

A GÊNESE DA HARMONIA DAS ESFERAS NO ANTIGO PITAGORISMO

*Dennis Bessada**

* Lab. De Física Teórica e
Computação Científica
UNIFESP – Campus Diadema
dbessada@gmail.com

RESUMO: Nesse artigo apresento o conceito de *Harmonia das Esferas* conforme formulado inicialmente pelos pitagóricos. Partindo dos fragmentos de Filolau e das descrições de Aristóteles do pensamento pitagórico, traçarei um panorama geral das concepções pitagóricas acerca do número, do universo, e das consonâncias musicais, para então discutir como essas ideias geraram o conceito de Harmonia das Esferas.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria musical grega; pitagorismo

THE GENESIS OF THE HARMONY OF SPHERES IN ANCIENT PYTHAGOREANISM

ABSTRACT: In this work I discuss the concept of the *Harmony of the Spheres* as initially put forward by the Pythagoreans. Starting from the fragments of Philolaus and Aristotle's descriptions on the Pythagorean thought, I sketch a general scheme of the Pythagorean concepts about number, universe and musical consonances, and later discuss how they were melted into the concept of the Harmony of the Spheres.

KEYWORDS: Ancient Greek Musical Theory; Pythagoreanism.

1. INTRODUÇÃO

O conceito de *Harmonia das Esferas* teve sua gênese e desenvolvimento em uma época onde as concepções do homem acerca do universo eram totalmente distintas das atuais. Se nos tempos modernos as estrelas não passam de colossais estruturas de gás quente que se mantém coesas por sua própria

gravidade, no passado elas eram tidas como entidades vivas; se hoje elas formam apenas um cenário bucólico que quase ninguém vislumbra, no passado elas formavam um campo fértil para fomentar a criatividade dos poetas. As estrelas, assim como os planetas, inseriam-se em um contexto cósmico no qual a vida não era uma mera ocorrência do acaso, como as teorias modernas apontam, mas fundamentalmente uma manifestação da própria vida do universo. Com isso, os movimentos desses corpos celestes mantinham certa relação com os fenômenos aqui da Terra e, em particular, com os fenômenos musicais. É essa homologia entre o terrestre e o celeste, entre a música que embevece os sentidos e a música celeste, inaudível para os ouvidos, mas perceptível pela alma, que define de modo geral o conceito de *Harmonia das Esferas*:

Imagine, se puder, um universo em que tudo faça sentido. Uma serena ordem regula a terra ao seu redor, e o firmamento acima revolve em sublime harmonia. Tudo o que você pode ver e escutar é um aspecto da verdade última: a nobre simplicidade de um teorema de Geometria, a previsibilidade dos movimentos dos corpos celestes, a beleza harmoniosa de uma fuga bem proporcionada – tudo isso é reflexo da perfeição essencial do universo. E aqui na Terra, também, assim como no firmamento e no mundo das ideias, a ordem prevalece: cada criatura, desde uma ostra até um imperador, tem seu lugar preordenado e eterno. (JAMES, 1993, p. 3).

Essa fusão de matemática, movimentos celestes e música que caracteriza a Harmonia das Esferas foi um dos principais legados dos pitagóricos para o pensamento ocidental; sua importância foi tamanha que encontramos sua presença até mesmo no século XX, na obra do compositor Azbel, pseudônimo de Émile Abel Chizat, aluno de Jules Massenet (GODWIN, 1990, p. 399ss). Neste amplo intervalo de pouco mais de 2.500 anos, dos pitagóricos a Azbel, muitos pensadores importantes se dedicaram ao estudo da Harmonia das Esferas; Joscelyn Godwin, em sua monumental obra dedicada ao tema, *The Harmony of the Spheres*, enumera e comenta o trabalho de 52 deles (GODWIN, 1990).

No presente artigo, entretanto, me aterei apenas ao desenvolvimento do tema no pensamento pitagórico, que foram os precursores dessa ideia. Para tanto, irei abordar as concepções

matemáticas, cosmológicas e musicais dos pitagóricos, para somente então discutir como esses elementos se fundem para compor a esplêndida sinfonia cósmica.

2. O PITAGORISMO E SUAS FONTES

Como observamos na seção anterior, foram os pitagóricos os primeiros a formular o conceito de Harmonia das Esferas. Mas, por que fazer menção aos “pitagóricos”, e não diretamente a Pitágoras (c.569-494 a.C.), como responsáveis pela elaboração e primeiro desenvolvimento do conceito de Harmonia das Esferas? Determinar o real legado do Pitágoras histórico é uma tarefa complexa, é em torno dessa dificuldade que gira a chamada “questão pitagórica”¹. Um dos fatores que corrobora essa dificuldade é fato de o próprio Pitágoras não ter deixado nenhum escrito (Porfírio, *VP 57*, in Guthrie, 1987, p.135)²; ademais, a própria organização da comunidade fundada por ele em Crotona (que de lá se disseminou para outras cidades italianas) contribuiu para fragmentar ainda mais nosso conhecimento acerca do conteúdo de seus ensinamentos, pois “o que ele disse a seus discípulos não pode ser sabido com certeza, já que ele apreciava o silêncio de seus ouvintes” (*idem*, *VP 19*). Deste modo, os ensinamentos de Pitágoras eram transmitidos apenas de forma oral e estavam protegidos por um voto de silêncio, mostrando que a comunidade pitagórica seguia de forma bem próxima a estrutura dos círculos de iniciados nos mistérios; afinal, os membros de uma comunidade pitagórica:

(...) eram chamados *homakooi*, “aqueles que se juntam para ouvir”, e seu salão de assembleia era um *homakoeion*, um lugar “para ouvir juntos”. O que eles ouviam era um *akousma*, uma “audição”, ou um *symbolon*, uma “senha”. (KAHN, 2007, p. 25).

Esses *akousmata* eram os aforismos do ensinamento oral de Pitágoras, classificados segundo as respostas às perguntas sobre o que é algo (*tí ésti*), o que é maior (*tí málista*), e o que deve ser feito (*tí prákteon*) (Jâmblico, *VP 82* in Guthrie, 1987, p. 77). Apesar de os *akousmata* do primeiro tipo contarem indagações filosóficas, os do terceiro tipo continham uma série de prescrições que mais pertenciam ao âmbito da superstição que ao da filosofia, como “abster-se de comer favas”,

1. Para essa questão recomendo o livro de Gabriele Cornelli (Cornelli, 2011), que aborda de modo completo todas as questões referentes ao pitagorismo como categoria historiográfica.

2. Adotarei a sigla VP para indicar tanto a Vida de Pitágoras de Porfírio quanto a de Jâmblico. Já à Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres de Diógenes Laércio me referirei como D. L.

3. Emprego as traduções dos fragmentos dos filósofos pré-socráticos de (Kirk, Raven e Schofield, 2005), o qual denotarei por KRS. Em negrito nas citações me refiro ao número do fragmento conforme atribuído por esses autores.

ou “apanhar o que caía das mesas” (ARISTÓTELES fr. 195, D. L. VIII, 34-5, *in* KRS, 2005, p. 239-240)³. Além disso, a autoridade do mestre era incontestada: “a sentença ‘ele disse’ (*autós épha*) tornou-se proverbial na conversação” (D.L. VIII, 46), e tal reverência pode ter contribuído pela atribuição dos desenvolvimentos particulares dos discípulos ao próprio mestre, dificultando ainda mais a diferenciação do que é original do pensamento de Pitágoras e do que é contribuição de seus seguidores. É devido a essa problemática que usarei o termo “pitagóricos” ao longo desse artigo para me referir ao legado de Pitágoras e seus discípulos.

Ademais, dada essa estrutura de transmissão oral mais assemelhada a uma escola de mistérios do que propriamente a um fórum de investigações filosóficas, muito se discutiu a respeito da real posição de Pitágoras como precursor do uso da matemática na investigação de problemas filosóficos. Walter Burkert, um dos principais estudiosos atuais, é cético nesse sentido, tendo dito que Pitágoras não passaria de um xamã e de um hierofante dos mistérios da Grande Mãe (BURKERT, 1972, p. 165), e creditado a Filolau de Crotona (c. 470-385 a.C.) o mérito de ter sido o primeiro pitagórico a introduzir tais ideias (*idem*, p. 225-227); Carl Huffman corroborou essa visão ao afirmar que:

Filolau merece uma posição de destaque na história da filosofia grega, pois foi o primeiro pensador que de forma consciente e temática utilizou ideias matemáticas para a solução de problemas filosóficos. (HUFFMAN, 1988, p. 2).

Por outro lado, há autores que argumentam a favor da primazia de Pitágoras nesse quesito, como Charles Kahn (2007, p. 58-59), posição essa que adotarei nesse artigo. Portanto, estarei sempre fazendo alusão às ideias dos “pitagóricos”, mesmo quando discutir os fragmentos de Filolau, seguindo, assim, o mesmo modo de exposição de (GUTHRIE, 1962).

Além de Filolau, cujos fragmentos são fonte primária, as obras de Aristóteles (384-322 a.C.) consistem na “fonte secundária disponível mais valiosa sobre o pitagorismo antigo” (HUFFMAN, 1988, p.5). É fundamental ressaltar que o pitagorismo original sai de cena no final do século IV a.C., ou seja, exatamente na época de Platão e Aristóteles; com isso, as demais fontes secundárias são tardias, como a doxografia he-

lenística, e misturam material platônico e aristotélico ao original pitagórico, de tal modo que tais fontes devem ser usadas com muita parcimônia. Porém, tomadas em conjunto com outras fontes, as *Vidas de Pitágoras* de Diógenes Laércio, Porfírio e Jâmblico (séc. III d.C.) fornecem algumas informações extremamente importantes.

Nosso ponto de partida para a análise da Harmonia das Esferas no antigo pitagorismo será a seguinte passagem da *Metafísica* de Aristóteles:

(...) os assim chamados pitagóricos se debruçaram sobre a Matemática; eles foram os primeiros a desenvolver essa ciência, e tendo sido nela educados concluíram que seus **princípios** (*archai*) são os **princípios de tudo**. E como os **números** (*arithmoi*) são, por natureza, **os primeiros** entre esses princípios, imaginaram que poderiam detectar nos números muitas semelhanças com as coisas que são e do que vêm a ser – muito mais que no fogo, na água ou na terra (...) e como eles [os pitagóricos] ainda perceberam que os atributos e **razões da escala musical podiam ser expressas em números**, e como todas as demais coisas pareciam ser modeladas por meio de números em sua plena natureza, e que os números pareciam ser as coisas primárias na totalidade da natureza, assumiram que os **elementos** (*stoicheia*) **dos números** eram os elementos de tudo, e que todo o firmamento era uma **escala musical** (*harmonia*) e **número**. (*Met.*, A 5, 985^b24-986^a3)⁴.

Essa passagem é muito instrutiva, já que enumera o corpo de conhecimentos desenvolvido pelos pitagóricos cuja integração resulta no conceito de Harmonia das Esferas. Destaquei em negrito alguns termos que definem esse *corpus*: o primeiro deles se refere aos “princípios (*archai*)” da Matemática, que segundo os pitagóricos são os “princípios de tudo”. O conceito de princípio (*arché*) é característico dos filósofos pré-socráticos, e tem como significado o princípio originário de algo; com isso, quando investigamos a *arché* do universo, estamos buscando suas origens, os componentes fundamentais que o constituem, bem como as regras gerais que regem os fenômenos naturais que nele ocorrem. Dentro desse contexto, é na Matemática que devemos procurar os princípios que originam tudo o que há no universo, sendo que o primeiro entre esses princípios é o número (*arithmos*). Aqui vemos a grande mudança de paradigma em relação aos demais filósofos naturais do período: enquanto a *arché* de todas as coisas era a água

4. Todas as citações de Aristóteles foram extraídas de (Aristóteles, 1984).

para Tales de Mileto, o ar para Anaxímenes, o fogo para Heráclito ou os quatro elementos para Empédocles, para os pitagóricos eram os entes matemáticos. Digo entes matemáticos ao invés do número pois, como relata Aristóteles mais adiante, “os elementos (*stoicheia*) dos números eram os elementos de tudo”; com isso, anterior ainda ao número, ou seja, em nível ainda mais fundamental há o *elemento* do número. Os números desempenham, então, um papel *cosmológico* no pensamento pitagórico, mesmo porque o “firmamento é número”.

Além disso, outro termo importante para nossa análise se refere à “escala musical (*harmonia*)”. Nesse ponto, os pitagóricos foram pioneiros em estabelecer a conexão entre a matemática e a música.

Portanto, seguindo a ordem discutida anteriormente, para podermos compreender o conceito pitagórico da Harmonia das Esferas precisaremos inicialmente investigar como os pitagóricos conceituavam o número; em seguida, discutir o que eles consideravam como os princípios (*archai*) de todas as coisas, para então entendermos seu conceito de universo (*cosmos*) e seu simbolismo quaternário (*tetraktys*). A análise da práxis musical grega, em conjunto com a *tetraktys*, nos orientará na introdução da teoria musical pitagórica. Por fim, reunirei todos esses conceitos para concluir o artigo com o conceito de Harmonia das Esferas. Analisemos agora cada um desses conceitos-chave em detalhe.

5. Para a contestação da tese de que “tudo é número”, ver (Zhmud, 1989).

6. Sensível indicando algo que possa ser apreendido pelos sentidos, como objetos, por exemplo.

7. Emprego aqui o termo “força atrativa” apenas como uma forma de ilustrar o papel da harmonia. O moderno uso desse termo era desconhecido dos gregos.

3. NÚMERO:

A ideia de número surgiu provavelmente em decorrência da necessidade de contagem de objetos. Um exemplo comumente citado – apesar de não haver evidências históricas suficientes para comprovar essa tese – remonta aos pastores de ovelhas, os quais controlariam a quantidade de animais em seus rebanhos por meio da associação de cada animal com uma pedra (Roque, 2012, p. 35). Essa representação arcaica dos números por meio de pedras ou seixos era uma prática característica dos pitagóricos, os quais faziam uso de pontos também; Aristóteles diz que Eurito, discípulo de Filolau, atribuía um número para definir algo (como um homem ou cavalo) ao “imitar as figuras de seres vivos por meio de pedrinhas, assim como alguns formam números por meio de triângulos

ou quadrados.” (*Met.*, N 5, 1092^b11-12). Assim, os pitagóricos representavam os números por meio de arranjos de pontos que formavam figuras geométricas planas, dando origem aos números triangulares, quadrados, oblongos, e assim por diante, conforme mostrados nas Figuras 1, 2 e 3:

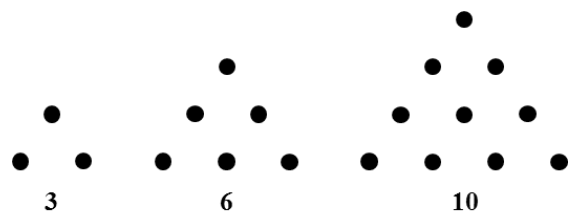


Fig. 1: Números triangulares

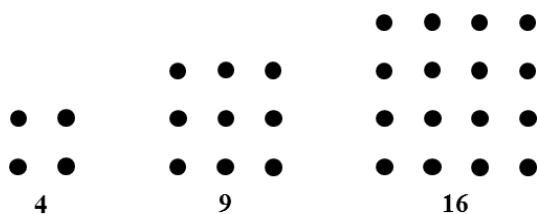


Fig. 2: Números triangulares

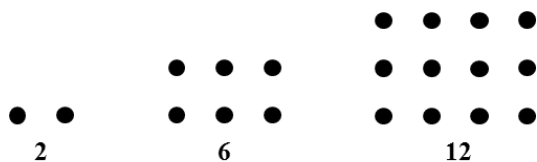


Fig. 3: Números oblongos

Além da representação plana dos números, que fora fundamental para o desenvolvimento inicial da aritmética, havia também os chamados números sólidos, formado por figuras geométricas espaciais; assim, 4 seria o primeiro número sólido, pois a o sólido geométrico mais simples é uma figura formada por um plano definido por três pontos e mais um ponto fora dele, o tetraedro; já o 8 seria o primeiro número cúbico:

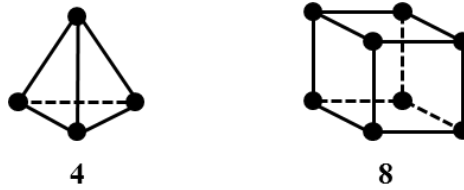


Fig. 4: Números sólidos

Deste modo, para os pitagóricos os números não eram somente entes aritméticos, mas geométricos também; com isso, os números possuíam extensão (*megethos*). No sentido aristotélico, por extenso entende-se algo que é “mensurável” e “que é divisível em partes contínuas”, sendo que “o contínuo é o que pode ser dividido em partes que também são divisíveis” (*Sobre o céu*, A 1, 268^a7). Em oposição ao contínuo há o discreto, que se refere a partes que não podem ser divididas; deste modo, quando contamos uma dada quantidade de pedras, por exemplo, estamos fazendo menção a uma coleção discreta de elementos. É curioso que na matemática pitagórica o mesmo ente que descreve o discreto – o número – descreve o contínuo, já que “o que é contínuo em uma dimensão é chamado de comprimento, em duas dimensões, largura, em três, profundidade” (*Met.*, Δ 14, 1020^a10-12). Note-se aqui a associação dos números 1, 2 e 3 às noções geométricas de comprimento, largura e profundidade.

Na última passagem de Aristóteles supracitada, o que define uma dimensão é a linha; um ponto, em si, não possui dimensão. Ao adicionarmos um ponto a outro não obtemos uma linha; porém, os extremos de uma linha são delimitados por pontos. Do mesmo modo, uma superfície é delimitada por linhas, ao passo que um sólido é delimitado por superfícies. Todas essas figuras geométricas são geradas a partir da unidade. A própria unidade (*monas*) – ente aritmético – é concebida como um “ponto sem posição” possuindo “extensão espacial” (*ibid.*, M 6, 1080^b20; M 8, 1084^b25) – sendo equivalente, portanto, a um ente geométrico. Aristóteles afirma que a própria definição de ponto, para os pitagóricos, era de “uma unidade que possui posição” (*Sobre a alma*, A 5, 409^a5), novamente salientando a conexão entre a natureza aritmética e geométrica dos números. Essa questão aritmético-geométrica é também abordada por Espeusipo, sobrinho de Platão e seu sucessor como líder da Academia:

(...) a unidade é um ponto, dois uma linha, três um triângulo e quatro uma pirâmide: todos esses são primários e fontes das coisas que são da mesma categoria que cada uma delas. (WATERFIELD, p. 113).

Esse trecho provém de um pequeno tratado intitulado *Sobre os Números Pitagóricos*, preservado em uma obra atribuída à Jâmblico, chamado *Teologia da Aritmética*. Segundo essa obra atribuída a Jâmblico, Espeusipo baseou-se nos escritos pitagóricos, em particular, nos de Filolau (idem, p. 111-112); então, o conteúdo deste pode remontar a concepções originais do antigo pitagorismo. De qualquer modo, se levarmos em conta a noção de limite com a sequência geométrica apontada acima, obtemos uma progressão aritmética, já que, após o ponto, que corresponde à unidade, surge a linha, limitada por dois pontos; depois, vem superfície, cuja configuração mais simples é a do triângulo, que é limitado por três linhas. Na sequência vem o sólido que, em sua configuração mais simples, o tetraedro, é limitado por quatro superfícies. Obtemos, assim, a sequência 1, 2, 3, 4, o que novamente nos mostra a correlação dos números com as figuras geométricas:

A unidade desempenha um papel essencial na geração dos números pois, segundo Aristóteles, os pitagóricos assu-

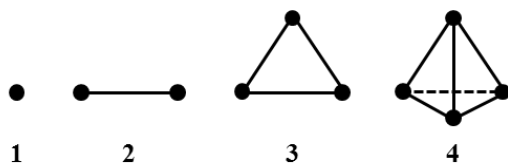


Fig. 5: Sequência aritmético-geométrica dos quatro primeiros números e figuras geométricas

miam que “número é uma pluralidade de unidades” (*Met.*, I 1, 1053^a30). Há outras definições de autores posteriores para o número, mas nos ateremos a essa dada por Aristóteles (vide, em particular, Heath, 1981, p. 69-70, para outras definições).

Além desses conceitos fundamentais acerca do número, os pitagóricos também avançaram no estudo das relações entre eles. Em particular, o filósofo neoplatônico Proclo, no sumário de seu *Comentário sobre o Livro I dos Elementos de Euclides* (séc. IV d.C.), atribui a Pitágoras a teoria da proporção (*tôn analogôn*) ou dos proporcionais (*tôn anà lógon*) (Heath,

1981, p. 85). Tanto o termo grego *ánalogiôn* quanto *ánà lógon* tem a palavra *logos* como raiz, que significa *razão*; portanto, em notação moderna, se a e c são dois números naturais quaisquer, a razão entre eles é dada por $\frac{a}{c}$ ou $\frac{c}{a}$. A relação de proporcionalidade se dá quando a razão entre dois dados números a e b é igual à razão dois outros números c e d ; assim, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, e dizemos que “ a está para b assim como c está para d ”.

Proporções são úteis também para se definir o importante conceito de *média* (*mésotès*), que permite o cálculo de um determinado termo de uma sequência numérica a partir de suas relações com os demais termos da sequência. Consideremos a sequência de três números em ordem crescente, a, b, c ; a distância ou *excesso* entre os termos a e b é $b - a$, e entre b e c é $c - b$. Se a distância entre a e b for igual à distância entre b e c , podemos obter uma relação matemática que determina b em termos de a e c , chamada de *média aritmética*:

Se as distâncias acima não forem iguais, ainda assim podemos estabelecer novas relações de proporcionalidade; se tomarmos a razão entre as distâncias apontadas, $\frac{b-a}{c-b}$, podemos compará-la às razões entre a e b , e entre b e c , por exemplo; com isso, obtemos a *média geométrica*, $b = \sqrt{ac}$, e a *média harmônica*, $b = \frac{2ac}{a+c}$, cuja descoberta fora atribuída à Pitágoras. Após algumas manipulações algébricas, podemos encontrar o termo b a partir das fórmulas apresentadas, conforme a tabela a seguir:

4. PRINCÍPIOS

Nome da Média	Definição	Fórmula para b
Aritmética	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$	$b = \frac{a+c}{2}$
Geométrica	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{c}$	$b^2 = ac$
Harmônica	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$	$b = \frac{2ac}{a+c}$

Tab. 1: As três médias atribuídas a Pitágoras

Voltemos agora ao trecho citado de Aristóteles no qual os pitagóricos “assumiram que os elementos dos números eram os elementos de tudo” (*Met.*, 986^a1). Ou seja, quais são os princípios (*archai*) de todas as coisas segundo os pitagóricos? Filolau dá a resposta:

Fr. 6, Estobeu, *Anth. I, 21, 7d*: (...) não era possível a qualquer das coisas, que existem e que nós conhecemos, o terem nascido, sem a existência do ser daquelas coisas de que foi composto o **universo** (*cosmos*), os **limitantes** (*perainonton*) e os **ilimitados** (*apeiron*). E, visto esses **princípios** (*archai*) existirem sem serem semelhantes ou da mesma espécie (...). (KRS, 2005, p. 345).

Para Filolau, os princípios (*archai*) do universo são os *ilimitados* (*apeiron*) e *limitantes* (*perainonton*). São esses os constituintes primários, dos quais, posteriormente, surgirão os números. Mas, o que seriam esses princípios? Filolau não explicita os significados destes termos, e nem dá exemplos dos mesmos nos fragmentos disponíveis. Uma analogia com o sistema cosmológico de Anaximandro pode ser útil na elucidação do papel dos ilimitados e dos limitantes:

Hipólito, *Ref. I, 6, 4-5*: Os corpos celestes nascem como círculos de fogo separados do fogo do mundo, e cercados de ar. Há respiradouros, determinadas aberturas como as da flauta, aos [através dos] quais aparecem os corpos celestes (...). (ibid., p. 135).

O fogo que envolve o mundo seria o análogo do ilimitado (não no sentido do *to apeiron* usado originariamente por Anaximandro), ao passo que os “respiradouros” seriam como orifícios no céu pelos quais passam a luz desse fogo, representando assim as estrelas. Esses respiradouros seriam os análogos dos limitantes, já que, sem eles, não haveria nem estrelas, nem corpos celestes diferenciados do círculo de fogo original. Os ilimitados seriam, então, algo contínuo e indiferenciado, e seria somente com a intermediação dos limitantes que teríamos entes diferenciados e individualizados.

Após os ilimitados e limitantes, Aristóteles nos diz que os elementos (*stoicheia*) do número são “o par e o ímpar, do quais o primeiro é ilimitado, e o último, limitado; e a unidade procede de ambos (pois é tanto par quanto ímpar), ao passo que o número procede da unidade” (*Met.*, A 5, 986^a18-19). Par e ímpar consistem em duas espécies de número segundo Filolau:

Fr. 5, Estobeu, *Anth. I, 21, 7c*: De fato, o número tem duas espécies que lhe são peculiares, a ímpar e a par, e uma terceira, derivada da combinação dessas duas, a **par-ímpar**. Cada uma

das duas espécies tem muitas formas, que cada coisa em si revela. (KRS, 2005, p. 344).

A unidade, por sua vez, é par-ímpar, pois possui ambas as qualidades de par e de ímpar. Sabemos atualmente que a unidade é um número ímpar, e Guthrie argumenta que tal erro fora cometido pelos gregos pelo fato de eles não terem conhecido o zero (Guthrie, 1962, p. 240).

Para entendermos as correlações ímpar/limitado e par/ilimitado, consideremos o seguinte comentário de Aristóteles:

Ademais, os pitagóricos identificam o ilimitado com o par. Isso, pois, dizem eles, quando é cercado e delimitado pelo ímpar, dá origem a coisas com o elemento ilimitado. Uma indicação disso é o que acontece com números. Se *gnômons* forem colocados ao redor da unidade, e sem a unidade, na primeira construção a figura resultante é sempre igual, ao passo que, na segunda, é sempre diferente. (*Física*, Γ, 203^a10-15).

Vamos ilustrar esse processo através da representação pitagórica do número. Como vimos, a unidade é representada por um ponto; se colocarmos um *gnômon* (uma figura geométrica na forma de um esquadro) ao redor da unidade veremos que a figura resultante é um quadrado. Se colocarmos um segundo *gnômon* nessa figura, o resultado continuará a ser um quadrado, e assim por diante, conforme a figura a seguir.

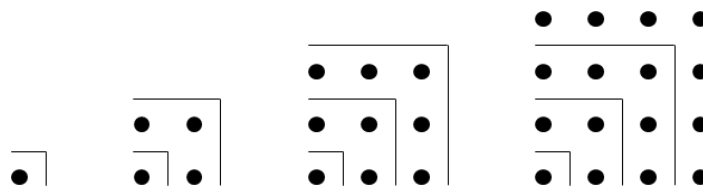


Fig. 6: Sequência de números quadrados com gnômons ímpares

Nesta figura vemos que, excetuando-se a unidade, que é par-ímpar, o *gnômon* conterà três pontos (que é ímpar) e o resultado é o quatro, que é um número quadrado; o *gnômon* seguinte na sequência contém cinco pontos (ímpar), gerando um novo número quadrado, o nove. O próximo *gnômon* conterà sete pontos (novamente ímpar), e o número figurado resultante é o dezesseis, outro quadrado, e assim sucessivamente. Portanto, a adição sucessiva de *gnômons* com quantidades

ímpares de pontos à unidade sempre gerará a mesma figura, o quadrado. Se tomarmos as razões da altura do quadrado com sua largura, para cada quadrado obtido, veremos que o resultado será sempre igual à unidade. Como a unidade é um ponto e, portanto, limitado, podemos então entender a associação entre o ímpar e o limitado (já que cada *gnômon* possui quantidade ímpar de pontos).

No caso do par, o processo é o mesmo. Porém, ao invés de partirmos da unidade, iniciamos como o dois. O primeiro *gnômon* adicionado contém quatro pontos, ou seja, uma quantidade par, e os *gnômons* seguintes também possuem número par de pontos, conforme a figura a seguir.

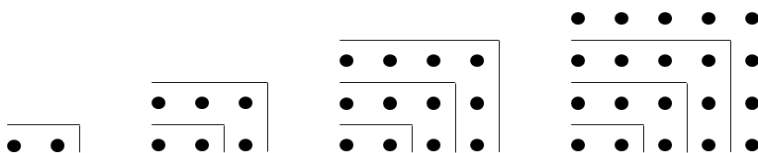


Fig. 7: Sequência de números quadrados com *gnômons* pares

As figuras resultantes em cada passo são retângulos; note-se que, se tomarmos as razões entre a altura e a largura de cada um deles, cada um dos valores obtidos será sempre diferente: 1:2 para o primeiro caso, 2:3 para o segundo, 3:4 para o terceiro, e assim sucessivamente. Ou seja, não há uma razão comum como no caso dos números quadrados, mas sim, uma infinidade de resultados diferentes. Isso nos auxilia a entender porque o par está associado ao ilimitado.

A geração dos números, então, se dá pela imposição do limite (*peras*) sobre o que é ilimitado (*apeiron*), que estão associados ao ímpar e ao par, respectivamente. Da combinação do par e do ímpar como elementos (*stoicheia*) do número surge como resultado a unidade, conforme menciona Aristóteles na passagem supracitada (*Met.*, A 5, 986^a18-19). E, da unidade, surge o número que, conforme discutimos na seção anterior, é “uma pluralidade de unidades”. E dos números procede tudo o que existe no universo: Aristóteles diz que os pitagóricos consideravam que “o número era a substância de tudo”, e “princípio tanto para a matéria quanto para a formação de suas modificações e estados”; além disso, “o firmamento como um todo, como foi dito, é formado por números” (*ibid.*, A 5, 987^a20; A 5, 986^a17; A 5, 986^a20). Por “tudo” devemos considerar não somente algo físico, sensível, mas também, conceitos como a “justiça”, “a alma e a razão”, a

“oportunidade”, e o “casamento”, por exemplo (*ibid.*, A 5, 985^b29; M 4, 1078^b23). Os números não existiam à parte do mundo, como entes abstratos sujeitos apenas à razão (tal como na matemática que conhecemos), mas eram antes entes reais, sensíveis:

(...) os pitagóricos, ao perceberem que corpos sensíveis possuíam muitos atributos dos números, supuseram que as coisas reais eram números – não números separados, mas sim números que constituem as coisas. (*ibid.*, N 3, 1090^a20-22)

Além de ser a causa material e formal de todas as coisas, o número possuía, também, um papel epistemológico essencial, já que

Fr. 4, Estobeu, *Anth. I, 21, 7b*: (...) o certo é que todas as coisas que se conhecem têm **número**; pois sem ele nada se pode pensar ou conhecer. (KRS, 2005, p. 344)

5. COSMOS

Conforme discutimos anteriormente, o número ocupa uma posição de destaque no pensamento pitagórico, já que seus princípios são os fundamentos de tudo o que há no universo. Portanto, cosmologia e matemática são dois temas profundamente correlacionados no pensamento pitagórico, e não há como entender uma sem a outra. Para entendermos o pensamento cosmológico pitagórico, analisemos um fragmento de Filolau citado por Diógenes Laércio:

Fr. 1, Diógenes Laércio, VIII.85: A natureza do **universo** (*cosmos*) foi **harmonizada** (*harmochthe*) a partir de **ilimitados** (*apeiron*) e de **limitadores** (*perainonton*) – não apenas o universo como um todo, mas também tudo o que nele existe. (KRS, 2005, p. 342)

No texto em grego, Filolau faz uso do termo *cosmos* para designar o universo, termo esse que empregamos até os dias atuais. Porém, esse termo tinha uma conotação ainda mais abrangente na Grécia Antiga, pois, além de significar um “arranjo ordenado” (BARNES, 1997, p. 20), também denotava beleza. Assim, o “*cosmos* é o universo, a totalidade das coisas. Mas é também o universo *ordenado* e o universo *elegante*” (*ibid.* p. 21). A ordem subjacente do cosmos mostra que ele pode ser explicável, ao passo que sua “elegância” o torna digno de ser

contemplado e estudado. E esse cosmos era composto por dois princípios, os ilimitados e limitadores, que são contrários:

Fr. 6, Estobeu, *Anth. I, 21, 7d*: (...) E, visto esses **princípios** (*archai*) existirem sem serem semelhantes ou da mesma espécie, teria sido impossível para eles o serem ordenados em um universo, se a **harmonia** não tivesse sobrevivido – fosse qual fosse o modo com ela se gerou. As coisas que eram semelhantes e da mesma espécie não precisavam de harmonia, mas sim, as que eram dessemelhantes e de diferente espécie e de ordem desigual – necessário era para tais coisas o terem sido intimamente unidas pela **harmonia**, se é que hão de manter-se juntas em um universo ordenado. (KRS, 2005, p. 345)

Conforme Guthrie bem observa, os ilimitados e limitadores foram “postos pelos pitagóricos na origem das coisas como os dois princípios contrastantes pelos quais o mundo evoluiu” (GUTHRIE, 1962, p. 207). Tudo o que há no universo, então, é formado por esses dois princípios opostos, que somente podem ser combinados (*harmochthe*) por meio de um terceiro princípio, o da *harmonia*. Etimologicamente, harmonia significa “o acordo, a junção das partes’, não raro antagônicas, mas que, ‘unidas’, passam a formar um todo harmônico” (BRANDÃO, 2008, p. 480). Na mitologia grega, Harmonia era uma deusa, e expressava por sua origem o próprio significado de seu nome:

É o caso da jovem Harmonia, que, filha de pais antagônicos, Ares e Afrodite, em se casando com Cadmo, de origem bárbara, realizará, ela que é grega, na *coniunctio oppositorum*, na “conjunção dos opostos”, a *coincidentia oppositorum*, “a harmonia dos opostos”. (Idem).

Para os pitagóricos, a harmonia age, portanto, como um elemento ligante, uma espécie de “força atrativa” que une os contrários para formar um terceiro elemento, o número, que, por sua vez, forma todas as coisas. Parafraseando Kahn, a harmonia tem a função de “produzir a unidade a partir da multiplicidade, colocando elementos diversos e discordantes em concordância mútua” (KAHN, 2007, p.43). A harmonia, portanto, comparece como um elemento cosmológico no pensamento pitagórico. Veremos as demais significações do conceito de harmonia na Seção VII.

Após os números serem gerados pela combinação ou acordo dos ilimitados com os limitantes, como se daria a geração

dos corpos a partir dos números? Conforme mencionamos na seção anterior, os pitagóricos consideravam que “o número era a substância de tudo” (ibid., A 5, 987^a20); porém, como Aristóteles observa, “[d]evido ao fato do ponto ser o limite e o extremo da linha, a linha do plano, e o plano do sólido, há aqueles que sugerem a existência de coisas reais desse tipo” (ibid., N 3, 1090^b5-7). Com isso, as formas geométricas teriam também uma consistência que não seria meramente formal, mas também material, pois “[a]lguns pensam que o limite dos corpos, isto é, superfície, linha, ponto e unidade são substâncias, ao invés do corpo ou sólido.” (ibid., Z 2, 1028^b16-17). Portanto, o ponto, a linha e a superfície parecem preceder o sólido e o corpo na escala de substâncias mais fundamentais:

[p]or outro lado, porém, um corpo é menos de uma substância do que uma superfície, e a superfície menos que uma linha, e uma linha, menos que uma unidade e um ponto. Pois um corpo é limitado por esses elementos; e estes são concebidos como sendo capazes de existir sem um corpo, mas um corpo não pode existir sem eles. (ibid., B 5, 1002^a4-8).

O trecho acima de Aristóteles sugere que a sequência geométrica ponto – linha – superfície – sólido parece levar à geração dos corpos; porém, Huffman assinala que essa sequência geométrica é uma sugestão platônica, e não propriamente pitagórica (HUFFMAN, 1988, p. 13, nota 32). Guthrie, entretanto, assinala que os autores posteriores não devem ter ido mais além do que Aristóteles no caso específico da geração das figuras geométricas a partir dos números, e podem revelar detalhes adicionais do esquema (GUTHRIE, 1962, p. 260). Estou de acordo com o modo de exposição de Guthrie, pois, como discutimos na Seção III, a dedução da sequência geométrica a partir da aritmética é imediata e fácil de ver se usarmos a representação figurada dos números, conforme mostrado na Figura 5. Portanto, me parece claro que, mesmo tendo sofrido a influência de elementos platônicos, a geração dos sólidos a partir dos números, conforme relatada por autores posteriores a Platão, pode bem representar a concepção dos próprios pitagóricos.

A tridimensionalidade dos corpos está diretamente relacionada com o número 4, já que no mínimo quatro triângulos são necessários para se construir um tetraedro; o mesmo argumento vale para os pontos, já que precisamos de três pontos para

formar a superfície de base, e mais um ponto fora desta para completar esse sólido (vide Figuras 4 e 5). Ademais, o sólido é o princípio da corporeidade, pois todo corpo possui três dimensões espaciais, fato já conhecido de Aristóteles (*Sobre o céu*, A 1, 268^a 7), e isso explica a importância cosmológica do número 4 – a *tétrade* ou quaternário – para a filosofia pitagórica.

Para finalizar esta seção, vamos considerar o sistema astronômico pitagórico, sem paralelo na cosmologia dos filósofos jônicos. Os pitagóricos foram os primeiros a propor um sistema astronômico no qual a Terra não se situava no centro, ou seja, seu sistema não era geocêntrico. Para eles, a Terra era um planeta móvel como os demais; Aécio detalha esse sistema e o atribui a Filolau, o qual está ilustrado na Figura 8:

Filolau coloca o fogo em redor do centro do universo e chama-lhe “lareira do mundo”, “casa de Zeus”, “mãe dos deuses”, “altar, vínculo e medida da natureza”. (...) Mas diz ele que o centro é, por natureza, primário, e que em redor do centro dançam dez corpos divinos – em primeiro lugar, a esfera dos astros fixos, depois os cinco planetas, a seguir a estes o Sol, depois a Lua, depois a Terra, depois a anti-Terra, e por fim o fogo da “lareira”, que tem o seu posto em redor do centro. (AETIUS, *II*, 7, 7 apud KRS, 2005, p.361).

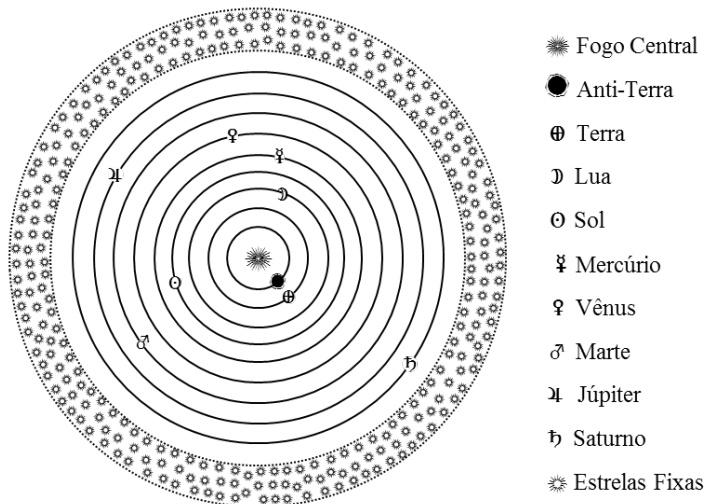


Fig. 8: O modelo de cosmos pitagórico

O centro desse sistema era então ocupado pelo fogo, já que, segundo eles, “o corpo mais precioso deveria ocupar o posto mais precioso, e o fogo é mais precioso que a terra” (*So-*

bre o céu, B 13, 293^a30). Em relação à anti-Terra (*antichthon*), seria um corpo celeste como a Terra e, segundo Aristóteles,

(...) eles [os pitagóricos] dizem que os corpos que se movem nos céus são dez, pois, como os corpos visíveis são apenas nove, inventaram um décimo corpo para atingir esse número – a “anti-Terra”. (*Met.*, A 5, 986a9-10).

Com isso, a anti-Terra teria sido proposta como um modo de “fixar” o número dos corpos celestes do cosmo em dez, que era o número mais importante para os pitagóricos, como veremos na próxima seção. Os pitagóricos usavam de argumentos bem elaborados para explicar o porquê de o fogo central e a anti-Terra serem invisíveis para nós; Huffman nos explica que:

nós nunca vemos nem o fogo central nem a anti-Terra pois a Terra gira uma vez ao redor de seu eixo enquanto se move ao redor do Sol, mantendo assim nosso lado da Terra sempre virado para o lado oposto do centro. (HUFFMAN, 1993, p. 253).

6. TETRAKTYS

O sistema astronômico baseado no número dez é apenas um exemplo da importância desse número para os pitagóricos. Segundo as palavras de Aécio,

[e] ele [Pitágoras] diz que o ponto de partida do Número é a Década; isso, pois todos os Gregos e todos os bárbaros contam até dez, e quando chegam a dez retornam à unidade. Diz ele ainda que o poder do dez está no quatro e na tétrade. (...) (AETIUS, *Plac. i. 3*, apud GUTHRIE, 1987, p.307).

Esse “poder do dez”, que “está na tétrade”, pode ser entendido do seguinte modo: dez é um número triangular, representado de forma figurada por meio do seguinte diagrama:

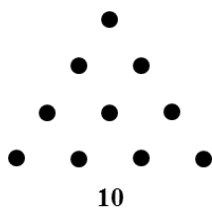


Fig. 9: A *tetraktys* pitagórica

Se tomarmos as linhas dessa representação geométrica vemos que as mesmas formam uma sequência numérica de quatro números, 1, 2, 3 e 4; portanto, o número dez também é gerado pela tétrade, já que $1+2+3+4=10$, e é por essa razão que a década também recebe o nome de *tetraktys*, ou quaternário.

Deste modo, a década não somente é a base do sistema numérico dos antigos gregos, mas contém também os quatro primeiros números naturais e, por consequência, a sequência da geração dos primeiros elementos geométricos, que, conforme vimos, são o ponto (1), a linha (2), o triângulo (3) e o tetraedro (4). Esses quatro números geram o dez, que corresponde ao número de corpos celestes do cosmos; Aristóteles diz que “o número 10 é considerado como perfeito e compreende a totalidade da natureza essencial dos números” (*Met.*, A 5, 986^a7-8).

Ademais, a *tetraktys* tornou-se uma espécie de símbolo sagrado para os pitagóricos, já que em seu juramento diziam: “por ele [Pitágoras], que transmitiu à nossas almas a *tetraktys*, fonte e raiz da Natureza eterna” (Porfírio, *VP* 20; Aetius, *Plac. i. 3*; *Os Versos áureos de Pitágoras*, in Guthrie, 1987, p. 127, 164 e 307). Deste modo, podemos inferir que a *tetraktys* consiste não somente na chave numérica do sistema matemático-cosmológico dos pitagóricos, como também se tornou o símbolo pitagórico por excelência.

7. A HARMONIA COMO ESCALA MUSICAL

Uma vez discutidos os conceitos fundamentais do papel do número e da cosmologia no pensamento pitagórico, passemos agora às suas concepções musicais; para tanto, tomemos como ponto de partida a prática musical grega para ilustrar alguns conceitos fundamentais.

Na tradição musical da Grécia Antiga os instrumentos de corda desempenhavam um papel central; a lira, em particular, tinha origem divina. O mito conta que o deus Hermes teria construído a primeira lira partir da carapaça de uma tartaruga terrestre e das tripas de duas novilhas que havia furtado do rebanho de Admeto, guardado por Apolo (BRANDÃO, 2005, p.192-193). Os detalhes da construção desse instrumento estão descritos no *Hino Homérico a Hermes*, fato esse que demonstra sua antiguidade, uma vez que tais hinos tem sua composição datada entre os séculos VIII e VI a.C.; porém, a existência de instrumentos similares na Suméria e Babilônia, datados já do terceiro século a.C., sugerem que as liras gregas podem ser de uma antiguidade ainda maior (MATHIESEN, 1999, p. 33, n28). O formato básico dessa *chélys lýra* (já que era construída com a carapaça da tartaruga), está apresentado na Figura 10.

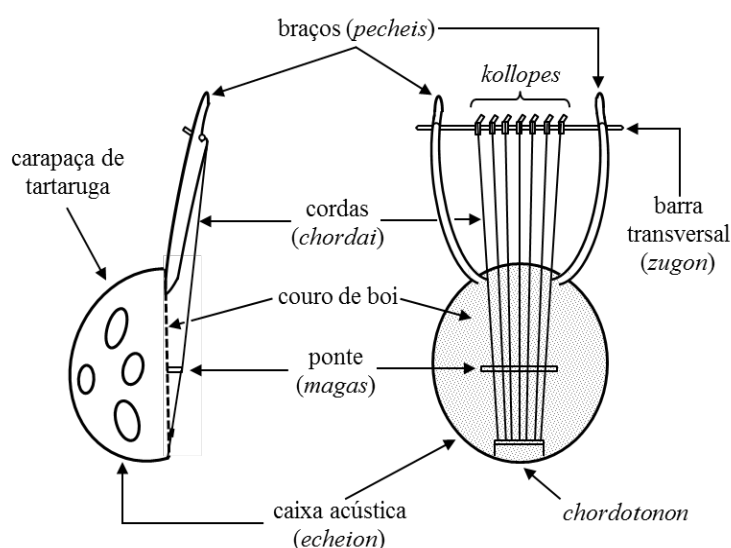


Fig. 10: A *chélys lýra* ou heptacórdio (Adaptado de Mathiesen, 1999, p. 239)

Segundo o Hino Homérico a Hermes 41-56, a *chélys lýra* era formada por dois braços (*pecheis*) afixados em uma caixa acústica ou de ressonância (*echeion*), composta pela carapaça de uma tartaruga terrestre na qual era afixada, na parte ventral, uma película de couro de boi (*dérma bóos*), que atuava como membrana ressonante. Sobre essa membrana era montada uma barra chamada de ponte (*magas*), que comunicava a vibração das cordas para a caixa de ressonância. As cordas da

chéllys eram em número de sete, feitas de tripas de ovelha, em geral, e eram afixadas na base do echeion por meio de uma barra rígida, o chordotonon, e estendiam-se até uma barra transversal (zugon), que conectava os dois braços da chéllys. No zugon cada corda era enrolada e anexada a uma espécie de cravelha (kollops), que permitia ao músico esticar ou relaxar as cordas da lira, e o instrumento era tocado por meio de uma palheta (plektron) (idem, p. 236-243).

Uma vez tocada pelo *plektron*, a corda vibrava com uma dada frequência, que podia ser regulada por meio do ajuste da tensão na corda pelo *kollops* correspondente; com isso, eram inúmeras as frequências que as cordas da lira podiam fornecer, formando uma gama contínua de alturas sonoras. Como, então, se poderia selecionar um número finito de alturas possíveis para se produzir música com a lira, ou com qualquer outro instrumento? A resposta se encontra no próprio *Hino Homérico a Hermes*, que qualifica as sete cordas da lira como sendo *consonantes*. Dois sons musicais são chamados de consonantes (*sýmphonoi*) se provocarem uma sensação agradável ao ouvido ao serem tocados simultânea ou sucessivamente; caso contrário, tais sons são denominados *dissonantes* (*diáphonoi*). Essa relação entre cada par de sons de diferentes alturas é chamado de intervalo (*diastema*); assim, os intervalos são consonantes se os sons constituintes assim o forem, ou então dissonantes, no caso contrário. Portanto, quando o *Hino Homérico a Hermes* faz menção às “sete cordas consonantes”, quer dizer que os sons produzidos pelas cordas formam intervalos consonantes.

A prática musical mostra que quase todos os intervalos musicais são dissonantes, e apenas um pequeno número deles são consonantes. Esse pequeno número de intervalos consonantes ditava quais notas deveriam ser usadas para produzir música; o problema, então, residia em encontrar tais intervalos, o que definia o chamado *problema da consonância*. Esse conjunto de notas formaria *escala musical*, que é também um dos significados de harmonia: “todo o firmamento era uma escala musical (*harmonia*) e número”, conforme trecho já mencionado da *Metafísica* de Aristóteles (*Met.*, A 5, 986^a3).

Essa breve análise das propriedades de um instrumento grego típico, a lira, nos introduziu o importante problema da consonância. Encontrar uma tensão propícia para que as sete

cordas fossem consonantes era uma tarefa empírica: ia-se efetuando o ajuste de tal modo a provocar uma sensação auditiva agradável, até se encontrar os intervalos consonantes. O olhar pitagórico, porém, buscava as respostas da ordem da natureza na matemática; então, era de se esperar que sua formulação das consonâncias se apoiasse, também, na própria matemática. Conforme discutimos na Seção IV, Filolau diz que “todas as coisas que se conhecem têm número”; com isso, os sons musicais também poderiam ser conhecidos por meio de números. Ademais, como o conceito de consonância envolve a relação entre dois sons, e os sons têm número, a consonância, sob o ponto de vista matemático, deveria ser então expressa por meio de uma relação entre dois números; Aristóteles nos diz que, para os pitagóricos, “a harmonia [como escala musical] é uma *razão* entre números” (*Met.*, N 5, 1092^b14). Deste modo, nossa pergunta seguinte é: quais são esses números que definem a escala, e como podem ser obtidos?

Nesse ponto, a contumaz névoa que sempre obscurece o pensamento pitagórico comparece novamente. Primeiramente, há controvérsias em relação à descoberta dos intervalos consonantes como razões entre pequenos números por Pitágoras, já que há argumentos a favor e contra essa suposição (GUTHRIE, 1962, p. 221-222). Em segundo lugar, as fontes secundárias que comentam tal descoberta descrevem experimentos que são fisicamente impossíveis, como a associação dos sons consonantes com as batidas de martelos de diferentes massas em uma bigorna de ferreiro, por exemplo (*idem*, p. 223-224); (BURKERT, 1972, 374-376). Porém, há um experimento que, de fato, Pitágoras pode ter realizado, já que é fisicamente exequível: trata-se do monocórdio ou *cânon*, instrumento cuja invenção Diógenes Laércio atribui ao próprio Pitágoras (D.L. VIII, 12). A Figura 11 ilustra o princípio de funcionamento desse aparato.

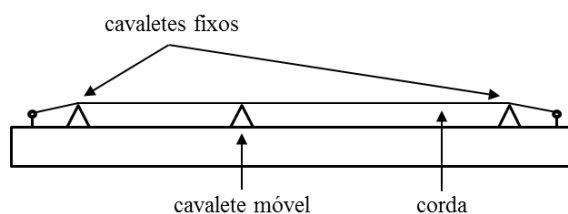


Fig. 11: O monocórdio ou cânnon

A corda é presa em duas extremidades, e dois cavaletes fixos permitem definir os extremos da corda vibrante; um terceiro cavalete, móvel, permite dividir a corda em dois segmentos sem, entretanto, alterar a tensão na mesma. Um intervalo musical pode ser produzido quando os dois segmentos da corda são tocados simultânea ou sucessivamente; porém, como produzir um intervalo consonante, já que o cavalete móvel pode assumir *qualquer* posição entre os dois cavaletes fixos? A tarefa seria extremamente árdua se o operador do experimento procurasse tais intervalos consonantes por meio de tentativa e erro; portanto, é mais razoável supor que o mesmo tenha usado algum princípio como guia. E, em se tratando de um pitagórico, a *tetraktys* seria esse princípio: como vimos, esta é a chave de seu sistema filosófico-matemático. Assim, os números componentes da *tetraktys*, 1, 2, 3 e 4 deveriam orientar o comprimento de cada segmento de corda de algum modo.

Vejamos como isso pode ser feito. Primeiramente, construímos uma escala de medida para os comprimentos dos segmentos de corda; para o comprimento total atribuímos o número 12, já que esse é o menor número divisível por 2, 3 e 4, os componentes da *tetraktys*. Dividamos a escala em 12 partes iguais, sendo que o início dela se situa no cavalete fixo à esquerda. Se dividirmos 12 por 2, 3 e 4, obteremos como resultado a sequência 6, 4 e 3, respectivamente; marquemos esses pontos na escala. Se posicionarmos o cavalete móvel na posição 6, estaremos dividindo a corda em dois segmentos de igual comprimento; na posição 4, o cavalete móvel divide a corda em dois segmentos com comprimentos de 4 e 8 unidades, já que $4+8=12$. Por último, na posição 3, o cavalete móvel divide a corda em dois segmentos com comprimentos de 3 e 9 unidades, pois $3+9=12$. Juntando todos os comprimentos de segmentos que acabamos de obter, formamos a sequência 6, 8, e 9. Uma vez obtidos esses números, passemos ao experimento, que consiste em tocar, primeiramente, um dos segmentos de corda obtidos pelas divisões acima e, logo em seguida, tocar a corda inteira. Da audição sucessiva dos sons verificamos que os intervalos mencionados são consonantes; as razões numéricas são calculadas em relação ao comprimento total da corda. Os resultados estão apresentados na Tabela 2 abaixo. Excluí desta tabela os segmentos com comprimentos de 3 e 4 unidades pois geram intervalos múltiplos da oitava,

já que suas razões numéricas são, respectivamente, dadas por 1:4 (*bis diapason*) e 1:3 (*diapason diapente*).

Comprimento do segmento tocado (unidades arbitrárias)	Razão numérica (segmento: corda inteira)	Nome da consonância
9	9:12 = 3:4	quarta (diatessaron)
8	8:12 = 2:3	quinta (diapente)
6	6:12 = 1:2	oitava (diapason)

Tab. 2: As consonâncias pitagóricas

Portanto, os intervalos relevantes são os três mencionados na Tabela 2 que, juntamente com o *unísson* (razão 1:1) formam as chamadas *consonâncias pitagóricas*: 1:1, 1:2, 2:3 e 3:4. Apesar de haver outras consonâncias possíveis – como a *terça maior*, 4:5, por exemplo – os pitagóricos não as considerariam, já que o número 5 não está incluso na *tetraktys*. Mesmo assim, é fundamental ressaltar que as consonâncias pitagóricas formaram a base de qualquer escala musical concebida da Antiguidade à Renascença.

O modo como deduzi as consonâncias pitagóricas se deu em função das razões entre os comprimentos dos segmentos de corda; na notação moderna, porém, se usa a razão de frequências de vibração da corda. Nesse caso, as razões numéricas obtidas são invertidas, já que o comprimento da corda é inversamente proporcional à sua frequência de vibração. Com isso, as consonâncias pitagóricas, na notação como razão de frequências, são 2:1 para a oitava, 3:2 para a quinta e 4:3 para a quarta, as quais passarei a empregar daqui por diante.

Os comprimentos dos segmentos usados para determinar as consonâncias – 6, 8, 9 e 12 – guardam uma especial relação entre si. Usando as fórmulas dadas na Tabela 1, é fácil mostrar que de 6 e 12 a média aritmética é igual a 9, ao passo que a harmônica é igual a 8. Além disso, as razões entre os números dessa sequência fornecem as consonâncias pitagóricas: $8:6 = 12:9 = 4:3$, $9:6 = 12:8 = 3:2$, e $12:6 = 2:1$. Há, entretanto, uma razão numérica nessa sequência, 9:8, que não figura entre as consonâncias pitagóricas; assim, uma cuidadosa inspeção entre as razões numéricas deduzidas nos revelará o significado desta última. Para tanto, observemos inicialmente as seguintes propriedades das razões numéricas: tanto a multiplicação

quanto a divisão de duas razões gera uma terceira razão numérica; assim, podemos gerar novos intervalos para compor uma escala musical por meio dessas operações! A multiplicação de duas razões numéricas será chamada de *adição* de dois intervalos musicais, ao passo que a divisão das razões será chamada de *diferença* ou *subtração* de dois intervalos musicais.

Voltando à nossa questão inicial, tomemos os intervalos de quinta e de quarta, e façamos a subtração desses intervalos; o resultado é a razão 9:8, pois $\frac{5}{4} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$. Adicionando esse novo intervalo à quarta, obtemos exatamente a quinta, já que $\frac{4}{3} + \frac{9}{8} = \frac{5}{4}$. Com isso, a razão 9:8, chamada de *tom (tonos) pitagórico*, produz a quinta a partir da quarta, sugerindo ser o tom uma unidade de composição da escala; para verificarmos essa propriedade, coloquemos as razões obtidas acima em ordem crescente, e calculemos as diferenças entre esses intervalos:

Intervalo	1	9/8	4/3	3/2	2
Diferença		9/8	32/27	9/8	4/3

Pelo quadro acima, o tom aparece como diferença dos intervalos entre 1 e 9:8, e, como vimos, entre 4:3 e 3:2. Podemos inserir mais dois intervalos com diferença de um tom, do seguinte modo: seja o novo intervalo entre a oitava e a quinta, de tal modo que a diferença entre e a quinta seja de um tom. Como a diferença entre e 3:2 é dada pela divisão desses termos, segue que a equação resultante é $\frac{5}{4} \div x = \frac{3}{2}$, cuja solução é dada por $x = \frac{5}{6}$. Do mesmo modo, podemos inserir um intervalo entre a quarta e a nota 9:8 de tal forma que a diferença entre e esta seja de um tom; equacionando, temos $\frac{4}{3} - x = \frac{9}{8}$, cuja solução é $x = \frac{7}{24}$. Atualizando o quadro acima com os novos valores, obtemos:

O novo intervalo surgido, 256:243, é chamado de “resíduo” (*leimma*), que também desempenha um papel de unidade de formação de escala. Isso, pois, suponhamos que seja um intervalo à direita de 27:16, de tal modo que a diferença entre ambos seja de um tom. Equacionando, obtemos $\frac{27}{16} - x = \frac{256}{243}$, cuja solução é dada por $x = \frac{256}{243}$. Tomando a diferença entre a oitava e $\frac{256}{243}$, segue-se que $\frac{256}{243}$, ou seja, o *leimma* também comparece como diferença entre os intervalos, assim como o tom. Numericamente, o *leimma* tem valor inferior ao do tom, e por isso rece-

be o nome de *semitom diatônico pitagórico*. Esse termo, porém, não significa que o *leimma* divida o tom em duas partes iguais, como o mesmo sugere; pelo contrário, a divisão do tom pelo *leimma* resulta no *apotome*: . Com isso, cada tom pitagórico contém dois semitons, o *leimma* e o *apotome*, este último também chamado de *semitom cromático pitagórico*.

Por fim, o intervalo 243:128 obtido acima completa a chamada *escala diatônica pitagórica*, e tomando a frequência fundamental de vibração da corda, , como um Dó, a escala completa será:

Nome da Média	Definição	Fórmula para b
Aritmética	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$	$b = \frac{a+c}{2}$
Geométrica	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{c}$	$b^2 = ac$
Harmônica	$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$	$b = \frac{2ac}{a+c}$

Tab. 3: A escala diatônica pitagórica.

O termo diatônico (*diatonikos*) significa “por meio de tons”, e indica escalas que possuem sete notas e uma oitava, separadas por cinco tons e dois semitons.

Podemos obter outras notas a partir da escala pitagórica, como os sustenidos e bemóis por meio do uso do *apotome*. Criar um sustenido corresponde a adicionar um *apotome* à nota; assim, a partir de um Fá, por exemplo, a nota Fá[#] será caracterizada pela razão . Do mesmo modo, podemos produzir um bemol subtraindo um *apotome* de uma determinada nota; assim, a partir do Si, obtemos , que corresponde a Si^b. É importante lembrar que os valores acima devem ser multiplicados pela frequência fundamental para corresponder fisicamente a uma nota.

8. A HARMONIA DAS ESFERAS

Após discutirmos as concepções pitagóricas acerca do número, do universo e da música, vejamos como esses conceitos se fundem para formar a Harmonia das Esferas. Iniciemos com os seguintes *akousmata* coligidos por Jâmblico:

O que é o Oráculo de Delfos? É a tetraktys, que é a Harmonia das Sereias. (...) O que é a coisa mais sábia? O número. A próxima coisa mais sábia é o poder de nomear. (...) O que é a [coisa] mais bela? A Harmonia. (...) (JÂMBLICO, VP 82 apud GUTHRIE, 1987, p. 77).

O santuário de Delfos era o centro religioso do mundo grego, e sua fama se devia fundamentalmente pelo oráculo consagrado ao deus Apolo, o “assento da mais alta e secreta sabedoria” que era também a deidade cultuada em dois dos principais centros pitagóricos na Itália, Crotona e Metaponto, cidades onde residira o próprio Pitágoras (BURKERT, 1972, p. 113-114; 187). Além disso, Apolo, além de ser o mais belo entre os deuses, era também o deus da Música; deste modo, esse *akousma* nos sugere a associação do símbolo pitagórico por excelência, a *tetraktys*, àquele que representa o que é o belo e a própria música. E vimos que é exatamente a *tetraktys* que orienta a formação da escala musical pitagórica. Belo também é o universo, já que o conceito grego de *cosmos*, como vimos na Seção V, representa não somente um arranjo ordenado de coisas, mas algo que é essencialmente belo. Bela também é a harmonia, já que uma consonância é uma manifestação da beleza sob a forma de sonora.

Portanto, a harmonia é um princípio que rege tanto o cosmos, pondo em acordo os princípios discordantes dos ilimitados e limitantes, quanto rege a música, já que o *continuum* ilimitado da gama de frequências de vibração possíveis em uma corda somente se converte em uma escala musical – que também é harmonia – graças ao concurso do princípio limitador do *número*. E a Harmonia das Esferas reside exatamente na unificação dessa dupla função do termo harmonia: a escala musical que determina a música a ser produzida por um dado instrumento é a mesma determinada pelos sons produzidos a partir do movimento dos corpos celestes. Aristóteles nos diz que

[a]lguns pensadores supõem que o movimento dos corpos daquele tamanho [*i.e.*, dos corpos celestes] devem produzir algum ruído, já que o movimento de corpos de dimensões e velocidades muito inferiores aqui na Terra produzem sons. (*Sobre o céu*, B, 9, 290^a14-17).

Mas, como os pitagóricos correlacionavam a escala musical que discutimos na seção anterior com a escala dos movimentos celestes? Novamente, nosso conhecimento é fragmentário, e, além da versão formulada por Platão – que merece uma discussão à parte – dispomos apenas de fontes a partir do primeiro século de nossa era. A primeira delas consiste na *História Natural*, de Plínio, o Velho (23 ou 24–79 d.C.). Em seu relato, são as distâncias entre os planetas, e não suas velocidades relativas que fornecem a escala planetária; assim, de acordo com Plínio,

Pitágoras, entretanto, usando a teoria musical, disse que a distância entre a Terra e a Lua era de um tom, da Lua a Mercúrio a metade, o mesmo ocorrendo entre Mercúrio e Vênus; um tom e meio entre Vênus e o Sol, um tom entre o Sol e Marte (*i.e.*, o mesmo que entre a Terra e a Lua), metade entre Marte e Júpiter, o mesmo entre Júpiter e Saturno, e um tom e meio entre Saturno e as estrelas fixas. (GODWIN, 1990, p. 8; 407).

Segundo esta escala, temos uma sequência inicial de um tom e de um semitom; a escala pitagórica da Tabela 3 mostra que essa sequência corresponde às notas Ré, Mi e Fá. Com isso, à Terra temos associada a nota Ré, ao passo que à Lua corresponde a nota Mi, já que dista de um tom de Ré; à Mercúrio associamos a nota Fá, que dista de um semitom pitagórico de Mi. Entre Mercúrio e Vênus temos a redução da nota “à metade”; isso corresponde a usarmos o *apotome*; deste modo, segue-se que $\frac{1}{2}$, o que corresponde, como vimos, à nota Fá[#]. Entre Vênus e o Sol há um tom e meio, portanto, $\frac{3}{2}$; então, à nota Fá[#] adicionamos esse intervalo, o que resulta em $\frac{9}{4}$, ou seja, uma nota Lá. Entre o Sol e Marte há um tom de intervalo, portanto, a nota associada a Marte será Si. Um semitom separa Marte de Júpiter; com isso, $\frac{1}{2}$, ou seja, uma oitava acima, um Dó. Uma nova metade, o *apotome*, separa Júpiter de Saturno; então, multiplicando-se o Dó pelo *apotome*, obtemos um Dó[#], assim como obtemos um Fá[#] a partir do *apotome* e de um Fá. Por fim, entre Saturno e as estrelas fixas há um tom e meio que, conforme vimos, corresponde ao intervalo $\frac{3}{2}$; com isso, $\frac{9}{4}$, que corresponde a um Mi (em uma oitava acima). A escala assim obtida está representada na Figura 12.

Cabe lembrar que a escala coligida por Plínio não incluía nem o fogo central, nem a anti-Terra, elementos celestes típi-

cos do modelo cosmológico pitagórico. Apesar disso, esta é a escala mais antiga da Harmonia Celeste atribuída a Pitágoras; então, mesmo tendo sofrido possíveis modificações devido a ideias platônicas e aristotélicas, tal escala nos permite ter, ao menos, um vislumbre de como poderia se constituir uma escala musical celeste tipicamente pitagórica.

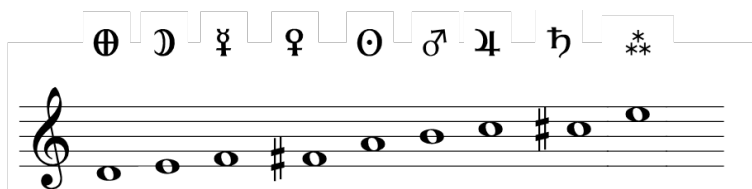


Fig. 12: A escala planetária pitagórica segundo Plínio, o Velho. Na ordem, temos a Terra, Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno e Estrelas Fixas (Godwin, 1995, p. 114).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ARISTÓTELES. *The complete Works of Aristotle: the revised Oxford translation*, Vols. 1 e 2. Editado por Jonathan Barnes. Princeton: Princeton University Press, 1984.

BARNES, Jonathan. *Filósofos Pré-socráticos*. Tradução: Julio Fischer. 2ª Ed. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

BRANDÃO, Junito de Souza. *Dicionário Mítico-Etimológico da Mitologia Grega*. 5ª Ed. Volume I. Petrópolis: Editora Vozes, 1991.

_____. *Mitologia Grega*. 15ª Ed. Volume II. Petrópolis: Editora Vozes, 2005.

BURKERT, Walter. *Lore and Science in ancient Pythagoreanism*. Tradução inglesa de E. L. Minar, Jr., de *Weisheit und Wissenschaft: Studien von Pythagoras, Philolaos und Platon*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1972.

CORNELLI, Gabriele. *O Pitagorismo como categoria historiográfica*. Classica Digitalia Brasil. São Paulo: Annablume editora, 2011.

GODWIN, Joscelyn. *The Harmony of the Spheres: A sourcebook of the Pythagorean Tradition in Music*. Rochester: Inner Traditions International, 1990.

_____. *Harmonies of Heaven and Earth: Mysticism in Music, from antiquity to the avant-garde*. Rochester: Inner Traditions International, 1995.

GUTHRIE, Kenneth Sylvan. *The Pythagorean sourcebook and library*. Grand Rapids: Phanes Press, 1987.

GUTHRIE, W. K. C. *A history of Greek philosophy: The earlier Presocratics and the Pythagoreans*. Cambridge: Cambridge University Press, 1962.

HEATH, Thomas. *A History of Greek Mathematics: Vol. 1, from Thales to Euclid*. New York: Dover Publications, 1981.

HUFFMAN, Carl A. *The role of number in Philolaus' philosophy*. *Phronesis* 33: 1-30, 1988.

_____. *Philolaus of Croton: Pythagorean and Presocratic*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

JAMES, Jamie. *The Music of Spheres: music, science and the natural order of the universe*. New York: Grove Press, 1993.

KAHN, Charles H. *Pitágoras e os pitagóricos: uma breve história*. Tradução: Luís Carlos Borges. São Paulo: Edições Loyola, 2007.

KIRK, G. S., RAVEN, J. S., SCHOFIELD, M. *Os Filósofos Pré-Socráticos: História Crítica com selecção de textos*. 5ª Ed. Tradução: Carlos Alberto Louro Fonseca. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2005.

MATHIESEN, Thomas J. *Apollo's Lyre: Greek music and music theory in antiquity and the Middle Ages*. Lincoln: University of Nebraska Press, 1999.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

WATERFIELD, Robin (trad.). *The Theology of Arithmetic: on the mystical, mathematical and cosmological symbolism of the first ten numbers. Attributed to Iamblichus*. Grand Rapids: Phanes Press, 1988.

ZHMUD, Leonid JA. *All is number? "Basic doctrine" of Pythagoreanism reconsidered*. *Phronesis* 34: 270-292, 1989.