scientiæ studia, São Paulo, v. 11, n. 2, p. 391-416, 2013

A reformulação do conceito de predicatividade segundo Poincaré

Jacintho Del Vecchio Junior

Este texto introduz a tradução do discurso de intitulado "Sobre os números transfinitos" ("*Über transfinite Zahlen*"), proferido por Henri Poincaré em 27 de abril de 1909, na Universidade de Göttingen. Após uma breve apresentação do pensamento do autor acerca dos fundamentos da aritmética, procura-se citar os aspectos mais relevantes da chamada crise dos fundamentos da matemática, para então introduzir a reformulação do conceito de predicatividade aventada no referido discurso sobre números transfinitos, contribuição compreendida como um recurso teórico necessário para a superação dos paradoxos relativos à teoria dos conjuntos. Com isso, pretende-se evidenciar o papel central do texto publicado nesta edição para o desenvolvimento da concepção matemática de Henri Poincaré.

* * *

Introdução

Generalizações e classificações no que tange às correntes de pensamento, sejam elas literárias, artísticas, ou outras quaisquer, frequentemente podem implicar no cometimento consciente ou inconsciente quer de injustiças, quer de imprecisões. É o caso da atribuição peremptória e apressada da alcunha de "convencionalismo" à obra epistemológica de Henri Poincaré, um risco que uma leitura superficial de seus escritos pode sugerir com relativa facilidade. Nesse caso em particular, a adoção dessa postura pode significar uma redução indevida do caráter complexo e interessante de seus trabalhos dedicados à filosofia da ciência.

O pensamento filosófico de Poincaré esconde sob sua aparente simplicidade uma série de armadilhas; seus textos, por vezes muito sucintos, são tão cheios de tons e semitons que seus comentadores têm impressões diametralmente opostas no que concerne à sua obra como um todo: enquanto Phillipe Jourdain toma-o como o exemplo de que um grande matemático não precisa ser necessariamente um bom filósofo ou um grande lógico, Karl Popper considera-o nada menos que *o maior* dos filósofos da ciência (cf. Heinzmann, 2006 p. 399). Leituras tão contraditórias sugerem, no mínimo, que qualquer opinião em relação à obra filosófica de Poincaré não se presta a simplificações extremadas; reclama, ao contrário, uma análise detida.

Nascido em Nancy em 1854, Henri Poincaré é descrito por seus comentadores como o último sábio universal. Cientista renomado, teve grande destaque em soluções de problemas nas mais diversas áreas. Suas contribuições mais notáveis foram a elaboração das funções fuchsianas, das funções automórficas, das leis do equilíbrio de corpos fluidos, bem como seus importantes trabalhos sobre a teoria orbital. Aliado a esses exemplos, sua ampla produção científica toca também os campos da termodinâmica, da probabilidade, da eletricidade e da óptica, o que indica a proeminência de seu nome no âmbito científico quando já tardiamente lança-se à filosofia da ciência e à divulgação científica.

É justamente nesse período que Poincaré dedica-se aos temas inerentes aos fundamentos da matemática, por meio de artigos que invariavelmente externam seu espírito polêmico e combativo, a exemplo do que se nota em uma conferência proferida pelo autor em 27 de abril de 1909, na Universidade de Göttingen, por ocasião de uma série de palestras voltadas à matemática pura e à física matemática. O discurso em tela é relevante por tratar-se de um momento capital para a reformulação de sua concepção a respeito do diagnóstico e da consequente solução das antinomias da teoria dos conjuntos suscitadas a partir do início do século xx. O presente artigo tem por escopo oferecer uma introdução aos temas e ideias apresentados naquela oportunidade.

1 A nova heurística das ciências formais no fim do século xix

A ciência e a hipótese (*La science et l'hypothèse*), de 1902, é a obra mais conhecida de Poincaré. O livro consiste de uma reunião de textos, alguns deles adaptados, outros publicados integralmente em oportunidades anteriores. Seu primeiro capítulo trata especificamente da natureza do raciocínio matemático, abordada a partir da aparente contradição entre, de um lado, o rigor exigido pelos enunciados e provas matemáticas e, de outro, a fecundidade que a disciplina deve pretensamente possuir. Na concepção antirrealista[1] que inspira a filosofia da matemática de Poincaré, a tensão entre intui-

1 Ao contrário de um posicionamento de cunho realista (identificado com o platonismo matemático e defendido, por exemplo, por Russell e Cantor por meio de propostas diferentes), Poincaré rejeita qualquer possibilidade de atribuir realidade aos entes matemáticos que vá além de uma concepção mental ou linguística/discursiva. É essa característica que temos em mente ao atribuir ao autor a alcunha de antirrealista. Contudo, é preciso deixar claro que essa nomenclatura não encontra guarida na obra do matemático francês. Em "A lógica do infinito" ("La logique

ção e capacidade analítica, faculdades necessárias à construção da matemática, acaba por equilibrar dois predicados que devem obrigatoriamente pertencer à matemática, que são o rigor analítico e a fecundidade que faz a disciplina transcender à mera tautologia. Toda a articulação relativa à apresentação das teses do autor concernentes à aritmética está condicionada a essa dupla determinação.

Mas a motivação subjacente à argumentação de Poincaré acerca desse pormenor está inserida em um contexto do pensamento matemático contemporâneo que tem suas bases determinadas por um debate que remonta a Leibniz e Kant quanto à natureza da matemática. Leibniz entende a matemática como um saber analítico, em que os conceitos envolvidos em suas proposições já se encontram dados sem qualquer tipo de extensão, postulando assim uma relação de identidade entre o sujeito e seu predicado, e que pode resumir-se em uma relação apta a ser veiculada pela lógica.[2] Essa perspectiva acaba por ser reiterada no final do século xix, principalmente sob a pena de Frege que, ao tratar das inferências realizadas nas operações matemáticas, identifica-as como analíticas, corroborando o posicionamento de Leibniz e inaugurando a corrente de pensamento que posteriormente receberia a alcunha de logicismo.[3]

Contra uma leitura dessa natureza, o kantismo apresenta a matemática como um saber de cunho sintético, em que as conclusões não podem ser analiticamente derivadas de suas partes constituintes e, portanto, não são redutíveis à identidade entre sujeito e predicado. Por esse motivo, de acordo com a solução kantiana para a fundamentação da matemática – parte de uma proposta muito mais ambiciosa, introduzida pela *Crítica da razão pura* (*Kritik der reinen Vernunft*) – as operações atinentes à disciplina

de l'infini"), Poincaré apresenta uma classificação análoga a essa, ao distinguir duas tendências acerca de como conceber o infinito: os *cantorianos* compreendem o infinito como dado em ato e, portanto, uma totalidade que precede a finitude; os *pragmáticos*, por sua vez, acreditam no infinito apenas enquanto potência, e não como uma realidade dada (cf. Poincaré, 1986 [1912], p. 306-7). Assim, uma aproximação entre a terminologia empregada por Poincaré e o binômio realismo/antirrealismo não é imediata, guardando apenas uma compatibilidade parcial.

2 "O grande fundamento da matemática é o princípio de contradição, ou da identidade, isto é, que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo; e que, portanto, A é A, e não pode ser não-A. Este único princípio é suficiente para demonstrar toda a aritmética e toda a geometria, isto é, todos os princípios matemáticos" (Leibniz, 1890 [1715-16], p. 239). Russell ressalta o caráter analítico envolvido na perspectiva de Leibniz nos seguintes termos: "quanto à amplitude dos juízos analíticos, Leibniz afirmava que todas as proposições da lógica, da aritmética e da geometria são dessa natureza. (...) A noção de que todas as verdades a priori são analíticas está intimamente relacionada com a doutrina do sujeito e predicado. Um juízo analítico é aquele em que o predicado está contido no sujeito. Admite-se que o sujeito é definido por certo número de predicados, sendo que um ou mais desses predicados são selecionados para a predicação num juízo analítico" (Russell, 1958, p. 18-9).

3 Ao abrir a conclusão do *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Os fundamentos da aritmética*), Frege sintetiza o escopo da construção teórica apresentada nas páginas antecedentes do seguinte modo: "espero nesta obra ter tornado admissível que as leis aritméticas são juízos analíticos e, portanto, *a priori*. De acordo com isso, a aritmética seria apenas um desenvolvimento adicional da lógica, e todo teorema aritmético seria uma lei lógica, ainda que derivada" (Frege, 1983, p. 153).

constituem efetivamente extensões de conceitos, que escapam a uma determinação empírica (Kant, 1994 [1781], p. 47), assim como não podem encontrar fundamento em juízos puramente analíticos. Logo, em direta contraposição a Leibniz, os juízos da matemática devem ser classificados, segundo Kant, como sintéticos e *a priori*.[4]

As teses matemáticas de Poincaré tomaram forma em um ambiente em que esse embate entre Leibniz e Kant ganhara novos contornos, que sugeriam a pertinência de um direcionamento cada vez mais claro em favor do ideário leibniziano. Não obstante sua importância, a solução kantiana no que concerne à aritmética e à geometria seria colocada em xeque principalmente diante de dois acontecimentos de grande impacto para a história das ciências formais, desencadeados a partir da primeira metade do século XIX: a criação das geometrias não euclidianas e o advento do chamado "período de instalação do rigor na análise".

O surgimento de geometrias cujos fundamentos afastam-se do cânone euclidiano problematizou significativamente qualquer tentativa de atribuir um caráter necessário aos postulados da geometria, propriedade esta que parece, por sua vez, soar como uma espécie de consequência natural da concepção de Kant. Em sua interpretação mais usual, a geometria, segundo a perspectiva kantiana, por tratar-se de um saber sintético e *a priori*, assumiria um compromisso forte para com o caráter necessário de seus postulados. Nesse sentido, a simples existência de outras geometrias também isentas de contradições, por si só, consubstanciaria um contraexemplo em relação ao caráter necessário da geometria de Euclides. É preciso, entretanto, ressaltar que essa não é a única interpretação possível para o problema. Couturat, por exemplo, argumenta que o caráter sintético da geometria concebida por Kant não traz como consequência necessária a existência de apenas uma geometria verdadeira.[5] Mas não há como negar que o fato histórico representado pelo advento das geometrias não euclidianas coloca um problema não vislumbrado por Kant, o que abre oportunidade para vários tipos de interpretações. Nenhuma dessas interpretações, todavia, ousa novamente reivindicar o reconhecimento do caráter necessário dos postulados da geometria, dada a evidente impossibilidade de fazê-lo.

4 "Todo o conhecimento matemático tem essa peculiaridade: deve primeiramente representar o seu conceito na *intuição* e *a priori*, portanto, numa intuição que não é empírica, mas pura; sem esse meio, não pode dar um único passo (...). Se pudermos descobrir esta intuição pura e a possibilidade de uma tal intuição, facilmente se explicará como é que as proposições sintéticas *a priori* são possíveis na matemática pura e, por conseguinte, também como é que esta própria ciência é possível." (Kant, 1990 [1783], p. 48).

5 Couturat defende a pertinência da geometria conforme concebida por Kant, mesmo diante das geometrias não euclidianas, pois segundo ele, acreditar que a natureza sintética do saber geométrico exige a existência de apenas um modelo logicamente possível consiste em um grande engano por parte de alguns matemáticos: "esses autores, aparentemente pouco familiarizados com o pensamento de Kant, creem que sua doutrina implica apenas uma geometria logicamente possível, o que é falso. A existência de várias geometrias possíveis é muito mais um argumento a favor da tese kantiana, em que os juízos geométricos são sintéticos e fundados na intuição." (Couturat, 1980 [1904], p. 300).

O rigor na análise, como o denomina Kline (1972, p. 947), também é um ideal epistêmico que ganhou corpo e maturidade no século xix, que já surge como uma proposta bem delineada na obra de Bernhard Bolzano, a partir do conceito de "prova analítica pura" ("*rein analitischer Beweis*") (cf. Cavaillès, 1987 [1942], p. 19). Com ele, percebe-se claramente uma preocupação cada vez mais latente no sentido de evitar imprecisões e primar por procedimentos tão sóbrios quanto possível, um valor heurístico que seria levado a termo exemplarmente por Cauchy e Weierstrass. Nos trabalhos desses autores, graças aos avanços em análise e geometria que os precederam, encontramos uma exacerbação da noção de rigor calcada na demonstração e, consequentemente, nos aspectos analíticos que a ela estão associados, relegando para segundo plano, ou, idealmente, banindo a aplicação e a validade da intuição no contexto de formulação das provas,[6] o que significa, em outros termos, a valorização da demonstração na prova matemática em detrimento de sua mera constatação (Cavaillès, 1987 [1942], p. 19-20). No que concerne à análise, portanto, o caráter sintético e apriorístico da aritmética conforme concebida por Kant – que é, naturalmente, indissociável da validade da intuição – também se coloca em sérias dificuldades, se tomarmos por certo que a marcha da história das ciências pode efetivamente indicar uma espécie de corroboração ou falseamento de teses epistemológicas.

Como observa Poincaré (1986 [1905], p. 14), todo esse contexto, aliado ao fortalecimento do logicismo, parece indicar para a morte da doutrina kantiana da geometria e da aritmética, representada por uma verdadeira crise em relação ao papel desempenhado pela intuição na matemática. Mas essa constatação do matemático francês não significa que ele compactue com essa leitura. Muito longe disso.

2 A filosofia da matemática de Poincaré até 1905

Os argumentos de Poincaré introduzidos em *A ciência e a hipótese* mostram-se interessantes e originais devido à lucidez com que avalia a aparente derrocada da intuição diante do fortalecimento do rigor analítico que caracteriza o espírito científico de sua época, e de como o autor reage a ele. Isso porque, enquanto nega veementemente a

6 Ao comentar essa mudança de perspectiva perpetrada entre o final do século xix e o início do século xx, Brouwer observa que "em primeiro lugar, esse desenvolvimento mostrou repetidamente como teorias inteiras podiam ser trasladadas de um domínio da matemática para outro: a geometria projetiva, por exemplo, permaneceu inalterada apesar da alteração dos papéis do ponto e da linha reta, uma parte importante da aritmética dos números reais permaneceu válida para vários campos de números complexos, e quase todos os teoremas da geometria elementar permaneceram verdadeiros para a geometria não arquimediana, na qual, para todo segmento de linha reta, existe outro segmento, infinitesimal em relação ao primeiro. *Essas descobertas pareciam indicar que, para uma teoria matemática, apenas a sua forma lógica era importante*." (Brouwer, 1983, p. 79, grifo nosso).

aceitabilidade da concepção de geometria kantiana, arguindo em favor de um caráter puramente convencional de seus fundamentos (Poincaré, 1968 [1902], p. 93-94), Poincaré reaviva a perspectiva kantiana na aritmética, ao rejeitar uma caracterização estritamente formal e analítica da disciplina, procurando evidenciar que existem fatores de suma importância que a compõem, e que não se resumem ao simples emprego da lógica.

A distância que existe entre demonstração e verificação (cf. Poincaré, 1968 [1902], p. 33) é elucidativa quanto à diferença que há entre o puro emprego da lógica e o seu uso em face de uma aplicação direcionada pela intuição criativa. Enquanto a demonstração possibilita uma abordagem fecunda do raciocínio, ampliando o trato de seus constituintes, a verificação tem por escopo simplesmente reproduzir os passos realizados na obtenção da prova. Utilizando a terminologia kantiana, Poincaré considera que a verdadeira demonstração consiste em uma operação direcionada por um juízo sintético e *a priori*, associada à faculdade de intuição. A verificação, por sua vez, consiste de um procedimento meramente formal, que cabe apenas para justificar adequadamente aquilo que já foi explicitado pelo juízo sintético que concebe a prova.[7] Isso denota que o foco privilegiado do autor não é propriamente centrado na exposição da disciplina e na perfeição formal que deve caracterizá-la, mas no processo de criação e dos meios a partir dos quais se constrói a ciência, identificando a capacidade de invenção como o recurso que direciona a prova formal. Em vista dessa articulação, não há, efetivamente, como atribuir à lógica o papel de grande fundamento da aritmética, por seu caráter essencialmente estéril (Poincaré, 1968 [1902], p. 31).

A preocupação do autor em ressaltar os métodos de trabalho dos matemáticos, dividindo-os em analistas e geômetras, "ainda que se ocupem da análise pura" (Poincaré, 1923 [1905], p. 12), vem corroborar essa perspectiva, ao mesmo tempo em que torna possível a dissociação que pode haver entre a forma de abordagem e a natureza do saber matemático. Poincaré subordina, portanto, o tratamento e a lapidação da ciência a fatores que estão para além de um único modo de geração, introduzindo características variáveis ao sabor da própria tendência psicológica de cada um dos matemáticos. Méray e Klein (respectivamente, um típico analista e um "geômetra nato") são seus exemplos de que a ciência não se edifica de forma unívoca (Poincaré, 1923 [1905], p. 15-16), malgrado a existência de um alicerce que lhe é inegociável, o emprego da intuição. Essa concepção ganha uma clareza ainda maior quando Poincaré trata daquilo que entende ser a base do raciocínio matemático por excelência: o princípio de indução completa.

7 "A verificação difere precisamente da verdadeira demonstração porque ela é puramente analítica, e porque ela é estéril. Ela é estéril porque a conclusão não é nada além da tradução das premissas em outra linguagem. A verdadeira demonstração, ao contrário, é fecunda, porque a conclusão é, em um sentido, mais geral que as premissas" (Poincaré, 1968 [1902], p. 33-4).

O princípio de indução completa constitui um procedimento de generalização similar ao da indução empírica, que se concretiza por meio do raciocínio por recorrência. Trata-se de um recurso do intelecto humano que possibilita a repetição da atribuição de uma determinada propriedade ou operação a todos os números naturais, desde que ela seja aplicável a um deles: "a característica essencial do raciocínio por recorrência é a de que ele contém condensado, por assim dizer, em uma fórmula única, uma infinidade de silogismos. (...) Se o teorema é verdadeiro para $n-1$, ele é verdadeiro para n" (Poincaré, 1968 [1902], p. 39). Poincaré reserva a esse tipo de operação mental um papel essencial para a criação na aritmética: aquilo que a prova analítica tem o poder de demonstrar nos casos particulares, o princípio de indução completa apresenta como uma propriedade geral dos números. Nesse prisma, o caráter fecundo da aritmética encontra a garantia da validade de suas proposições na capacidade de repetição indefinida de uma mesma operação, caso ela seja possível para um número qualquer. Logo, a construção das séries numéricas, assim como a do contínuo matemático, encontram suas bases em um princípio que garante tanto o rigor atribuído à prova analítica quanto a fecundidade necessária à criação matemática (Poincaré, 1968 [1902], p. 44).[8]

Desse modo, a fundamentação da aritmética segundo Poincaré claramente aproxima-se do kantismo, sobretudo no que diz respeito à maneira de articular os raciocínios matemáticos como sintéticos e *a priori*, seja devido à constatação da impossibilidade de oferecer uma prova analítica para o princípio em tela, seja em face da inaptidão da experiência para fornecer qualquer indicação da validade ou não dessa propriedade.

Contudo, apesar de nominalmente idêntico, o caráter sintético e apriorístico atribuído por Poincaré às construções da aritmética não é exatamente o sentido proposto por Kant. Sua argumentação passa ao largo daquilo que parece ser um ponto fundamental na *Estética Transcendental* kantiana, a saber, a derivação da matemática pura a partir das duas formas de representação necessárias às intuições, quais sejam, o espaço e o tempo (Kant, 1994 [1781], p. 76; 1990 [1783], p. 51). Para Henri Poincaré, o delineamento da aritmética tem um aspecto menos pretensioso, a saber, o da possibilidade de garantir a correção por meio da via analítica juntamente com a possibilidade de transcender a ela, sem que isso signifique uma transgressão em relação à limitação inerente ao intelecto humano, do que a ciência é uma decorrência. Assim, para Poincaré, o juízo sintético *a priori* tem como função "fornece[r], por assim dizer, a forma

8 Não é essa, por exemplo, a concepção de Russell acerca do princípio de indução completa, ao menos segundo a versão apresentada em *The principles of mathematics*, de 1903. Para Russell, o princípio em tela nada mais é do que uma forma alternativa de expressar a definição nominal do número inteiro (cf. Russell, 1937 [1903], p. 123), o que o torna meramente um recurso analítico, viabilizando assim o ideário logicista em relação aos fundamentos da matemática.

transcendental no interior da qual a dedução lógica e mesmo a compreensão matemática podem se realizar. Ele é o responsável pelas sínteses primárias, a base sobre a qual se processa a análise lógica e matemática" (Mooij, 1966, p. 117).

Todavia, malgrado a importância da intuição no processo de criação e de construção da aritmética, o critério último que figura em *A ciência e a hipótese* como o esteio da verdade dessas criações é o da ausência de contradição,[9] faceta que aproxima o pensamento de Poincaré das teses do formalismo hilbertiano e cantoriano. Logo, nessa seara, a força e a importância da intuição tomada como um instrumento de criação científica não se superpõe à análise, no que diz respeito à certeza de suas criações.[10] Essas são, em linhas gerais, as ideias professadas por Poincaré desde 1893 até o momento em que ele toma contato com os paradoxos da teoria dos conjuntos e as questões lógicas a eles correlatas.

3 A crise dos fundamentos da matemática

Henri Poincaré introduziu alterações importantes em sua concepção acerca dos fundamentos da aritmética a partir do episódio que ficou conhecido como o da "grande crise dos fundamentos da matemática" (Bourbaki *apud* Hobsbawm, 1988, p. 343).[11] Essa "crise" decorre da descoberta de paradoxos aonde eles simplesmente não poderiam existir, dada a pretensa solidez dos fundamentos da matemática. Contudo, note-se que a crise dos fundamentos é, de fato, uma crise na teoria dos conjuntos. Essa apropriação tácita (ou seja, considerar a teoria dos conjuntos como uma parte essencial dos fundamentos da matemática) não consiste em uma relação imediata, muito menos em uma relação necessária; todavia, ela pode ser vista como uma consequência da ampla

9 "A matemática é independente da existência dos objetos materiais; na matemática, a palavra 'existir' só pode possuir um sentido, o da ausência de contradição" (Poincaré, 1986 [1905], p. 18).
10 Poincaré é claro ao afirmar que, caso sejamos levados a um conflito entre intuição e análise, uma deve superpor-se à outra, e não há espaço para dúvida em relação a qual delas deve remanescer: "ao invés de procurar conciliar intuição e análise, basta sacrificar uma delas, e como a análise deve permanecer impecável, deve-se decidir contra a intuição" (Poincaré, 1968 [1902], p. 58).
11 O reconhecimento da existência de uma crise nos fundamentos da matemática não é unânime. Paul Bernays, por exemplo, rejeita essa ideia, ao estabelecer uma distinção clara entre matemática e filosofia da matemática, radicando a crise apenas aos temas desta última (cf. Bernays, 1983, p. 258). Todavia, à medida que a concepção dos entes matemáticos está envolvida no âmbito filosófico (além de outros aspectos cruciais para o desenvolvimento da disciplina, como os critérios de aceitabilidade das provas na matemática), torna-se evidente a importância atribuída a essas questões também nas paragens da matemática propriamente dita. Um posicionamento mais centrado seria o de reconhecer uma crise nos fundamentos, mas apenas nos fundamentos da matemática cantoriana, como sugere Schoenflies (1927), que, por sua vez, reverbera por toda a disciplina, encontrando novos lugares e modos de expressão (cf. Barot, 2005, p. 35).

aceitação que a teoria dos conjuntos encontra junto à comunidade científica no início do século xx.

A teoria dos conjuntos consistia em um sistema que proporcionava um fundamento muito pertinente para uma parcela considerável da disciplina: devido à similaridade que guarda em relação aos princípios da lógica (pois ambas podem ser vistas como um conjunto de regras de classificação e de relações entre objetos e totalidades dadas) sua importância é evidente, sobretudo a partir da obra de Cantor, em que até mesmo a noção de infinito fez-se passível de um trato formal. Por isso, a referida teoria tornou-se muito valiosa para os matemáticos desde o final do século xix, ainda na esteira da perfeição formal concebida como um valor heurístico central para a matemática.

Nesse contexto, o surgimento de antinomias no *corpus* da teoria cantoriana dos conjuntos – a exemplo dos paradoxos de Cantor,[12] de Russell[13] e de Burali-Forti[14] – colocou sob suspeita os alicerces da matemática. Os primeiros paradoxos surgem diretamente atrelados à teoria dos transfinitos, mas logo outras antinomias de cunho essencialmente semântico passam também a figurar como dificuldades a serem resolvidas, como no caso dos paradoxos de Epimênides,[15] Berry,[16] e Greeling,[17] fato

12 O paradoxo de Cantor é apresentado nos seguintes termos: suponhamos o conjunto *U*, conjunto esse definido por $\{x|x$ é um conjunto$\}$. *U* é, portanto, o conjunto de todos os conjuntos. *P(U)* é um conjunto de todos os subconjuntos de *U* e, logo, subconjunto de *U*. Como por definição um subconjunto é menor ou igual ao conjunto do qual faz parte, *P(U)* é menor ou igual a *U*. Entretanto, segundo o teorema de Cantor, dado o número n como número cardinal do conjunto *U*, o número de elementos de *P(U)* é 2^n e, portanto, maior que *n* (cf. Stoll, 1993, p. 228). O paradoxo surge porque o número cardinal de *P(U)* não pode ser maior que o de *U*, pois *U* é, por definição, o conjunto de *todos* os conjuntos.

13 O paradoxo de Russell remete ao problema dos conjuntos que não são membros de si mesmos: "Seja *w* o conjunto de todas as classes que não são membros de si mesmas. Então, para qualquer classe que seja *x*, '*x* é *w*' é equivalente a '*x* não é um *x*'. Assim, atribuindo a *x* o valor *w*, '*w* é um *w*' é equivalente a '*w* não é um *w*'" (Russell, 1986 [1908], p. 200). Isso implica, em outros termos, que *w* é membro de si mesmo se e somente se não for membro de si mesmo.

14 A contradição de Burali-Forti levanta o problema relativo à consideração do número ordinal da série de ordinais: "Pode-se mostrar que toda a série bem ordenada possui um número ordinal, que as séries de ordinais maiores ou iguais a qualquer ordinal dado excedem esse ordinal dado em um, e (em algumas suposições muito naturais) que a série de todos os ordinais (em ordem de grandeza) é bem ordenada. Segue-se daí que a série de todos os ordinais possui um número ordinal; chamemo-lo de W. Mas nesse caso, a série de todos os ordinais incluindo W possui o número ordinal W+1, que é maior que W. Assim, W não é o número ordinal de todos os ordinais" (Russell, 1986 [1908], p. 201-2).

15 "Epimênides, o cretense, dizia que todos os cretenses eram mentirosos, e todos os outros enunciados asseverados pelos cretenses eram certamente mentiras. Essa era uma mentira? A forma mais simples dessa contradição é propiciada pelo homem que diz 'eu estou mentindo'; se ele está mentindo, está dizendo a verdade, e vice-versa" (Russell, 1986 [1908], p. 200).

16 O paradoxo de Berry é descrito por Russell da seguinte maneira: "o número de sílabas dos nomes de números inteiros finitos em inglês tende a crescer à medida que os números também crescem, e devem crescer gradual e indefinidamente, uma vez que apenas um número finito de nomes pode ser obtido a partir de um número finito de sílabas. Portanto, os nomes de alguns inteiros devem consistir de um mínimo de dezenove sílabas, e dentre eles que torna ainda mais amplo e incômodo o problema, assim como reivindica uma solução urgente.

Do ponto de vista dos autores alinhados ao realismo matemático (cf. a nota 1), os paradoxos consistiam, de modo geral, em formulações de funções que não atendiam à exigência de correspondência em relação a totalidades reais, ou melhor, formulações que, apesar de aparentemente perfeitas, não representavam *ipso facto* conjuntos ou classes. Os antirrealistas, por sua vez, indicavam algum tipo de imprecisão na formulação de sentenças ou na própria concepção de totalidades com as quais opera a matemática. Mas um ponto pacífico aceito por autores de ambas as orientações é que, desde o surgimento desses paradoxos, parece ter ficado claro que eles estavam diretamente relacionados a definições circulares, aplicadas ou não aos números transfinitos (por exemplo, no paradoxo de Russell, em que se procura definir uma classe a partir dela mesma, ou como nos paradoxos de Cantor e Burali-Forti, por tratarem respectivamente da cardinalidade e do número ordinal de conjuntos transfinitos definidos de forma circular). Logo, após um momento de maturação caracterizado pela apresentação de alternativas preliminares para a superação dos paradoxos – que muitas vezes foram superficiais e incompletas, e não soaram como absolutamente suficientes – surge uma ampla discussão entre os matemáticos envolvidos com o tema, que acaba por lapidar e aprimorar a compreensão do problema e viabilizar soluções que, de fato, fossem pertinentes e eficazes.

Duas atitudes sintetizam as alternativas suscitadas para a resolução dessa questão. A primeira postura adotada é a aposta na possibilidade de implementar a formalização da matemática, de modo a garantir que a teoria evite os paradoxos, fortalecendo e adequando sua base axiomática, mas sem abandoná-la, como fazem Zermelo e Russell; no caso de Russell, a apresentação da teoria dos tipos lógicos abre caminhos para evitar a circularidade das definições, por intermédio do estabelecimento de uma hierarquia dos tipos lógicos a partir dos quais cada função deve ser classificada. Russell deixa claro que os paradoxos relacionados aos ordinais e cardinais transfinitos não são problemas intrínsecos a esses números ou aos conjuntos que representam, mas à cor-

deve haver o menor. Então, '*the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables*' [em português 'o menor inteiro que não pode ser nomeado em menos de dezenove sílabas'] deve denotar um inteiro finito; de fato, denota 111.777. Mas '*the least integer not nameble in fewer than nineteen syllables*' é um nome que consiste de dezoito sílabas; dessa forma, o menor inteiro que não pode ser nomeado em menos de dezenove sílabas [em inglês] pode ser definido em dezoito sílabas [em inglês], o que é uma contradição" (Russell, 1986 [1908], p. 201).

17 Kurt Grelling formula em 1908 um paradoxo que envolve as noções de palavra autológica e heterológica: "Um adjetivo, isto é, uma palavra que denote um atributo, chama-se autológico ou heterológico conforme possua ou não o atributo que denota. Entre os adjetivos heterológicos podemos incluir todos aqueles que denotam atributos que as palavras não podem possuir. Assim, 'polissílabo' e 'português' são autológicos; 'francês' e 'racional' são heterológicos. Aparentemente, a definição de adjetivo heterológico é perfeitamente normal e inofensiva. Porém, verifica-se que o adjetivo 'heterológico' é heterológico se, e somente se, não for heterológico" (da Costa, 1980, p. 71).

reta formulação das proposições que os definem, pois é fundamental que a elaboração dessas sentenças observe os limites daquilo que ele denomina como seus respectivos *campos de significação*.[18] As limitações de cada um dos campos de significação devem funcionar, portanto, como o fundamento de uma regra que pretensamente garanta a elaboração de sentenças bem formuladas, ou seja, não contraditórias e que viabilizem a descrição dos elementos a que se referem (Russell, 1986 [1908], p. 219-20).

Zermelo, por sua vez, procurou aperfeiçoar o trabalho de Cantor apresentando novos axiomas que propiciassem uma formulação mais rígida para a teoria dos conjuntos, procurando, com isso, torná-la menos problemática. A propositura do axioma da escolha (cf. nota 7 da tradução, p. 426), de 1904, é um exemplo dessa tentativa de fortalecer a teoria dos conjuntos que é tão notória quanto polêmica, e prenuncia a apresentação de uma base axiomática mais forte que a cantoriana, introduzida com o artigo "Investigação acerca dos fundamentos da teoria dos conjuntos" ("Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre"), de 1907. Dessa maneira, pode-se considerar que há uma mesma inspiração que norteia o trabalho de Russell e o de Zermelo, qual seja, superar as dificuldades inerentes à teoria dos conjuntos por meio de sua melhoria, apesar das soluções diferentes que eles apresentam para o problema.

A outra possibilidade a ser considerada é articulada principalmente por Poincaré e Brouwer, ao declararem a inviabilidade de uma exacerbação formal da matemática que a torne completamente dissociada da intuição, identificando nessa inadequação a origem dos paradoxos. Como apresentado na seção anterior, a prova formal é vista por Poincaré como o emprego de um recurso fundamental, mas cego, incapaz de conduzir o processo de criação matemático para onde importa que ele vá. A matemática não pode ser apenas um caminhar ao léu, ainda que com passos seguros. Assim, os paradoxos inerentes aos números transfinitos são compreendidos como o resultado da expressão de construções que a linguagem mal empregada propicia com o auxílio do instrumental lógico, mas em que não há, nem pode haver, uma espécie de "base de referência" oferecida pela intuição. O pensamento de Brouwer é ainda mais incisivo, ao filiar-se a um ponto de vista de construtibilidade estrita, em que a lógica desempenha um papel que transita entre o secundário e o dispensável.[19]

18 De acordo com a acepção introduzida por Russell, o campo de significação consiste no conjunto de todos os argumentos para os quais a função é verdadeira, bem como aqueles para os quais a função é falsa, mas sempre significante: "suponhamos: 'todos os termos que têm a propriedade f têm a propriedade y.' Isso quer dizer (...) que '*fx* sempre implica *yx*'. Desde que o campo de significação de *fx* seja o mesmo de *yx*, a asserção é significante. (...) Mas às vezes acontece que aquilo que parece verbalmente uma função, na verdade, são muitas funções análogas com diferentes campos de significação" (Russell, 1986 [1908], p. 213).

19 A partir da concepção intuicionista, Brouwer declaradamente subverte a tese logicista, ao anunciar que não é a matemática que se alicerça em princípios lógicos, mas justamente o contrário. Segundo ele, a lógica remete à matemática, por tratar-se apenas de um caso particular dela. "Enquanto a matemática é independente da lógica, a lógica

Dessa forma, a tentativa da solução imposta por um problema inerente aos fundamentos da matemática remete ao debate acerca de como efetivamente construí-la, o que se dá pela consideração dos critérios empregados para a compreensão da natureza dos números, da aceitabilidade de determinados tipos de provas matemáticas, do caráter atribuído a definições e postulados, entre outros aspectos. Esse é o universo de discurso no qual se insere o pensamento matemático de Poincaré a partir de 1905.

4 A filosofia da matemática de Poincaré após 1905

Em três artigos denominados "As matemáticas e a lógica" ("Les mathématiques et la logique", cf. Poincaré, 1986 [1905], 1986 [1906a], 1986 [1906b]), publicados entre novembro de 1905 e maio de 1906, Poincaré reitera uma perspectiva muito semelhante àquela defendida em *A ciência e a hipótese*, mas já fortemente influenciada por dois fatores: o próprio advento da crise na teoria dos conjuntos e as críticas de Bertrand Russell acerca da maneira como ele concebe o princípio de indução completa. Os textos têm o intuito de apontar os problemas decorrentes do logicismo defendido por Couturat e Russell, assim como os da concepção formalista de David Hilbert apresentada em agosto de 1904, por ocasião do Terceiro Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Heidelberg (Hilbert, 1967 [1904]). Os argumentos de Poincaré no seu primeiro tratamento do problema apontam principalmente a incorreção no que tange à compreensão do princípio de indução completa, que os logicistas tomam como uma definição disfarçada do número inteiro, e uma falibilidade essencial atinente às definições circulares, as quais até novembro de 1905 Poincaré denomina genericamente como "petições de princípio".[20]

Nesse sentido, o diagnóstico proposto por Poincaré é construído a partir de uma série de teses que, combinadas, levam à rejeição do logicismo, do formalismo e da matemática cantoriana do transfinito. Em resumo, os argumentos são os seguintes:

depende da matemática: primeiramente, o pensamento lógico intuitivo é aquele tipo especial de pensamento matemático que resta se, uma vez consideradas as estruturas matemáticas, alguém se restringe a relações de todo e parte. (...) Pessoas tentam, por meios de sons e símbolos, originar em outras pessoas cópias de construções e raciocínios matemáticos que fizeram por si mesmos; pelos mesmos meios, eles tentam auxiliar sua própria memória. Nesse sentido, a *linguagem matemática* realiza-se, e, como seu caso particular, *a linguagem do raciocínio lógico*" (Brouwer, 1907, p. 73).

20 "Eu sempre experimentei, ao ler os escritos consagrados a esse problema [a definição dos números], um profundo sentimento de mal-estar; eu esperava sempre deparar com uma petição de princípio, e quando eu não a percebia, temia tê-los contemplado mal. Isso porque é impossível oferecer uma definição sem enunciar uma frase, e é difícil enunciar uma frase sem nela inserir o nome de um número, ou ao menos a palavra "vários", ou mesmo uma palavra no plural. Assim, o terreno é escorregadio, e a cada instante há o risco de cair em uma petição de princípio" (Poincaré, 1986 [1905], p. 20).

• A teoria dos números transfinitos e suas antinomias não tocam o âmbito da verdadeira matemática, ou seja, tudo aquilo que a disciplina pode produzir de relevante e de útil. A iniciativa de Cantor no sentido de criar uma matemática do infinito, bem como uma injustificável pretensão dos logicistas de transformar toda a matemática em lógica, suscitaram o aparecimento dos paradoxos da teoria dos conjuntos. Logo, segundo Poincaré, o que importa na verdade à matemática não chega a ser problematizado pelas dificuldades contra as quais se debatem os logicistas.[21]

• A falsa impressão de que a lógica pode desvencilhar-se da intuição resulta da errônea ideia que consiste em tomar o princípio de indução completa como simplesmente a definição disfarçada do número inteiro. A falácia desse argumento está centrada no ato de ignorar o caráter sintético e *a priori* desse princípio, que não pode ser demonstrado analiticamente, assim como não é passível de verificação empírica.[22]

• A incompreensão da natureza do princípio de indução completa é um caso particular de um engano mais geral. Os problemas lógicos relativos aos fundamentos da matemática do transfinito decorrem de uma imprecisão do emprego de suas definições, cuja importância, segundo o pensamento de Poincaré, exprime-se no fato de que a própria existência dos objetos matemáticos é determinada pela ausência de contradição em suas respectivas definições, como já indicado.

• A resolução para o problema dos paradoxos da matemática do transfinito está na superação dos círculos viciosos envolvidos na formulação das antinomias. Em novembro de 1905, como já foi dito, Poincaré refere-se a *petições de princípio* como a origem das antinomias. Em janeiro de 1906, ele já abandona essa expressão vaga em favor da terminologia empregada por Russell, ao denominar as definições circulares como *não predicativas*.

21 "As verdadeiras matemáticas, aquelas que servem para alguma coisa, poderão continuar a desenvolver-se de acordo com seus próprios princípios, sem se preocupar com as tempestades furiosas para além delas, e elas continuarão passo a passo em suas habituais vitórias, que são definitivas e que elas jamais abandonarão." (Poincaré, 1986 [1906b], p. 93).

22 "Essa regra [o princípio de indução completa] não pode provir da experiência; a experiência poderia nos ensinar que a regra é válida para os dez ou para os cem primeiros números, por exemplo; ela não pode alcançar a série infinita dos números, mas apenas uma porção mais ou menos longa, mas sempre limitada dessa série. (...) Essa regra, inacessível à demonstração analítica e à experiência, é o verdadeiro tipo de juízo sintético a priori." (Poincaré, 1968 [1902], p. 41).

Todavia, o conceito de predicatividade encontra no pensamento de Poincaré um delineamento diferente daquele proposto por Russell: enquanto este compreende a predicatividade como uma relação que deve existir entre a formulação de funções ou relações e as classes às quais elas correspondem, o matemático francês concebe a noção de predicatividade em 1906 a partir da ausência de qualquer circularidade inerente à definição dos postulados (Poincaré, 1986 [1906b], p. 94).

• A definição da noção de predicatividade como apartada da suposta correspondência a classes retrata, ainda que implicitamente, a postura antirrealista de Poincaré. Para ele, é exatamente a crença subjacente na existência de um infinito dado em ato que suporta as definições circulares. Apenas uma perspectiva realista, como a professada por Russell, atribui o lastro necessário para a matemática do infinito, quando permite pensar os cardinais transfinitos como representações de agregados infinitos dados em realidade,[23] um posicionamento evidentemente inaceitável do ponto de vista do antirrealismo defendido por Poincaré, para quem o contínuo matemático, por exemplo, não é mais que um "sistema particular de símbolos" (Poincaré, 1968 [1902], p. 55).

Diante desse quadro, a solução das antinomias proposta por Richard e corroborada por Poincaré, por sua própria natureza, parece uma tentativa capaz de resolver tanto os paradoxos lógicos quanto os paradoxos semânticos: segundo ele, as antinomias são geradas pelo emprego de definições não predicativas, que envolvem círculos viciosos (Poincaré, 1986 [1906b], p. 93). Nesse sentido, o autor também adere a um diagnóstico que não se restringe tão somente aos paradoxos lógico-matemáticos, visto que as questões semânticas envolvem uma característica autorreferencial igualmente problemática, ainda que apartadas de qualquer relação com a noção de infinito.

Evitar os círculos viciosos nas definições torna-se, desse modo, a regra de ouro para evitar os paradoxos, segundo o matemático francês. Fora dela, corre-se o risco de permitir que a contradição se instale em um dado sistema de postulados. Ao dissecar esse aspecto do pensamento de Poincaré, Gerhard Heinzmann aponta para uma

23 "A crença no infinito atual é essencial na logística russelliana. É justamente isso que a distingue da logística hilbertiana. Hilbert coloca-se do ponto de vista da extensão, precisamente com o intuito de evitar as antinomias cantorianas; Russell coloca-se do ponto de vista da compreensão. Consequentemente, para ele o gênero é anterior à espécie, e o *summum genus* é anterior a tudo. Isso não traria inconvenientes se o *summum genus* fosse finito; mas se ele é infinito, é preciso colocar o infinito antes do finito, ou seja, enxergar o infinito como atual." (Poincaré, 1986 [1906b], p. 104).

dupla função dessa primeira elaboração do conceito de impredicatividade enquanto círculo vicioso.

> Todas as variantes do primeiro conceito [de predicatividade] de Poincaré têm em comum a proibição da quantificação em um domínio cujos elementos não podem ser previamente indicados em sua totalidade, seja porque eles contêm o *definiendum*, seja porque a estrutura incerta do domínio (sua infinitude) não evita que o *definiendum* seja utilizado na definição de ao menos um dos elementos (Heinzmann, 1985, p. 67).

Em resumo, Poincaré sustenta em 1906 que o círculo vicioso pode ser concebido (1) como consequência de uma aplicação do termo a ser definido em sua própria definição (por exemplo, "as classes que não fazem partes de si mesmas"), ou (2) como uma espécie de subproduto da imprecisão inerente ao emprego da noção de infinito atual, que torna possível a inserção do termo definido, em elementos envolvidos na própria definição (por exemplo, no "cardinal de todos os cardinais"). No primeiro caso – o da aplicação do conceito definido em sua própria definição – tal circularidade encontra-se até mesmo nas noções típicas da matemática, quando definimos um número ou um conjunto a partir de outro conjunto que já o contém. No segundo caso – o da aceitação tácita do infinito em ato como uma referência à elaboração dos enunciados e definições – podemos observar que, do ponto de vista lógico, a dificuldade está centrada na aplicação indevida de um quantificador universal sobre um domínio infinito (cf. Heinzmann, 1985, p. 35).

Esse conjunto de ideias determina a perspectiva do autor em sua polêmica contra os logicistas. O fato de o mesmo texto ter sido reproduzido sem alterações significativas como capítulos de sua obra *Ciência e método* (*Science et méthode*), de 1908, pode certamente sugerir que o matemático sustentava esse mesmo posicionamento até esse momento.[24]

A reivindicação de Poincaré, segundo a qual todas as antinomias derivam da crença em um infinito atual, seria objetada por Russell, que apesar de realista, diagnosticava o problema intrínseco à formulação dos paradoxos como sendo essencialmente linguístico e lógico (Russell, 1986 [1906], p. 127), e não necessariamente como a decorrência de um ponto de vista correspondencial entre realidades e os postulados que elas veiculam. Essa é apenas uma das objeções levantadas contra as ideias expostas em "As matemáticas e a lógica". Russell considera ainda que o diagnóstico de Poincaré,

24 A exceção que merece ser citada é um pequeno trecho inserido em *Ciência e método*, onde o autor refere-se pela primeira vez à importância das classificações imutáveis como maneiras de evitar as antinomias (cf. Poincaré, 1908, p. 212), justamente o argumento que seria lapidado e aprofundado a partir de "Sobre os números transfinitos".

centrado na noção de círculo vicioso, é correto, mas que ele não resolve a questão satisfatoriamente, ao não indicar efetivamente *como* evitar esses círculos viciosos (Russell, 1986 [1906], p. 121). De forma análoga, Giuseppe Peano critica a solução de Poincaré por conta da ambiguidade que propicia: se as interpretações relativas às definições empregadas por Poincaré forem muito amplas, não evitam as antinomias e se, por outro lado, forem muito restritas, significam uma amputação considerável à matemática (Peano, 1986 [1906], p. 117-8). Essas objeções fomentam em parte a reformulação do conceito de predicatividade apresentado em "Sobre os números transfinitos", pois no corpo do texto, Poincaré apresenta uma nova articulação que tem a função de responder às demandas impostas pelas objeções de Russell e de Peano, procurando estabelecer as bases de uma solução mais precisa acerca de como evitar os paradoxos.

5 A conferência sobre números transfinitos

Ao iniciar sua quinta conferência em Göttingen, Poincaré estipula um princípio que norteará os argumentos apresentados em sua preleção: todo objeto ou regra matemática que podemos ter a pretensão de trazer à baila deve ser definido obrigatoriamente em um número finito de palavras. Logo, atrela-se a capacidade de conceber os entes matemáticos à condição de defini-los precisamente, argumento que deve ser também estendido às leis matemáticas. Essa exigência adquire um sentido restritivo e normativo, sobretudo quando direcionada aos argumentos relativos à matemática do transfinito.

Sob esse prisma, a prova de Richard e o contra-argumento de Schoenflies em relação a ela são brevemente analisados no segundo parágrafo do artigo. A "prova de Richard" a que Poincaré se refere consiste, na verdade, da primeira parte do paradoxo de Richard que, dada sua importância no contexto aqui apresentado, será transcrito integralmente. Os números [1], [2] e [3] representam, respectivamente, o que aqui denominaremos, a título de simplificação, como "a prova de Richard", "o paradoxo de Richard" e "a explicação do paradoxo de Richard":

> [1] Eu definirei uma certa classe de números, que denomino classe E, através das considerações que se seguem.
>
> Vamos escrever todas as permutações possíveis das vinte e seis letras do alfabeto francês tomadas duas letras por vez, colocando essas permutações em ordem alfabética; então, após elas, todas as permutações tomadas três letras por vez, ordenando-as alfabeticamente; em seguida, todas as permutações de quatro letras por vez, também ordenadas, e assim por diante. Essas permutações podem

> conter a mesma letra repetida várias vezes; elas são permutações com repetição de letras.
>
> Para qualquer inteiro *p*, alguma permutação das vinte e seis letras que abrange *p* em algum momento estará na tabela; e, desde que tudo que pode ser escrito com um número finito de palavras é uma permutação de letras, tudo o que pode ser escrito estará contido na tabela construída conforme indicado.
>
> Como a definição de um número é feita com palavras, e essas palavras são formadas por letras, algumas dessas permutações serão definições de números. Risquemos de nossa tabela todas as permutações que não são definições de números.
>
> Seja u_1 o primeiro número definido conforme a regra acima, u_2 o segundo, u_3 o terceiro, e assim por diante.
>
> Teremos assim, escritos em ordem definida, todos os números que são definidos por uma quantidade finita de palavras. Destarte, os números que podem ser definidos por um número finito de palavras formam um conjunto infinito enumerável.
>
> [2] Agora, apresentemos a contradição. Nós podemos formar um número não pertencente a esse conjunto. 'Seja *p* o dígito da n-ésima casa decimal do n-ésimo número do conjunto *E*. Vamos formar um número tendo zero como sua parte integral e, em seu n-ésimo lugar decimal, *p*+1 se *p* não é 8 ou 9, e 1 nos outros casos.' Esse número *N* não pertence ao conjunto *E*. Se ele fosse o n-ésimo número do conjunto *E*, o dígito constante de seu n-ésimo lugar decimal seria o mesmo que o do n-ésimo lugar decimal desse número, o que não é o caso.
>
> Eu denomino *G* a coleção de letras entre aspas.
>
> O número *N* é definido pelas palavras da coleção *G*, ou seja, por um número finito de palavras; portanto, deveria pertencer ao conjunto *E*. Mas esse não é o caso. Eis a contradição.
>
> [3] Vejamos que essa contradição é apenas aparente. Voltamos às permutações. A coleção *G* de letras é uma dessas permutações; ela aparecerá na minha tabela. Mas, no lugar que ela ocupa, ela não tem sentido. Ela menciona o conjunto *E*, que ainda não havia sido definido. Então, nós a riscamos da tabela. A coleção de letras *G* apenas tem sentido se o conjunto *E* está totalmente definido, e isso não ocorre a não ser com uma quantidade infinita de palavras. Logo, não há contradição. (Richard, 1967, p. 143).

Assim, enquanto a prova de Richard estabelece como enumerável o conjunto dos inteiros que podem ser definidos em número finito de palavras, Schoenflies argumenta que existem definições particulares que, sozinhas, introduzem nesse conjunto uma quantidade infinita de objetos (como a de função constante, por exemplo), de forma que a inserção desse tipo de definições como um dos elementos da prova de Richard inviabilizaria a expressão dessa totalidade por meio do primeiro dos cardinais transfinitos, $\aleph_0$.

Tomando por base a teoria dos números transfinitos conforme concebida por Cantor, o argumento de Schoenflies apenas ensejaria uma contradição caso se considerasse que a quantidade de funções constantes introduzidas por esse nome genérico é não apenas infinita, mas também inumerável. Poincaré, todavia, não chega a expressar essa ressalva textualmente, pois sua objeção está lastreada em outro princípio. Justamente por definir o *conjunto* das funções constantes, e não algum objeto em particular, o exemplo não é válido aos olhos de Poincaré. Segundo o matemático francês, o engano de Schoenflies está na aceitação da definição de um conjunto como um objeto pertencente à "totalidade das definições contáveis".

A rigor, a prova de Richard tem por escopo definir um *rol* de entidades essencialmente diferentes daquelas trazidas à baila pelo contra-argumento de Schoenflies. Na realidade, Richard e Schoenflies estão tratando de entidades teóricas distintas e, por isso, o contra-argumento não é considerado por Poincaré como pertinente. Mas note-se que a não aceitação do argumento decorre da tentativa de tornar uma totalidade que não pode ser expressa em um número finito de palavras (como a enumeração de cada elemento que compõe o "conjunto das funções constantes") como um elemento da totalidade das definições contáveis, conforme suscitado pela prova de Richard. O posicionamento de Poincaré segue, portanto, a regra imposta no primeiro parágrafo do texto, restringindo a prova ao universo do que é efetivamente passível de uma definição precisa. Logo, ele sequer necessita da introdução da distinção entre infinitude numerável e inumerável para pronunciar-se contra o argumento de Schoenflies.

Destarte, tomando por ponto pacífico o fato de que tratamos de definições de objetos individuais (e, consequentemente, objetos definíveis, conforme a nomenclatura empregada no primeiro parágrafo de "Sobre os números transfinitos"), a partir do terceiro parágrafo, Poincaré lança mão de um argumento articulado por ele, com o intuito de esclarecer a aparente contradição entre uma prova que Cantor produziu, e que demonstra a impossibilidade de enumerar o contínuo – a famosa prova da diagonal de Cantor – e, por outro lado, a prova de Richard, que, como já indicamos, mostra que a totalidade dos inteiros definíveis é enumerável. De fato, ao contrário do que assevera Poincaré, não há qualquer contradição entre uma e outra, pois o matemático francês parte de uma falácia: ao asseverar que "como se sabe, Cantor provou que o contínuo não é contável, e isso contradiz a prova de Richard" (Poincaré, 1986 [1909a], p. 231), não há realmente que se falar em uma contradição em relação à prova de Richard, pois ela remete a um conjunto finito enumerável, e não, propriamente, ao contínuo (por definição, um infinito inumerável).

Diante dessa ressalva, torna-se muito simples acompanhar a explanação de Poincaré, e desbaratar essa pseudocontradição. O argumento de Poincaré (denominemo-lo "*argumento da divisão dos segmentos*") envolve, em um primeiro momento, a articulação de um exemplo fundado em um método de divisão de segmentos de reta: dado um segmento *AB* e uma regra através da qual cada ponto do segmento seja relacionado a um número inteiro, divide-se o segmento de reta por dois pontos *A1* e *A2*, gerando assim três subsegmentos, denominados como de primeiro grau; outra divisão desse mesmo tipo aplicada aos subsegmentos de primeiro grau leva aos subsegmentos de segundo grau; aplicada aos de segundo grau, leva aos de terceiro grau, e assim sucessivamente. Os subsegmentos têm então seu comprimento diminuído a cada divisão. Cada ponto enumerado pertencerá assim a, no máximo, dois subsegmentos do mesmo grau (caso o ponto ao qual se associe o número inteiro seja o ponto de divisão entre os segmentos).

Desse modo, sempre haverá um subsegmento ao qual o ponto indicado pelo número inteiro não pertence. A repetição contínua desse processo indica duas propriedades: (1) cada um dos segmentos obtidos por graus posteriores está contido em todos os graus anteriores. Há, portanto, ao menos um ponto compartilhado por subsegmentos de todos os graus; e (2), há um segmento de *n-ésimo* grau que não contém nenhum dos pontos 1 até *n*-1. Isso significa que esse subsegmento é composto de pontos que não podem ser associados a qualquer número do conjunto dos inteiros.

Desse modo, o autor procura ressaltar a importância das regras de geração para a construção das séries, de suas ordenações, e de como elas podem ou não levar a contradições. Com o intuito de sedimentar sua perspectiva, ele então mescla aspectos de seu argumento de divisão de segmentos a um raciocínio análogo ao da prova de Richard, mostrando que, a cada passo dado ao relacionar o conjunto dos inteiros aos pontos de uma reta mediante determinada regra de relação, damos origem a um novo conjunto (reelaborado a partir da divisão do subsegmento de grau anterior), que reclama, por sua vez, a inserção de uma nova regra. A imposição dessa nova regra direciona também a inserção de novos elementos, e o mesmo procedimento é requerido uma segunda vez. Evidentemente, essa recursão deve repetir-se indefinidamente, se tivermos a pretensão de uma enumeração completa dos pontos do contínuo. O conceito daquilo que é ou não definível submete-se, portanto, à regra de ordenação que determina a correlação entre os elementos de ambos os conjuntos (isto é, o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos pontos de um segmento de reta).

Assim, o argumento de Poincaré deixa claro que a alegada aproximação entre a prova de Cantor e a prova de Richard não é contraditória, pois elas abordam aspectos distintos da das séries numéricas, trazendo à tona "lições" diferentes: "a prova de Richard ensina que mesmo onde eu não aplico o procedimento, sempre existe uma regra, enquanto Cantor prova que o procedimento pode ser continuado arbitrariamente sem limite" (Poincaré, 1986 [1909a], p. 232-3). A exemplo da aparente contradição apontada entre a prova de Richard e o contra-argumento de Schoenflies, aqui também as provas de Cantor e Richard levam a consequências que não são mutuamente excludentes, motivo pelo qual não é possível sustentar, de fato, uma contradição entre elas.

É preciso salientar que Poincaré parece aproximar as provas de Cantor e Richard mesmo empregando um subterfúgio incorreto apenas para, em seguida, ressaltar sua distância, algo que, à primeira vista, soa como desnecessário. Afinal, como já indicamos, a prova de Richard diz respeito à possibilidade de contar os objetos que podem ser definidos, enquanto a prova de Cantor evidencia a não enumerabilidade do contínuo. Note-se, portanto que as provas de Richard e Cantor tratam de grandezas cujos cardinais transfinitos não são os mesmos: $\aleph_0$ e $\aleph_1$.

Contudo, o posicionamento de Poincaré é sugestivo não apenas pelo que ele diz, mas também pelo que deixa de dizer. Se as provas remetem a grandezas distintas (uma delas enumerável, a outra inumerável), pode-se argumentar que a segunda consequência da regra de ordenação estabelecida pelo argumento de divisão dos segmentos traz à tona exatamente essa característica: aplicada ao contínuo, uma regra de enumeração qualquer nunca esgotará toda a série dos pontos de uma reta; se empregarmos os termos da matemática cantoriana do infinito, conclui-se que a correspondência biunívoca entre ordens distintas de conjuntos transfinitos não pode ser realizada e, por isso, essas grandezas não podem ser expressas por intermédio do mesmo cardinal transfinito.

Mas essa construção teórica está longe de parecer dispensável a Poincaré, pois ela desempenha uma finalidade peculiar: indicar a natureza do mecanismo que existe no processo de construção das provas, e de como elas podem conduzir aos paradoxos. No argumento da divisão dos segmentos, a cada nova definição do conjunto de elementos há uma reformulação da regra necessária para estabelecer sua relação. Essa regra altera a classificação e a ordenação das relações anteriores. A mesma característica pode ser vislumbrada no paradoxo de Richard: a regra de formação do número N, representada por G, é, simplesmente, uma regra distinta da empregada para a formação do conjunto E; esse *status quo* altera, por conseguinte, tanto o conjunto dos enunciados que definem o conjunto E (pela enumeração de seus elementos) quanto o conjunto dos enunciados não pertencentes a E, e isso tudo devido à inserção de uma regra *ad hoc*, o que é elucidado na explicação do paradoxo de Richard.

Esse é o cerne do problema a ser atacado com a reformulação do conceito de predicatividade, conforme introduzido em "Sobre os números transfinitos". Pretende-se resolver o problema suscitado no parágrafo anterior por meio da elucidação da relação que há entre a ordenação de agregados e a classificação que suporta essa ordenação, estabelecendo critérios para sua adequada consecução. Como vimos, desde 1906 a circularidade dos termos definidos já era reconhecida por Poincaré como a pedra de toque para diagnosticar as formulações não predicativas na matemática. A novidade do texto de 1909 encontra-se na exigência de pensar o conceito de predicatividade como necessariamente relacionado às regras de ordenação e de classificação que se mostram ou não como presentes na definição dos entes matemáticos. Os argumentos são estruturados da seguinte maneira:

- Poincaré enxerga a teoria dos conjuntos de modo análogo à sua percepção acerca da lógica: ambas constituem um conjunto de regras para a classificação de elementos.[25]

- Todo tipo de ordenação das séries pressupõe, assim, uma classificação que a suporte, como a oferecida pela teoria dos conjuntos. A importância dessa classificação reside no fato de que a ordenação de uma série só pode ser considerada predicativa se a classificação que lhe é subjacente também o for.

- As classificações são predicativas se a introdução de novos elementos apenas estende, mas não altera a classificação realizada até aquele momento". Esse é o critério de predicatividade introduzido em 1909.

Destarte, esse novo critério para mensurar a predicatividade das asserções e, consequentemente, estabelecer o "corte" entre o que é e o que não é legítimo na matemática, está diretamente relacionado ao modo como empregamos as definições e ordenações por intermédio das classificações que lhes são subjacentes. A inserção de novos objetos em uma série, na medida em que altera a ordenação preestabelecida, é vista por Poincaré como o problema do qual o aparecimento das antinomias é tão somente uma consequência esperada. Em termos lógicos, a segunda formulação do princípio de predicatividade proposta por Poincaré soa como um recuo em relação à primeira formulação, quando desloca seu foco do conceito de infinito para a forma de classificá-lo:

> [A segunda formulação do conceito de predicatividade] indica as condições restritivas à quantificação sem que haja uma restrição explícita do domínio: para que uma classificação seja predicativa segundo essa perspectiva, basta que a

25 Essa é uma característica que apareceria textualmente mais tarde, em "A lógica do infinito": "A lógica formal não é outra coisa que o estudo de propriedades comuns a toda classificação; ela nos ensina que dois soldados que fazem parte do mesmo regimento pertencem, por isso mesmo, à mesma brigada e, consequentemente, à mesma divisão, e é a isso que se reduz toda a teoria do silogismo." (Poincaré, 1986 [1909b], p. 235).

> quantificação relativa a um domínio indefinido – do qual depende o *definiendum* – não altere a classificação de seus subconjuntos previamente determinados (Heinzmann, 1985, p. 72-3).

Desse modo, as definições aceitáveis na matemática devem obrigatoriamente primar por classificações predicativas concebidas sob essa nova ótica. Fora delas, há o risco claro de incorrer em inconsistências como as que geraram os paradoxos da teoria dos conjuntos. O paradoxo de Richard, por exemplo, lança mão de definições não predicativas, pois fomenta a inserção de novas regras, que a cada aplicação alteram a classificação realizada anteriormente. O mesmo raciocínio pretensamente pode, *mutatis mutandis*, ser aplicado tanto aos outros paradoxos semânticos quanto aos paradoxos lógicos.

A objeção introduzida a partir do sexto parágrafo do texto e endereçada ao argumento de Zermelo é importante, pois funciona também como uma resposta às críticas de Russell e de Peano citadas na seção 5 do presente artigo. Dentre as classificações não predicativas, algumas delas podem ser eliminadas por meio de uma reformulação de seus termos. Sempre que essa estratégia for possível, a aceitabilidade da prova é garantida; caso contrário, a classificação deve ser descartada, pois é infrutífera, enganosa e não corresponde ao mínimo do rigor exigido pela disciplina. Cabe ao matemático demonstrar a perspicácia e a criatividade que lhe permitirão substituir as definições impredicativas por definições predicativas; com isso, o autor evidentemente propicia à regra de classificação predicativa um *status* de norma que tem alcance sobre todas as construções matemáticas e que está, evidentemente, muito mais vinculada ao exercício da intuição que direciona a criação matemática que aos seus componentes formais.

Partindo dessa validade geral atribuída à noção de predicatividade, essas são também as premissas de Poincaré para a breve análise que faz nos últimos parágrafos do texto em relação ao teorema de Bernstein, ao contínuo matemático e ao axioma da escolha. Nos dois primeiros casos, Poincaré aponta a existência de regras de classificação subjacentes, sendo que, especificamente para a consideração do contínuo matemático, a pretensão de aplicação de uma regra de ordenação predicativa para os pontos do espaço simplesmente não pode ser asseverada de modo finito, consistindo, portanto, em um esforço inócuo, um ponto de vista que obviamente inviabiliza a validade do axioma da escolha, considerado sob a égide das regras relativas às condições de definição e expressão introduzidas no início do texto.

Nos últimos parágrafos do texto encontra-se ainda a chave para a compreensão da aparente falácia de Poincaré em relação à pseudocontradição entre o argumento diagonal de Cantor e a prova de Richard. Poincaré afirma textualmente que

> no que concerne ao segundo cardinal transfinito $\aleph_1$, não estou inteiramente convencido de que ele exista. Nós chegamos a ele através da consideração da totalidade dos números ordinais de potência $\aleph_0$; é evidente que esse conjunto deve possuir uma potência superior. Pergunta-se, contudo, se ele é fechado, ou se nós podemos falar de sua potência sem incorrer em contradição. Um infinito atual, de qualquer maneira, não existe. (Poincaré, 1986 [1909a], p. 234).

Logo, aquilo que parecia em um primeiro momento um lapso por parte de Poincaré (ao identificar erroneamente grandezas de magnitude $\aleph_0$ e $\aleph_1$) mostra-se, de fato, a consequência de um posicionamento deliberado, que sustenta a negação de parte considerável da matemática do transfinito e do infinito atual. Nesse contexto, toda a argumentação desenvolvida acerca da aparente contradição entre as provas de Cantor e Richard deve ser compreendida sob tal inspiração.

Conclusão

A mudança perpetrada no conceito de predicatividade não significa um abandono da definição conforme concebida nos textos precedentes, mas um acréscimo. Ela também não deixa de ser uma assimilação das ideias de Russell conforme expostas em 1905 e 1906, mas a elaboração de um recurso teórico que vai além da simples apropriação de sua nomenclatura. O infinito atual, interpretado de maneira superficial e mesmo nominal por Poincaré nas oportunidades anteriores, ganha um delineamento mais preciso nesta segunda versão, quando o autor relaciona a crença no infinito atual ao procedimento problemático empregado na teoria cantoriana, em seus variados e diferentes processos de geração.

A reformulação da regra de predicatividade apresentada a partir de 1909 pode ser então considerada como uma contribuição importante e original, que permite uma melhor compreensão tanto dos paradoxos lógicos quanto dos paradoxos semânticos relacionados à teoria dos conjuntos. Cabe ainda ressaltar que, diante desse quadro, Poincaré afasta-se tanto do construtivismo estrito que inspira os trabalhos de Brouwer (1983, p. 85) quanto de uma perspectiva realista, que poderia sugerir a existência de objetos matemáticos que estão para além de nossa capacidade de concebê-los, a exemplo do que assevera Hadamard (*apud* Borel, 1904, p. 156). Para Poincaré, a definição dos elementos é *toda* a realidade à qual a matemática deve remeter e, por isso, tudo que à matemática do transfinito importa deve ser resolvido nos limites da linguagem que a veicula. Dessa condição deriva a importância da regra da ausência de contradição como critério de existência dos entes matemáticos, enquanto o esteio necessário ao poder criativo do intelecto.

Em suma, podemos observar que o texto ora traduzido representa um momento lapidar do processo de maturação do conceito de predicatividade segundo Henri Poincaré, que envolve um redirecionamento do pensamento do matemático francês para uma perspectiva que fomenta uma espécie *sui generis* de construtivismo, fortemente lastreado na linguagem com a qual se articula o sistema de símbolos característico às formulações matemáticas, tendência essa que se consolidaria em seus escritos daí por diante, até o advento de sua morte, cerca de três anos mais tarde. Além disso, o texto torna evidente uma compreensão mais lúcida e madura em relação às exigências para o delineamento dos fundamentos da matemática, mas sem que ocorra o abandono do núcleo de sua concepção epistemológica, o que consiste evidentemente em um ganho, se tomadas por base as teses suscitadas pelo autor entre 1893 e 1906.

Jacintho Del Vecchio Junior
Doutor em filosofia pela Universidade de São Paulo,
Pesquisador associado ao *Laboratoire d'Histoire et de Philosophie des Sciences,*
Archives Henri Poincaré, França.
Professor da Academia de Polícia Militar do Barro Branco,
e colaborador da Associação Filosófica *Scientiae Studia*, Brasil.
delvecchio@usp.br

The reformulation of the concept of predicativity according to Poincaré

This article provides an introduction to the translation of the lecture entitled "On transfinite numbers" ("Über transfinite Zahlen"), given by Henri Poincaré at the University of Göttingen on April 27, 1909. Following a short presentation of Poincaré's views on the foundations of arithmetic, it identifies the aspects of the so-called crisis of the foundations of mathematics that are most relevant for understanding his reconstruction of the concept of predicativity, which is intended to be a theoretical resource that may overcome the paradoxes of set theory. In doing so, the article highlights the central role of this text in the process of maturation of Poincaré's views on the foundations of mathematics.

referências bibliográficas

Barot, E. En quoi la crise des fondements des mathématiques est-elle terminée? *Philosophia Scientiae*, 9, p. 23-39, 2005.

Bernays, P. On platonism in mathematics. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Org.). *Philosophy of mathematics: selected readings.* 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983 [1934]. p. 258-71.

Borel, É. *Leçons sur la théorie des functions.* 3. ed. Paris: Gauthier, 1928 [1904].

Brouwer, L. E. J. On the foundations of mathematics. In: ____. *L. E. J. Brouwer collected works.* Amsterdam: North Holland, 1975 [1907]. p. 13-97.

____. Formalism and intuitionism. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Org.). *Philosophy of mathematics: selected readings.* 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983 [1912]. p. 77-89.

Cantor, G. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers.* New York: Dover, 1915.

Cavaillès, J. *Sur la logique et la theorie de la science.* 4. ed. Paris:Vrin, 1987 [1942].

Couturat, L. *Les principes des mathématiques.* Paris: Blanchard, 1980 [1904].

da Costa, N. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica.* São Paulo: Hucitec/Edusp, 1980.

Frege, G. The concept of number. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Org.). *Philosophy of mathematics: selected readings.* 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983 [1884]. p. 130-59.

Heinzmann, G. *Entre intuition et analyse: Poincaré et le concept de prédicativité.* Paris: Blanchard, 1985.

____. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, 1986.

____. Henri Poincaré et sa pensée en philosophie des sciences. In: Charpentier, E. & Ghys, A. (Org.). *L'héritage scientifique de Poincaré.* Paris: Belin, 2006. p. 399-418.

Hilbert, D. On the foundations of logic and arithmetic. In: Van Heijenoort, J. (Org.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931.* Cambridge: Harvard University Press, 1967 [1904]. p. 129-138.

Hobsbawm, E. *A era do capital.* 4. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1988.

Kant, I. *Crítica da razão pura.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1994 [1781].

____. *Prolegômenos a toda a metafísica futura.* 3. ed. Lisboa: Edições 70, 1990 [1783].

Kline, M. *Mathematical thought from ancient to modern times.* New York: Oxford University Press, 1972.

Leibniz, G. Letters to Samuel Clarke. *The philosophical works of Leibnitz.* New Heaven: Tuttle, Morehouse & Taylor, p. 238-86, 1890 [1715-16].

Mooij, J. *La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré.* Paris: Gauthier-Villars, 1966. (Collection de Logique Mathématique.)

Peano, G. Aditione. In: Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, p. 106-20 [143-57], 1986 [1906].

Poincaré, H. *Science et méthode.* Paris: Flammarion, 1920 [1908].

____. *La valeur de la science.* Paris: Flammarion, 1923 [1905].

____. *La science et l'hypothèse.* Paris: Flammarion, 1968 [1902].

____. Les mathématiques et la logique. In: Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, p. 11-41 [815-35], 1986 [1905].

____. Les mathématiques et la logique. In: Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, p. 42-53 [17-34], 1986 [1906a].

____. Les mathématiques et la logique. In: Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, p. 79-104 [294-317], 1986 [1906b].

____. Über transfinite Zahlen. In: Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, p. 231-4 [45-8], 1986 [1909a].

Poincaré, H. La logique de l'infini. In: Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, p. 235-56 [461-82], 1986 [1909b].

_____. La logique de l'infini. In: Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, p. 305-16 [1-11], 1986 [1912].

Richard, J. The principles of mathematics and the problem of sets. In: Van Heijenoort, J. (Org.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931.* Cambridge: Harvard University Press, p. 142-4, 1967 [1905].

Russell, B. On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4, p. 29-53, 1906.

_____. *The principles of mathematics.* 2. ed. New York: W. W. Norton, 1937 [1903].

_____. *A filosofia de Leibniz.* São Paulo: Biblioteca Universitária, 1968 [1958].

_____. Les paradoxes de la logique. Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, p. 121-43 [627-50], 1986 [1906].

_____. Mathematical logic as based on the theory of types. In: Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, p. 200-23 [222-44], 1986 [1908].

Schoenflies, A. Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen. *Acta Mathematica*, 50, p. 1-23, 1927.

Stoll, R. Set theory. In: *Encyclopaedia britannica*. 15. ed., 1993. v. 27, p. 226-32.

Van Heijenoort, J. (Org.). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931.* Cambridge: Harvard University Press, 1967.

Zermelo, E. Proof that every set can be well-ordered. Van Heijenoort, J. (Org.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931.* Cambridge: Harvard University Press, 1967 [1904]. p. 139-41.

_____. Untersuchungen über die Grundlagen der Megenlehre. In: Heinzmann, G. (Org.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano.* Paris: Blanchard, 1986 [1907]. p. 179-99.