisachuk<sup>2</sup>, E.V. Sosina<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Scientific and Technical Center of Magnetism of Technical Objects of National Academy of Sciences of Ukraine, Industrialna st., 19, PO box 72, 61106, Kharkiv-106, Ukraine  
e-mail: marinar2@mail.ru

<sup>2</sup> National Technical University Kharkov Polytechnic Institute, Frunze str., 21, Kharkov, 61002, Ukraine

*Formulation of the problem of electromagnetic fields calculation in the electrical technical systems in terms of scalar and vector potentials, realized by the numeral method of final integration technique have been presented. The examples of calculation of electric and magnetic fields in the quasi stationary approach as well as process of electromagnetic wave propagation in media with nonlinear dielectric and magnetic perm abilities have been described. References 10, figures 1.*

**Keywords:** *electromagnetic field potential, quasi stationary approach, electromagnetic wave, nonlinear dielectric, final integration technique.*

1. Prokhorov L. V. Gauge terms and gauge transformations // Physics of elementary particles and nucleus. – 1996. – V. 27, No. 5. – P. 1400 – 1468. (Rus)
2. Rezinkina M. M. Selection of magnetic screens by numerical calculations // Technical Physics. – 2007. – Vol. 52, No. 11. – P. 1407–1415.
3. Rezinkina M.M., Rezinkin O. L. Calculation of the 3D electric field stress distributing is in heterogeneous dielectric // Elektrichestvo. – 1995. – No. 7. – С. 62–66. (Rus)
4. Rezinkina M.M., Rezinkin O.L. Modeling of the electromagnetic wavefront sharpening in a nonlinear dielectric // Technical Physics. – 2011. – Vol. 56, No. 3. – P. 406–412.
5. Rezinkina M.M., Rezinkin O.L., Lisachuk G.V. Numerical modeling of shock wave formation processes in the composite medium with permittivity and permeability synchronously changing // Technical Electrodynamics. – 2012. – Vol. 2. – P. 163–168. (Rus)
6. Tozony O. V. Method of the secondary sources is in the electrical engineering. – Moskva: Energiya, 1975. – 295 p. (Rus)
7. Tamm I. E. Bases of theory of electricity. – Moskva: Nayka, 1966. – 624 p. (Rus)
8. Cardelli E., Faba A., Pirani A. Nonferromagnetic open shields at industrial frequency rate // IEEE Transactions on Magnetics. – 2010. – V. 46, № 3. – P. 889–898.
9. Clemens M., Weiland T. Regularization of eddy current formulations using discrete grad-div operators // IEEE Transactions on Magnetics. – 2002. – Vol. 38, № 2. – P. 569–572.
10. Emson C. R. I., Simkin J. An optimal method for 3-D eddy currents // IEEE Transactions on Magnetics. – 1983. – V. 19, № 6. – P. 2450–2452.