O Uso do Critério da Taxa Interna de Retorno e sua Aplicação em Investimentos Educacionais

Clovis de Faro e
Alberto de Mello e Souza (*)

1. INTRODUÇÃO

Um dos critérios de avaliação e seleção de alternativas de investimento que mais encontra trânsito na literatura pertinente é o chamado critério da taxa interna de retorno. Todavia, não obstante ser largamente difundido, a utilização efetiva desse critério não é livre de percalços. Tal se dá em virtude da própria definição do que venha a ser a taxa interna de retorno associada a uma alternativa de investimento, pois que esta encerra conceitos matemáticos de existência e de unicidade, que por sua vez, devem ser examinados à luz de uma significação econômica.

Como decorrência de que nem sempre se esteja devidamente atento à necessidade de haver compatibilidade quanto à dualidade de interpretações, têm-se apresentado com bastante frequência concepções errôneas com relação à aplicabilidade do critério da taxa interna de retorno. Assim, enquanto de um lado podem ser encontradas interpretações inadequadas de certos resultados matemáticos, como por exemplo nas referências [7]; [8], p. 556; [9], pp 28-9; [20]; [21], p. 19; [22], pp. 82 e 85; [23], p 56; e [24], de outro, pode-se também apontar trabalhos

(*) Os autores são do Instituto de Pesquisas do IPEA.

em que o aspecto da significação econômica não foi corretamente aplicado [10]; [14] e [17], p. 89(1).

O presente estudo apresenta a análise de um caso específico de uma alternativa de investimento que tem gerado uma certa dose de controvérsia. Para tanto, se faz uso do trabalho de Jean [13], que parece ter passado desapercebido a vários autores. Evidenciar-se-á matematicamente que, para tal caso, desde que seja satisfeita determinada condição básica de caráter econômico, a aplicação do critério da taxa interna de retorno é isenta de problemas. Ainda mais, quando em confronto com o método do valor atual, obter-se-á total coerência de resultados.

O caso aludido ocorre, com certa frequência, na análise dos investimentos educacionais. Após a conceituação de tal tipo de projeto, são abordadas certas dificuldades concernentes à aplicação do critério da taxa interna de retorno. Finalizando, são examinados dois exemplos tomados da realidade brasileira.

2. A TAXA INTERNA DE RETORNO E SUA APLICAÇÃO COMO CRITÉRIO ECONÔMICO

Visando uma exposição de cunho didático, é conveniente que se teçam aqui algumas considerações de caráter geral. Assim, após conceituar o que se entende por alternativa de investimento (ou projeto), bem como sua representação formal, apresentar-se-ão as definições do que constituem o valor atual e a taxa interna de retorno a ela associados. A seguir se abordará a aplicação efetiva da taxa interna de retorno como critério de avaliação e de seleção, justificando-se sua implementação quando em confronto com o método do valor atual.

2.1. Definições

Genericamente se entende por alternativa de investimento qualquer empreendimento a que estejam associadas consequên-

(1) A literatura é extremamente farta em exemplos de trabalhos que contêm afirmativas incorretas. Basta mencionar que os próprios autores não ficaram isentos desse tipo de pecado ([4], p. 121; [18], pp. 225 e 227).

cias ocorridas ao longo de certo intervalo de tempo, as quais, tanto em termos de benefícios como de custos, no sentido lato, sejam passíveis, via um procedimento **ad hoc**, de tradução em unidades monetárias. Seja n a vida econômica do empreendimento, que se suporá finita e expressa em certa unidade tomada como base, o número de períodos ao longo do intervalo de tempo em que se manifestam suas consequências. Um projeto será formalmente caracterizado pela chamada sequência de fluxos de caixa líquidos: $\{a_o, a_1, \ldots a_n\}$. Sem perda de generalidade, devemos ter $a_o . a_n \neq 0$, sendo que:

a_o — representa o investimento inicial, que se supõe concentrado no início do primeiro período da vida do empreendimento;

a_j (para $j=1,\ldots,n$) — designa a diferença entre os totais dos benefícios e dos custos que ocorrem ao longo do j-ésimo período, a qual se tomará como concentrada no fim do período considerado. Por convenção, $a_j > 0$, se ao longo do j-ésimo período os benefícios excedem aos custos.

Para os presentes propósitos, a alternativa será chamada de investimento propriamente dito. Se $a_o < 0$, dir-se-á tratar-se de uma alternativa de financiamento e, após multiplicar sua sequência de fluxos de caixa líquidos por menos um, será analisada como se de investimento fosse. Nessa última hipótese, bastará ter presente que se deve inverter a indicação de avaliação econômica derivada da aplicação dos critérios que se irá mencionar. Desse modo, assegurando a generalidade da análise, será tratado apenas do caso de projetos de investimento, sendo então conveniente que a sequência de fluxos de caixa passe a ser representada por $\{-S, Q_1, \ldots, Q_n\}$, onde $S>0$ é o "investimento" inicial.

Considerada uma certa taxa de juros, î, define-se o valor atual, V(î), de uma alternativa de investimento através da relação:

$$V(\hat{\imath}) = -S + \sum_{i=1}^{n} Q_j \, (1+\hat{\imath})^{-j} \qquad (1)$$

onde î se supõe expressa sob forma unitária e relativa ao período tomado como unidade básica de tempo[2]. De acordo com o método do valor atual, um projeto de investimento será considerado como economicamente interessante, ou justificável, se $V(\hat{\imath}) > 0$.

Por outro lado, tomando agora a taxa de juros como incógnita na relação (1), e satisfeitas certas condições de existência e unicidade, bem como de significação econômica, a taxa interna de retorno, i^*, associada a uma alternativa de investimento é a taxa que anula o seu valor atual. Isto é, i^*, deve ser solução da seguinte equação:

$$V(i) = -S + \sum_{j=1}^{n} Q_j \, (1+i)^{-} = 0 \qquad (2)$$

Em princípio, de acordo com o critério da taxa interna de retorno, uma alternativa de investimento será considerada como economicamente justificável se $i^* > \hat{\imath}$.

2.2. Problemas Associados ao Conceito da Taxa Interna de Retorno

Mesmo nas condições ideais aqui assumidas, e ao contrário do que ocorre como método do valor atual, a implementação do critério da taxa interna de retorno nem sempre apresenta-se livre de problemas. Tais problemas, que, como já se referiu, são de natureza tanto matemática como econômica, serão agora discutidos.

Começar-se-á com os problemas de caráter matemático. Para tanto, é conveniente que se proceda a uma mudança de variáveis, fazendo-se $x = (1+i)^{-1}$ como incógnita[3], de modo que a determinação da taxa interna de retorno associada a uma dada alternativa de investimento passa a ser equivalente à busca das raízes do seguinte polinômio em x.

---

(2) Evitar-se-á aqui a discussão de qual deva ser o valor considerado para $\hat{\imath}$ supondo a existência de um mercado de capitais perfeito, tal que invariavelmente com o tempo, quantidades ilimitadas de capital podem ser tomadas em empréstimo, ou aplicadas, à taxa $\hat{\imath}$. Nessas condições, pode-se demonstrar que as regras de avaliação econômica que se mencionarão são ótimas ([11], cap. 3).

(3) Observe-se que $x \to 0$ quando $i \to \infty$, $x = 1$ quando $i = 0$, e que $x \to \infty$ quando $i \to -1$.

$$F(x) = -S + \sum_{j=1}^{n} Q_j x^j \qquad (3)$$

De acordo com os fundamentos da álgebra, todo polinômio do grau n apresenta exatamente n raízes, incluindo-se aí as complexas e contando-se cada raiz distinta tantas vezes quanto for a sua respectiva multiplicidade. Para nossos propósitos só interessam as raízes x^* às quais correspondam taxas i^* que tenham significação econômica, isto é, taxas de juros que sejam números reais e, no caso mais geral, não inferiores a -100% por período. Consequentemente, em princípio, a busca de raízes de (3) deve ser limitada ao intervalo definido por $x \geqslant 0$. Na prática, porém, taxas negativas e nulas carecem de interesse, o que implica em que a busca de raízes de F (x) seja, finalmente, reduzida ao intervalo (0,1). Assim, se existir, a taxa interna de retorno de uma alternativa de investimento será a taxa i correspondente ao único valor distinto de $x \varepsilon$ (0,1) que anula F (x).

Concentremo-nos nas questões de existência e de unicidade. É então interessante que, de acordo com os sinais na sequência dos fluxos de caixa, as alternativas de investimento sejam classificadas em dois grupos principais. No primeiro grupo se situarão as alternativas ditas de investimento simples e as de investimento convencional, que são aquelas tais que, respectivamente, ou $Q_j \geqslant 0$ para todo j, ou os $k < n$ primeiros fluxos de caixa são não-positivos com os n-k últimos sendo não-negativos[4]. É claro então que, dado que $-S < 0$ e que $Q_n \neq 0$, as alternativas classificadas como de primeiro grupo apresentarão uma, e somente uma, variação de sinal na sequência de fluxos de caixa. No segundo grupo estarão as chamadas alternativas de investimento não-convencional, cujas respectivas sequências de fluxos de caixa apresentam mais de uma variação de sinal.

2.2.1. ALTERNATIVAS DO SEGUNDO GRUPO

Para a análise do caso de alternativas de investimento simples e convencionais, é relevante a chamada Regra de Sinais de Descartes [26], p. 121:

(4) Obviamente, se $Q_j \leqslant 0$ para todo j, se terá não mais uma alternativa de investimento, e sim um caso de doação.

"O número de raízes reais positivas de uma equação com coeficientes reais,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \quad a_n = 0,$$

nunca supera o número de variações [de sinal], na sequência de seus coeficientes

$a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n$

e, se inferior, então sempre [subtraído] de um número par."

É então de conclusão imediata que, para o caso de uma alternativa de investimento simples ou convencional, existe um, e somente um valor $x > 0$ que anula F (x); seja ele x*. Por outro lado, tendo em vista a equação (1), e observando-se que

$$F(0) = \lim_{i \to \infty} V(i) = -S < 0 \text{ e que } \lim_{x \to \infty} F(x) = V(-1) > 0, \text{ se } Q_n > 0,$$

segue-se, pela continuidade de polinômios, que a função valor atual associada a tais tipos de alternativas será positiva para taxas $i < i^*$ e negativa para $i > i^*$, onde $i^* = (1 - x^*)/x^*$. Consequentemente, dado que uma alternativa de investimento só será economicamente atrativa se $V(\hat{i}) > 0$ para uma certa taxa $\hat{i} > 0$ conclui-se que, a priori, um projeto de investimento simples, ou convencional tal que

$F(1) = V(0) = -S + \sum_{j=1}^{n} Q_j \geqslant 0$ deve ser rejeitado. Isto é, para que alternativas classificadas como do primeiro grupo sejam sequer examinadas, é necessário que os totais de seus respectivos benefícios excedam os de custos[5].

2.2.2. ALTERNATIVAS DO SEGUNDO GRUPO

Observe-se agora o caso das alternativas classificadas como de segundo grupo. Convém esclarecer que, por esdrúxulas que possam parecer, tais sequências não constituem raridade

(5) A condição é necessária mas não suficiente para a economicidade da alternativa, pois, mesmo se satisfeita, poder-se-á obter $V(\hat{i}) < 0$ (o que acontecerá se $i^* < \hat{i}$).

na prática corrente. Assim, não só são associadas a exemplos típicos de investimentos industriais que são citados na literatura ([8], p. 563), como também, e de interesse específico para este estudo, a certos casos de investimentos em educação. Além do mais, como se discutirá no próximo subitem, costumam aparecer com bastante frequência quando do processo de seleção entre alternativas mutuamente exclusivas.

Para fins de análise, alternativas de investimento não-convencional podem, por sua vez, ser classificadas em dois subgrupos. O primeiro compreenderia as relativas ao caso de empreendimentos para os quais a vida econômica n pode ser tomada como variável controlável. Neste caso, conforme demonstrado nos trabalhos de Arrow e Levhari [2] e de Fleming e Wright [6], entre outros existem regras ótimas de truncamento do empreendimento que asseguram a ausência de problemas na utilização do critério da taxa interna de retorno. No segundo subgrupo se encontrariam as alternativas de investimento não-convencional para as quais a vida econômica do empreendimento é tomada como uma dada constante. Nesse caso, como se mostrará, nem sempre é possível a aplicação do critério da taxa interna de retorno.

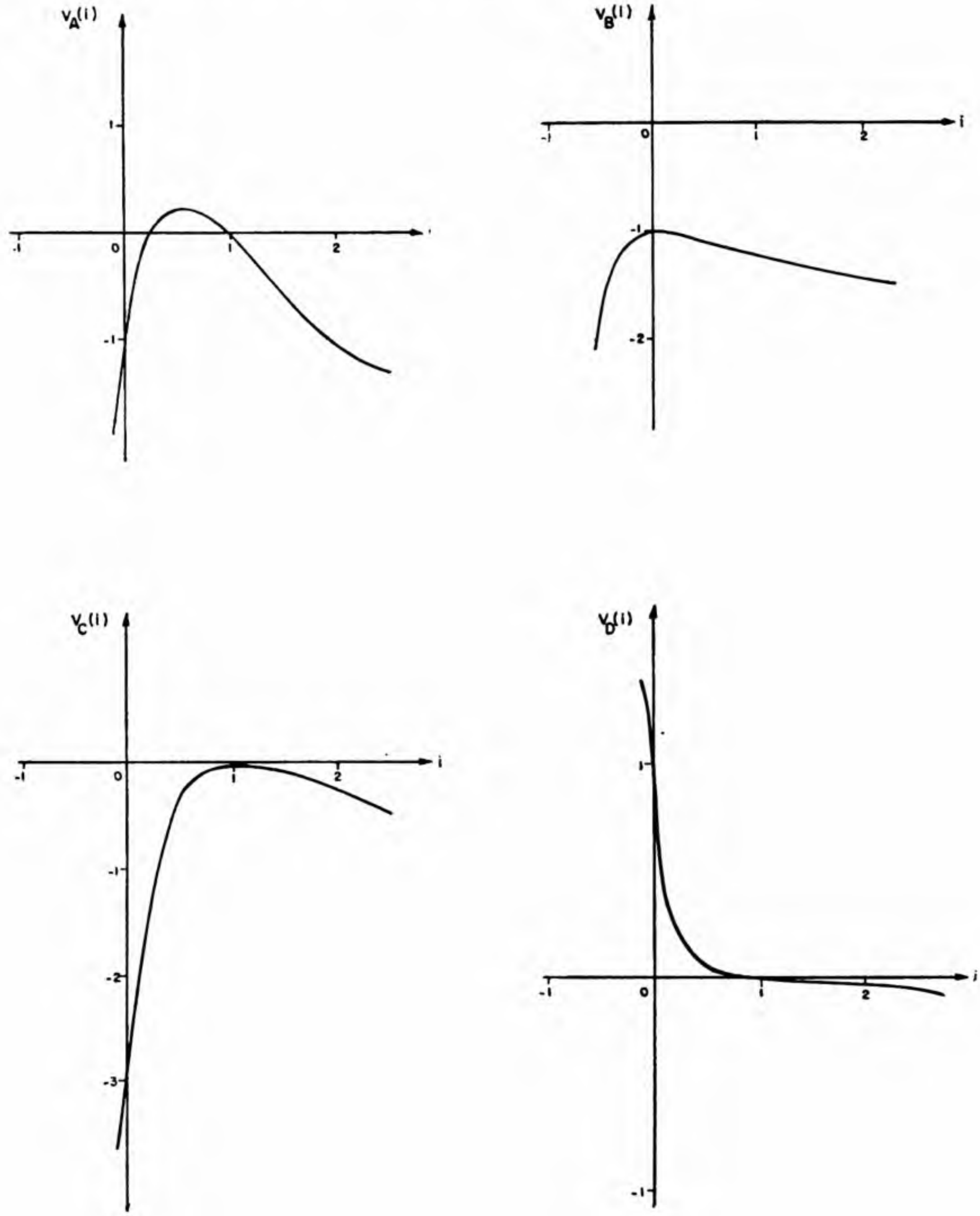
Inicialmente, convém ressaltar que a Regra de Sinais de Descartes não é mais de nenhuma utilidade. Isto porque além de só prover um limite superior para o número de raízes positivas de $F(x)$, limite esse que é agora maior que 1, apresenta o inconveniente de não distinguir entre raízes simples e múltiplas. A sua inadequação para a análise do caso de alternativas de investimento não-convencional pode ser ilustrada através do exame dos exemplos a seguir, para os quais os comportamentos das respectivas funções valor atual são indicados esquematicamente no Gráfico 1.

Sejam as alternativas que identificaremos como A, B, C e D, às quais, respectivamente, são associadas as seguintes sequências de fluxos de caixa: $\{-4, 13, -10\}$, $\{-2, 2, -1\}$, $\{-2, 7, -4, -4\}$ e $\{-11, 6, -12, 8\}$. Enquanto as três primeiras apresentam duas variações de sinal, para a última temos três variações. No entanto, ao passo que $F_A(x) \neq 0$ se anula para dois distintos valores positivos de x (0,5 e 0,8), $F_B(x) \neq 0$ para qualquer valor de x e $F_C x)$ e $F_D(x)$ anulam-se para um único valor positivo de x (0,5 nos dois casos).

O caso da alternativa C serve também para evidenciar que, para a aplicação efetiva do critério da taxa interna de retorno,

GRÁFICO I

COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO VALOR ATUAL PARA AS ALTERNATIVAS A, B, C, e D.



além dos aspectos matemáticos de existência e de unicidade, deve ser também observado um outro, este agora de natureza econômica. Isso porque, embora $F_C(x) = 0$ somente para $x = 0{,}5$, o que implica que a função valor atual se anule somente para a taxa $i^* = 100\%$ por período, sendo portanto satisfeitas as condições de existência e unicidade, a aplicação do critério da taxa interna de retorno entra em colapso. Tal acontece devido ao fato de que, enquanto este critério indicaria a aceitação da alternativa C para qualquer taxa de comparação $\hat{\imath} < i^*$, como $V_C(\hat{\imath}) \leqslant 0$ para qualquer taxa $\hat{\imath}$, a consideração do método do valor atual conduziria a sua rejeição. A fim de evitar a possibilidade de avaliação inconsistente, ou seja, para que a implementação do critério da taxa interna de retorno seja sequer cogitada, é necessário que a alternativa sob exame seja tal que $F(1) = V(0) > 0$. Isto é — e este aspecto não foi percebido nem por Hirshleifer em sua crítica [10], nem por Jean em sua réplica [14] —, embora a condição de que os benefícios totais excedam os custos não seja necessária para a economicidade do empreendimento (como é o caso da alternativa A, cujo valor atual é positivo para taxas entre 25 e 100% por período), ela é imprescindível para a aplicabilidade do critério da taxa interna de retorno(6).

Por outro lado, como ilustrado no caso da alternativa D, para a qual, note-se, $F_D(1) = 1 > 0$, verifica-se a existência de investimentos não-convencionais passíveis de uma avaliação coerente pelo critério da taxa interna de retorno. Deixando para o próximo item a análise de um caso particular de alternativa de investimento não-convencional, para o qual a correta aplicação do critério da taxa interna de retorno pode ser garantida **a priori**, dirigimos o leitor aos trabalhos de Soper [24] e de Norstrom [19], que apresentam condições de suficiência aplicáveis a casos bastante gerais(7).

---

(6) Observe-se que, se $V(0) < 0$, três são as possibilidades que se apresentam: o caso ilustrado pela alternativa C; aquele em que $V(i) \neq 0$ para qualquer taxa i (que é o caso da alternativa B); e aquele em que a função valor atual se anula para mais de uma taxa de juros (caso de A). No caso limite, $V(0) = 0$, ou o projeto é economicamente injustificável, ou o critério da taxa interna de retorno será também inaplicável.

(7) Enquanto que uma análise crtica das condições de Soper podem ser encontradas em [5], o trabalho de Norstrom, face a sua importância para o próprio caso particular que se irá estudar, será tratado em Apêndice.

2.3. O Caso de Alternativas Mutuamente Exclusivas

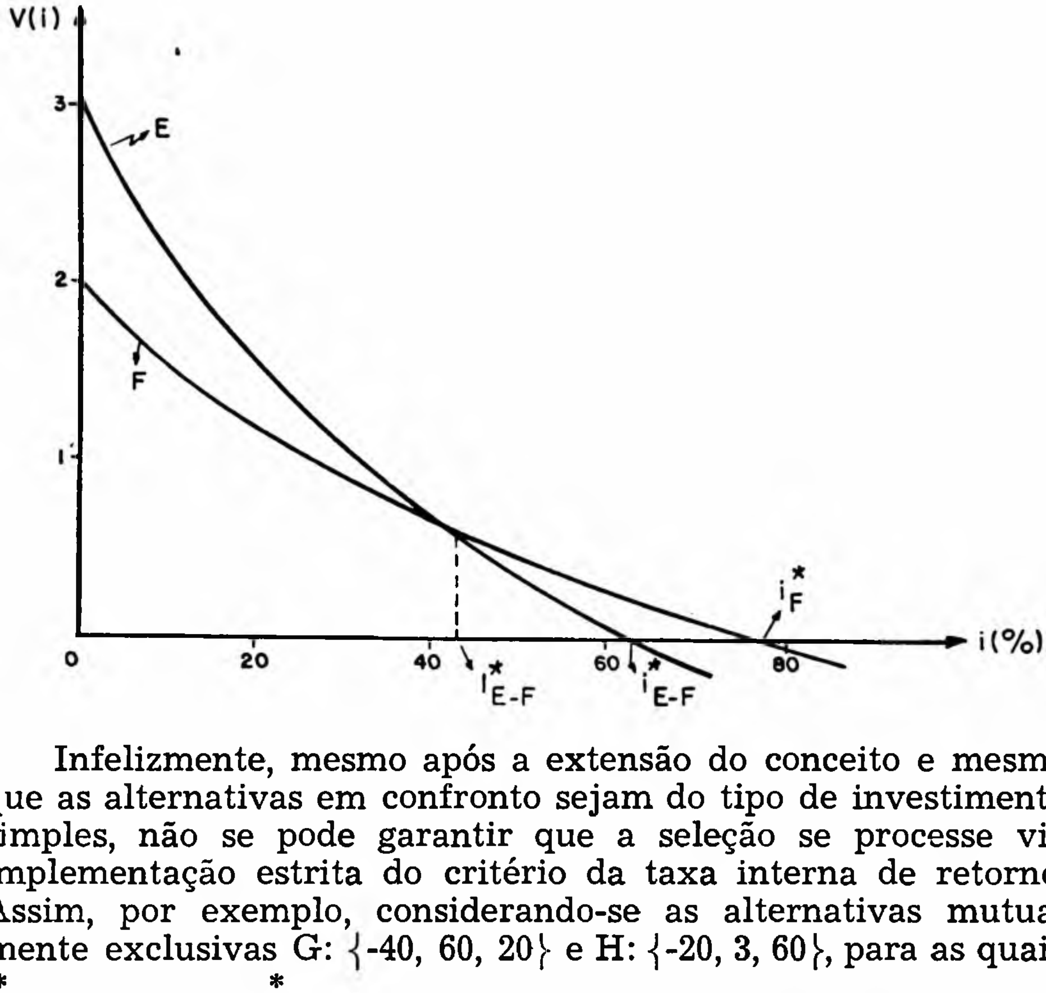
Um outro problema associado à implementação do critério da taxa interna é o relativo ao processo de escolha entre duas ou mais alternativas. Tal problema deve-se ao fato de que, dada uma taxa de comparação $\hat{i}$, nem sempre a alternativa com o maior valor atual será a que apresenta a maior taxa interna de retorno. Consequentemente, não se pode garantir **a priori** que a simples comparação entre as taxas internas de retorno das alternativas em exame produza uma seleção consistente.

A título de ilustração, considere-se as sequências de fluxos de caixa $\{-3, 3, 3\}$ e $\{-2, 3, 1\}$, respectivamente associadas às alternativas que se denominarão E e F, que devido a características físicas ou tecnológicas, não podem ser implementadas simultaneamente; isto é, E e F são ditas alternativas mutuamente exclusivas. Individualmente, dado que tanto E como F são do tipo investimento simples e sendo $V(0) > 0$, pode-se garantir que, como se verifica facilmente, $i^*_E = 61{,}80\%$ e $i^*_F = 78{,}08\%$ por período são as suas respectivas taxas internas de retorno. Entretanto, embora $i^*_F > i^*_E$, dependendo da taxa $\hat{i}$ de comparação, pode-se preferir a alternativa E quando se comparar $V_E(\hat{i})$ com $V_F(\hat{i})$. O intervalo ao qual deve pertencer $\hat{i}$ para que tal aconteça é facilmente visualizado com auxílio do Gráfico 2, onde são esquematizadas as funções valor atual para cada uma das alternativas.

Do Gráfico 2 conclui-se de imediato que, para $\hat{i} \in (0, i^*_{E-F})$, onde i^*_{E-F} é a taxa que iguala os valores atuais das duas alternativas, ter-se-á $V_E(\hat{i}) > V_F(\hat{i})$, o que implica em que E seja preferível a F. É, portanto, crucial a determinação da taxa i^*_{E-F}, chamada taxa de retorno sobre os custos de Fisher [1], que nada mais é do que a taxa interna de retorno da "alternativa" cuja sequência de fluxos de caixa é obtida pela diferença das sequências relativas a E e a F, e sua comparação com a dada taxa $\hat{i}$; se $i^*_{E-F} > \hat{i}$, alternativa E será a preferível. No caso específico, a "alternativa diferença", que se denotará por E-F, é também do tipo investimento simples, pois que a sequência resultante é $\{-1, 0, 2\}$. Tem-se que $i^*_{E-F} \simeq 41{,}42\%$, o que implica em que a alternativa F seja a preferível, e economicamente interessante, somente se $0{,}4142 < \hat{i} < 0{,}7808$.

GRÁFICO 2

COMPARAÇÃO ENTRE AS ALTERNATIVAS E e F



Infelizmente, mesmo após a extensão do conceito e mesmo que as alternativas em confronto sejam do tipo de investimento simples, não se pode garantir que a seleção se processe via implementação estrita do critério da taxa interna de retorno. Assim, por exemplo, considerando-se as alternativas mutuamente exclusivas G: $\{-40, 60, 20\}$ e H: $\{-20, 3, 60\}$, para as quais $i^*_G = 78{,}08\%$ e $i^*_H = 80{,}87\%$ por período, tem-se que a "alternativa diferença" é G-H: $\{-20, 57, -40\}$. Ora, G-H é do tipo investimento não-convencional, e tal que $V(0) < 0$; consequentemente i^*_{G-H} não é definida e a seleção pelo critério da taxa interna de retorno entra em colapso. Em casos tais como esse seremos obrigados a recorrer ao método do valor atual, o que indicaria que G é preferível a H para $0{,}25 < \hat{i} < 0{,}60$.

3. ESTUDO DE UM CASO PARTICULAR

Conforme se viu, nem toda alternativa do tipo investimento não-convencional é passível de avaliação mediante a aplicação do critério da taxa interna de retorno. Existe porém um caso particular, aquele cuja sequência de fluxos de caixa apresenta exatamente duas variações de sinal, para a qual se pode garantir, a priori, a correta implementação do critério. Neste item, o objetivo consistirá em examinar tal caso particular e, tomando por base a apresentação de Jean [13], justificar a afirmativa mencionada.

Para a análise desse caso, é de crucial relevância o chamado teorema de Budan-Fourier, do qual, como apontado por MacDuffee ([16], p. 59), a Regra de Sinais de Descartes decorre como um corolário, e que pode ser parafraseado como se segue:

— Contando-se uma raiz múltipla tantas vezes quanto for a sua multiplicidade, seja m o número de raízes reais de $F(x) = -S + \sum_{j=1}^{n} Q_j x^j = 0$ no intervalo $[x_1, x_2]$, com $F(x_1)\ F(x_2) \neq 0$.

Considerando-se a sequência

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x), \ldots,\ F^{(n)}(x) \tag{4}$$

onde $F^{(k)}(x)$ denota a k-ésima derivada de $F(x)$ com respeito a x, sejam $S(x_1)$ e $S(x_2)$, respectivamente, os números de variações de sinais observados quando (4) é avaliada nos pontos x_1 e x_2. Então, $m = S(x_1) - S(x_2) - 2p$, com p sendo ou igual a zero ou a um inteiro positivo.

Ora, tem-se que:

$$F^{(k)}(x) = k!\ [Q_k + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{j}{k} Q_j x^{j-k}], \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1$$

onde $\binom{j}{k} = \dfrac{j!}{k!(j-k)!}$

e

$$F^{(n)}(x) = n! Q_n$$

Por conseguinte, fazendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, tem-se que:

$$F^{(k)}(x_1) = k!\ Q_k \quad , \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n$$

e

$$F^{(k)}(x_2) = k!\,[Q_k + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{j}{k} Q_j], \quad \text{para } k = 1,\ldots,n\text{-}1$$

com

$$F^{(n)}(x_2) = n!Q_n.$$

Como se trata de alternativas de investimento, $F(x_1) = S < 0$, e, tendo e mvista que $F(1) = V(0) > 0$ é condição necessária para a implementação formal do critério da taxa interna de retorno, supor-se-á daqui por diante que $F(x_2) > 0$.

Isto posto, considere-se agora a aplicação do teorema de Budan-Fourier para o caso particular aludido. Sem perda de generalidade, a sequência de fluxos de caixa correspondente é tal que tanto os v últimos como os p-1 primeiros Q_j são não-positivos, como os n-p-v- + 1 intermediários sendo não-negativos, sendo que:

$$p \geqslant 1,\ v \geqslant 1, \text{ com } p + v \leqslant n;\ Q_n < 0 \text{ e } Q_p > 0.$$

Para uma alternativa de investimento com tal sequência de fluxos de caixa, tem-se que:

$$F^{(k)}(x_1) = k!Q_k \begin{cases} \leqslant 0, \text{ para } k=1,\ldots,p\text{-}1 \\ \geq 0, \text{ para } k=p,\ldots,n\text{-}v \\ \leqslant 0, \text{ para } k=n\text{-}v+1,\ldots,n \end{cases}$$

Logo, como $F(x_1)<0$, ao menos $F^{(p)}(x_1)>0$ e ao menos $F^{(n)}(x_1)<0$, segue-se que haverá exatamente duas variações de sinal em (4), no ponto x_1; ou seja, $S(x_1)=2$.

Quanto à determinação de $S(x_2)$, observe-se que $F(x_2)> 0$, por hipótese, e que $F^{(n)}(x_2) = n!Q_n < 0$. Por conseguinte, pode-se afirmar que, no ponto x_2, se terá no mínimo uma variação de sinal na sequência (4), ou seja, $S(x_2)\geqslant 1$. Portanto, no máximo, $S(x_1) - S(x_2) = 1$. Logo, para o caso considerado, a aplicação estrita do teorema de Budan-Fourier permite concluir apenas que, se existir alguma raiz $x \in (0,1)$, ela será única e com multiplicidade unitária.

Ora, e isso não foi observado por Jean [13], para o caso em exame é possível, independentemente, garantir a existência de ao menos uma raiz de $F(x) = 0$ no intervalo considerado. Isso porque, de acordo com o Teorema 30 em MacDuffee ([16] p. 52), como $F(x)$ é um polinômio em $x = (1+i)^{-1}$, e tal que $F(0) < 0$ e $F(1) > 0$, existe um número ímpar (contando-se cada raiz múltipla tantas vezes quanto a sua respectiva multiplicidade), de raízes de $F(x) = 0$ no intervalo definido por $x \varepsilon (0,1)$. Consequentemente, e tendo em vista a conclusão anterior, segue-se que a alternativa do tipo considerado apresentará uma e somente uma, e ainda com multiplicidade unitária, taxa positiva que anule o seu valor atual.

Logo, desde que satisfeita a condição econômica de que o total de benefícios exceda o de custos, pode-se garantir a correta aplicação do critério da taxa interna de retorno para a avaliação de alternativas de investimento não-convencional do tipo particular considerado.

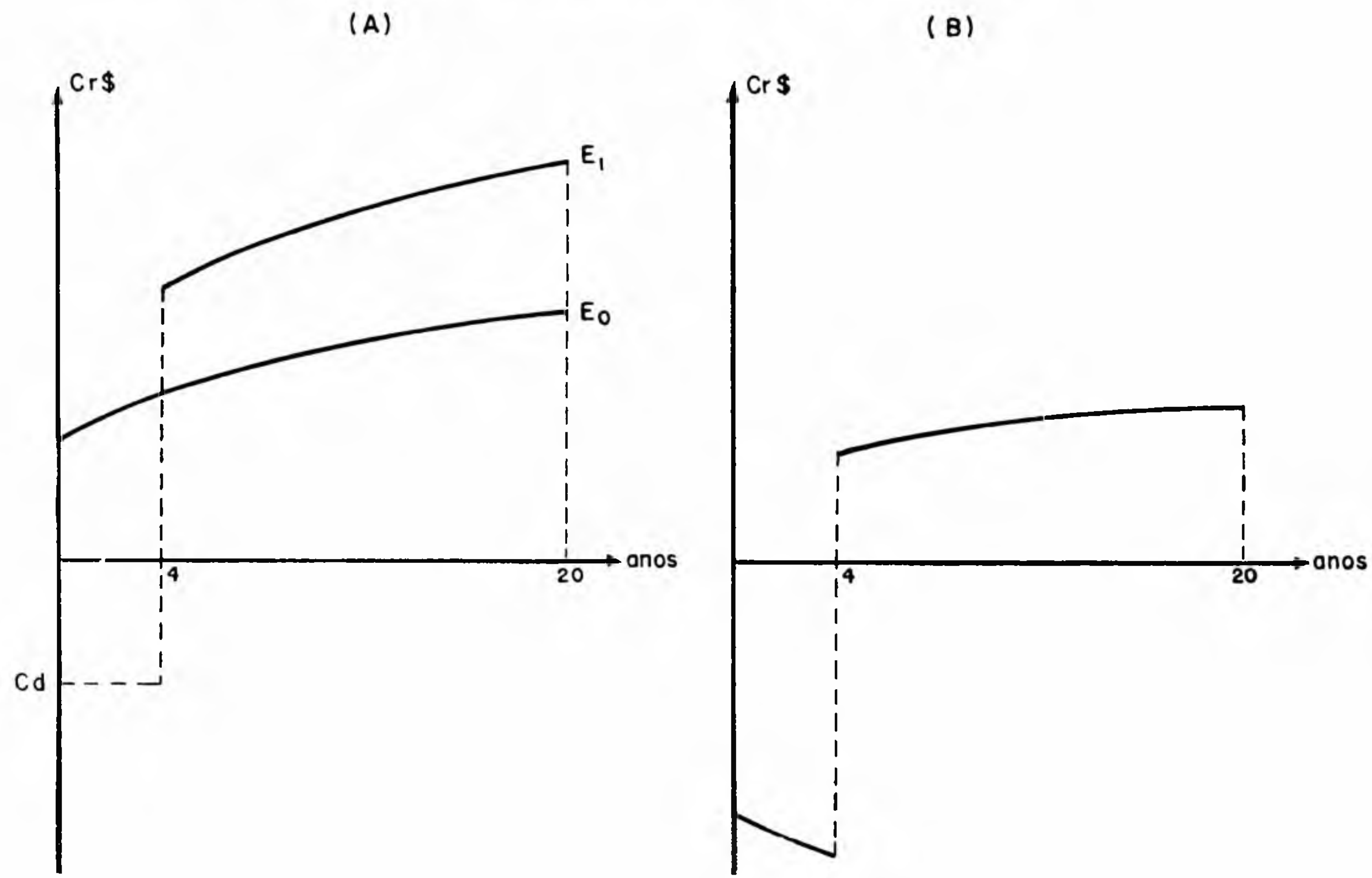
4. A TAXA DE RETORNO E PROJETOS DE INVESTIMENTO EM EDUCAÇÃO

Em um projeto de investimento em educação os custos podem ser de dois tipos: o custo direto ou escolar e a renda sacrificada. O primeiro representa o valor monetário de todos os recursos utilizados pela escola, definido normalmente em termos de aluno/ano. A renda sacrificada expressa a perda da renda obtenível no caso de que o aluno estivesse participando do mercado de trabalho ao invés de estudar. Os benefícios resultam do acréscimo no salário, ocorrido durante a vida útil, atribuível ao aumento da escolaridade.

O Gráfico 3 representa os componentes de custos e benefícios de um projeto típico de educação, no caso com um horizonte de tempo (vida útil) de 20 anos e sendo de 4 anos a duração do curso. Os perfis de idade-renda relativos aos dois níveis de escolaridade considerados são E_1 e E_0; Cd representa o custo direto anual. A renda sacrificada pode ser obtida a partir do segmento da curva E_0 relativo ao período de instrução que, no exemplo, é de 4 anos. A diferença entre os dois perfis de idade-renda (E_1 e E_0), após o término do curso, representa os benefícios advindos da execução do projeto. Portanto, a se-

GRÁFICO - 3

CUSTOS E BENEFÍCIOS EM INVESTIMENTOS EDUCACIONAIS



quência dos fluxos de caixa é obtida pela diferença entre duas curvas: a primeira é descontínua, assumindo o valor constante Cd no período de investimento e, sendo idêntica a E_1 daí por diante. A segunda curva é representada por E_0[8]. Observe-se que, em investigações empíricas, usualmente se ignoram certos benefícios da educação, como consumo e externalidades, não captados pelo perfil de idade-renda. Neste trabalho não é necessária a distinção entre taxas de retorno privada e social[9].

A sequência dos fluxos de caixa do projeto em discussão, exibida no Gráfico 3b, revela ser o projeto do tipo convencional, ou seja, $-S < 0$ e existe apenas uma variação de sinal. Sabe-se, portanto, que existirá apenas uma taxa de retorno e, satisfeita a condição econômica $V(0) > 0$, essa taxa será positiva.

Ainda que seja um acontecimento empiricamente raro, é possível a ocorrência de duas variações de sinal na sequência de fluxos de caixa, devendo-se a segunda variação a um cruzamento dos perfis de idade-renda, originando fluxos de caixa negativos. Nesse caso, o projeto é do tipo tratado no item anterior, com os primeiros e últimos termos sendo não positivos

---

(8) Becker([3], pp. 37-45) sugere uma formulação mais geral da taxa interna de retorno de investimentos educacionais se a renda sacrificada for o único custo. Nesse caso, a taxa de retorno (e o investimento em cada período) é determinada uma vez conhecidos os dois perfis de idade-renda, diferenciados porque relativos a dois distintos níveis de escolaridade. Assim, sejam os dois perfis Y_j e X_j, onde Y_j é o associado à alternativa de maior nível de escolaridade. A taxa de retorno é definida como o valor de i que satisfaz a igualdade:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{(1+i)^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j}{(1+i)^j}$$

(9) A diferença entre taxas de retorno privada e social está nos subsídios e no imposto de renda, excluídos da taxa de retorno privada. Assim, pode-se definir as taxas de retorno social e privada, i_s e i_p, como as taxas de desconto tal que

$$\sum_j (B_j-C_j-E_j)(1+i_s)^{-j} = 0 \text{ e } (1-t) \sum_j (B_j-C_j) (1+i_p)^{-j}$$

$$-(1-m)\sum_j E_j(1+i_p)^{-j} = 0,$$ onde B_j, C_j e E_j representam os valores dos benefícios, renda sacrificada e custo escolar no período j, t representa a incidência média do imposto de renda, suposta aqui constante e idêntica para ambos os perfis, e m é a proporção do custo direto que é subsidiado.

e pelo menos um termo intermediário sendo positivo. Como se viu, desde que satisfeita a condição econômica, a existência e unicidade de uma taxa de retorno positiva estão asseguradas.

Os perfis de idade-renda são obtidos através do ajustamento de curvas a observações empíricas, as quais frequentemente são funções parabólicas ou logarítmicas. Devido ao comportamento usual das observações, seria extremamente raro encontrar perfis tais que causassem mais de duas variações de sinal na sequência de fluxos de caixa. Mesmo neste caso, se condições mais gerais (como as de Norstrom) forem verificadas, é possível a aplicação do critério da taxa de retorno.

Entretanto, ao contrário de muitos casos de projetos industriais que podem ser truncados, assegurando-se dessa forma o uso generalizado do critério da taxa interna de retorno, essa possibilidade escapa a um projeto de investimento em educação, em virtude de que não é possível truncar o perfil de idade-renda do menor nível de escolaridade. Nesse sentido, cabe chamar a atenção para o fato de que a taxa de retorno em educação é semelhante à taxa de retorno sobre os custos de Fisher porque ambas resultam da comparação de duas distintas atividades.

Um projeto em educação formal é, normalmente, um projeto dependente devido à existência de um pré-requisito, na forma de um curso prévio, para sua realização. Adicionalmente, um de seus benefícios pode ser o valor de opção ([27], pp. 109-113), representado pela possibilidade de realizar um curso subsequente. Esse valor de opção não está incluído no cálculo usual da taxa de retorno.

No caso individual, se a decisão se der entre cursos alternativos, o uso do critério da taxa de retorno fica prejudicado quando as funções do valor atual dos projetos em consideração se cruzam a uma taxa de juros superior à utilizada para comparação. Nas decisões governamentais sobre a alocação de recursos fica caracterizada a presença de projetos mutuamente exclusivos (além do caso de impossibilidade física) na medida em que haja uma restrição orçamentária. Nesse caso, e independentemente de que as taxas de retorno em educação representem o retorno médio e não marginal, as comparações entre taxas de retorno em diferentes setores como indicadores de eficiência alocativa perdem a validade na medida em que esses resultados conflitam com aqueles revelados pelo critério do valor atual.

5. EXEMPLOS DE PROJETOS EDUCACIONAIS APRESENTANDO DUAS VARIAÇÕES DE SINAIS

Este capítulo tem a finalidade de ilustrar a discussão prévia, com exemplos retirados de trabalho anterior de um dos autores [18]. Ocorreram vários casos de projetos educacionais cuja sequência de fluxos de caixa apresentava duas variações de sinais. Em alguns projetos, uma das regressões usadas para estimar os perfis de idade-renda não era significativa a 5%; em outros a interseção dos perfis de idade-renda dava-se no início, não sendo satisfeita a condição econômica ($V(0)>0$). A seguir se discutirão dois exemplos, em um dos quais a condição econômica não foi satisfeita.

Nas estimativas dos perfis de idade-renda foram usadas três funções: linear, semilogarítmica e logarítmica. Em alguns casos, foi usada adicionalmente uma função quadrática, tendo a função logarítmica revelado os melhores resultados estatísticos. O primeiro exemplo refere-se a dados relativos a São Paulo, comparando-se indivíduos com a escola técnica completa com aqueles apenas com o ginásio completo. Como havia interesse sobre o efeito do tamanho da firma no retorno, foram obtidos perfis de idade-renda relativos à escola técnica para os estratos de tamanho da firma disponíveis. No exemplo, o retorno é para aqueles trabalhando em firmas que ocupam entre 250 e 499 pessoas.

O segundo exemplo é relativo a casos de indivíduos que trabalham em uma das cinco firmas da Guanabara que foram estudadas — a Standard Eletric. Consideraram-se as diferenças de renda entre aqueles com a escola técnica completa e incompleta. Estimou-se em um ano a duração do curso incompleto; portanto, o retorno se refere ao investimento associado a dois anos adicionais de curso. Os perfis de idade-renda foram obtidos a partir das regressões apresentadas na Tabela 1.

TABELA 1

REGRESSÕES UTILIZADAS NA CONSTRUÇÃO DOS PERFIS DE IDADE-RENDA(*)

1.o exemplo:

— esc. técnica N = 209	$\ln Y = 4.0156 + 0.67190 \ln I$; $\bar{R}^2 = 0{,}155$ (6,16)
— ginásio N = 463	$\ln Y = 3.3123 + 0{,}86608 \ln I$; $\bar{R}^2 = 0{,}216$ (11,26)

2.o exemplo:

— esc. téc. completa N = 69	$\ln Y = 1{,}1886 + 0{,}67118 \ln I$; $\bar{R}^2 = 0{,}098$ (2,70)
— esc. téc. incompleta N = 13	$\ln Y = 0{,}2792 + 1{,}19520 \ln I$; $\bar{R}^2 = 0{,}393$ (2,27)

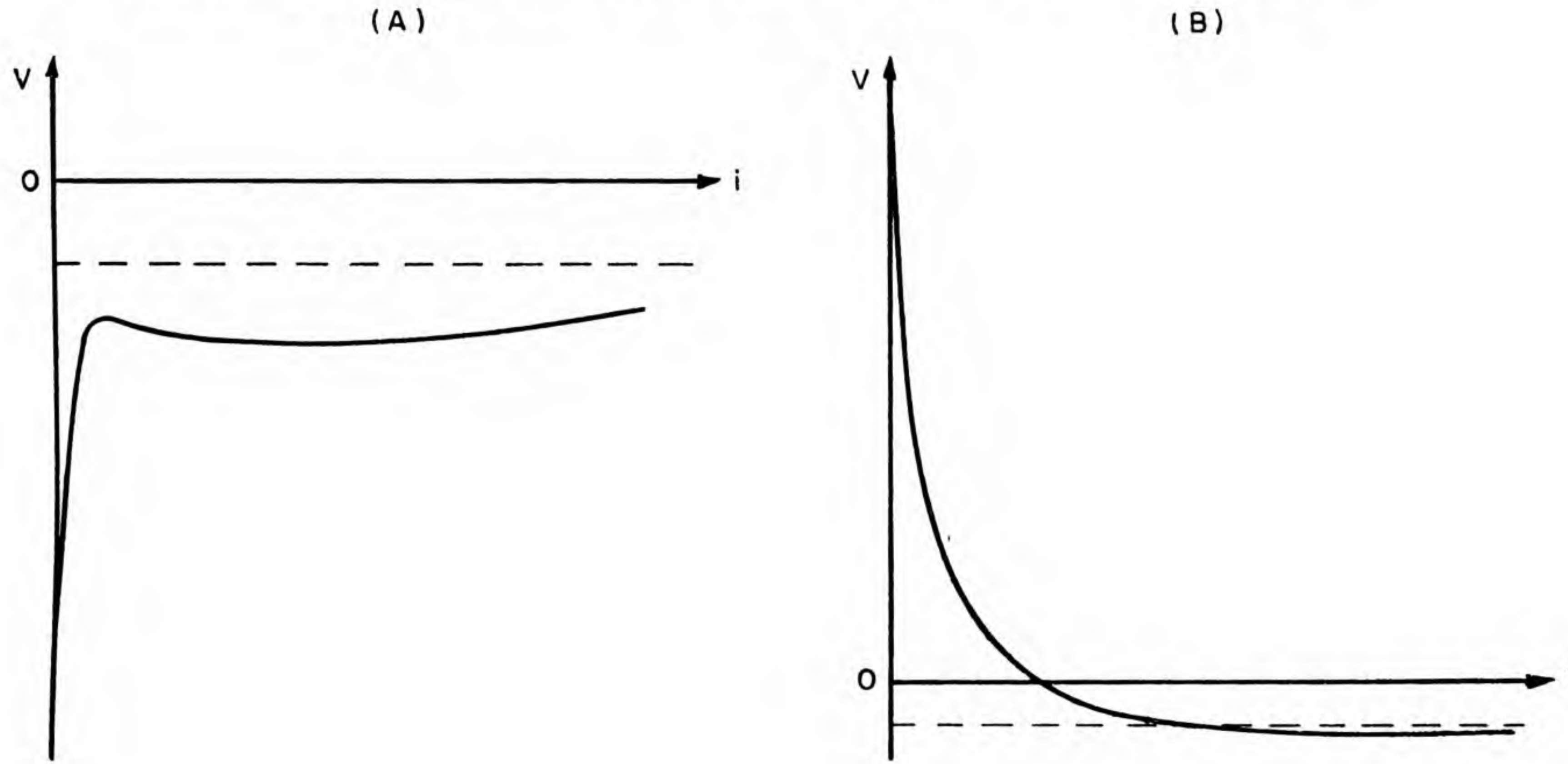
(*) Y = renda; I = idade; N = número de observações; $\bar{R}^2$ = coeficiente de determinação corrigido e o número entre parênteses é o valor calculado de t. Todos as regressões são significativas a 1%.

As estimativas dos custos diretos e da renda sacrificada utilizadas estão em [18]. Foi suposto que o ingresso do formando no mercado de trabalho ocorresse logo após o término do curso (21 anos); a vida útil considerada foi de 60 anos de idade. Uma vez construída a sequência dos fluxos de caixa, foi aplicado o programa de computação apresentado em [4] para o cálculo da taxa de retorno.

No primeiro exemplo, a segunda variação de sinal na sequência dos fluxos de caixa ocorre 16 anos após a entrada no mercado de trabalho. Os restantes 23 anos da vida útil apresentam fluxos de caixa negativos, do que resulta $V(0) < 0$, deixando de ser satisfeita assim a condição econômica. O Gráfico 4.a mostra a função valor atual, que assume sempre valores ne-

GRÁFICO - 4

COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO VALOR ATUAL PARA OS EXEMPLOS A e B



gativos para taxas de juros positivas, tendendo assintoticamente para o valor do fluxo de caixa inicial. Consequentemente, para este exemplo, o critério da taxa interna de retorno entra em colapso.

O segundo exemplo apresenta apenas sete fluxos de caixa negativos: os dois primeiros e os cinco últimos. Como $V(0)>0$, sabe-se que existirá uma única taxa interna de retorno positiva. No caso, esta taxa de retorno é de 29,4% ao ano. Portanto, a taxas de juros menores que esta taxa, a função valor atual será positiva, e a taxas de juros maiores, negativa. O Gráfico 4.b mostra o correspondente comportamento da função valor atual.

Em ambos os exemplos, a sequência dos fluxos de caixa apresentava duas variações de sinais. Pode-se observar que, uma vez satisfeita a condição econômica, a existência e unicidade de uma taxa de retorno positiva estão asseguradas.

6. CONCLUSÃO

Conforme se viu, pode-se assegurar a correta aplicação do critério da taxa interna de retorno na avaliação de projetos do tipo particular analisado. Isto é, sendo satisfeita a condição econômica de que o total de benefícios exceda o de custos, projetos de investimento com exatamente duas variações de sinal na sequência dos fluxos de caixa apresentarão uma e somente uma taxa interna de retorno positiva.

A experiência revela que a maioria dos projetos de investimento em educação apresenta no máximo duas variações de sinal na sequência dos fluxos de caixa. Dessa forma, e uma vez verificada a condição de natureza econômica, segue-se que tais projetos podem ser corretamente avaliados através do critério da taxa interna de retorno. Na eventualidade da ocorrência de mais de duas variações de sinal, ainda assim poderá ser possível a aplicação do critério, desde que outras condições, como a discutida no apêndice, sejam preenchidas.

APÊNDICE

Como mencionado no texto, existem certas condições de suficiência, como as devidas a Soper [24] e, como mostrado originalmente por Kaplan [15], as que se baseiam na aplicação do chamado Teorema de Sturm ([25], p. 103), que permitem garantir a correta implementação do critério da taxa interna de retorno para casos bastante gerais de alternativas de investimento não-convencional. Entre estas, por sua simplicidade de aplicação e ainda por sua relevância para o estudo do caso particular que se analisou, cumpre destacar a devida a Norstrom [19], e que decorre do seguinte resultado.

Para $y = 1+i$, e considerando-se uma alternativa de investimento, forme-se a seguinte equação:

$$B(y) = -Sy^n + \sum_{j=1}^{n} Q_j\, y^{n-j} = 0 \tag{1-A}$$

para $y > 1$.

Observe-se que, como $i = y-1$, a uma solução y^* de (1-A) corresponderá uma taxa positiva i^* que anula o valor atual da alternativa considerada.

A.1 TEOREMA

Se a sequência de fluxos de caixa cumulativos $\{A_0, A_1 \ldots, A_n\}$ onde

$$\begin{cases} A_0 = -S \\ A_j = A_{j-1} + Q_j \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

apresentar uma única variação de sinal, e se $A_0 A_n < 0$, então existirá uma e somente uma solução $y^* > 1$ para $B(y)=0$. Ainda mais, esta solução será simples (isto é, terá multiplicidade unitária).

DEMONSTRAÇÃO

Inicialmente, note-se que, se o produto $A_oA_n<0$, segue-se que, como $A_o= -S<0$, $A_n>0$. Portanto,

$B(1)=-S+\sum_{j=1}^{n} Q_j= A_n >0$, e como $\lim_{y\to\infty} B(y)$ tem o mesmo sinal que $-S = A_o$, a continuidade de $B(y)$, que é um polinômio em y, implica na existência de ao menos uma raiz de (1-A) no intervalo considerado $(y > 1)$.

Buscando-se uma contradição, suponha-se agora a existência de mais de uma raiz de $B(y) = 0$ no intervalo considerado. Sejam essas raízes $y_1, y_2, . .$, indexadas de tal modo que $y_1 \leqslant y_2 \leqslant . ..$ Ora, como se irá verificar, considerando-se a k-ésima dessas raízes, ter-se-á que a derivada primeira será tal que $B'(y_k) < 0$. Consequentemente, em particular, $B'(y_1) < 0$, o que implica em que y_1 seja uma raiz de $B(y) = 0$ com multiplicidade unitária (cf. [16], p. 48), e também que se tenha $B(y) < 0$ para $y \in (y_1, y_2)$. Porém, se $B(y) < 0$ para $y_1 < y < y_2$, dever-se-á ter então $B'(y_2) \geqslant 0$, o que fornece a desejada contradição.

Pode-se passar então à comprovação de que $B'(y_k) < 0$. Para tanto, tendo em vista que $Q_j = A_j - A_{j-1}$, $j = 1, . ., n$, note-se que se pode escrever:

$$B(y) = - Sy^n + \sum_{j=1}^{n} Q_j y^{n-j}$$

$$= A_oy^n + (A_1 - A_o)y^{n-1} + (A_2 - A_1)y^{n-2} + \quad +$$

$$+ (A_{n-1} - A_{n-2})y + (A_n - A_{n-1}) =$$

$$= y(A_oy^{n-1} + A_1y^{n-2} + \quad + A_{n-1})$$

$$+ (A_oy^{n-1} + A_1y^{n-2} + \quad + A_{n-1}) + A_n =$$

$$= (y - 1) (A_oy^{n-1} + A_1y^{n-2} + \quad + A_{n-1}) + A_n \qquad (2\text{-A})$$

Definindo-se

$$G(y) = A_oy^{n-1} + A_1y^{n-2} + \quad + A_{n-1} \qquad (3\text{-A})$$

podemos escrever ainda:

$$B(y) = (y - 1)\ G(y) + A_n \qquad (4\text{-}A)$$

com

$$B'(y) = (y - 1)\ G'(y) + G(y) \qquad (5\text{-}A)$$

Seja $y_k > 1$, com $B(y_k) = 0$. Então, como $A_n > 0$, por hipótese, segue-se de (4-A) que $G(y_k) < 0$. Logo, tendo em vista a expressão (5-A), se $G'(y_k) < 0$, ter-se-á que $B'(y_k) < 0$.

Ora, de (3-A) tem-se que

$$G'(y_k) = (n - 1)A_o y_k^{n-2} + (n-2)A_1 y_k^{n-3} + .. + A_{n-2}$$

e, portanto

$$y_k G'(y_k) = (n-1)A_o y_k^{n-1} + (n-2)A_1 y_k^{n-2} + \quad + A_{n-2} y_k \qquad (6\text{-}A)$$

Considere-se agora o produto $(n-m-1)\ G(y_k)$, onde m é inteiro e tal que $1 \leqslant m < n$; tem-se que:

$$(n - m - 1)\ G(y_k) = (n - m - 1)\ (A_o y_k^{n-1} +$$

$$+ A_1 y_k^{n-2} + ... + A_{n-1}) \qquad (7\text{-}A)$$

Tomando então a diferença (6-A) - (7-A), vem:

$$y_k G'(y_k) - (n-m-1)\ G(y_k) = mA_o y_k^{n-1} + (m-1)A_1 y_k^{2-n} +$$

$$+ \quad + A_{m-1} y_k^{n-m} + 0A_m y_k^{n-m-1} - A_{m+1} y_k^{n-m-2} -$$

$$- ... -(n-2)\ A_{n-2} y_k \quad -(n-m-1)A_{n-1} \qquad (8\text{-}A)$$

Ora, como por hipótese há uma única variação de sinal na sequência de fluxos de caixa cumulativos, segue-se que deve existir um inteiro m, tal que $1 \leqslant m < n$, para o qual:

$$A_j \begin{cases} \leqslant 0, \text{ para } j = 0, 1,.\ ., m; \text{ com ao menos } A_o < 0 \\ \geqslant 0, \text{ para } j = m+1,.\ ., n; \text{ com ao menos } A_n > 0 \end{cases}$$

Por conseguinte, tendo em vista o segundo membro da expressão (8-A), segue-se que $y_kG'(y_k)$ - $(n - m - 1)\ G(y_k) < 0$, o que implica em que se tenha $G'(y_k) < 0$, já que $n - m - 1 \geq 0$. e que $G(y_k) < 0$.

A.2. COROLÁRIO

Se, para uma alternativa de investimento, a sequência de fluxos de caixa líquidos, $\{-S, Q_1,.\ ., Q_n\}$, apresentar exatamente duas variações de sinal e $A_n > 0$, então existirá uma e somente uma (e simples) taxa interna de retorno positiva.

DEMONSTRAÇÃO

Por hipótese, havendo exatamente duas variações de sinal na sequência de fluxos de caixa, deve-se ter:

$$Q_j \begin{cases} \leqslant 0, \ j = 1,.\ ., p - 1; \text{ com } p \geqslant 1 \\ \geqslant 0, \ j = p,.\ ., n - m; \text{ com ao menos } Q_p > 0 \\ \leqslant 0, \ j = n - m + 1,.\ .,n; \\ \text{com } m + p \leqslant n \text{ e ao menos } Q_n < 0 \end{cases}$$

É claro então que:

a) $A_j - A_{j-1} = Q_j \leqslant 0$ para $j = n \quad m + 1,.\ ., n$; o que implica em que $A_j > 0$ para $j = n + m,.\ ., n$, pois que, por hipótese, $A_n > 0$.

b) $A_j - A_{j-1} = Q_j \leqslant 0$ para $j = 1,.\ ., p \quad 1$; de onde, tendo em vista que $A_o = -S < 0$, segue-se que $A_j < 0$ para $j = 0,.\ .,$ $p - 1$.

c) $A_j - A_{j-1} = Q_j \geqslant 0$ para $j = p, . . , n - m$; ou seja, A_j é não decrescente nesse intervalo, Portanto, como $A_{p-1} < 0$, se A_j vier a se tornar não-negativo por algum índice j no intervalo considerado, manter-se-á não negativo para todos os índices superiores a esse.

Consequentemente, a sequência de fluxos de caixa cumulativos apresentará uma e somente uma variação de sinal, o que é suficiente para a demonstração da proposição.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALCHIAN, Armen A. — "The Rate of Interest, Fisher's Rate of Return Over Costs and Keynes' Internal Rate of Return", **The American Economic Review**, 45, dezembro, 1955, pp. 938-943.

[2] ARROW, Keneth J. e LEVHARI, David — "Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment", **The Economic Journal**, 79, setembro, 1969, pp. 560-566.

[3] BECKER, Gary S. — **Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis with Special Reference to Education**, New York: Columbia University Press, 1964.

[4] DE FARO, Clovis — **Critérios Quantitativos para Avaliação e Seleção de Projetos de Investimento**, Monografia n.o 2, Rio de Janeiro: IPEA/INPES, 1971.

[5] ————— — "A Eficiência Marginal do Capital e as Condições de Soper: Uma Análise Crítica", a ser publicado em **Revista Brasileira de Economia.**

[6] FLEMMING, J.S. e WRIGHT, J.F — "Uniqueness of the Internal Rate of Return: A Generalization", **The Economic Jornal**, 81, junho, 1971, pp. 256-273.

[7] GIBBON, Virgilio H.S. — "A Rentabilidade da Educação no Brasil", **Conjuntura Econômica**, 29, abril, 1975, pp. 69-73.

[8] GRANT, Eugene L. e IRESON, W. Grant — **Principles of Engineering Economy**, New York: The Ronald Press Company, 1970, 5.a Ed.

[9] HARBERGER, Arnold C. — **Project Evaluation: Collected Papers**, Chicago, Illinois: Markham Publishing Co., 1973.

[10] HIRSHLEIFER, J. — "On Multiple Rates of Return: Comment", **The Journal of Finance**, 24, março, 1969, p. 98.

[11] ————— — **Investment, Interest and Capital**, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1970.

[12] HU, Teh-Wei et alii — "Special Problems in the Economic Analysis of Education" in Ronald A. Wyskstra, ed., **Human Capital Formation and Manpower Development**, New York: The Free Press, 1971, Cap. 13.

[13] JEAN, William H. — "On Multiple Rates of Return", **The Journal of Finance**, 23, março, 1968, pp. 187-191.

[14] ——————— — "On Multiple Rates of Return: Reply" **The Journal Finance**, 24, março, 1969, pp. 99-100.

[15] KAPLAN, Seymour — "A Note on a Method for Precisely Determining The Uniqueness or Nonuniqueness of the Internal Rate of Return for a Proposed Investment", **The Journal of Industrial Engineering**, 16, janeiro-fevereiro, 1965, pp. 70-71.

[16] McDUFFEE, Cyrus Colton — **Theory of Equations**, New York: John Willey & Sons, Inc., 1954.

[17] MEREWITZ, Leonard e SOSNICK, Stephen H. — **The Budget's New Clothes: a Critique of Planning-Programming-Budgeting and Benefit-Cost Analysis**, Chicago: Markham Publishing Co., 1971.

[18] MOURA CASTRO, Cláudio de e MELLO e SOUZA, Alberto de — **Mão-de-Obra Industrial no Brasil: Mobilidade, Treinamento e Produtividade**, Relatório de Pesquisa n.o 25, Rio de Janeiro: IPEA/INPES, 1974.

[19] NORSTROM, Carl J. — "A Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 7, junho, 1972, pp. 1835-1839.

[20] PITCHFORD, J.D. e HAGGER, A.J. — "A Note on the Marginal Efficiency of Capital", **The Economic Journal**, 68, setembro, 1958 pp. 597-600.

[21] PSACHAROPOULOS, George — **Returns to Education: An International Comparison**, San Francisco: Jossey-Bass, Inc. Publishers, 1973

[22] PUCCINI, Abelardo de Lima et alii — **Engenharia Econômica**, Rio de Janeiro: Forum Editora Ltda., 1974, 4.a Ed.

[23] QUIRIN, G. David — **The Capital Expediture Decision**, Homewood: Richard D. Irwin, Inc. 1967.

[24] SOPER, C.S. — "The Marginal Efficiency of Capital: A Further Note", **The Economic Journal**, 69, março, 1959, pp. 174-177.

[25] TURNBULL, H.W. — **Theory of Equations**, Edimburgh: Oliver and Boyd Ltda., 1952, 3.a Ed.

[26] USPENSKY, J.W. — **Theory of Equations**, New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1948.

[27] WEISBROD, Burton A. — Education and Investment in Human Capital", **Journal of Political Economy**, 70 outubro, 1962, pp. 106-23.