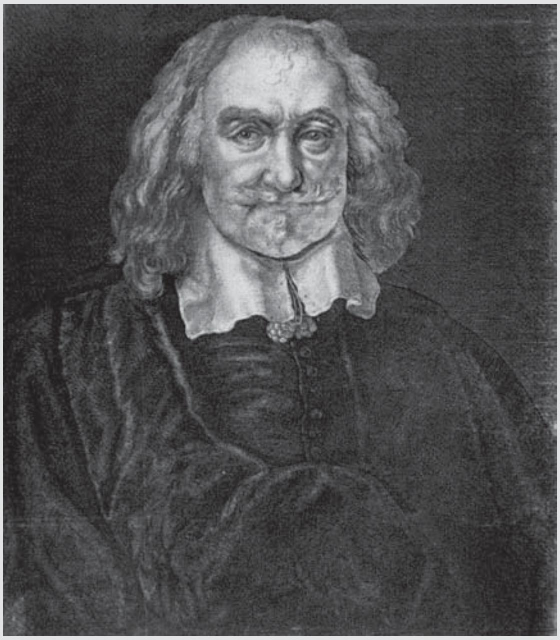
scientiæ studia, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 483-526, 2016

Thomas Hobbes

(1588-1679)



Tractatus opticus / Tratado de óptica

http://dx.doi.org/10.11606/S1678-31662016000200008

[217] *Tractatus opticus*

Hypotheses.

i. Omnis actio est motus localis in agente, sicut et omnis passio est motus localis in patiente. *Agentis* nomine intelligo *corpus*, cujus motu producitur effectus in alio corpore; *patientis*, in quo motus aliquis ab alio corpore generatur. Exempli gratia: dum clavus, ut aiunt, clavum pellit, motus pellentis est actio ejus, motus pulsi est pulsi passio. Item dum carbo ignitus calefacit hominem, etsi neque carbo neque homo suo loco exeat, neque ideo moveatur, est tamen aliquid materiae sive corporis subtilis in carbone, quod movetur, et motum ciet in medio usque ad hominem; et est in homine stante immoto, motus aliquis in partibus internis inde generatus. Motus autem hic in partibus hominis internis est calor; et sic moveri, calefieri, hoc est pati; et motus ille qui est in partibus carbonis igniti, est actio ejus, sive calefactio; et sic moveri, calefacere.

ii. Visio est passio producta in vidente per actionem objecti lucidi vel illuminati.

iii. In visione, neque objectum, neque pars ejus quaecunque transit a loco suo ad oculum. Ut motus possit motum generare ad quamlibet distantiam, non est necessarium ut corpus illud a quo motus generatur, transeat per totum illud spatium per [218] quod motus propagatur; sufficit enim ut parum, imo insensibiliter motum, protrudat id quod proxime adstat; nam id quod adstat, pulsum suo loco, pellit quoque quod est proximum sibi, atque eo modo motus propagabitur quantum libueris.

iv. Lucidum omne undiquaque a quotlibet simul aspicientibus videri potest.

v. Medium rarius voco quod minus contumax est adversus motum recipiendum: densius quod magis. Aerem autem rariorem suppono quam aquam, quam vitrum, quam cristallum.

scientiæ studia, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 483-526, 2016

[217] *Tratado de óptica*[1]

Hipóteses

1 Toda ação é movimento local no agente, assim como toda paixão é movimento local no paciente. Entendo, pelo nome "agente", o corpo por cujo movimento um efeito é produzido em outro corpo, por "paciente", o corpo no qual um movimento é gerado por outro corpo. Por exemplo, enquanto um prego, como se diz, bate em outro prego, o movimento daquele que bate é sua ação, o movimento daquele que é empurrado, sua paixão. Do mesmo modo, enquanto o carvão ardente aquece um homem, embora nem o carvão nem o homem deixem seu lugar, nem sejam movidos, existe, todavia, no carvão, alguma matéria ou corpo sutil que é movida e produz um movimento no meio, o qual alcança o homem, e daí, estando o homem imóvel, um movimento em suas partes internas é gerado. E esse movimento nas partes internas do homem é calor, e ser movido desse modo, ou aquecer-se, é paixão, e aquele movimento que está nas partes ardentes do carvão é sua ação, ou aquecimento, e ser movido dessa maneira, esquentar.

2 A visão é uma paixão produzida no vidente pela ação de um objeto luminoso ou iluminado.

3 Na visão, nem o objeto, nem qualquer parte deste, transita de seu lugar até o olho. Para que o movimento possa gerar movimento a qualquer distância, não é necessário, para o corpo que gera o movimento, transitar por todo o espaço pelo [218] qual o movimento é propagado, pois é suficiente que o movimento empurre um pouco, ou melhor, insensivelmente, aquilo que está situado próximo, e esse próximo, expulso de seu lugar, empurra também o que lhe está próximo, e o movimento será, assim, propagado até quanto se queira.

4 Todo objeto luminoso pode ser visto simultaneamente por todos os lados e por quantos espectadores se queira.

5 Denomino "meio mais rarefeito" aquele que é menos resistente a receber um movimento contrário. "Mais denso", aquele meio que é mais resistente. E suponho que o ar seja mais rarefeito do que a água, a água mais rarefeita do que o vidro, e o vidro mais rarefeito do que o cristal.

Propositio i.

Omne lucidum dilatat se, tumescitque in molem majorem, iterumque contrahit se, perpetuam habens systolem et diastolem.

Quoniam enim (per hypothesin quartam) lucidum omne simul undiquaque videtur, visio autem (per hypothesim secundam) fit ab actione lucidi, et est (per hypothesim primam) omnis actio motus localis in agente: sequitur, esse in lucido motum versus omnes partes simul. Quia vero lucida dum videntur non disperguntur usque ad oculos undiquaque videntium: sic enim perderentur: restat ut partes lucidi quas ostensum est moveri versus omnes partes simul, se iterum recipiant. Hoc autem idem est ac si diceremus totum lucidum tumescere, et iterum se contrahere alternis vicibus, sive habere perpetuam *systolem* et *diastolem*. Quod erat probandum.

Videtur autem, quam in omni corpore lucido observamus et appellamus scintillationem, nihil aliud esse quam hanc systolem et diastolem. **[219]**

Propositio ii.

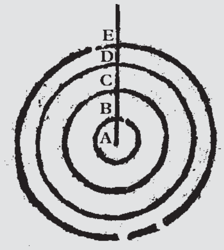
Motus a lucido ad oculum propagatur per continuam rejectionem partis medii contiguae.

Supposuimus (hypothesi tertia) neque objectum, neque partem aliquam ejus quamcunque in visione transire ad oculum; neque ullus alius modus quo motus ad distantiam propagetur excogitari potest, praeter illum quem proposuimus. Sequitur ergo illum esse.

Propositio iii.

Considerare quomodo fiat lumen, et quid sit.

Sit propositum lucidum, corpus solare; cujus centrum A, semidiameter AB: cui circumscribatur orbis concentricus cujus crassities BC. Orbem voco, solidum contentum inter duas sphaericas superficies concentricas. Rursus orbi BC circumponatur orbis alius concentricus CD, et huic alter DE: et eodem modo quotcunque alii, quilibet cuilibet aequalis. Quoniam ergo exteriores circumferentiae semper majores sunt interioribus, erunt reciproce crassities interiorum orbium majores quam exteriorum: quare major est BC quam CD, et CD quam



Proposição i

Todo objeto luminoso se dilata e intumesce em uma massa maior e novamente se contrai, tendo perpétua sístole e diástole.

Uma vez que (pela quarta hipótese) todo objeto luminoso é visto simultaneamente por todos os lados e que (pela segunda hipótese) a visão é produzida pela ação de um objeto luminoso e que (pela primeira hipótese) toda ação é movimento local no agente, segue-se que existe no objeto luminoso um movimento para todos os lados simultaneamente. Porque, enquanto os objetos luminosos são vistos, eles não se dispersam por todos os lados e alcançam os olhos dos videntes, pois nesse caso desapareceriam, resta, pois, que os lados do objeto luminoso, os quais parecem ser movidos simultaneamente para todas as direções, novamente retornem. Mas isso é como se disséssemos que o objeto luminoso inteiro se intumesce e se contrai alternadamente, ou que possui perpétua sístole e diástole. O que era para ser provado.

Ora, vê-se que aquilo que observamos em todo objeto luminoso e que chamamos de cintilação nada mais é do que essa sístole e diástole. **[219]**

Proposição ii

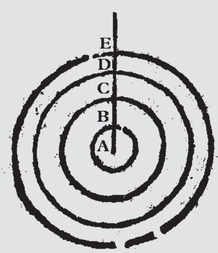
Um movimento é propagado desde o objeto luminoso até o olho por rejeição contínua das partes contíguas do meio.

Supusemos (hipótese 3) que, na visão, nem o objeto, nem qualquer parte deste, transita para olho; e tampouco é possível pensar em algum outro modo, diferente daquele que propusemos, no qual o movimento possa ser propagado a distância; segue-se, portanto, isso.

Proposição iii

Considerar de que modo a luz é produzida e o que ela é.

Seja suposto um objeto luminoso, o corpo do Sol, com seu centro em *A* e raio *AB*, circundado por orbes concêntricos, dos quais a parte mais espessa seja BC. Denomino "orbe" um sólido limitado por duas superfícies esféricas concêntricas. Além disso, seja o orbe *BC* circundado por outro orbe concêntrico *CD*, e este por outro *DE* e, do mesmo modo, por muitos outros, todos iguais; portanto, uma vez que as circunferências externas são sempre maiores do que as internas, as espessuras dos orbes internos serão reciprocamente maiores do que as dos orbes exteriores e, assim, *BC* será maior do que *CD* e *CD* maior do



DE. Quoniam jam per *primam*, sol dilatat se et tumescit in molem majorem, supponamus solem in diastole, sive tumescentia, aequare totam sphaeram cujus semidiameter est AC. Necesse ergo est ut medii pars quae erat in orbe BC, exeat in locum sibi aequalem proximum, nempe in orbem CD: idque eodem tempore. Nam quo instante **[220]** incipit motus a B versus C, necesse est ut incipiat motus a C versus D, et a D versus E, et ab E prorsum. Quare si statuatur oculus in qualibet distantia a sole, puta in E: quo instante incipit sol dilatare se in B, eodem ferietur oculus in E. Unde propagabitur motus ad retinam, et inde per conatum retinae nervum opticum usque ad cerebrum: et hoc fit eodem instante, quo motus incipit in B. Praeterea est in cerebro, ut in caeteris omnibus quae patiuntur, reactio sua, unde motus a cerebro propagatur retro per nervum opticum in retinam, inde per easdem lineas versus solem quibus ante a sole versus retinam. Atque omnis hic processus erit factus, ut jam demonstravimus fieri a sole ad oculum, in instante. Manifestum ergo est in omni visione propagari motum a lucido ad oculum et ad cerebrum, et inde retro ad partes extra oculos, in instante. Manifestum item est, motum qui sic a lucido propagatur, debiliorem esse longe quam prope. Cum enim BC sit major quam CD, et CD quam DE, sit tamen tempus propagationis a B ad C idem quod a C ad D, vel a D ad E: velocior est motus propagatus in BC quam in CD, et in CD quam in DE, et sic deinceps.

Hactenus motum a lucido qualis sit consideravimus: jam quomodo talis motus, et quando, vocatur lumen, considerandum est.

Primo, si nulla esset visio, nihil esset quod vocaremus lumen: nam caeci nati loquentem de lumine et coloribus non intelligunt. Lumen ergo non dicitur motus ante visionem, hoc est antequam perveniat ad cerebrum. Deinde motum in cerebro quod vocamus lumen, non sentimus in ipso cerebro, **[221]** sed foris ante oculos. Motum ergo a lucido non vocamus lumen, antequam retro a cerebro per reactionem propagetur per nervum opticum et oculos ad medium inter oculum et lucidum. Lumen ergo est apparitio ante oculos motus illius qui propagatur a lucidi *diastole* sive tumescentia ad cerebrum, et inde retro per oculos ad medium. Est ergo lumen lucidi phantasma, sive imago concepta in cerebro. Confirmatur autem etiam experientia, eo quod in omni que *DE*. Assim, uma vez que, através do primeiro orbe, o Sol se dilata e intumesce em uma massa maior, suponhamos o Sol em diástole, ou em uma intumescência, igualar a toda a esfera cujo raio é *AC*. É necessário, portanto, que a parte do meio que estava no orbe *BC* saia para um lugar próximo e igual ao seu, seja para o orbe *CD*, e isso no mesmo tempo. Pois, no mesmo instante em que [220] começa o movimento de *B* para *C*, é necessário que comece um movimento de *C* para *D*, e de *D* para *E*, e de *E* para adiante. Por isso, se o olho fosse colocado em uma distância qualquer a partir do Sol, que seja em *E*, então, no instante em que o Sol começar a dilatar-se em *B*, nesse mesmo instante o olho será golpeado em *E*. A partir do qual o movimento é propagado até a retina e, então, através da ação da retina e do nervo ótico, até o cérebro; e isso acontece no mesmo instante em que começa o movimento em *B*. Em seguida, existe no cérebro, como em tudo o mais que é passivo, a sua reação, pela qual um movimento é propagado inversamente a partir do cérebro, através do nervo ótico, para a retina e daí em direção ao Sol, ao longo das mesmas linhas que anteriormente vinham do Sol para a retina. E, assim, todo esse processo será feito em um instante, como já demonstramos acontecer do Sol para o olho. Portanto, é manifesto que, em toda visão, um movimento é propagado de um objeto luminoso para o olho e para o cérebro, e então, de modo reverso, do cérebro para lugares externos aos olhos, em um instante. É também manifesto que o movimento assim propagado a partir do objeto luminoso será mais fraco quanto mais longe [for propagado]. Portanto, ainda que *BC* seja maior do que *CD* e *CD* maior do que *DE*, embora o tempo de propagação de *B* para *C* seja igual ao de *C* para *D*, ou o de *D* para *E*, o movimento propagado para *BC* é mais veloz do que o para *CD*, e o movimento para *CD* é mais veloz do que o movimento para *DE*, e assim por diante.

Até agora consideramos qual seria o movimento a partir do objeto luminoso; devemos considerar, a seguir, de que modo e quando tal movimento é denominado "luz".

Em primeiro lugar, se não existisse a visão, nada seria, por nós, chamado "luz"; com efeito, os cegos de nascimento não entendem uma conversação sobre a luz e as cores. Portanto, não se diz "luz" para o movimento anterior à visão, isto é, antes que ele alcance o cérebro. Em segundo lugar, o movimento no cérebro que chamamos "luz" não é sentido por nós no próprio cérebro, [221] mas fora, diante de nossos olhos. Portanto, não chamamos "luz" o movimento do objeto luminoso antes de o movimento ser propagado inversamente, por reação, desde o cérebro, através do nervo ótico e, dos olhos, para o meio entre o olho e o objeto luminoso. Portanto, a luz é uma aparição diante dos olhos daquele movimento que é propagado do objeto luminoso, por diástole ou intumescência, para o cérebro e, a partir daí, inversamente, através dos olhos, para o meio. Portanto, a luz é uma aparição do objeto luminoso, ou uma imagem concebida no cérebro. Isso, por sua vez, é confirmado ainda pela experiência, porque, em toda concussione cerebri quo fit motus aliquis per nervum opticum extrorsum, ut quando oculus percutitur, apparet lumen quoddam ante oculos. Ex his quae dicta sunt faciemus breve *corollarium*.

Corollarium.

Lumen est phantasma a lucido. Idem sentiendum de coloribus, qui sunt lumen *perturbatum*.

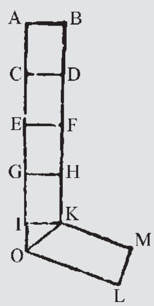
Lumen propagatur ad quamlibet distantiam in instante.

Lumen quo longius, eo debilius propagatur.

Monitum.

Difficultas maxima in lumine concipiendo tam veterum, quam neotericorum philosophorum ingenia torsit, quibus spero satisfactum iri, si considerent vix ac ne vix quidem a nobis clare, distincteque concipi quidpiam nisi motus, aut figurarum ope. Quas si quis diligenter perpendat, et motum compositiones intelligat, nil in tota philosophia facilius, nil ad demonstrationem accomodatius, et hominum ingenio congruentius esse fatebitur.

Definitio radii.



Radium appello, viam per quam motus a lucido per medium propagatur. Exempli gratia: sit **[222]** lucidum AB, a quo moto ad CD pars medii quae interjacet inter AB et CD, protrudatur ad EF: et a parte medii quae erat inter CD et EF, promota ulterius ad GH, propellatur pars illa quae erat inter EF et GH, ulterius ad IK, et sic deinceps, sive directe sive non, puta versus LM. Spatium jam quod continetur inter lineas AIOL, et BKM, est id quod voco radium, sive viam per quam motus a lucido per medium propagatur.

Propositio iv.

Radius est spatium solidum.

Quoniam enim radius est via per quam motus projicitur a lucido, neque potest esse motus nisi corporis: sequitur radium locum esse corporis, et proinde habere tres dimensiones. Est ergo radius spatium solidum.

concussão do cérebro, pela qual se faz um movimento através do nervo óptico para o exterior, como quando o olho é golpeado, aparece alguma luz diante dos olhos. A partir do que foi dito, faremos um breve corolário.

Corolário

Luz é uma aparição de um objeto luminoso. O mesmo deve ser considerado para as cores, as quais são luz perturbada.

A luz é propagada a qualquer distância em um instante.

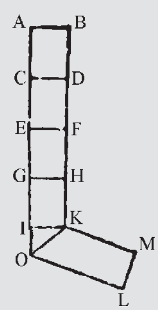
Quanto mais longe a luz é propagada, tanto mais fraca ela se torna.

Nota

A grande dificuldade em entender a luz tem atormentado tanto a inteligência dos filósofos antigos quanto a dos modernos, aos quais espero satisfazer se considerarem que muito dificilmente algo é por nós concebido de modo claro e distinto a não ser por meio do movimento ou com o auxílio de figuras. Qualquer um que examine diligentemente e entenda as composições dos movimentos confessará que nada, em toda a filosofia, é mais fácil e mais apropriado à demonstração e conveniente à inteligência humana.

Definição de raio

Denomino "raio" [de luz] o caminho pelo qual o movimento é propagado através do meio a partir do objeto luminoso. Por exemplo, seja [222] o objeto luminoso *AB*, por cujo movimento para *CD*, a parte do meio situada entre *AB* e *CD* é impelida para *EF*; e a parte do meio que estava entre *CD* e *EF*, tendo sido deslocada adiante para *GH*, [então] aquela parte que estava entre *EF* e *GH* é impelida adiante para *IK*, e assim por diante, seja ou não em linha reta para, suponha, *LM*. Assim, o espaço que está contido entre as linhas *AIOL* e *BKM* é o que eu denomino "raio", ou o caminho pelo qual o movimento, desde o objeto luminoso, é propagado através do meio.



Proposição IV

Um raio é um espaço sólido.

Uma vez que um raio é o caminho através do qual um movimento é projetado a partir de um objeto luminoso e que não pode existir movimento a não ser de um corpo, segue-se que um raio é o lugar de um corpo e que possui, pois, três dimensões. Portanto, um raio [de luz] é um espaço sólido.

Definitio radii directi et refracti.

Radius *directus* est, qui sectus plano per axim, exhibet in plano secante figuram parallelogrammam, ut AK. Radius *refractus* est, qui componitur ex directis angulum facientibus, una cum parte intermedia: ut radius AM *refractus* dicitur, quia componitur ex directis AK et KL, una cum parte IKO.

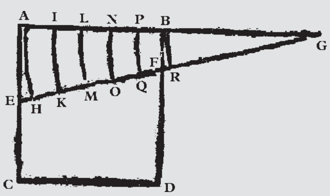
Definitio lineae lucis.

Lineam unde radii latera incipiunt: exempli gratia, lineam AB, unde incipiunt latera AI et BK: appello *lineam lucis* simpliciter. Linearum autem **[223]** quae a linea lucis continua protrusione derivantur, quales sunt CD, EF, etc., unamquamque appello lineam lucis *eousque propagatam*.

Causa physica radiorum directorum.

Quandoquidem radius habet tres dimensiones, demus ipsi perspicuitatis gratia latitudinem aliquam notabilem AB: perspicuitatis inquam gratia, quia radius a minimo lucido derivatus est insensibilis, et tamen radius.

Jam si AB protrudat ante se medii partem sibi proximam versus CD omni suo puncto aeque velociter, necesse est ut describatur parallelogrammum, sive radius directus, AD; tanquam si AB esset latus cylindri volutati ab AB versus CD. Quamdiu autem medium uniforme est, hoc est, aeque ubique permeabile, nulla ratio excogitari potest quare AB non propagaret motum omni sua parte aeque velocem: ideoque ratio patet quare in eodem medio radius semper est directus. Quod si AB non moveretur omni sua parte aeque velociter, sed inaequaliter, puta pro ratione rectae AE ad rectam BF, non propagabitur motus per viam sive spatium parallelogrammum ABCD, neque erit EF linea lucis propagata: sic enim AB, quam supponimus esse in materia tenuissima, distraheretur in quantitatem sese majorem. Ut sciamus autem per quam viam propagabitur motus hic ab AB inaequalis, putemus ipsam AB esse, non ut ante latus cylindri, sed latus frusti coni, habentis diametrum majoris basis AE, minoris vero BF. Jam si frustum hoc coni provolvatur, circuli



scientiæ studia, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 483-526, 2016

Definição de raio reto e de raio refratado

Raio reto é aquele que, tendo sido seccionado por um plano que passa através de seu eixo, exibe uma figura paralelogrâmica no plano secante, como *AK*. Raio refratado é aquele que é composto dos raios retos que fazem um ângulo ao longo de uma única parte intermediária; como o raio *AM*, dito refratado, pois ele é composto dos raios retos *AK* e *KL* ao longo de uma única parte [intermediária] *IKO*.

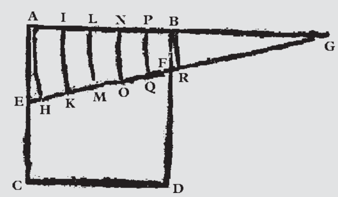
Definição de linha de luz

Denomino simplesmente "linha de luz" a linha onde os lados de um raio começam; por exemplo, a linha *AB*, onde começam os lados *AI* e *BK*. Por sua vez, denomino "linha de luz propagada" qualquer linha **[223]** derivada da linha de luz por uma contínua protrusão, tal como *CD*, *EF* etc.

A causa física dos raios retos

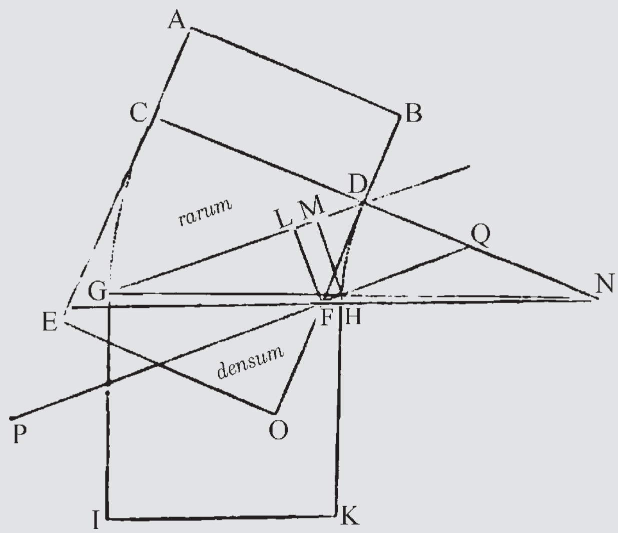
Uma vez que um raio possui três dimensões, concedamos-lhe, para fim de clareza, uma largura, representada por *AB*; para fins de clareza, quero dizer, porque um raio derivado de um objeto minimamente luminoso é insensível, mas ainda assim é um raio.

Ora, se *AB* empurra adiante, para *CD*, a parte do meio [que está] próxima de si própria, [e faz isso] por todos os seus pontos com igual velocidade, então é necessário que um paralelogramo seja descrito, ou o raio reto *AD*; tal como se *AB* fosse o lado de um cilindro que é girado de *AB* para *CD*. Porém, enquanto o meio é uniforme, isto é, igualmente permeável em qualquer parte, nenhuma causa pode ser concebida de por que *AB* não propagaria, a partir de todas as suas partes, um movimento com igual velocidade; torna-se manifesta, pois, a causa de por que, em um mesmo meio, o raio é sempre reto. Porque, se *AB* não for movida, a partir de todas as suas partes, com igual velocidade, mas desigualmente (considere-se, em vista do raciocínio, a linha reta *AE* em relação à linha reta *BF*), então não será propagado um movimento pelo caminho ou espaço do paralelogramo *ABCD*, e tampouco será a linha de luz propagada *EF* [movida com igual velocidade]; assim, *AB*, que supomos estar em uma matéria sutilíssima, é desviada em quantidade [sempre] maior. E para conhecermos, pois, por quanto é desigual o caminho do movimento propagado a partir de *AB*, suponhamos que a própria *AB* seja não como anteriormente, o lado de um cilindro, mas como o lado de um tronco de cone, tendo *AE* como o diâmetro da base maior e *BF* como o diâmetro da base menor. Ora, se um tronco desse cone for rolado, as circun-



basium ejus tanquam [224] duae rotae inaequales describent duos circulos AH, BR, quorum centrum commune erit vertex coni, puta punctum G. Reliquae autem partes intermediae describent singulae singulos circulos, quales sunt IK, LM, NO, PQ, extremis AH, BR concentricos. Via ergo qua motus inaequalis propagatur ab AB, non est directa, ut AD, sed qualis continetur lineis rectis AB, HR, et circularibus AH, BR, nempe portio sectoris.

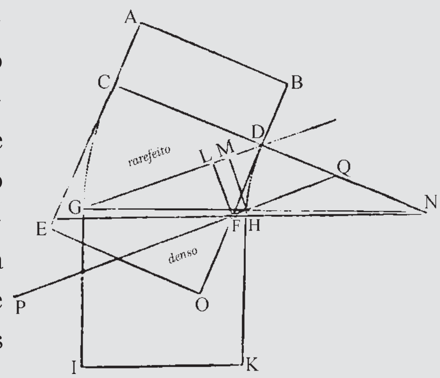
His positis, putemus rectam ED disterminare duo media, quorum utrumvis, puta superius, sit rarum, alterum densum: et ab AB linea lucis, venire oblique radium directum, sive parallelogrammum AD. Statim atque ventum est ad contactum *densi* in D, progressus erit inaequalis: propter medium biforme, cum C sit in raro, D in denso: nempe tardior a parte D, velocior a parte C, in ratione CE ad DF, vel CG ad DH. Via ergo qua motus propagatur a CD, est per portionem sectoris CGDH, et est GH linea lucis propagata omni sua parte ad medium *densum*, et aequalis ipsi CD vel [225] AB. Si igitur ad GH in punctis G et H ducantur perpendiculares GI, HK, erit progressus directus: et totus radius erit spatium conclusum intra figuram ACGIKHDB. Patet ergo ratio physica quare radius refringitur, consistens in eo quod medium est biforme.



Notandum est quoque rectas LF, MH, perpendiculares ad ED, esse inter se aequales: quod demonstrare non est difficile, sed verbosum: ex quo sequitur, datis LF (quae est quantitas demersionis termini D in medio denso) et AB (quae sumitur arbitrio nostro pro linea lucis), statim dari GH pro linea lucis propagata in medium densum. Ducta enim recta FH parallela ad ED, et applicata longitudine AB, ita ut alter terminus sit in recta ED, alter in FH, fiet GH linea lucis propagata eousque: a qua ductae perpendiculares GI, HK, designant radii partem refractam. Neque refert ad effectum refractionis, in qua parte rectae ED statuatur punctum G, cum tota ED, sicut et AB vel GH, intelligenda sit ut insensibilis. Commodius tamen ponetur G in ipso puncto E, et H, in ea parte rectae FH quam longitudo AB determinat: ut AE in medio raro continuetur cum GI parte refracta in medio denso.

ferências de suas bases, que são como [224] duas rodas desiguais, descreverão duas circunferências, *AH* e *BR*, cujo centro comum será o vértice do cone, suponha [que esse vértice seja] o ponto *G*. Mas as partes intermediárias restantes descrevem, cada uma, circunferências singulares, como são *IK*, *LM*, *NO*, *PQ*, concêntricas às extremidades *AH* e *BR*. Portanto, o caminho no qual o movimento é propagado desigualmente a partir de *AB* não é reto, como *AD*, mas é tal como aquele contido pelas linhas retas *AB* e *HR* e pelas circunferências *AH* e *BR*, a saber, um pedaço da seção [do cone].

Isso posto, suponhamos que a linha reta *ED* separa dois meios; que o meio superior seja rarefeito e o que o outro seja denso; e que, a partir da linha de luz *AB*, venha obliquamente um raio reto, ou o paralelogramo *AD*. Tão logo tenha chegado ao contato com o meio denso, em *D*, a progressão será desigual: por causa do meio biforme, pois *C* está no meio rarefeito e *D* está no denso, a saber, mais lentamente do lado *D* e mais rapidamente do lado *C*, na razão de *CE* para *DF*, ou na razão de *CG* para *DH*. Portanto, o caminho pelo qual o movimento é propagado a partir de *CD* é através do pedaço da seção *CGDH*, e *GH* é a linha de luz propagada com todos os seus lados no meio denso, e é igual à própria *CD*, ou [225] à *AB*. Se, portanto, a partir de *GH*, nos pontos *G* e *H*, forem traçadas as perpendiculares *GI* e *HK*, a progressão será reta, e o raio inteiro será o espaço compreendido no interior da figura *ACGIKHDB*. É manifesto, portanto, que a causa física pela qual o raio é refratado consiste nisso, que o meio é biforme.

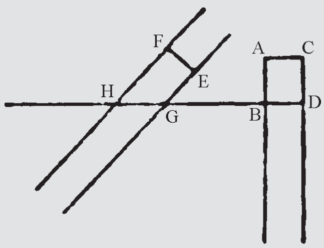


Deve-se notar também que as linhas retas *LF* e *MH*, perpendiculares a *ED*, são iguais entre si; o que não é difícil de demonstrar, mas prolixo. Do que se segue que, dadas *LF* (que é a quantidade de imersão da extremidade *D* no meio denso) e *AB* (que a nosso arbítrio é [a quantidade] atribuída à linha de luz), *GH* é imediatamente dada como a linha de luz propagada no meio denso. Assim, traçada a linha reta *FH* paralela à *ED* e aplicado o comprimento *AB* de modo que uma extremidade esteja na linha reta *ED* e a outra em *FH*, [então] *GH* é produzida, [isto é,] a linha de luz propagada adiante, a partir da qual as perpendiculares traçadas *GI* e *HK* indicam a parte refratada do raio. E não importa, para o efeito da refração, em que posição da linha reta *ED* é posto o ponto *G*, uma vez que toda a linha reta *ED* (assim como também *AB* ou *GH*) deve ser entendida como [um linha reta] insensível. É mais conveniente, entretanto, *G* ser posto no próprio ponto *E*, e *H* [posto] na posição da linha reta *FH* com o tanto de comprimento determinado por *AB*; de modo que [o lado] *AE*, no meio rarefeito, é continuado com o lado refratado *GI* no meio denso.

Propositio v.

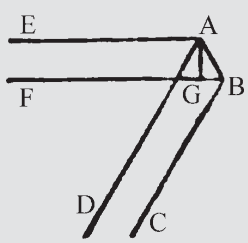
Radius incidens perpendiculariter in superficiem planam, considerari potest tanquam linea mathematica: sed incidens in eandem oblique, considerandus est ut habens latitudinem.

Sit radius ABCD habens latitudinem AC, cadens perpendiculariter in planum BD: consideratur ergo **[226]** ut via qua motus propagatur, in qua eadem omnia accidunt lateri AB, quae lateri CD. Nam et utrumque latus est perpendiculare ad planum BD, et aequalis est operatio ab A ad B, et a C ad D, vel a tota AC ad totam BD. Quare aeque considerare motum possumus in AB, vel in CD, vel in tota linea ABCD. Possumus ergo considerare radium ABCD sine latitudine, hoc est ut linea mathematica. Sed in incidentia obliqua, ubi operatio ab F ad planum in H in majori est distantia quam ab E in G, non potest considerari EFGH ut linea mathematica: quia sic consideraretur EF ut punctum mathematicum, quod tamen consideratur uno termino operari longius quam altero, hoc est, consideratur ut habens terminos, hoc est, non ut punctum. Itaque si consideraremus lineam oblique incidentem ut mathematicam, consideraremus EF ut punctum et non punctum, quod est absurdum.



Postulatum.

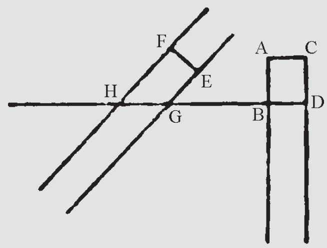
Postulamus, latera radii exire a linea quae ipsa conjungit ad angulos rectos, modo sint et latera et linea lucis in eodem medio. Exempli gratia, sit radius luminis ABCD, cujus latera sunt AD et BC, linea autem quae ipsa conjungit AB, quam lineam voco *lineam lucis*. Postulo hic nihil aliud, quam ut lucidum operetur totis viribus: nam si latera radii exirent ab AB linea lucis oblique, ut AE et BF, non ageret lucidum totis viribus, sed diminutis, ea scilicet ratione quam habet AG ad AB. **[227]**



Proposição v

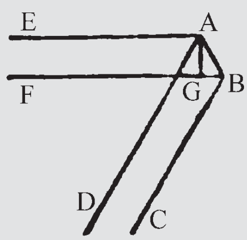
O raio que incide perpendicularmente em uma superfície plana pode ser considerado como uma linha matemática, mas o que incide obliquamente na mesma superfície deve ser considerado como tendo largura.

Seja o raio *ABCD* com largura *AC* incidindo perpendicularmente no plano *BD*; considerado, portanto, **[226]** como o caminho pelo qual o movimento é propagado, no qual todos os lados, o lado *AB* e o lado *CD*, incidem ao mesmo tempo. Pois qualquer um dos lados é perpendicular ao plano *BD* e a operação de *A* para *B* e de *C* para *D*, ou de toda *AC* para toda *CD*, é igual. Assim sendo, podemos igualmente considerar o movimento em *AB* ou em *CD*, ou na linha *ABCD* inteira. Podemos considerar, portanto, o raio *ABCD* como não possuindo largura, isto é, como uma linha matemática. Mas, na incidência oblíqua, na qual a operação de *F* para o plano em *H* é maior, em distância, do que a operação de *E* em *G*, não se pode considerar *EFGH* como uma linha matemática; pois, desse modo, *EF* seria considerada como um ponto matemático e, não obstante, seria [também] considerado que uma extremidade opera mais longe do que a outra, isto é, [a linha de luz *EF*] seria considerada como possuindo extremidades, isto é, [seria considerado] não como um ponto. Portanto, se considerarmos a linha que incide obliquamente [no plano] como uma linha matemática, então deveremos considerar *EF* como um ponto e [também] considerá-la não como um ponto, o que é absurdo.



Postulado

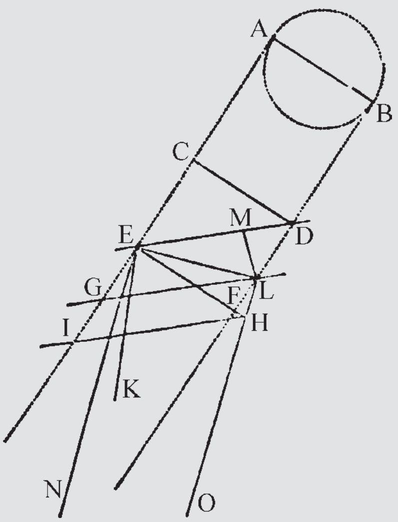
Postulamos que os lados do raio provêm da linha [reta] que os une em ângulos retos, de modo que os lados [do raio] e a linha de luz estejam no mesmo meio. Por exemplo, seja um raio de luz *ABCD*, cujos lados são *AD* e *BC*, e que a linha *AB* que os une seja a linha que denomino "linha de luz". Nada mais postulo aqui senão que o objeto luminoso opera com todas as suas forças; pois, se os lados do raio viessem obliquamente a partir da linha de luz *AB*, como *AE* e *BF*, então o objeto luminoso não operaria com todas as suas forças, mas com forças diminuídas, a saber, na razão de *AG* para *AB*.[2] **[227]**



Propositio vi.

Radius e medio raro incidens oblique in medium densius,
cujus superficies plana est, refringitur versus perpendiculum.

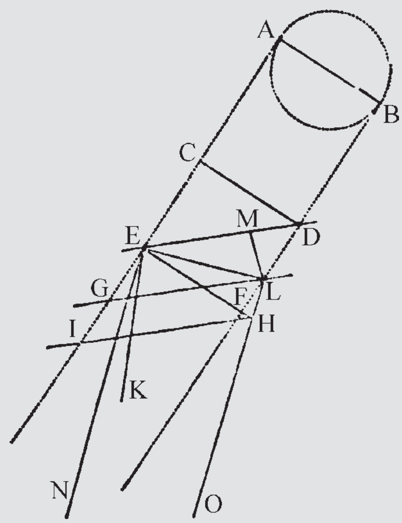
Sit ED recta in superficie plana medii densioris, ita ut quod est supra ED sit medium rarius, quod infra, densius. Sitque in medio raro linea lucis (puta solis diametrum) AB, a qua exeat radius cujus latera AE, BD sint ad AB perpendicularia, et ad planum ED obliqua. Propagato igitur altero lucis termino ad planum ED in puncto D, alter terminus non propagabitur simul in E, sed perveniet tantum ad C, ita ut AC sit aequalis BD. Producta recta BD, fiat DH aequalis rectae CE. Si igitur medium mutatum non esset, quando terminus lucis A propagatus esset ad E, alter terminus deberet esse in H, immersus scilicet sub plano ED quanta est distantia minima inter punctum H vel C et rectam ED, vel inter eandem rectam ED et sibi parallelam IH. Quoniam vero supponitur medium sub plano ED densius quam quod supra, et propagari debiliorem motum in denso quam in raro, tunc quando *lineae lucis* terminus A est in E, erit alter terminus B inter H et D, puta in L. Ergo [228] terminus lucis B erit immersus in medium densum quanta est distantia minima inter rectam ED et sibi parallelam GFL, sive quantitate lineae LM, tunc cum alter terminus est in superficie eiusdem medii densi. Ducta igitur recta a puncto E ad rectam GL, eadem longitudine qua est linea lucis AB, vel CD, quae sit EF, erit jam EF linea lucis *propagata eousque*. Quoniam autem latera radii exeunt a *linea lucis* perpendiculariter, ducantur perpendiculares ad ipsam EF rectae EN, FO, propagabitur lux inter parallelas EN, FO. Quare EFNO erit radius refractus, et cadet necessario latus EN inter EI et perpendicularem ad planum, quae est EK, et latus FO inter BD productam et perpendicularem ad idem planum sibi conterminam. Jam si pro latitudine AB sumamus latitudinem radii minorem quavis magnitudine data, demonstratio haec eadem existens applicabitur lineae EN, ut EN sit ipse radius refractus versus perpendicularem EK. Quare radius e medio raro, etc. Quod erat probandum.



Proposição vi

O raio proveniente de um meio rarefeito que incide obliquamente em um meio mais denso, cuja superfície é plana, é refratado em direção à perpendicular.[3]

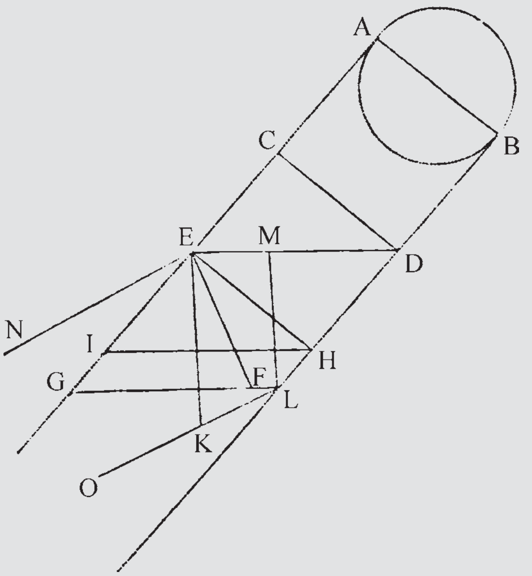
Seja a linha reta *ED* na superfície plana do meio mais denso, de modo que em cima esteja um meio mais rarefeito e, embaixo, um mais denso. E seja, no meio rarefeito, a linha de luz *AB* (tome-se o diâmetro do Sol), da qual provenha um raio cujos lados *AE* e *BD* sejam perpendiculares a *AB* e oblíquos ao plano *ED*. Portanto, propagada uma das extremidades da luz para o plano *ED* no ponto *D*, a outra extremidade não será propagada simultaneamente para o plano no ponto *E*, mas alcançará somente *C*, uma vez que *AC* é igual a *BD*. Seja a linha reta *BD* prolongada e faça-se *DH* igual à linha reta *CE*. Portanto, se o meio não tiver sido alterado, então, quando a extremidade de luz *A* for propagada até *E*, a outra extremidade deverá estar em *H*, a saber, imersa sob o plano *ED* o tanto quanto é a menor distância entre o ponto *H*, ou *C*, e a linha reta *ED*, ou entre a mesma linha reta *ED* e sua paralela *IH*. Ora, uma vez que o meio é suposto ser mais denso abaixo do plano *ED* do que acima deste e que o movimento é propagado mais fracamente em um meio denso do que em um meio rarefeito, então, quando a extremidade *A* da linha de luz estiver em *E*, a outra extremidade *B* estará entre *H* e *D*, que esteja em *L*. Portanto, **[228]** a extremidade de luz *B* estará imersa no meio denso o tanto quanto for a menor distância entre a linha reta *ED* e sua paralela *GL*,[4] ou [o tanto quanto for] a magnitude da linha *LM*, quando a outra extremidade estiver, então, na própria superfície do meio denso. Seja traçada, pois, uma linha reta do ponto *E* até a linha reta *GL* com igual comprimento que a linha de luz *AB*, ou *CD*, e que seja *EF*; *EF* será, então, a linha de luz propagada até o fim [do meio denso]. Ora, uma vez que os lados do raio provêm perpendicularmente da linha de luz, que sejam traçadas as linhas retas *EN* e *FO* perpendiculares à própria *EF*, a luz será propagada entre as paralelas *EN* e *FO*. Por isso, *EFNO* será o raio refratado, e o lado *EN* incidirá necessariamente entre *EI* e a perpendicular ao plano [*ED*, a superfície que separa os dois meios], que é *EK*, e o lado *FO* [incidirá] entre a prolongada de *BD* e a perpendicular ao mesmo plano, ou aproximadamente. Ora, se tomarmos a largura de *AB* como a menor largura de um raio, menor do que qualquer magnitude dada, essa a mesma demonstração será aplicada para a linha *EN*, como se *EN* fosse o próprio raio refratado em direção à perpendicular *EK*. Por isso, o raio proveniente de um meio rarefeito etc. O que era para ser provado.



Propositio vii.

Radius e medio denso incidens oblique in medium rarius, cujus superficies est plana, refringitur in partes aversas a perpendiculo.

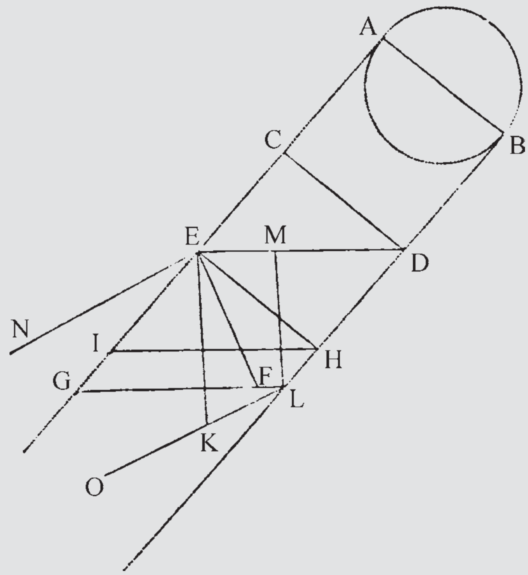
Sit ED in superficie plana medii rarioris, ita ut quod est supra ED sit medium densius, quod infra rarius. Sitque in medio denso linea lucis, puta solis diametrum, AB: a qua exeat radius cujus latera AE, BD sint ad AB perpendicularia, et ad planum ED obliqua. Propagato igitur altero lucis termino ad planum ED in puncto D, alter terminus non propagabitur simul ad planum in puncto E, [229] sed tantum ad C, ita ut AC sit aequalis DB. Producta recta BD, fiat DH aequalis rectae CE. Si igitur medium mutatum non esset quando terminus lucis A propagatus esset ad E, alter terminus deberet esse in H: immersus scilicet sub plano ED, quanta est distantia minima inter punctum H vel C et rectam ED, vel inter eandem rectam ED et sibi parallelam IH. Quoniam vero supponitur medium sub plano ED rarius quam quod supra, et propagari motum facilius in raro quam in denso: tunc quando lineae lucis terminus A est in E, erit alter terminus B ultra H, puta in L, immersus in medium rarum quanta est distantia minima inter rectam ED et sibi parallelam GL, hoc est quantitate lineae LM. Ducta igitur recta a puncto E ad rectam GL, eadem longitudine qua est linea lucis AB vel CD, quae sit EF, erit jam EF linea lucis [230] *propagata eousque*. Ductis igitur EN et FO perpendicularibus ad EF, erit per *postulatum* superius, radius propagatus in medio raro secundum parallelas EN et FO. Cadit autem EN, ita ut angulum faciat majorem cum perpendiculo EK quam facit linea directa EG. Et FO, similiter, facit majorem angulum cum sibi contermino perpendiculari, si duceretur, quam facit ea quae est in directum cum BD: hoc est refringitur radius EFNO in partes aversas a perpendiculo. Jam si pro AB, linea lucis, sumatur magnitudo omni magnitudine proposita minor, quod demonstra-



Proposição vii

O raio proveniente de um meio denso que incide obliquamente em um meio mais rarefeito, cuja superfície é plana, é refratado em direção contrária à perpendicular.

Seja [a linha reta] *ED* na superfície plana do meio mais rarefeito, de modo que acima de *ED* esteja um meio mais denso e, embaixo, um mais rarefeito. E seja, no meio denso, a linha de luz *AB*, tome-se o diâmetro do Sol, da qual provenha um raio cujos lados *AE* e *BD* sejam perpendiculares a *AB* e oblíquos ao plano *ED*. Portanto, propagada uma das extremidades de luz para o plano *ED* no ponto *D*, a outra extremidade não será propagada simultaneamente para o plano no ponto *E*, **[229]** mas [alcançará] somente *C*, uma vez que *AC* é igual a *DB*. Seja a linha reta *BD* prolongada e faça-se *DH* igual à linha reta *CE*. Portanto, se o meio não tiver sido alterado, então, quando a extremidade de luz *A* for propagada até *E*, a outra extremidade deverá estar em *H*, a saber, imersa sob o plano *ED* o tanto quanto é a menor distância entre o ponto *H*, ou *C*, e a linha reta *ED*, ou entre a mesma reta *ED* e sua paralela *IH*. Ora, uma vez que o meio é suposto ser mais rarefeito abaixo do plano *ED* do que acima deste e que o movimento é propagado mais facilmente em um meio rarefeito do que em um meio denso, então, quando a extremidade *A* da linha de luz estiver em *E*, a outra extremidade *B* estará mais adiante de *H*, que esteja em *L*, imersa no meio rarefeito o tanto quanto for a menor distância entre a reta *ED* e sua paralela *GL*, isto é, [o tanto quanto for] a magnitude da linha *LM*. Seja traçada, pois, uma linha reta do ponto *E* até a linha reta *GL* com igual comprimento que a linha de luz *AB*, ou *CD*, e que seja *EF*; *EF* será, então, a linha de luz **[230]** propagada até o fim [do meio rarefeito]. Portanto, pelo postulado acima [p. 226], traçadas *EN* e *FO* perpendiculares a *EF*, um raio será propagado em um meio rarefeito segundo as paralelas *EN* e *FO*. Todavia, *EN* cai de modo a fazer um ângulo maior com a perpendicular *EK* do que ela faz com a linha reta *EG*. E, similarmente, *FO*, se for prolongada, faz um ângulo maior com sua perpendicular adjacente do que faz com aquela que está em [linha] reta com *BD*; ou seja, o raio *EFNO* é refratado em direção contrária à perpendicular. Ora, se a magnitude da linha de luz *AB* for tomada como menor do que qualquer magni-

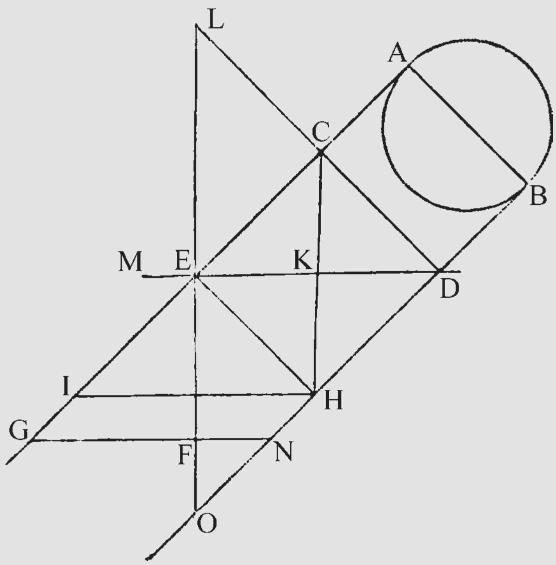


tur de linea lata ABEFNO demonstrabitur de ducta AEN. Quare radius refringitur ab E in N, in partes scilicet aversas a perpendiculo. Et propterea radius e medio denso etc. Quod erat probandum.

Propositio viii.

Si radius incidat in planum medii rarioris, talis naturae ut facilius propagetur in ipso quam in denso unde venit, ea proportione quam habet diameter quadrati ad latus eiusdem, sitque angulus inclinationis semirectus: non fiet refractio in medio raro, sed linea refracta erit in superficie plana amborum mediorum communi.

Sit linea lucis AB in medio densiore, a qua propagetur radius, cujus latera AE, BD perpendicularia sint ad AB: incidat autem latus AE in planum ED ita ut faciat angulum cum recta ED semirectum, nempe AEL. Sitque medium infra ED rarius quam quod supra, ita ut propagetur lux velocior in ipso quam in medio denso, ea proportione quam habet diameter quadrati ad latus eiusdem. Dico lineam [231] refractam fore EM, nempe jacentem in ipso plano ED.

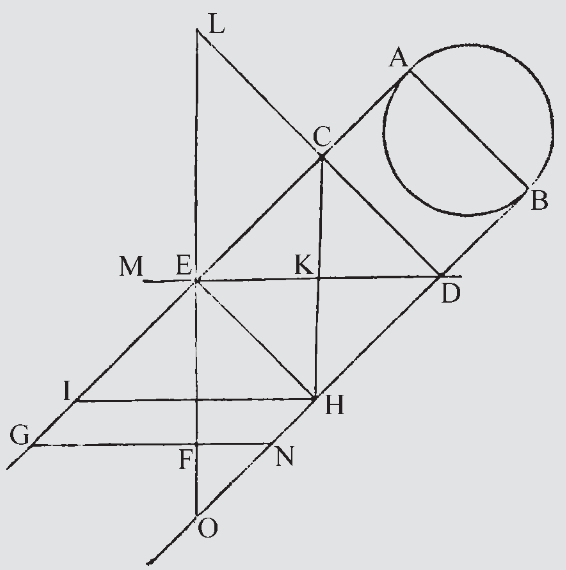


Quoniam enim angulus AEL est semi-rectus, erit quoque CED semi-rectus: et quia angulus ECD est rectus, erit CDE semi-rectus. Quare rectae CD, CE sunt aequales. Est ergo CDEH quadratum, et ut CH diameter ad CD latus, ita CD, vel AB, vel EH, ad CK, vel KH. Supponitur autem progressum lucis in medio raro habere proportionem ad progressum in denso quam habet diameter ad latus, hoc est, CD, vel EH, vel AB, ad KH. Quando ergo terminus lucis A est in E, terminus B (qui, si medium non esset mutatum, deberet esse in H, immersus profunditate KH) erit propagatus ad N, ita ut profunditas ejus sive distantia inter ED et GN, nempe perpendicularis EF, sit aequalis rectae CD, tude dada, como foi demonstrado acerca da largura da linha *ABEFNO*, será demonstrado para a [linha] traçada *AEN*. Assim, o raio é refratado a partir de *E* em *N*, a saber, em uma direção oposta à perpendicular. E, por isso, o raio proveniente de um meio denso etc. O que era para ser provado.

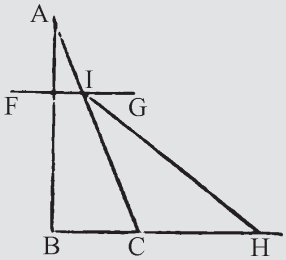
Proposição viii

Se um raio incidir no plano de um meio mais rarefeito, cuja natureza é tal que o raio seja propagado mais facilmente nesse mesmo meio do que no meio denso de onde ele provém, na proporção existente entre o diâmetro do quadrado e o seu lado, e se o ângulo da inclinação for semirreto, então não se fará refração no meio rarefeito, mas a linha será refratada na superfície plana comum a ambos os meios.

Seja a linha de luz *AB* em um meio mais denso, a partir da qual seja um raio propagado, cujos lados *AE* e *BD* sejam perpendiculares a *AB*, mas que o lado *AE* incida no plano *ED* de modo a fazer um ângulo semirreto com a linha reta *ED*, a saber, como o ângulo *AEL*. E seja o meio abaixo de *ED* mais rarefeito do que aquele que está em cima, de modo que a luz seja propagada mais velozmente nesse meio do que em um meio denso na mesma proporção que o diâmetro do quadrado tem para os seus lados. Afirmo que a linha [231] refratada será *EM*, estendida, por certo, no próprio plano *ED*.



Ora, uma vez que o ângulo *AEL* é semirreto, *CED* será também igualmente semirreto, e como o ângulo *ECD* é reto, *CDE* será semirreto. Assim, as linhas retas *CD* e *CE* são iguais. Portanto, *CDEH* é um quadrado, e assim como o diâmetro *CH* está para o lado *CD*, assim também *CD*, ou *AB*, ou *EH*, está para *CK*, ou *KH*. E foi suposto que a progressão da luz no meio rarefeito tem a proporção para a progressão no meio denso assim como o diâmetro tem para o lado, isto é, assim como *CD*, ou *EH*, ou *AB*, está para *KH*. Portanto, quando a extremidade de luz *A* está em *E*, a extremidade *B* (a qual, se o meio não tivesse sido alterado, deveria estar em *H*, imersa na profundidade *KH*) será propagada para *N*, o tanto quanto sua profundidade ou distância entre *ED* e *GN*, a saber, a perpendicular *EF*, for igual à linha reta *CD*, vel EH, vel AB. Est autem AB *linea lucis*. Quare etiam EF est linea lucis *propagata*. [232] Exit ergo radius refractus ab ipsa EF perpendiculariter, quare EM est linea refracta, eadem cum ED. Itaque si radius incidat etc. Quod erat probandum.

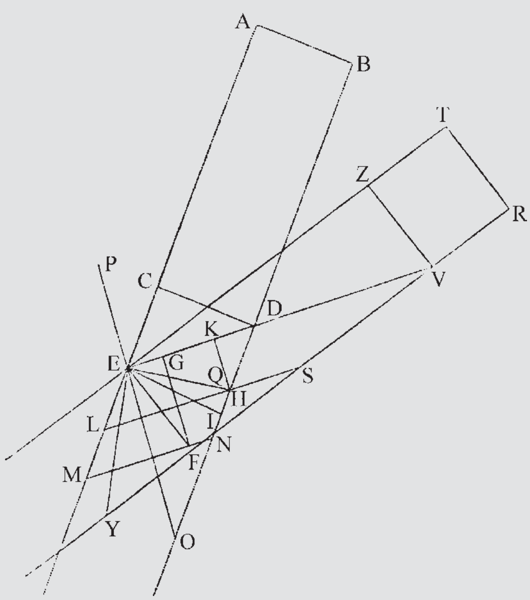


Patet hinc ratio, quare dominus Des Cartes, docens nos quomodo vitri refractio experiunda est per triangulum rectangulum (pag. 138), jubet angulum acutiorem statuendum in eam partem unde avertitur linea refracta, ut in hoc exemplo. Quia FIG est perpendicularis ad AB et inclinata ad AC, ita ut linea FI refringatur ad H: necesse est ut angulus A minor sit semirecto. Aliter enim IH caderet vel in IC vel intra triangulum.

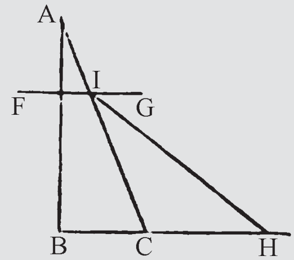
Resistentia enim vitri ad resistentiam aeris major est quam pro ratione diametri ad latus. Plus enim refringit vitrum quam aqua: aqua vero refringit secundum rationem diametri ad latus, vel saltem fere.

Propositio ix.

Si radius incidat ad planum medii densioris, cujus talis sit natura, ut tardius propagetur lux in ipso quam in raro unde venit ea proportione quam habet latus quadrati ad diametrum: in omni inclinatione erit angulus refractus minor semirecto.



Sit medium rarius quod est supra ED, et medium densius (quale supponitur) quod est infra. Cadat autem radius ab AB linea lucis in planum ED in angulo inclinationis AEP semirecto. Quoniam ergo radius AE refringitur versus perpendicularem, [233] cadet linea refracta inter EM et EO. Quare cum sit angulus OEM semirectus, erit radius refractus in angulo inclinationis semirecto, minor semirecto. Quod si angulus inclinationis minor esset semirecto, AEM recta faceret angulum cum perpendiculo EO ou *EH*, ou *AB*. Mas *AB* é a linha de luz. Assim, *EF* é a linha de luz propagada. **[232]** Portanto, um raio refratado provém perpendicularmente da própria *EF* e, assim, *EM* é uma linha refratada que coincide com *ED*. E, portanto, se um raio incidir etc. O que era para ser provado.

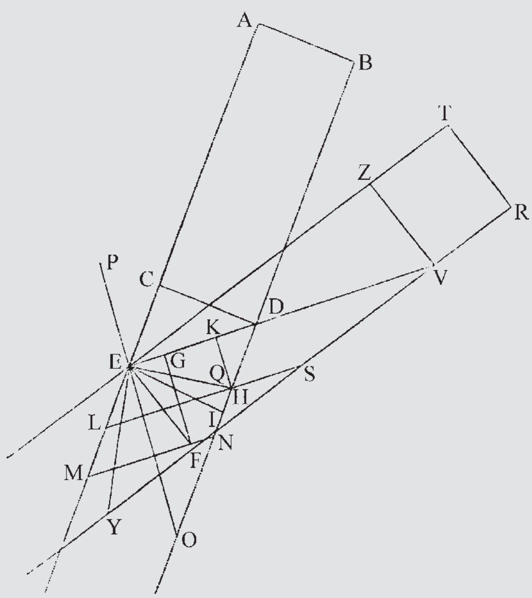


Fica claro, a partir disso, a razão de por que o Sr. Descartes, ensinando-nos de que modo deve ser a experiência da refração no vidro por triângulo retângulo (p. 138), estabelece que o ângulo mais agudo deva ser colocado onde a linha refratada é desviada, como neste exemplo.[5] Uma vez que *FIG* é perpendicular a *AB* e inclinada em relação a *AC*, e como a linha *FI* é refratada para *H*, é necessário que o ângulo em *A* seja menor do que um semirreto, pois, de outro modo, *IH* incidiria ou em *IC* ou no interior do triângulo.

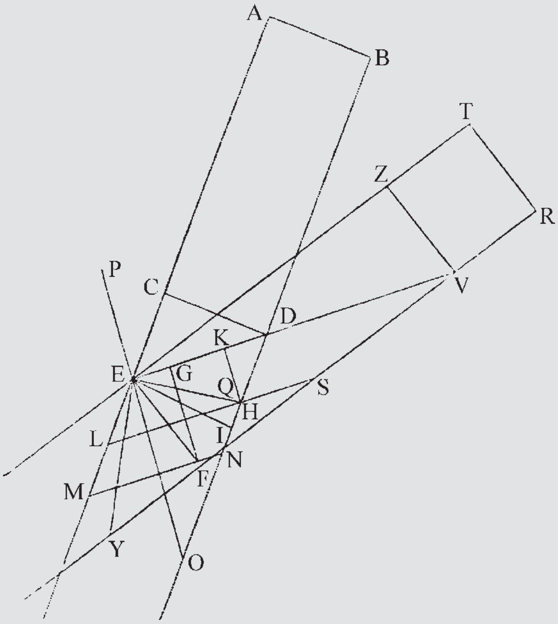
É certo que a razão da resistência do vidro para a resistência do ar é maior do que a razão do diâmetro para o lado. É que o vidro refrata mais do que a água, mas a água refrata segundo a razão entre o diâmetro e o lado, ou muito próxima.

Proposição ix

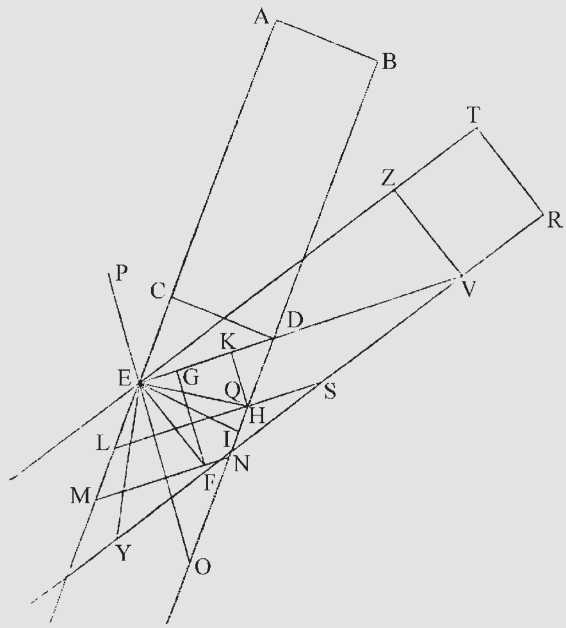
Se um raio incidir no plano de um meio mais denso, cuja natureza é tal que a luz seja propagada mais lentamente nesse mesmo meio do que no meio rarefeito de onde ela provém, na proporção existente entre o lado do quadrado e seu diâmetro, então, em qualquer inclinação, o ângulo da refração será menor do que um semirreto.



Sejam um meio mais rarefeito que está acima de *ED* e um mais denso (o qual é suposto estar) embaixo. O raio incide, então, a partir da linha de luz *AB* no plano *ED* com um ângulo de inclinação semirreto *AEP*. Portanto, uma vez que o raio *AE* é refratado em direção à perpendicular, **[233]** uma linha refratada cairá entre *EM* e *EO*. E, porque o ângulo *OEM* é semirreto, o raio refratado de um ângulo de inclinação semirreto será menor do que um semirreto. Ora, se o ângulo de inclinação fosse menor do que um semirreto, a linha reta *AEM* faria, com a perpendicular *EO*, um ângulo



minorem semirecto: refractus igitur multo minor esset semirecto. Quare angulus refractus in angulo inclinationis semirecto vel eo minore, minor est semirecto. Sit jam angulus [234] inclinationis major semirecto quicunque TEP. Dico angulum refractum hic quoque minorem esse semirecto. Supponimus AB et TR lineas lucis aequales, ut radii ab ipsis differant sola inclinatione: aequales ergo sunt EF et EI, nempe aequalibus AB et TR, conjunctae per parallelas aequales. Quoniam autem angulus AEP est semirectus, erit quoque CED semirectus: ideoque cum ECD sit rectus, etiam CDE erit semirectus. Quare rectae EC, CD aequales erunt, et CDEI quadratum, et ut CI diameter ad CD latus, ita EI ad IS, hoc est EF ad IS. Ducatur FG perpendicularis ad ED, minor erit FG quam EF: minor ergo est ratio GF ad IS quam diametri ad latus. Fiat ergo ut EF ad IS, sive ut diameter ad latus, ita FG ad aliud HK perpendicularem ad planum idem ED: erit ergo HK minor quam IS. Quia ergo EF est profunditas quam acquisivisset terminus lucis R, existente termino T in E, si medium non esset mutatum, erit jam ex supposita qualitate medii KH profunditas ejus. Si ergo ducatur LH parallela ad ED, erit lineae lucis alter terminus in E, alter in LH. Quoniam autem linea lucis aequalis est rectae EI, terminus ejus in recta LH cadet inter punctum H, et punctum in quo EI et LH se mutuo intersecant. Sit ergo linea lucis EQ, ad quam ducta perpendicularis in puncto E, nempe EY, erit linea refracta. Quoniam ergo YEZ est angulus rectus, item MEI angulus rectus, si dematur angulus communis YEI, erit angulo IEZ aequalis angulus MEY, qui cum angulo YEO facit angulum MEO semirectum. Minor est ergo angulus refractus YEO semirecto. Quapropter, [235] etsi inclinationis angulus major sit semirecto, erit angulus refractus semirecto minor. Itaque sive angulus inclinationis sit major, vel minor, vel aequalis semirecto, hoc est in omni inclinatione in ratione mediorum supposita, angulus refractus erit semirecto minor. Quod erat probandum.

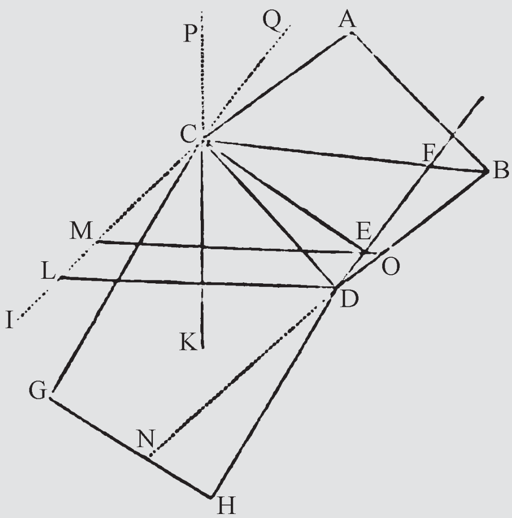


menor do que um semirreto e seria refratada, portanto, em um ângulo muito menor do que um semirreto. Assim, o ângulo da refração de um ângulo de inclinação semirreto, ou menor, é menor do que um semirreto. Seja, então, *TEP* um ângulo qualquer de [234] inclinação maior do que um semirreto. Afirmo que, nesse caso, o ângulo da refração também será menor do que um semirreto. Suponhamos que as linhas de luz *AB* e *TR* sejam iguais, tal que seus raios sejam diferentes somente em inclinação; portanto, *EI* e *EF* são iguais, e iguais a *AB* e *TR*, e unidas por paralelas iguais. Assim, uma vez que o ângulo *AEP* é semirreto, *CED* também será semirreto e, assim, uma vez que o ângulo *ECD* é reto, *CDE* será também semirreto. Logo, as linhas retas *EC* e *CD* serão iguais e *CDEI* será um quadrado, e assim como o diâmetro *CI* está para o lado *CD*, assim também *EI* está para *IS*, isto é, [que seja] como *EF* para *IS*. Traçada *FG* perpendicular a *ED*, *FG* será menor do que *EF*; portanto, a razão de *GF* para *IS* é menor do que a do diâmetro para o lado. Faça-se, então, que, assim como *EF* está para *IS*, isto é, como o diâmetro está para o lado, assim também *FG* esteja para a outra perpendicular *HK* ao mesmo plano *ED*; portanto, *HK* será menor do que *IS*. Portanto, porque *EF* é a profundidade que a extremidade de luz *R* teria adquirido se o meio não tivesse sido alterado, estando a extremidade *T* em *E*, então sua profundidade *KH* será proveniente da suposta qualidade do meio. Se, portanto, *LH* for traçada paralela a *ED*, a linha de luz terá uma extremidade em *E* e a outra em *LH*. E uma vez que a linha de luz é igual à linha reta *EI*, sua extremidade incide na linha reta *LH* entre o ponto *H* e o ponto no qual *EI* e *LH* se intersectam. Seja, pois, a linha de luz *EQ*, para a qual foi traçada uma perpendicular no ponto *E*; então *EY* será a linha refratada. Portanto, uma vez que *YEQ*[6] é um ângulo reto, *MEI* será também um ângulo reto, e se for subtraído o ângulo comum *YEI*, o ângulo *IEQ*[7] será igual ao ângulo *MEY*, o qual faz com o ângulo *YEO* um ângulo *MEO* semirreto. Portanto, o ângulo de refração *YEO* é menor do que um semirreto. Por isso, [235] ainda que o ângulo de inclinação seja maior do que um semirreto, o ângulo da refração será menor do que um semirreto. E, assim, quer o ângulo de inclinação seja maior ou menor, quer seja igual ao semirreto, isto é, em qualquer inclinação, na razão suposta entre os meios, o ângulo da refração será menor do que um semirreto. O que era para ser provado.

Propositio x.

Angulus refractionis qui fit a radio intrante in medium densum versus perpendiculum, aequalis est angulo refractionis quem idem radius refractus facit exiens in idem medium rarum, in partes a perpendiculo aversas.

Sit medium rarum quod est supra rectam CB, quod infra, densum. Sit autem linea lucis AB, a qua exit radius cujus latera AC et BD. Completo rectangulo ABCD, si medium non esset mutatum, esset CD linea lucis *propagata*: sed quia medium sub CB densius est quam supra, erit lineae lucis terminus B, minus in ipsum immersus quam punctum D. Sit ergo linea lucis *propagata* CE, ita ut CE aequalis sit ipsi AB vel CD. Ductis ergo perpendicularibus ad CE rectis CG, EH, erit CG linea refracta, et ICG angulus refractionis versus perpendiculum CK. Rursus, sit medium densum quod est infra LD, rarum quod supra, et sit GH linea lucis propaganda a denso in rarum. Quando **[236]** jam terminus lucis H est in D, si medium non esset mutatum, deberet alter terminus lucis G esse in F: sed propter raritatem medii in quo jam est ille terminus ulterius ad C pro ratione mediorum supposita, hoc est pro ratione distantiae inter LD et CB ad distantiam inter ME et eandem CB. Est igitur jam CD linea lucis *propagata* ad densi et rari confinia. Quoniam ergo AC et BD sunt perpendiculares ad ipsam CD lineam lucis, erit CA linea refracta, et ACQ angulus refractionis aversus a perpendiculo CP. Restat probandum angulum ACQ aequalem esse angulo ICG: quod facile est, sunt enim verticales. Quare angulus refractionis etc. Quod erat demonstrandum.

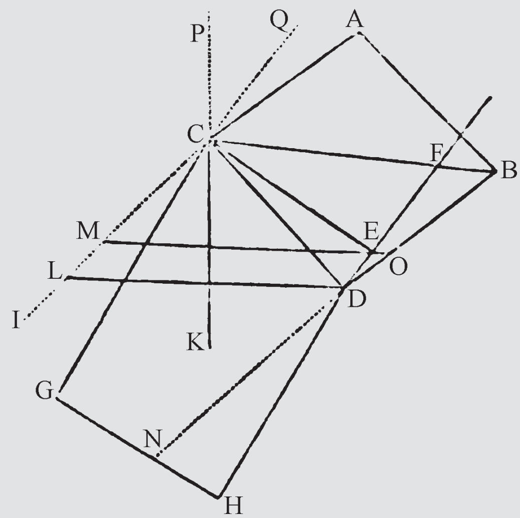


Facile quoque demonstratu est, radium transeuntem a medio raro per medii densioris plana opposita in medium rarum simile priori, habere partes ante ingressum et post exitum sibi invicem parallelas.

Proposição x

O ângulo da refração feito pelo raio que entra em um meio denso em direção à perpendicular é igual ao ângulo da refração que faz o mesmo raio refratado que vai para um mesmo meio rarefeito em direção contrária à perpendicular.

Seja um meio rarefeito que está acima da linha reta *CB* e, embaixo, um meio denso. E seja a linha de luz *AB*, a partir da qual provém um raio com os lados *AC* e *BD*. Completado o retângulo *ABCD*, se o meio não tivesse sido alterado, *CD* seria uma linha de luz propagada; mas, uma vez que o meio abaixo de *CB* é mais denso do que aquele que está em cima, a extremidade da linha de luz *B* estará, nesse mesmo meio, menos imersa do que o ponto *D*. Seja, então, a linha de luz propagada *CE*, de modo que *CE* seja igual à própria linha de luz *AB* ou *CD*. Traçadas, portanto, as linhas retas *CG* e *EH* perpendiculares a *CE*, *CG* será a linha refratada e *ICG*, o ângulo da refração em direção a perpendicular *CK*. Por sua vez, seja um meio denso que está abaixo de *LD* e, em cima, um meio rarefeito, e seja *GH* uma linha de luz propagada do meio denso para o meio rarefeito. Assim, quando **[236]** a extremidade de luz *H* está em *D*, a outra extremidade de luz *G* deveria estar em *F* se o meio não tivesse sido alterado;[8] mas, por causa da raridade do meio, a extremidade *G* está mais além de *C*, segundo a suposta proporção entre os meios, isto é, de acordo com a razão da distância entre *LD* e *CB* para a distância entre *ME* e a própria *CB*. Portanto, a linha de luz propagada *CD* está no limite entre o meio denso e o o meio rarefeito. E, portanto, uma vez que *AC* e *BD* são perpendiculares à própria linha de luz *CD*, *CA* será uma linha refratada e *ACQ* um ângulo de refração que se afasta da perpendicular *CP*. Resta provar que o ângulo *ACQ* é igual ao ângulo *ICG*, o que é fácil, uma vez que são verticais. Assim, o ângulo da refração etc. O que era para ser demonstrado.

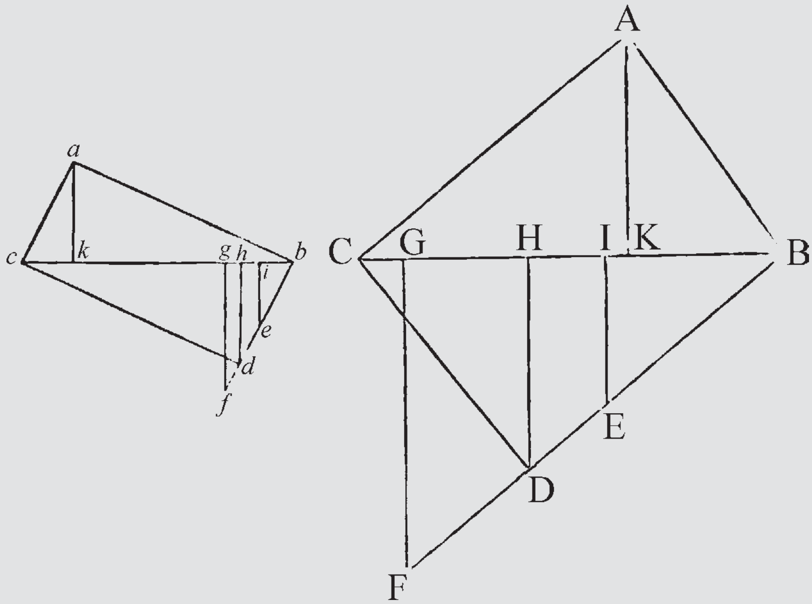


E é fácil demonstrar que o raio que passa, a partir de um meio rarefeito, através de um meio mais denso no plano oposto, para um meio rarefeito semelhante ao anterior, tem lados antes do ingresso e depois da saída, eles mesmas, por sua vez, paralelos.

Propositio xi.

Si sint duae quaelibet inclinationes radiorum ab eodem medio raro ad idem medium densum, vel contra, superficies autem mediorum communis sit plana: progressus lucis in primo medio ad progressum lucis simul factum in secundo, habebit eandem rationem in una inclinatione quam in altera.

Sint duae quaelibet inclinationes radiorum, AC et *ac*, in angulis diversis ACB et *acb*, ad planum *cb*, CB; a punctis autem *b*, B, ducantur *bf*, BF, rectae radiis *ac*, AC, parallelae, sumptisque in *bf*, BF [237] rectis *bd*, BD iisdem radiis *ac*, AC aequalibus, compleantur parallelogramma *abcd*, ABCD. Sitque medium quod est infra, *cb*CB, (quod voco medium secundum), non eiusdem naturae cum medio quod est supra (quod voco medium primum): sed vel densius, hoc est in quo tardior sit propagatio motus, vel rarius, hoc est in quo velocior sit propagatio motus. Sit jam progressus lucis in medio primo in altera quidem inclinatione recta *ac*, in altera vero recta AC: vel si progressum hunc lucis velimus mensurare in perpendiculari ad planum *cb*CB, sit in altera inclinatione *ak*, in altera AK. Sit autem progressus lucis in medio secundo eodem tempore major vel minor quam in primo, in altera quidem inclinatione *be*, scilicet si densius sit se-

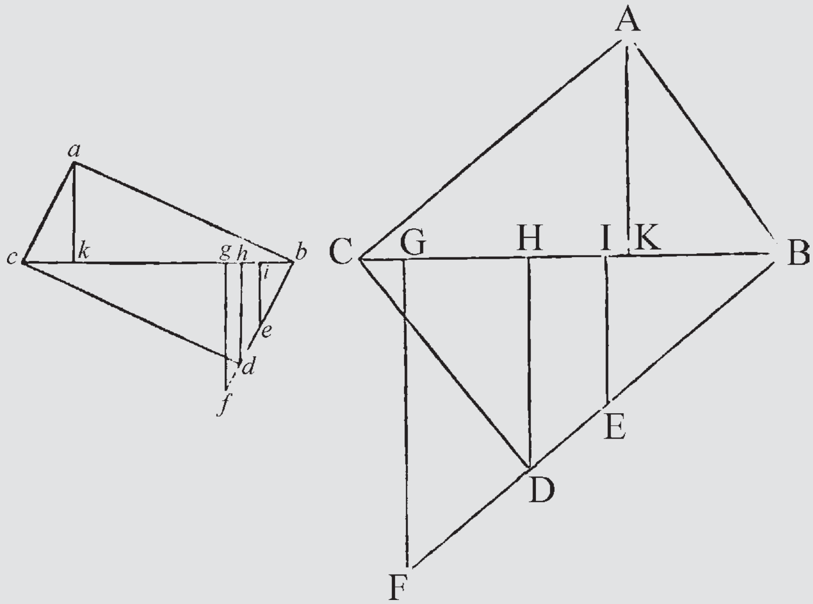


scientiæ studia, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 483-526, 2016

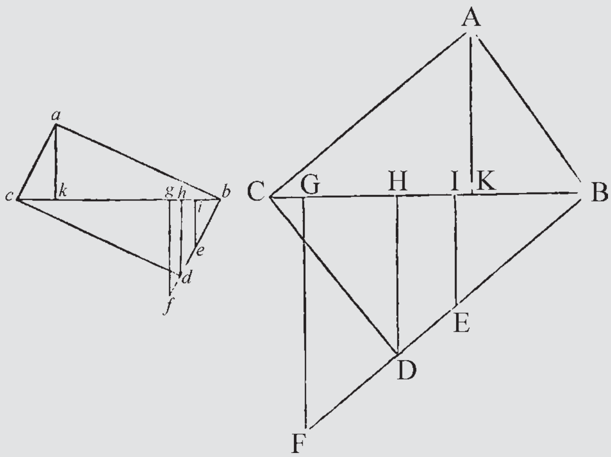
Proposição xi

Se existirem duas inclinações quaisquer de raios que passam do mesmo meio rarefeito para o mesmo meio denso, ou inversamente, e se a superfície comum dos meios for plana, então o progresso da luz no primeiro meio terá para o progresso da luz feito simultaneamente no segundo meio a mesma razão em uma inclinação do que na outra.

Sejam duas inclinações quaisquer dos raios *AC* e *ac*, em ângulos diferentes *ACB* e *acb*, até o plano *cb* e *CB*; e, dos pontos *b* e *B*, sejam traçadas *bf* e *BF* paralelas [respectivamente] aos raios retos *ac* e *AC*, e sejam tomadas, em *bf* e *BF*, as linhas retas **[237]** *bd* e *BD* iguais aos próprios raios *ac* e *AC*, e seja completado o paralelogramo *abcd* e *ABCD*.

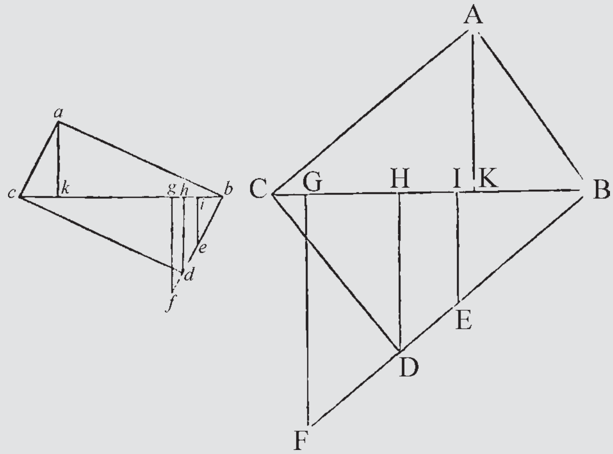


E que o meio que está abaixo de *cb* e *CB* (o qual denomino "segundo meio") não seja de mesma natureza que o meio que está em cima (o qual denomino "primeiro meio"), mas, [que seja] ou mais denso, isto é, no qual a propagação do movimento seja mais lenta, ou mais rarefeito, isto é, no qual a propagação do movimento seja mais veloz. Seja, então, a progressão da luz no primeiro meio em uma inclinação na linha reta *ac* e, em outra inclinação, na linha reta *AC*; ou, se quisermos mensurar a progressão da luz na perpendicular ao plano *cbCB*, seja *ak* em uma inclinação e *AK* em outra inclinação. E seja a progressão da luz no segundo meio [feita] em um tempo maior ou menor do que no primeiro meio, a saber, em uma inclinação, em *be*, se o segundo meio for mais



cundum medium quam primum, vel *bf* si rarius. Aut si velimus progressum hunc mensurare in perpendiculari ad planum *cb*CB, sit *ie* progressus ille in densiori medio, *gf* in rariori: in altera autem, sit **[238]** progressus lucis BE in densiori, BF in rariori, vel mensurando perpendiculariter IE in densiori medio, GF in rariori. Dico esse ut inclinata *ac* ad inclinatam *be*, vel *bf*, hoc est ut perpendicularis K ad perpendicularem *ie* vel *gf*, in inclinatione una: ita esse inclinatam AC ad inclinatam BE vel BF, hoc est, perpendicularem AK ad perpendicularem IE vel GF, in altera.

Quoniam enim idem est medium in quo *ac* et in quo AC, aeque velox est motus ab *a* ad *c* motus ab A ad C. Tempus ergo quo fit motus ab *a* ad *c* est ad tempus quo fit motus ab A ad C, ut recta *ac* ad rectam AC. Similiter, quoniam idem est medium in quo *be* et in quo BE, aeque velox est motus a *b* ad *e* et a B ad E. Tempus ergo quo fit motus a *b* ad *e* est ad tempus quo fit motus a B ad E, ut recta *be* ad rectam BE. Sed tempus quo fit motus a *b* ad *e*, aequale est tempori quo fit motus ab *a* ad *c*. Item, tempus quo fit motus a B ad E, aequale est tempori quo fit motus ab A ad C. Tempus ergo quo fit motus ab *a* ad *c*, est ad tempus quo fit motus ab A ad C, ut recta *be* ad rectam BE. Est autem supra ostensum, tempus motus ab *a* ad *c*, esse ad tempus motus ab A ad C, ut recta *ac* ad rectam AC. In eadem ergo sunt ratione *ac* ad AC, et *be* ad BE. Eadem methodo demonstrari potest esse ut *ac* ad AC, ita *bf* ad BF. Porro quoniam est ut *ac*, hoc est *bd*, ad *be*, ita AC, hoc est BD, ad BE, et ut *bd* ad *dh* vel *ak*, propter similitudinem triangulorum *bdh*, et *bei*, ita *be* ad *ie*, atque etiam ut BD ad DH vel AK, ita BE ad IE: erit ut *ak* ad *ie*, ita AK ad IE. Eadem quoque via ostendi potest esse **[239]** ut *ak* ad *gf*, ita AK ad GF. Quare ut est inclinata *ac* ad inclinatam *be* vel *bf*, et ut perpendicularis *ak* ad perpendicularem *ie* vel *gf*, in una inclinatione, ita est inclinata AC ad inclinatam BE vel BF, et perpendicularis AK ad perpendicularem IE vel GF, in altera inclinatione. Itaque si sint duae quaelibet inclinationes etc. Quod erat probandum.



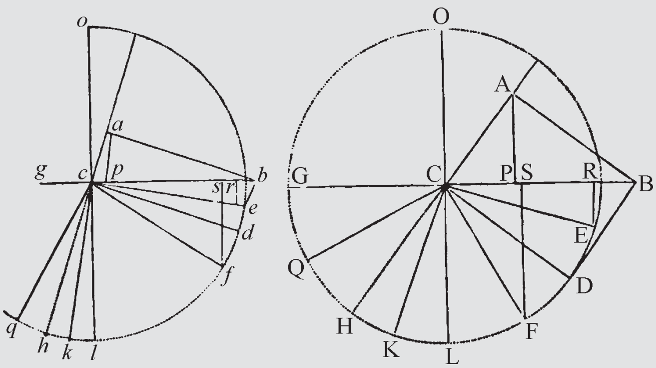
denso do que o primeiro, ou em *bf*, se for mais rarefeito. Ou, se quisermos mensurar a progressão na perpendicular ao plano *cbCB*, seja *ie* sua progressão no meio mais denso e *gf* no meio mais rarefeito; por sua vez, seja a progressão de luz *BE* no meio mais denso e *BF* no mais rarefeito, ou, medindo perpendicularmente [a progressão da luz], seja *IE* no meio mais denso e *GF* no meio mais rarefeito. Afirmo que a [linha reta] inclinada *ac* está para a inclinada *be*, ou *bf*, isto é, a perpendicular *ak*[9] está para a perpendicular *ie*, ou *gf*, em uma inclinação, assim como a inclinada *AC* está para a inclinada *BE*, ou *BF*, isto é, como a perpendicular *AK* está para a perpendicular *IE*, ou *GF*, na outra inclinação.

Ora, uma vez que o meio no qual está *ac* e no qual está *AC* é o mesmo, o movimento de *a* para *c* e de *A* para *C* é igualmente veloz. Portanto, o tempo no qual o movimento é feito de *a* para *c* está para o tempo no qual o movimento é feito de *A* para *C* assim como a linha reta *ac* está para a linha reta *AC*. Similarmente, uma vez que o meio no qual está *be* e no qual está *BE* é o mesmo, o movimento de *b* para *e* e de *B* para *E* é igualmente veloz. Portanto, o tempo no qual o movimento é feito de *b* para *e* está para o tempo no qual o movimento é feito de *B* para *E* assim como a linha reta *be* está para a linha reta *BE*. Mas o tempo no qual o movimento é feito de *b* para *e* é igual ao tempo no qual é o movimento feito de *a* para *c*. E, também, o tempo no qual o movimento é feito de *B* para *E* é igual ao tempo no qual o movimento é feito de *A* para *C*. Portanto, o tempo no qual o movimento é feito de *a* para *c* está para o tempo no qual o movimento é feito de *A* para *C* assim como a linha reta *be* está para a linha reta *BE*. Mas, como mostrado acima, o tempo do movimento de *a* para *c* está para o tempo do movimento de *A* para *C* assim como a linha reta *ac* está para a linha reta *AC*. Portanto, estão na mesma razão de *ac* para *AC* e de *be* para *BE*. O mesmo método pode demonstrar que *AC* está para *ac* assim como *bf* está para *BF*. Pois, uma vez que *ac*, isto é, *bd*, está para *be* assim como *AC*, isto é *BD*, está para *BE* e que, por causa da semelhança entre os triângulos *bdh* e *bei*, *bd* está para *dh*, ou *ak*, assim como *be* está para *ie*, então *BD* estará para *DH*, ou *AK*, assim como *BE* está para *IE* e também *ak* estará para *ie* assim como *AK* está para *IE*. E por essa mesma via pode-se também mostrar que [239] *ak* está para *gf* assim como *AK* está para *GF*. Pois, assim como a inclinada *ac* está para a inclinada *be*, ou *bf*, e a perpendicular *ak* para a perpendicular *ie*, ou *gf*, em uma inclinação, assim também a inclinada *AC* está para a inclinada *BE*, ou *BF*, e a perpendicular *AK* para a perpendicular *IE*, ou *GF*, na outra inclinação. E, assim, se existirem duas inclinações quaisquer etc. O que era para ser provado.

Propositio xii.

Si sint duae qualibet inclinationes radiorum ab eodem medio raro ad idem medium densum, vel contra, sitque superficies mediorum communis plana, erit ut sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti in una inclinatione, ita sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti in altera inclinatione.

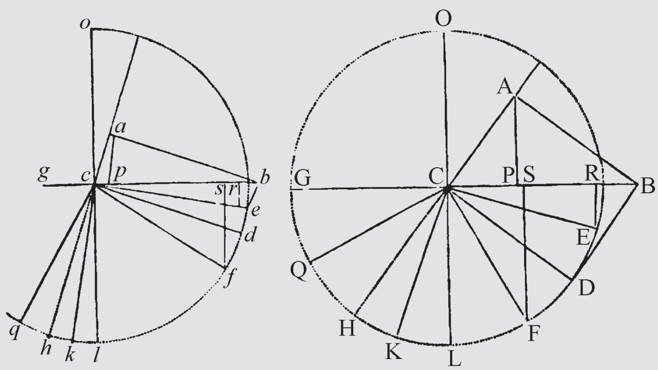
Sit planum *cb*CB commune duorum mediorum quorum primum, sive id quod est supra *cb*CB, sit rarum, alterum, sive medium secundum infra *cb*CB, densum. Sint autem *ac* et AC radii inclinati ad [240] planum *cb*CB in angulis inaequalibus *aco* et ACO. Sit autem radius refractus ab *ac* recta *ck*, et angulus refractus *kcl*, et radius refractus ab AC recta CK, et angulus refractus KCL. Dico, ut sinus anguli inclinationis *aco* ad sinum anguli refracti *kcl*, ita esse sinum anguli inclinationis ACO ad sinum anguli refracti KCL. Ducatur *ab* recta perpendicularis ad *ac*, quae secet planum in puncto *b*. Secabit autem, quia angulus *acb* est minor recto. Huic aequalis fiat AB, et ita applicetur ut sit altera ejus extremitas in plano CB, et sit perpendicularis ad AC in puncto A: et compleantur parallelogramma *abcd* et ABCD. Ducatur *ce* perpendiculariter ad radium refractum *ck* in puncto *c*, et CE perpendiculariter ad radium refractum CK in puncto C. Sit autem *ce* aequalis *cd* vel *ab*, sicut et CE aequalis CD vel AB. Itaque ductus circulus centro *c*, intervallo *ce*, transibit per *d*, et ductus circulus centro C, intervallo CE, transibit per D. Jam quoniam *ce* et CE sunt perpendiculares ad radios refractos *ck* et CK, et aequales lineis lucis *ab* et AB, ductae *ap* et AP perpendiculares ad planum *cb*CB, erunt progressus lucis in medio raro, in propositis inclinationibus, et *er*, ER progressus lucis in medio denso. Sed est per praecedentem, ut *ap* ad *er* in una inclinatione, ita AP ad ER in altera inclinatione. Secundo, sit medium primum, nempe quod est supra planum *cb*CB, densum, quod infra, rarum: ubi radii refracti ad partes aversas a perpendiculo, sint *cq* et CQ, et ad ipsos perpendiculares sint *cf* et CF aequales lineis lucis *ab* vel AB, et ad planum *cb*CB sint perpendiculares *fs* et FS. Similiter probabitur esse, ut *ap* ad *fs*, ita

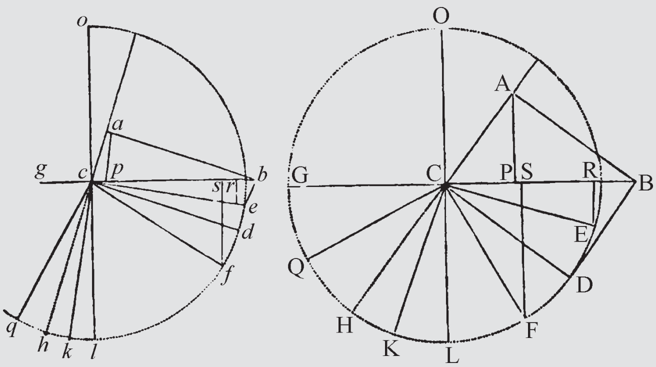


Proposição xii

Se existirem duas inclinações quaisquer de raios que passam do mesmo meio rarefeito para o mesmo meio denso, ou inversamente, e se a superfície comum dos meios for plana, então o seno do ângulo de inclinação estará para seno do ângulo da refratação, em uma inclinação, assim como o seno do ângulo de inclinação está para seno do ângulo da refratação na outra inclinação.

Seja o plano *cbCb* comum aos dois meios, dos quais o primeiro, ou aquele que está acima de *cbCb*, seja rarefeito, ou que o segundo meio, abaixo de *cbCB*, seja denso. E sejam *ac* e *AC* os raios inclinados, em relação [240] ao plano *cbCB*, em ângulos desiguais *aco* e *ACO*. E que o raio refratado de *ac* seja a linha reta *ck* e o ângulo da refração seja *kcl*, e que o raio refratado de *AC* seja a linha reta *CK* e o ângulo da refração seja *KCL*. Afirmo que o seno do ângulo de inclinação *aco* está para o seno do ângulo de refração *kcl* assim como o seno do ângulo de inclinação *ACO* está para o seno do ângulo de refração *KCL*. Seja traçada a linha reta *ab* perpendicular a *ac* e que corta o plano no ponto *b*. Cortará [o plano] porque o ângulo *acb* é menor do que um ângulo reto.[10] Seja feito o mesmo para *AB*, e que seja posta de modo que a outra de suas extremidades esteja no plano *CB* e que seja perpendicular a *AC* no ponto *A*, e que sejam completados os paralelogramos *abcd* e *ABCD*. Sejam traçadas *ce* perpendicularmente ao raio refratado *ck* no ponto *c* e *CE* perpendicularmente ao raio refratado *CK* no ponto *C*. E que *ce* seja igual a *cd*, ou *ab*, e que, do mesmo modo, *CE* seja igual a *CD*, ou *AB*. E, com centro em *c* e intervalo *ce*, seja traçado o círculo que passará por *d*, e, com centro em *C* e intervalo *CE*, seja traçado o círculo que passará por *D*. Ora, uma vez que *ce* e *CE* são perpendiculares aos raios refratados *ck* e *CK* e são iguais às linhas de luz *ab* e *AB*, então, traçadas as perpendiculares *ap* e *AP* ao plano *cbCB*, essas serão a progressão da luz no meio rarefeito e *er* e *ER* serão a progressão da luz no meio denso, nas inclinações supostas. Mas, pela proposição anterior, *ap* está para *er*, em uma inclinação, assim como *AP* está para *ER*, na outra inclinação. Por sua vez, seja o primeiro meio não aquele que está acima do plano *cbCB* e é denso, mas o que está embaixo e é rarefeito, onde os raios refratados afastam-se da perpendicular, os quais sejam *cq* e *CQ*, e que suas perpendiculares *cf* e *CF* sejam iguais às linhas de luz *ab* ou *AB*, e que sejam [traçadas as linhas retas] *fs* e *FS* perpendiculares ao plano *cbCB*. Similarmente, é provado que *ap* está para *fs* assim como *AP* está para *FS*.

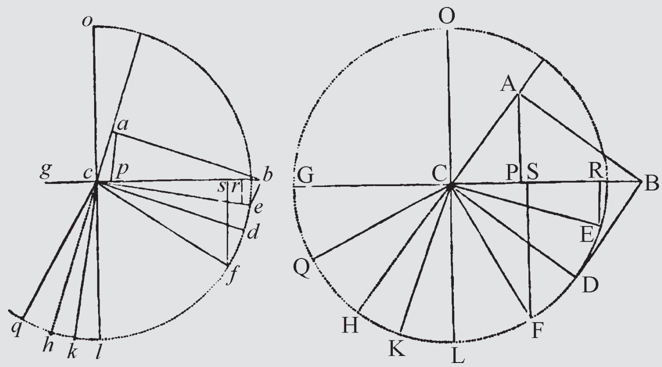




AP ad FS. Sed *ap* et AP sunt sinus angulorum [241] propositarum inclinationum: et *er*, ER sunt sinus angulorum refractorum in medio denso, sicut *fs* et FS sunt sinus angulorum refractorum in medio raro. Quod sic probatur. Anguli *oca* et *acb* simul sumpti sunt aequales recto: item *abc* et *acb* simul sumpti faciunt rectum. Ergo dempto communi angulo *acb*, remanet *abc* aequalis angulo inclinationis *oca*: ducto igitur circulo cujus semidiameter sit *ba*, erit *ap* sinus anguli inclinationis. Eodem modo probatur AP esse sinum anguli inclinationis: sunt enim *ab* et AB aequales per constructionem. Rursus quoniam angulus *kce* et *lcb* est uterque rectus, dempto communi angulo *lce* remanet *ecb* aequalis angulo *kcl* refracto: quoniam ergo *ce* est aequalis *ab*, erit *er* sinus anguli refracti. Eadem methodo ostenditur ER esse sinum anguli refracti in altera inclinatione. Porro, ubi medium secundum rarius est primo, angulus *qcf* et *lcb* est vterque rectus: dempto ergo communi angulo *lcf*, remanet angulus *fcb* aequalis angulo refracto *qcl*. Est ergo *fs* sinus anguli refracti: et per eandem rationem FS est sinus anguli refracti in inclinatione altera. Quoniam ergo est ut *ap* ad *cr* vel *fs* in una inclinatione, ita AP ad ER vel FS in altera inclinatione, erit ut sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti in una inclinatione, ita sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti in altera inclinatione, sive refractio fiat versus perpendiculum sive ad partes a perpendiculo aversas. Igitur si sint duae quaelibet inclinationes etc. Quod erat probandum.

Corollarium.

In majore angulo inclinationis major est angulus refractus, in minore minor. Majoris enim anguli [242] major semper est sinus. Et est jam ostensum, esse ut sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti, ita sinum alterius anguli inclinationis, ad sinum anguli in illa inclinatione refracti.



Ora, *ap* e *AP* são os senos dos ângulos [241] nas inclinações supostas e *er* e *ER* são os senos dos ângulos da refração no meio denso, assim como *fs* e *FS* são os senos dos ângulos da refração no meio rarefeito. O que é para ser provado assim. Os ângulos *oca* e *acb*, tomados conjuntamente, são iguais ao ângulo reto, assim como também *abc* e *acb*, tomados conjuntamente, fazem um ângulo reto. Portanto, subtraído o ângulo comum *acb*, resta *abc* igual ao ângulo de inclinação *oca*; assim, traçado um círculo, cujo semidiâmetro seja *ba*, o seno do ângulo da inclinação será *ap*. Do mesmo modo, é provado que *AP* é o seno do ângulo de inclinação; sejam, pois, *ab* e *AB* iguais por construção. Além disso, uma vez que os ângulos *kce* e *LCB* são ambos retos e que, subtraído o ângulo comum *lce*, resta *ecb* igual ao ângulo de refração *kcl*, então, uma vez que *ce* é igual a *ab*, o seno do ângulo da refração será, portanto, *er*. O mesmo método mostra que *ER* deve ser o seno do ângulo da refração na outra inclinação. Assim, quando o segundo meio é mais rarefeito do que o primeiro, os ângulos *qcf* e *lcb* são ambos retos; portanto, subtraído o ângulo comum *lcf*, resta o ângulo *fcb* igual ao ângulo de refração *qcl*. Portanto, *fs* é o seno do ângulo da refração e, pela mesma razão, *FS* é o seno do ângulo da refração na outra inclinação. Portanto, uma vez que *ap* está para *er*,[11] ou *fs*, em uma inclinação, assim como *AP* está para *ER*, ou *FS*, na outra inclinação, o seno do ângulo de inclinação também estará para o seno do ângulo da refração, em uma inclinação, assim como o seno do ângulo de inclinação está para o seno do ângulo da refração na outra inclinação, quer na refração que se aproxima da perpendicular, quer na refração que se afasta da perpendicular. Portanto, se existirem duas inclinações quaisquer etc. O que era para ser provado.

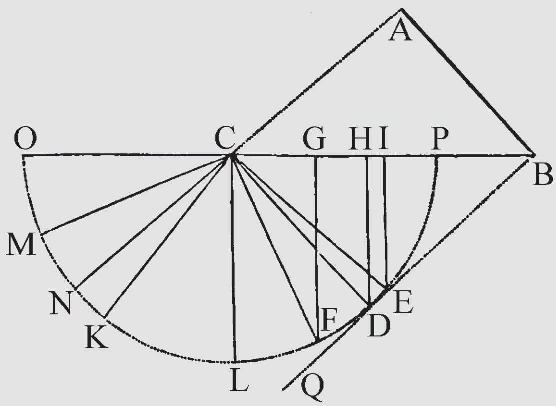
Corolário

Quanto maior é o ângulo da inclinação, maior é o ângulo da refração, e quanto menor, menor. Ora, quanto maior o ângulo, [242] sempre maior é o seno. E foi agora mostrado que o seno do ângulo da inclinação deve estar para o seno do ângulo da refração assim como o seno do ângulo da outra inclinação está para o seno do ângulo da refração nessa inclinação.

Propositio xiii.

Si duo radii aequaliter inclinati procedant ad planum diversi medii, alter a medio raro in densum, alter a medio denso eodem in medium rarum, sinus anguli refracti in raro, sinus anguli inclinationis, et sinus anguli refracti in denso, erunt continue proportionales.

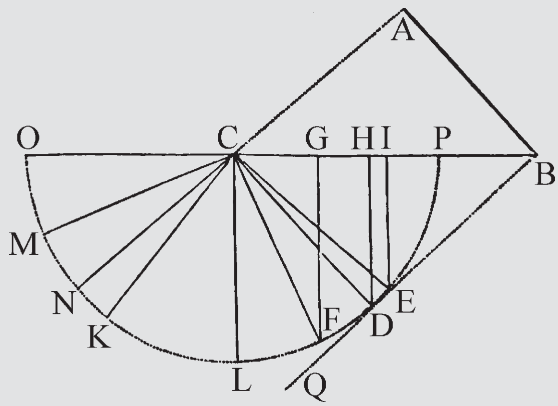
Sit CB planum dividens duo media, quorum primum sit rarum, secundum densius: et sit AC radius inclinatus ad planum CB in quocunque angulo ACB. Ducatur AB perpendicularis ad AC secans planum in B, et compleatur parallelogrammum ABCD. Quo tempore igitur punctum A venit ad planum in C, eodem, si media essent ejusdem naturae, immergeretur punctum B subter planum [243] profunditate perpendiculari DH. Sed quoniam densius statuitur medium infra planum quam supra, sit immersum punctum B profundidate tantum EI. Est igitur linea lucis jam CE facta aequalis rectae AB: et ducta KC perpendiculari ad CE, et LC ad CB, erit angulus refractus KCL, cui ostensus est in praecedente aequalis ECI. Est ergo anguli refracti in denso sinus EI. Et quia angulus ABC aequalis est angulo inclinationis, ut ostensum est in praecedente, et huic aequalis est BCD: erit recta DH, ducta perpendicularis ad CB, sinus angulis inclinationis. Et habet DH ad EI rationem eam quam requirit semper eandem eorundem mediorum diversitas. Supponamus jam medium primum esse densius secundo, sitque inclinatio radii AC eadem quae ante. Quo tempore ergo punctum A est in superficie medii rari ad C, erit punctum B immersum in raro profunditate GF majore quam est DH: scilicet pro ratione mediorum, quam supposuimus esse ut DH ad EI. Est igitur FG ad DH ut DH ad EI. Sunt itaque continue proportionales FG, DH, EI. Sed ostensum est in praecedente, angulum BCF esse angulo refracto in raro LCM aequalem: quare FG est sinus anguli refracti in raro, sicut DH est sinus anguli inclinationis, et EI sinus



Proposição xiii

Se dois raios igualmente inclinados alcançam o plano a partir de meios diferentes, um a partir do meio rarefeito para o denso, o outro a partir do mesmo meio denso para o meio rarefeito, então o seno do ângulo da refração no meio rarefeito, o seno do ângulo da inclinação e o seno do ângulo da refração no meio denso serão continuamente proporcionais.

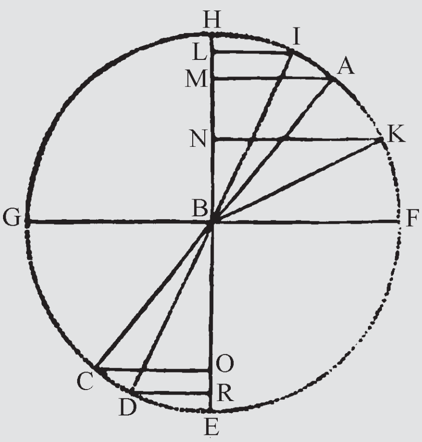
Seja *CB* o plano que divide os dois meios, dos quais seja o primeiro rarefeito e o segundo denso; e seja *AC* o raio inclinado para o plano *CB* em um ângulo qualquer *ABC*. Seja traçada, a partir de *AC*, a perpendicular *AB* que corta o plano em *B* e seja completado o paralelogramo *ABCD*. Portanto, o tempo no qual o ponto *A* alcança o plano em *C* é o mesmo, se a natureza do meio for a mesma, que o tempo no qual o ponto *B* é imerso sob o plano [243] na profundidade da perpendicular *DH*. Mas, porque o meio denso está situado abaixo do plano e não em cima, seja o ponto *B* imerso na profundidade tanto quanto *EI*. Portanto, feita a linha de luz *CE* igual à linha reta *AB* e traçada *KC* perpendicular a *CE*, e *LC* perpendicular a *CB*, o ângulo da refração será *KCL*, o qual, como mostrado na proposição anterior, é igual à *ECI*. Portanto, *EI* é o seno do ângulo da refração no meio denso. E, porque o ângulo *ABC* é igual ao ângulo da inclinação e é igual ao ângulo *BCD*, como mostrado na proposição anterior, a linha reta *DH*, traçada perpendicularmente a *CD*, será o seno do ângulo da inclinação. E *DH* tem para *EI* aquela mesma razão que sempre é procurada, a mesma para meios diferentes. Suponhamos, por sua vez, que o primeiro meio seja mais denso do que o segundo e que a inclinação do raio *AC* seja a mesma que anteriormente. Portanto, o tempo no qual o ponto *A* alcança a superfície do meio rarefeito em *C* estará para o tempo no qual o ponto *B* é imerso no meio rarefeito na profundidade *GF* maior do que *DH*, a saber, na razão entre os [dois] meios, a qual supomos ser de *DH* para *EI*. Logo, *FG* está para *DH* assim como *DH* está para *EI*. Portanto, *FG*, *DH*, *EI* são continuamente proporcionais. Mas, como mostrado na proposição anterior, o ângulo *BCF*, o ângulo da refração no meio rarefeito, deve ser igual ao ângulo *LCM*, pois *FG* é o seno do ângulo da refração no meio rarefeito, assim como *DH* é o seno do ângulo da inclinação, e *EI*, o seno do ângulo da refração no



anguli refracti in denso. Itaque sinus anguli refracti in raro, sinus anguli inclinationis, et sinus anguli refracti in denso, sunt continue proportionales. Ideoque si duo radii aequaliter inclinati etc. Quod erat probandum.

Alia demonstratio ejusdem propositionis.

Sit planum media separans GBF, et super recta **[244]** GBF diametro constituatur circulus GHFE, cujus centrum B. Sit autem quod est supra diametrum, medium rarum, quod est infra densum; ducatur AC per centrum in angulo quocunque inclinationis dato ABH in medio raro, cui aequalis est angulus CBE in medio denso; et sinus anguli inclinationis est MA vel OC. Jam supponamus radium AB venientem e raro in densum, refringi in radium BD, hoc est, versus perpendicularem, utcunque. Sinus ergo anguli refracti in denso est DR ducta a circumferentia in D perpendiculariter ad BE, et huic aequalis est LI. Rursus, supponamus radium venientem a medio denso in rarum secundum inclinationem quam habet DB, erit ille radius refractus in medio raro ad BA, ut ostensum est prop. 10. Et manifestum satis est per se: eadem enim est via a D per B ad A, quae erat ante ab A per B ad D, sicut Thebis Athenas, et Athenis Thebas: et angulus refractus in raro ABH cujus sinus est MA, idem cum sinu anguli inclinationis radii qui veniebat e medio raro in densum. Si deinde fiat, ut DR sinus anguli inclinationis venientis radii a D ad B in denso, ad MA sinum anguli ejus refracti in raro, ita CO vel MA sinus anguli inclinationis datae ad aliud, puta NK: erit NK sinus anguli refracti in raro, radii inclinati in denso secundum angulum datum CBE, hoc est ABH. Nam, per duodecimam, ut sinus anguli inclinationis unius ad sinum anguli in illa **[245]** inclinatione refracti, ita est sinus anguli inclinationis alterius ad sinum anguli in illa inclinatione refracti. Sunt itaque continue proportionales NK sinus anguli refracti in raro, MA sinus anguli inclinationis communis, et LE sinus anguli refracti in denso. Quare si duo radii aequaliter inclinati etc. Quod erat probandum.

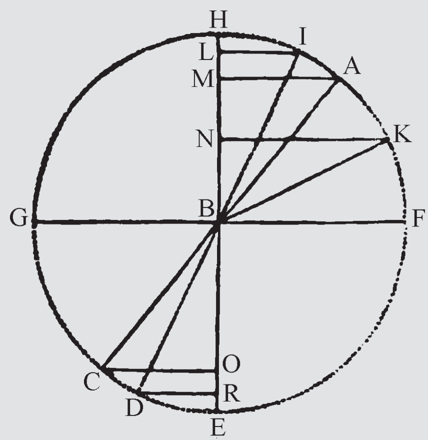


scientiæ studia, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 483-526, 2016

meio denso. E, assim, o seno do ângulo da refração no meio rarefeito, o seno do ângulo da inclinação e o seno do ângulo da refração no meio denso são continuamente proporcionais. Portanto, se dois raios igualmente inclinados etc. O que era para ser provado.

Outra demonstração da mesma proposição

Seja *GBF* o plano que separa os meios e [244] seja descrito, sobre a linha reta *GBF* como diâmetro, o círculo *GHFE* com centro *B*. E seja rarefeito o meio que está acima do diâmetro e denso aquele que está embaixo; seja *AC*, no meio rarefeito, traçada através do centro em um ângulo qualquer *ABH* de inclinação dada, o qual é igual ao ângulo *CBE* no meio denso e cujo seno do ângulo da inclinação é *MA*, ou *OC*. Suponhamos, agora, que o raio *AB*, vindo do meio rarefeito para o meio denso, seja refratado para o raio *BD*, isto é, em direção à perpendicular. Portanto, *DR*, traçada a partir da circunferência em *D* e perpendicular a *BE*, é o seno do ângulo da refração no meio denso, e ela é aqui igual a *LI*. Suponhamos, por sua vez, que o raio vindo do meio denso para o meio rarefeito segundo a inclinação que *DB* possui seja aquele raio refratado no meio rarefeito para *BA*, como mostrado na décima proposição. E isso é suficientemente manifesto por si mesmo, pois o caminho de *D* para *A* através de *B* é o mesmo que antes era o de *A* para *D* através de *B*, assim como [é o mesmo] o caminho de Atenas para Tebas e o de Tebas para Atenas; e o ângulo de refração *ABH* no meio rarefeito, cujo seno é *MA*, é o mesmo ângulo do seno do ângulo da inclinação daquele raio que provinha do meio rarefeito para o meio denso. Se isso é assim, então *DR*, o seno do ângulo da inclinação do raio que provêm de *D* para *B* no meio denso, está para *MA*, o seno do ângulo da refração desse raio no meio rarefeito, assim como *CO*, ou *MA*, o seno do ângulo da inclinação dada, está para o outro seno, que seja *NK*; portanto, *NK* será o seno do ângulo da refração no meio rarefeito dos raios inclinados no meio denso segundo o ângulo dado *CBE*, isto é, [igual a] o ângulo *ABH*. Pois, pela décima segunda proposição, o seno do ângulo de inclinação de uma inclinação está para o seno do ângulo da refração nessa mesma inclinação [245] assim como o seno do ângulo de inclinação da outra inclinação está para o seno do ângulo da refração nessa inclinação. E, portanto, *NK*, o seno do ângulo da refração no meio rarefeito, *MA*, o seno do ângulo da inclinação comum, e *LI*,[12] o seno do ângulo da inclinação no meio denso, serão continuamente proporcionais. Portanto, se dois raios igualmente inclinados etc. O que era para ser provado.



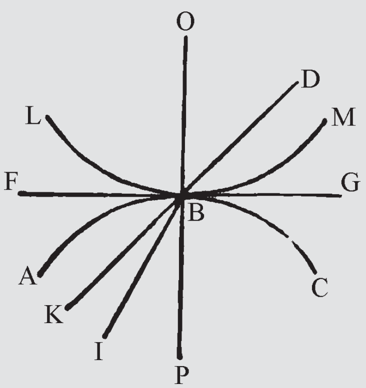
Corollarium.

Manifestum hinc est, dato sinu anguli refracti in uno medio ex altero, et inclinatione, dari sinum anguli refracti in altero medio: vel datis angulis refractis utriusque medii in eadem inclinatione, dari ipsam inclinationem: vel data inclinatione una cum ratione quam habent inter se obsequia mediorum, dari caetera.

Propositio xiv.

Radii incidentis oblique in medium diversum, cujus superficies est curva, refractio eadem est ac si incidisset in contactum planae superficiei ipsam curvam contingentis.

Sit medium quod est infra rectam FBG diversum ab eo quod est supra, ducaturque OP secans FBG in B ad angulos rectos, ducanturque duae curvae ABC et LBM se inuicem et rectam FG contingentes in puncto B. Incidat autem ad planum FG in puncto B in inclinatione quacunque radius DB qui refringatur a directa DBI, vel versus [246] perpendiculum BP, vel contra, ut BK. In media autem latitudine radii DBK (nam ostensum est omnem radium habere latitudinem) consideretur linea mathematica DBK, ita ut B consideretur quoque ut punctum contactus. Jam si abscindatur a medio, quod est infra FG, pars illa quae continetur inter planum FG et superficiem convexam ABC, manifestum est non ideo mutari situm rectae BK: nam punctum B non tollitur, cum sit commune utrisque ABC curvae et FBG rectae. Erit tamen medium quod est infra ABC diversum ab eo quod est supra; quare radii incidentis oblique in medium diversum cujus superficies est convexa, refractio eadem est ac si incidisset in contactum planae superficiei ipsam convexam contingentis. Rursus si ad medium quod est infra FBG, adjeceris medii eiusdem generis quantum impleat spatium quod continetur inter FG planum et LBM concavam superficiem: manifestum est, non ideo mutari situm rectae BK, quia punctum B est in ipso plano FBG non minus quam in concavo LBM: erit tamen medium quod est infra LBM diversum ab eo quod est supra. Quare radii incidentis oblique in medium diversum cujus superficies est concava, refractio eadem est ac si incidisset in contac-



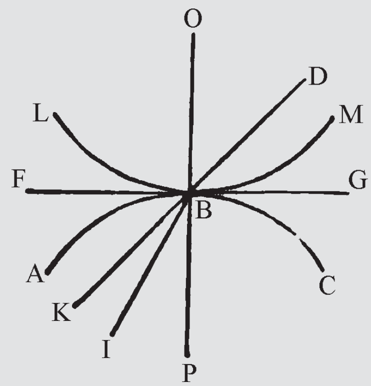
Corolário

Disso é manifesto que, dado o seno do ângulo de refração do primeiro meio para o segundo meio e a inclinação, é dado o seno do ângulo de refração do segundo meio para o primeiro meio; ou que, dado o ângulo de refração em quaisquer dos meios na mesma inclinação, é dada a própria inclinação; ou que, dada uma inclinação com a razão que os meios obedecem entre si, é dado etc.

Proposição xiv

A refração dos raios obliquamente incidentes em um meio diferente cuja superfície é curva é a mesma se os raios incidissem no contato com uma superfície plana, na própria tangente à curva.

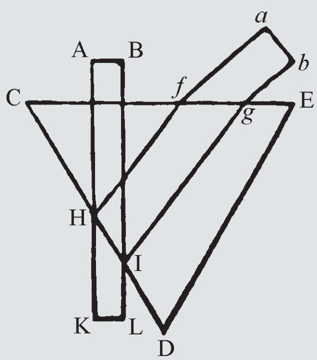
Seja o meio que está abaixo da linha reta *FBG* diferente daquele que está em cima e seja traçada *OP* que corta, em ângulos retos, *FBG* em *B*, e sejam traçadas duas curvas que se opõem, *ABC* e *LBM*, e que a linha reta *FG* seja a tangente no ponto *B*. E que, sobre o plano *FG* no ponto *B*, em uma inclinação qualquer, incida o raio *DB* que é refratado ou em direção [246] à perpendicular *BP*, como a linha reta *DBI*, ou em direção contrária à perpendicular, como *BK*.[13] Em um mesmo meio, a largura do raio *DBK* (mostrou-se, pois, que todos os raios possuem largura) é considerada como a linha matemática *DBK*, assim como *B*, do mesmo modo, é considerado como o ponto de contato. Ora, se o meio que está abaixo de *FG* é retirado, isto é, aquela porção que está contida entre o plano a *FG* e a superfície convexa *ABC*, é manifesto que a linha reta *BK* não mudou, por isso, de posição, pois o ponto *B* não é suprimido, uma vez que o ponto *B* é comum à curva *ABC* e à linha reta *FBG*. O meio que está abaixo de *ABC* será, todavia, diferente daquele que está em cima; portanto, dos raios obliquamente incidentes em um meio diferente cuja superfície é convexa, a refração é a mesma que aquela que incidisse no contato com a própria superfície plana tangente à superfície convexa. Por sua vez, se um meio do mesmo gênero, em relação ao meio que está abaixo de *FBG*, for estendido no tanto de espaço aumentado que está contido entre o plano *FG* e a superfície côncava *LBM*, então é manifesto que a linha reta *BK* não mudou de posição, uma vez que o ponto *B* está no próprio plano *FBG* não menos do que no plano côncavo *LBM*; mas o meio que está abaixo de *LBM* será, todavia, diferente daquele que está em cima. Portanto, dos raios obliquamente incidentes em um meio diferente cuja superfície é côncava, a refração é a mesma se eles incidissem no contato com uma superfície plana, na própria tangente à [superfície]



tum planae superficiei ipsam concavam contingentis. Itaque radii incidentis oblique in medium diversum cujus superficies est curva etc. Quod est demonstrandum.

Habes jam sententiam meam de natura lucis et refractionibus, in qua continentur elementa prima **[247]** *Anaclasticae*: ad perfectam cujus cognitionem in re physica contemplandae sunt diaphanorum omnium naturae et figurae, maxime autem figurae.

Ex iis quae de natura refractionis dicta sunt, facile est colligere, in omni refractione lineam lucis a quo radius exit, quanquam sit minima quae dari possit, concipere dum radius refringitur vertiginem quandam, et quo saepius refringitur eadem via, eo majorem esse vertiginem: ex quo sequitur alterum latus radii, scilicet exterius, incidere in oculum motu recto qui augetur a motu vertiginis, alterum autem motu recto qui vertigine minuitur. Atque in hoc fortasse consistit, quod in prismate contento duobus planis oppositis triangularibus et tribus parallelogrammis, termini objectorum ex ea parte qua refractio facit cubitos, sunt rubri primum, et deinde flavi; ex altera vero parte qua refractio facit angulos, sunt primum virides vel caerulei, et deinde violacei.



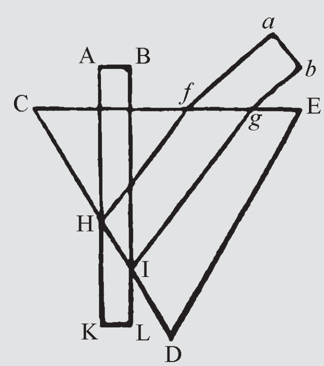
Exempli causa; sit prismatis triangulum CDE, ad cujus latus CE cadant oblique radii *af*, *bg*, a terminis objecti *ab*, inde refringantur ad HI, et inde iterum ad KL. Videbitur objectum in AB rubrum ex parte A, quod desinit in flavo versus B: at a parte B viride, desinens in violaceo versus exteriora. Quod ideo accidere conjicio, quod radius *af*HK acquirat vertiginem in cubitis *f* et H: quae vertigo motum ejus rectum secundat, sed turbat, unde color ille ruber et **[248]** flavus ad interiora. Sed in angulis *g* et I illa vertigo adimit de motu radii recto, et turbat quoque: unde nascitur color viridis et violaceus ad exteriora, minus fortes quam ruber et flavus. Confirmat conjecturam hanc, quod color ruber incipiens ab A tendit versus B, et viridis a B tendit versus exteriora.

Finis.

côncava. E, portanto, os raios obliquamente incidentes em um meio diferente cuja superfície é curva etc. O que é para ser demonstrado.

Já tens minha opinião acerca da natureza da luz e das refrações, na qual estão contidos os primeiros elementos **[247]** da anaclástica, de cujo conhecimento completo, na consideração da realidade física, são a natureza e a figura de todos os [corpos] diáfanos, mormente a figura.

Do que foi dito sobre a natureza da refração, é fácil concluir que, em toda refração, ainda que a linha de luz da qual o raio procede seja tão mínima quanto possa ser dada, de modo a conceber alguma rotação do raio refratado e o modo como ele é frequentemente refratado para o mesmo caminho, tal rotação é importante: do que resulta que, certamente, em um dos lados do raio que incide no olho a partir do exterior, o movimento reto é aumentado pelo movimento da rotação, enquanto no outro [lado do raio que incide no olho a partir do exterior], o movimento reto é diminuído pela rotação. E talvez nisso consista [a causa de] que, no prisma que contém dois planos triangulares opostos e três faces paralelogrâmicas, nas extremidades dos objetos [vistos] a partir do lado que a refração faz inflexão, existe primeiramente o vermelho e depois o amarelo, enquanto do outro lado, no qual a refração faz ângulos, existe primeiramente o verde, ou o azul, e depois o violeta. Por exemplo, seja *CDE* o triângulo do prisma cujo lado *CE* os raios *af* e *bg* incidam obliquamente a partir da extremidade *ab* do objeto e que, então, sejam refratados para *HI* e depois para *KL*. O objeto visto em *AB* será vermelho no lado *A*, o qual acaba em amarelo na direção de *B*, mas no lado *B* será verde, o qual acaba em violeta na direção do exterior. Isso acontece, concluo, porque o raio *afHK* adquire rotação nas inflexões *f* e *H*, rotação que favorece seu movimento reto, mas que o perturba onde a cor é vermelha e **[248]** amarela no interior. Mas, nos ângulos *g* e *I*, a rotação diminui o movimento reto do raio e também o perturba; por isso, a cor verde e o violeta surgem, no lado exterior, menos intensas do que o vermelho e o amarelo. Isso confirma aquela conjectura de que a cor vermelha tende inicialmente de *A* para *B* e que a cor verde tende de *B* para o exterior.



Fim

Tradução do original em latim por Guilherme Rodrigues Neto

Notas

1 Originalmente publicado em Mersenne, 1644, p. 567-89. Reproduzido em OL, 5, p. 215-48. Integrado ao *corpus* hobbesiano somente em 1839 por W. Molesworth, de quem recebeu o título *Tractatus opticus*.
2 Postulado tradicional da óptica de que a ação da força que atua perpendicularmente é mais intensa do que a ação que atua de modo oblíquo.
3 Hobbes usa a expressão "em direção à perpendicular" para dizer que, no caso em que o primeiro meio é mais rarefeito, o raio é refratado para o lado da perpendicular, isto é, que seu caminho se aproxima da perpendicular; isso não quer dizer que o raio de luz refratado segue na própria direção perpendicular ao plano que divide os dois meios. Na próxima proposição, que trata do caso em que o primeiro meio é mais denso, o raio refratado segue "em direção contrária à perpendicular", ou seja, ele é desviado para uma direção que se afasta da perpendicular, o oposto do que acontece nesta sexta proposição.
4 O correto é *GL* e não *GFL*. *F* não está na mesma altura que *GL*.
5 Referência à primeira edição de *A dióptrica*, o primeiro dos três ensaios "científicos" que seguem o *Discurso do método*, o qual foi publicado anonimamente por Descartes em 1637. No início do décimo e último discurso de seu tratado de óptica, Descartes apresenta um aparato para medir a refração de um bloco particular de vidro (cf. AT, 6, p. 211-2). Determinar o índice de refração de um bloco de vidro é o primeiro passo para a confecção "automática" (de acordo com o projeto de Descartes) de lentes ópticas, as quais fornecem o elemento essencial para a construção de aparelhos que servem para "aperfeiçoar a visão humana". A origem desse dispositivo utilizado por Descartes para a determinação da medida da refração de um bloco particular de vidro encontra-se no início da *Dioptrice* (1611) de Kepler (cf. Rottman, 2008, p. 15-8).
6 O correto é *YEQ* e não *YEZ*.
7 O correto é *IEQ* e não *IEZ*.
8 Isto é, se o meio não fosse "biforme", ou seja, "se o meio não tivesse sido alterado" a partir da linha *CD*, então o lado *G* da linha de luz *GH* deveria estar na altura de F, do outro lado do raio, e não propriamente na posição em que o ponto *F* que aparece na figura.
9 O correto é *ak* e não *K*. O erro é indicado, mas não corrigido, por W. Malesworth (cf. OL, 5, p. 238).
10 Pelo quinto postulado da geometria de Euclides.
11 O correto é *er* e não *cr*.
12 O correto é *LI* e não *LE*.
13 Existe um erro de representação na figura que acompanha a demonstração. O raio refratado *BK* aparece representado na mesma linha que *DB*, mas *BK* é refratada em direção contrária à perpendicular *OP* e, portanto, deve estar um pouco acima do lugar onde é representada.

 scientiæ studia, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 481-524, 2016