scientiæ studia, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 35-74, 2013

Fibras cuánticas para sistemas clásicos: introducción a la cuantificación geométrica

Gabriel Catren

RESUMEN

En este artículo, se introducirá el formalismo de cuantificación canónica denominado "cuantificación geométrica". Dado que dicho formalismo permite entender la mecánica cuántica como una *extensión geométrica* de la mecánica clásica, se identificarán las insuficiencias de esta última resueltas por dicha extensión. Se mostrará luego como la cuantificación geométrica permite explicar algunos de los rasgos distintivos de la mecánica cuántica, como, por ejemplo, la noconmutatividad de los operadores cuánticos y el carácter discreto de los espectros de ciertos operadores.

Palabras-clave • Mecánica cuántica. Cuantificación geométrica. Geometría simpléctica.

Introducción

Entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica existen dos tipos de puentes. En primer lugar, la comprensión del *límite clásico* de una teoría cuántica garantiza las condiciones mínimas de compatibilidad entre la descripción cuántica fundamental de un sistema físico y su posible comportamiento aproximadamente clásico. Recíprocamente, es posible pasar de la mecánica clásica a la mecánica quántica por medio de los así denominados "procedimientos de cuantificación". Uno de los primeros ejemplos de dichos procedimientos es la cuantificación canónica de Dirac (cf. 1967, cap. 4). Dirac asocia operadores quánticos a los observables más simples, a saber q y p, de modo tal que los conmutadores entre los operadores reproduzcan los corchetes de Poisson entre los correspondientes observables. Sin embargo, dicho procedimiento de cuantificación es una mera prescripción heurística (una "analogía clásica" según Dirac) desprovista tanto de toda justificación matemática o conceptual rigurosa como de toda generalidad. A partir de los años 1970, se desarrollaron distintas formalizaciones rigurosas de la cuantificación canónica de un sistema clásico. Dos ejemplos importantes de dichos procedimientos son la *cuantificación geométrica*, introducida por Kostant (1970) y Souriau (1997), y la *cuantificación por deformaciones*, introducida por Flato Lichnerowicz y Sternheimer entre otros (c.f. Bayen *et al.*, 1977, 1978; Flato *et al.*, 1976).

Esos formalismos de cuantificación permiten construir una o varias teorías cuánticas a partir de una teoría clásica dada por medio de una *extensión geométrica* o una *deformación del álgebra de observables* de la teoría clásica correspondiente. Una característica de fundamental importancia de dichos formalismos es que muestran que es posible trazar un puente formal matemáticamente riguroso entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica. Sin embargo, dicha continuidad formal entre ambas teorías no ha sido todavía interpretada en términos de una continuidad conceptual. En efecto, y a pesar de lo novedoso de dichas reformulaciones matemáticas de la cuantificación de un sistema clásico, los formalismos no han sido todavía el objeto de un análisis estrictamente conceptual orientado a construir una interpretación satisfactoria del formalismo cuántico. El presente artículo tiene como objeto comenzar a llenar dicha laguna en lo dice respecto a la cuantificación geométrica. En particular, el establecimiento de una continuidad matemática entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica permite reformular en un lenguaje matemático común sus similaridades y sus diferencias. Dicha homogeneización abre la posibilidad de identificar las limitaciones formales y conceptuales de la mecánica clásica que son efectivamente resueltas en el marco de su extensión cuántica. La comprensión de dichas insuficiencias de la mecánica clásica nos debería permitir comenzar a entender en qué medida la extensión cuántica de un sistema clásico es una necesidad *estrictamente teórica*. En otros términos, dicho análisis debería permitir explicar la necesidad racional de la mejor adecuación empírica de la teoría cuántica comparada con la mecánica clásica.

En el presente trabajo, nos concentraremos en la cuantificación geométrica (cf. Brylinski, 1993; Ginzburg *et al*., 2001; Kirillov, 1985; Konstant, 1970; Puta, 1993; Souriau, 1997; Woodhouse, 1992). Dicho formalismo consta de dos etapas independientes, a saber, la *precuantificación* de la variedad simpléctica que describe los posibles estados del sistema clásico y la elección de una *polarización* de los estados precuánticos resultantes. Como veremos, una de las contribuciones conceptuales más importantes de dicho formalismo radica en el hecho de que establece una continuidad *geométrica* entre la mecánica clásica y la cuántica. Mientras que la estructura geométrica de esta última está dada por una variedad simpléctica (M, ω), la mecánica cuántica es una teoría definida sobre un fibrado de línea complejo sobre M dotado de una conexión hermítica θ. A los efectos de reobtener el formalismo cuántico es necesario que la curvatura de la conexión θ esté definida por la estructura simpléctica ω del espacio de fases M. Como veremos, tal condición implica que la 2-forma simpléctica ω juega el rol de obstrucción geométrica a la conmutatividad de los operadores cuánticos. De esa manera, la no-conmutatividad cuántica adquiere el mismo sentido geométrico que la no-conmutatividad de los transportes paralelos en el marco de la relatividad general y de la teoría de Yang-Mills. Por otra parte, dicha construcción puede ser efectuada si y solo si la forma simpléctica ω satisface una condición topológica de integralidad. Puede ser demostrado que el carácter discreto del espectro cuántico de ciertos operadores es una consecuencia directa de dicha condición de integralidad. Ese resultado sugiere que el tipo de argumentos topológicos utilizados por primera vez por Dirac para explicar la cuantización de la carga eléctrica en presencia de un monopolo magnético tienen un grado de generalidad inesperado (cf. Dirac, 1931).

En la sección 2, introduciremos los aspectos relevantes de la formulación simpléctica de la mecánica clásica. En la sección 3, intentaremos localizar las deficiencias de la mecánica clásica susceptibles de explicar la necesidad de la correspondiente extensión cuántica. En la sección 4, daremos argumentos heurísticos para justificar el tipo de extensión realizada en el marco de la cuantificación geométrica. En las secciones 5 y 6, describiremos brevemente el formalismo de precuantificación y la noción de polarización respectivamente. En la sección 7, analizaremos la condición topológica de integralidad. En la sección final, resumiremos y discutiremos los resultados obtenidos.

1 Formulación simpléctica de la mecánica clásica

En esta sección, presentaremos brevemente la formulación simpléctica de la mecánica clásica (cf. Abraham & Marsden, 1978; Arnold, 1989; Marsden & Ratiu, 1999 para más detalles). El *espacio de fases* de un sistema clásico de n grados de libertad está dado por una *variedad simpléctica* (M, ω) de dimensión $2n$. Una variedad simpléctica es una variedad M dotada de una 2-form ω cerrada:

$$d\omega = 0$$

y no degenerada:

$$i_v\omega = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

donde d es la derivada exterior de formas diferenciales y $i_v\omega$ denota la contracción del vector v y la 2-forma ω. El teorema de Darboux demuestra que siempre existen sistemas de coordenadas locales (q^i, p_i) tales que ω asume localmente la forma $\omega = \sum_i dq^i \wedge dp_i$.[1]

1 Con el objeto de simplificar la notación, omitiremos a partir de ahora los índices i suponiendo un espacio de fases M de dos dimensiones.

En el caso más simple, el espacio de fases de un sistema clásico está dado por el fibrado cotangente $M = T^*Q \xrightarrow{\pi} Q$ sobre el *espacio de configuración Q*.[2]

Un *observable* está dado por una función suave sobre *M* a valores reales $f : M \to \Re$. Los observables $f \in C^\infty(M)$ juegan dos roles fundamentales en mecánica. En primer lugar, los observables son por definición funciones que pueden ser evaluadas sobre los *estados clásicos* $s \in M$. En consecuencia, un conjunto adecuado de observables puede ser utilizado para individualizar los distintos estados físicos en *M*. En segundo lugar, es posible asociar a cada observable *f* un operador diferencial. Estos operadores generan *transformaciones canónicas* (o *difeomorfismos simplécticos*) del espacio de fases *M*, es decir, transformaciones de los estados físicos que preservan la estructura simpléctica ω. Como veremos, la imposibilidad de establecer una correspondencia fiel (o sea, inyectiva) entre los dos roles jugados por los observables $f \in C^\infty(M)$ permite comenzar a entender por que es necesario efectuar una extensión cuántica de la mecánica clásica.

La 2-forma simpléctica ω actúa como una suerte de "métrica antisimétrica", en el sentido de que define una dualidad entre los espacios tangentes y cotangentes a *M*.[3] Más precisamente, la forma simpléctica ω permite definir una aplicación:

$$\omega_b : TM \to T^*M$$
$$v \mapsto i_v \omega .$$

La condición de no-degeneración de la 2-forma ω significa que la aplicación ω_b es inyectiva. La aplicación inversa $\omega^\# : T^*M \to TM$ satisface por definición la expresión:

$$i_{\omega^\#(\alpha)} \omega = \alpha . \tag{1}$$

2 En ese caso, la 2-forma simpléctica ω puede ser obtenida a partir de una 1-forma canónica θ sobre M por medio de la expresión $\omega = d\theta$. La 1-forma canónica θ puede ser definida de la manera siguiente. Dado cualquier vector $v \in T_m M$, la proyección π define el *pushforward* $\pi_* v \in T_{\pi(m)} Q$. Por otra parte, las coordenadas de $m \in M$ están dadas por un par (q_m, p_m), donde $p_m \in T^*_{\pi(m)} Q$. En otros términos, p_m es una 1-forma que actúa sobre los vectores en $T_{\pi(m)} Q$. Esto significa que es posible contraer la 1-forma p_m con el vector $\pi_* v$. Es posible definir entonces la 1-forma canónica θ en M por medio de la siguiente expresión:

$$i_v \omega(m) = i_{\pi_* v} p_m .$$

En coordenadas locales (*p*,*q*) en T^*Q, la 1-forma canónica θ puede escribirse como $\theta = -pdp$.

3 La diferencia entre la forma simpléctica ω y una métrica es que la dualidad entre los espacios tangentes y cotangentes definida por ω establece una *intrincación* entre las coordenadas *q* y los momentos *p*. En efecto, las 1-formas duales a ∂_q y ∂_p son *dp* y -*dq* respectivamente ($i_{\partial_q} \omega = i_{v_p} \omega = dp$ y $i_{\partial_p} \omega = i_{v_{-q}} \omega = -dq$). Esa "intrincación" entre las *q* y las *p* tiene como consecuencia que la "norma antisimétrica" de un vector definida por la forma simpléctica es cero ($i_{\partial_q} i_{\partial_q} \omega = i_{\partial_q} dp = 0$), mientras que el "producto interno antisimétrico" de ∂_q y ∂_p es -1 ($i_{\partial_q} i_{\partial_p} \omega = i_{\partial_q} dq = -1$).

Podemos entonces preguntarnos si, dada una forma $\alpha \in T^*M$, existe un vector $v \in TM$ tal que $\omega_b(v) = \alpha$. Dado que queremos establecer una correspondencia entre observables $f \in C^\infty(M)$ y operadores diferenciales, podemos tomar como 1-forma α la forma df obtenida a partir del observable f. Si aplicamos $\omega^\#$ a df obtenemos un campo vectorial en TM. En otros términos, esas aplicaciones permiten definir la siguiente correspondencia:

$$f \mapsto v_f = \omega^\#(df)$$

entre los observables $f \in C^\infty(M)$ y los campos vectoriales $v_f \in TM$. La expresión (1) implica que el campo vectorial v_f satisface la siguiente expresión:

$$i_{v_f}\omega = df \quad (2)$$

Los campos vectoriales obtenidos por medio de la correspondencia $f \mapsto v_f$ dada por la expresión (2) serán denominados *campos vectoriales Hamiltonianos*. El espacio de los campos vectoriales Hamiltonianos sobre M será denotado H_M. En $\Re^2$, el campo vectorial Hamiltoniano v_f asociado a un observable f está dado por la siguiente expresión:

$$v_f = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}. \quad (3)$$

Para mostrar que la expresión (3) resulta de (2), escribamos el campo vector v_f del modo siguiente:

$$v_f = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dq}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial p}, \quad (4)$$

donde λ parametriza las curvas integrales $(q(\lambda), p(\lambda))$ de v_f. Escribiendo expresamente la ecuación (2) obtenemos:

$$(dq \wedge dp)(v_f,\cdot) = df$$

$$(dq \wedge dp)\ (\frac{dq}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial p},\cdot) = df$$

$$dq(\frac{dq}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial p})dp(\cdot) - dq(\cdot)\ dp(\frac{dq}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{dp}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial p}) = df$$

$$\frac{dq}{d\lambda}dp - \frac{dp}{d\lambda}dq = \frac{\partial f}{\partial q}dq + \frac{\partial f}{\partial p}dp\ .$$

Eso implica que

$$\frac{dq}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial p} \text{ y } \frac{dp}{d\lambda} = -\frac{\partial f}{\partial q}. \tag{5}$$

Reemplazando $\frac{dq}{d\lambda}$ y $\frac{dp}{d\lambda}$ en la expresión (4) obtenemos la expresión (3).

Un campo vectorial $v \in TM$ es un operador diferencial que actúa sobre las funciones $f \in C^{\infty}(M)$ (esto es, sobre los observables de la teoría) como una derivación. Podemos afirmar entonces que la estructura simpléctica ω del espacio de fases induce una correspondencia entre los *observables* $f \in C^{\infty}(M)$ y los *operadores* diferenciales asociados $v_f \in TM$. En lo que sigue, los operadores diferenciales obtenidos por medio de esa correspondencia serán denominados "operadores clásicos". En particular, la estructura simpléctica asocia a las variables canónicas q y p los operadores clásicos $v_q = -\frac{\partial}{\partial p}$ y $v_p = \frac{\partial}{\partial q}$ respectivamente. En consecuencia, el hecho de que podamos asociar al observable p un operador de derivación a lo largo de q es una propiedad de la mecánica clásica.

La aplicación $f \mapsto v_f$ permite definir una *estructura de Poisson* en el espacio $C_{\infty}(M)$ por medio del *corchete de Poisson*:

$$\{f, g\} = v_g(f). \tag{6}$$

El corchete de Poisson puede también ser calculado utilizando la expresión:

$$\{f, g\} = i_{v_g} i_{v_f} \omega. \tag{7}$$

En efecto, $i_{v_g} i_{v_f} \omega = i_{v_g}(df) = v_g(f) = \{f, g\}$. Puede demostrarse que el corchete de Poisson es un álgebra de Lie, lo cual significa que $\{\cdot,\cdot\}$ satisface las propiedades de *bilinearidad*, *antisimetría* ($\{f, g\} = -\{g, f\}$) y la *identidad de Jacobi*:[4]

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0.$$

4 Puede demostrarse que el corchete de Poisson satisface la identidad de Jacobi si y solo si $d\omega = 0$.

Esta última identidad puede también expresarse del modo siguiente:[5]

$$\left[v_g, v_f\right] = v_{\{f,g\}}. \tag{8}$$

Eso significa que la aplicación $f \mapsto v_f$ es un homomorfismo de álgebras de Lie de $C^\infty(M)$ en H_M. En otros términos, el corchete de Lie en H_M está completamente determinado por el corchete de Poisson en $C^\infty(M)$. El corchete de Poisson también satisface la regla de Leibniz:

$$v_h(fg) = \{fg, h\} = g\{f,h\} + f\{g,h\} = gv_h(f) + fv_h(g).$$

Por lo tanto, la estructura de Poisson dota al espacio $C^\infty(M)$ de una estructura de álgebra de Lie en la cual el corchete actúa como una derivación en cada argumento. En efecto, vale la pena observar que $\{f,g\} = v_g(f)$ es por definición la derivada de Lie $L_{v_g}\omega = 0$ de f en la dirección definida por el campo vectorial Hamiltoniano v_g. Esta estructura algebraica sobre el espacio de observables clásicos $C^\infty(M)$ se denomina "álgebra de Poisson".

Mostraremos ahora que los campos vectoriales Hamiltonianos generan difeomorfismos simplécticos infinitesimales de *M*, es decir, difeomorfismos de *M*, que preservan la estructura simpléctica ω. El flujo $\phi_\lambda : M \to M$ de un campo vectorial *v* es un subgrupo uniparamétrico de difeomorfismos simplécticos si $\phi_\lambda^*\omega = \omega$ para todo λ donde $\phi_\lambda^*\omega$ denota el *pullback* de ω por medio de la aplicación ϕ_λ. Esa condición de invariancia implica que (cf. Abraham & Marsden, 1978; Guillemin & Sternberg, 1984):

$$L_v\omega = 0. \tag{9}$$

Los campos vectoriales *v* que preservan la forma simpléctica ω serán denominados *campos vectoriales simplécticos*. El álgebra de Lie definida por dichos campos será denotada $Symp(M)$. Utilizando la formula $L_v = di_v + i_v d$ y el hecho de que ω es una forma cerrada, la condición (9) implica:

$$d(i_v\omega) = 0.$$

5 En efecto,

$$\{h,\{f,g\}\} = -\{g,\{h,f\}\} - \{f,\{g,h\}\}$$
$$v_{\{f,g\}}h = \{v_f h, g\} - \{v_g h, f\}$$
$$v_{\{f,g\}}h = (v_g v_f - v_f v_g)h.$$

Esto significa que el campo vectorial *v* es simpléctico si y solo si $i_v\omega$ es una 1-forma cerrada. Dado que toda forma diferencial cerrada es *localemente* exacta (lema de Poincaré), existe, al menos localmente, una función f tal que $i_v\omega = df$. Esto significa que los campos vectoriales simplécticos son localmente Hamiltonianos. Reciprocamente, los campos vectoriales Hamiltonianos son siempre simplécticos. Por lo tanto, H_M es una subálgebra de Lie de $Symp(M)$. Puede demostrarse que $H_M \cong Symp(M)$ si M es simplemente connexa, es decir si el grupo fundamental de *M* es nulo. Más precisamente, se puede demostrar la existencia de la siguiente secuencia corta de álgebras de Lie:[6]

$$0 \to H_M \xrightarrow{i} Symp(M) \xrightarrow{p} H^1(M,\Re) \to 0 .$$

Si $H^1(M,\Re)=0$, entonces $\mathrm{Im}(i) = Ker(p) = Symp(M)$. Por lo tanto, la aplicación i es inyectiva y sobreyectiva. En consecuencia, $H_M \cong Symp(M)$ (cf. Brylinski, 1993, prop. 2.3.3).

De esa manera hemos mostrado que los observables clásicos $f \in C^\infty(M)$ inducen, por medio de la aplicación $f \mapsto v_f$, difeomorfismos simplécticos de *M*.[7] Los difeomorfismos están definidos por las curvas integrales de los campos vectoriales Hamiltonianos v_f . Por ejemplo, las curvas integrales $(q(t), p(t))$ del campo vectorial Hamiltoniano v_H asociado a la función Hamiltoniana $H(q, p)$, definen un subgrupo uniparamétrico de difeomorfismos simplécticos:

$$\phi_t : M \to M$$

$$(q(0), p(0)) \mapsto (q(t), p(t)) ,$$

dados por las soluciones de las ecuaciones de Hamilton, o sea, por las soluciones de las ecuaciones (5) para $\lambda = t$ y $f = H$:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} .$$

6 Una secuencia corta $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ es exacta si el núcleo de cada aplicación coincide con la imagen de la aplicación precedente. Para que esto suceda, se deben satisfacer las condiciones siguientes: (1) la aplicación *i* debe ser inyectiva (o sea, una inclusión), (2) la aplicación p debe ser sobreyectiva (o sea, una proyección) y (3) se debe satisfacer *Ker(pr) = im(i)*.

7 En lo que sigue utilizaremos la siguiente terminología. La expresión "un observable *f induce* una transformación" será a veces utilizada para abreviar la expresión "el operador v_f asociado al observable *f genera* una transformación".

De esa manera, podemos decir que el Hamiltoniano H "opera" infinitesimalmente sobre los estados clásicos (q, p) por medio del operador diferencial clásico v_H asociado a H. La integración de la acción infinitesimal inducida por H permite obtener la evolución temporal para todo tiempo finito de cualquier condición inicial en M.

Además de inducir difeomorfismos simplécticos, los observables $f \in C^{\infty}(M)$ definen coordenadas locales en M, las cuales pueden ser utilizadas para individualizar y distinguir los distintos estados físicos $s \in M$. Un conjunto $\{f_i\}_i \subset C^{\infty}(M)$ es un *conjunto completo de observables* si y solo si cualquier otra función g que satisfaga $\{f_i, g\} = 0$ para todo f_i es necesariamente constante. Eso implica que el conjunto completo de observables $\{f_i\}$ separa localmente puntos en M. En otros términos, el conjunto de "propiedades" $f_i(s)$ del estado definidas por un conjunto completo de observables alcanza para individualizar dicho estado.

Se considera usualmente que la mecánica cuántica difiere de la mecánica clásica debido al hecho de que los observables $f \in C^{\infty}(M)$ son sustituidos por los operadores cuánticos. Sin embargo, como hemos acabado de mostrar, es posible asociar a todo observable f un *operador clásico* v_f, el cual genera transformaciones de los estados clásicos en M.[8] El hecho de que exista un operador asociado a todo observable, lejos de ser una propiedad de los sistemas cuánticos, es una consecuencia directa de la estructura simpléctica del espacio de fases. Vale la pena notar que el conmutador de dos operadores clásicos v_f y v_g, el cual está dado por el corchete de Lie de campos vectoriales $\lfloor v_f, v_g \rfloor f = v_f(v_g(f)) - v_g(v_f(f))$, no es necesariamente cero. Podemos, por lo tanto, concluir que la existencia de una correspondencia entre observables y operadores diferenciales que actúan sobre los estados físicos es también un ingrediente fundamental de la mecánica clásica. Como veremos a continuación, el formalismo de precuantificación muestra que la mecánica cuántica no se obtiene, como es usualmente afirmado,

8 Análogamente al modo en que una transformación cuántica de la forma $\psi' = e^{(i/\hbar)\hat{A}\theta}\psi$ es obtenida integrando la acción infinitesimal del operador cuántico $\hat{A}$ sobre los estados ψ a partir de la ecuación diferencial $-i\hbar\dfrac{d\psi}{d\theta} = \hat{A}\psi$, el subgrupo uniparamétrico de difeomorfismos $\phi_\theta : M \to M$ es obtenido integrando la acción infinitesimal del operador clásico $v_A(\cdot) = \{\cdot, A\}$ sobre los estados clásicos (q, p) a partir de la ecuación diferencial $\dfrac{dq}{d\theta} = v_A q$ (y análogamente para p). Análogamente a lo que sucede en mecánica cuántica, las soluciones de esta ecuación diferencial pueden ser escritas formalmente como $q(\theta) = e^{v_A\theta} q\big|_{\theta_0}$, donde la exponencial denota su representación en serie y θ_0 es una condición inicial (cf. Goldstein, 2001, p. 408). Más precisamente, la solución $q(\theta)$ puede expresarse por medio del siguiente desarrollo en serie:

$$q(\theta) = q_0 + t\{q, A\}_0 + \frac{t^2}{2}\{\{q, A\}, A\}_0 + \frac{t^3}{3!}\{\{\{q, A\}, A\}, A\}_0 + \ldots,$$

donde el sufijo 0 indica que la expresión resultante debe ser evaluada en las condiciones iniciales $(q(0), p(0))$ para $t = 0$.

a partir de la substitución de los observables f por los correspondientes operadores cuánticos, *sino a partir de la extensión cuántica de los operadores clásicos* v_f. En consecuencia, y a los efectos de precisar la diferencia entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica, no tenemos que comparar el álgebra no-conmutativa de operadores cuánticos con la estructura de anillo conmutativo de los observables $f \in C^{\infty}(M)$ (relativa a la multiplicación punto a punto), sino con el álgebra de Lie de los operadores clásicos. Es necesario analizar entonces cual es la insuficiencia de la noción clásica de operador susceptible de justificar la necesidad de efectuar una extensión cuántica.

2 De los observables a los operadores clásicos

En esta sección compararemos el álgebra de Poisson de los observables $f \in C^{\infty}(M)$ y el álgebra de Lie de los operadores clásicos v_f. Como veremos, estas estructuras algebraicas no son isomorfas. En efecto, el homomorfismo (sobreyectivo) de álgebras de Lie:

$$\begin{gathered} C^{\infty}(M) \to H_M \\ f \mapsto v_f \end{gathered} \tag{10}$$

no es inyectivo, dado que el núcleo de la aplicación está dado por las funciones constantes $f = k \in \Re$. En efecto, usando la expresión (3), es evidente que $v_f = 0$ para todo $f = k$. Las propiedades de la aplicación $C^{\infty}(M) \to H_M$ pueden ser resumidas diciendo que la siguiente secuencia corta:

$$0 \to \Re \xrightarrow{\ i\ } C^{\infty}(M) \xrightarrow{\ pr\ } H_M \to 0 \tag{11}$$

es exacta. De hecho, la imagen de la inclusión i – o sea, las funciones constantes $f = k$ en $C^{\infty}(M)$ – coincide con el núcleo de la proyección pr (o sea, $v_f = k = 0$). Eso significa que $H_M = C^{\infty}(M)/\Re$.

Podemos esquematizar la proyección no inyectiva $C^{\infty}(M) \xrightarrow{\ pr\ } H_M$ considerando que "arriba" de cada campo vectorial Hamiltoniano $v_f \in H_M$ existe una "fibra" de funciones $\{f_k = f + k\}_{k \in \Re}$. Las funciones f_k pertenecientes a una misma fibra (1) difieren entre si en una constante y (2) se proyectan al mismo campo vectorial v_f. De acuerdo con dicha descripción, cada fibra $pr^{-1}(v_f) \subset C^{\infty}(M)$ puede ser identificada con la recta real $\Re$. Podríamos entonces decir que $C^{\infty}(M)$ es una *"extensión unidimensional real"* de H_M que extiende cada campo vectorial Hamiltoniano v_f por medio de una fibra de funciones $\{f_k = f + k\}_{k \in \Re}$ isomorfa a $\Re$. Dado que las funciones constantes tienen corchete de Poisson nulo con cualquier otra función – es decir, constituyen el así denominado *centro* de $C^{\infty}(M)$ –, $C^{\infty}(M)$ se denomina una *extensión central* de H_M.

El hecho de que toda función constante $f = k$ sea proyectada al mismo campo vectorial Hamiltoniano indica que el álgebra de Poisson $C^{\infty}(M)$ tiene una estructura más rica que H_M. En otros términos, al pasar de los observables $f \in C^{\infty}(M)$ a los operadores clásicos $v_f \in H_M$, perdemos parte de la estructura algebraica de $C^{\infty}(M)$. Supongamos, por ejemplo, dos observables *f* y *g* tales que $\{f, g\} = k \in \Re$. Veamos ahora si la no-trivialidad de dicho corchete de Poisson es preservada al pasar al algebra de Lie de los campos vectoriales Hamiltonianos. Utilizando la expresión (8), obtenemos:

$$\left[v_f, v_g\right] = v_{\{f,g\}} = v_k = 0\,.$$

En consecuencia, la correspondencia (10) entre observables y operadores clásicos asigna a dos funciones *f* y *g* que *no conmutan* (con respecto al corchete de Poisson) dos campos vectoriales v_f y v_g que *conmutan* (con respecto al corchete de Lie de campos vectoriales).

Mostraremos ahora que la forma simpléctica ù define una extensión central del álgebra de Lie de los campos vectoriales Hamiltonianos. Elijamos para ello una sección lineal $\sigma : H_M \to C^{\infty}(M)$ de la proyección $C^{\infty}(M) \xrightarrow{\pi} H_M$ por medio de la condición $f(x_0) = 0$, para un $x_0 \in M$ fijo (cf. Brylinski, 1993). Esa condición selecciona, de toda la "fibra" lineal de funciones $\{f_k = f + k\}_{k \in \Re}$ que difieren en una constante y que se proyectan al mismo campo vectorial Hamiltoniano v_f en H_M, la única función que satisface $f(x_0) = 0$. Supongamos que $\sigma(v) = f$ y $\sigma(w) = g$, con $\{f, g\} = k \in \Re$. Tenemos entonces que

$$\sigma([v, w]) = \sigma(u_{\{f,g\}=k}) = \sigma(0) = 0 \neq \{\sigma(v), \sigma(w)\} = \{f, g\} = k\,.$$

Esto significa que la sección σ, contrariamente a la proyección π, no es un homomorfismo de álgebras de Lie. En consecuencia, el corchete de Lie en *HM* no define completamente el corchete de Poisson en $C^{\infty}(M)$. Definiremos la diferencia entre ambos corchetes de Lie por medio de un elemento *c* tal que:

$$\{\sigma(v), \sigma(w)\} = \sigma([v, w]) + c(v, w)\,.$$

En otros términos, *c* es la *obstrucción* que dá en qué medida la sección σ no es un homomorfismo de álgebras de Lie. Dado el corchete de Lie en H_M y el elemento *c*, el corchete de Poisson en $C^{\infty}(M)$ queda completamente definido. Es posible mostrar que la forma simpléctica ω determina la obstrucción c por medio de la siguiente expresión:[9]

$$c(v,w)=\omega(v,w)(x_0).$$

En otros términos, ω define, por medio de la siguiente formula

$$\{\sigma(v),\sigma(w)\}=\sigma([v,w])+\omega(v,w)(x_0), \qquad (12)$$

una estructura particular de álgebra de Lie en $C^\infty(M)$.[10] En particular, aunque $\lfloor v_f, w_g \rfloor = 0$, el corchete de Poisson $\{f,g\}$ no es necesariamente cero. En otros términos, elementos que conmutan en *HM* tienen imágenes en $C^\infty(M)$ que no necesariamente conmutan.

El ejemplo canónico de esa situación está dado por los campos vectoriales Hamiltonianos $v_q = -\frac{\partial}{\partial p}$ y $v_p = \frac{\partial}{\partial q}$. En efecto, $\left[-\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}\right]=0$, mientras que $\{q,p\}=1$. De esa manera, la "no-conmutatividad" entre q y p (con respecto a $\{\cdot,\cdot\}$) se pierde al pasar de $C^\infty(M)$ a H_M. En otros términos, el operador clásico $v_p = \frac{\partial}{\partial q}$ actúa de manera no trivial sobre q (dado que $Lie_{v_p} q = v_p q = \{q,p\}=1$, mientras que v_p actúa trivialmente sobre el operador v_q asociado a q (dado que $Lie_{v_p} v_q = \lfloor v_p, v_q \rfloor = 0$).

9 Supongamos que $\sigma(v)=f=f_0-k$ y $\sigma(w)=g=g_0-k'$, donde $k=f_0(x_0)$ y $k'=g_0(x_0)$, garantizando así que $f(x_0)=g(x_0)=0$. Tenemos, entonces, que $\{\sigma(v),\sigma(w)\}=\{f_0-k,g_0-k'\}=\{f_0,g_0\}$. Por otra parte, tenemos $\sigma([v,w])=\sigma(u_{\{f_0,g_0\}})=\{f_0,g_0\}-k''$, donde $k''=\{f_0,g_0\}(x_0)$. Obtenemos entonces

$$\{\sigma(v),\sigma(w)\}-\sigma([v,w])=k''=\{f_0,g_0\}(x_0)=\omega(v,w)(x_0).$$

10 Puede mostrarse que la obstrucción c es un 2-cociclo de la *cohomología de álgebras de Lie* $H^*(H_M,\Re)$ de H_M a valores en $\Re$. Sea g un álgebra de Lie y $C^k(g,\Re)=\{\alpha : g^k \to \Re\}$ el conjunto de k-cocadenas valuadas en $\Re$ (donde los mapas α son k-mapas lineales antisimétricos). Definamos el diferencial $\delta_g : C^k(g,\Re)\to C^{k+1}(g,\Re)$ por medio de la expresión

$$(\delta_g\alpha)(\xi_0,\dots,\xi_k)=\sum_{0\le i<j\le k}(-1^{i+j})\alpha([\xi_i,\xi_j],\xi_0,\dots,\hat{\xi}_i,\dots,\hat{\xi}_j,\dots,\xi_k),$$

donde $\hat{\xi}_i$ significa que el elemento ξ_i ha sido suprimido. Es posible demostrar que $\delta_g^2=0$. La correspondiente cohomología $H^*(g,\Re)=\ker(\delta_g^*)/im(\delta_g^{*-1})$ es la cohomología de álgebras de Lie de g valuada en $\Re$. En nuestro caso, el elemento $c(v,w)=\omega(v,w)(x_0)$ es un mapa bilineal antisimétrico que satisface: $(\delta_g c)(u,v,w)=-(c([u,v],w)+c([w,u],v+c([v,w],u))=0$. En otros términos, c es un 2-cociclo en $H^2(H_M,\Re)$ (donde se uso la identidad de Jacobi tanto en $\{\cdot,\cdot\}$ como $[\cdot,\cdot]$). Su clase de cohomología es independiente de $x_0\in M$ (c.f. Brylinski, 1993).

3 De los operadores clásicos a los operadores cuánticos

En la sección precedente hemos mostrado que el álgebra de Poisson $C^{\infty}(M)$ no puede ser fielmente (es decir, inyectivamente) representada como un álgebra de operadores diferenciales *en el marco geométrico provisto por la variedad simpléctica M*. En esta sección, presentaremos algunos argumentos heurísticos que nos permitirán argumentar que la definición de un álgebra de operadores isomorfa al álgebra de Poisson requiere extender el marco geométrico de la mecánica clásica *por medio de la definición de un fibrado de línea complejo* $L \to M$ *sobre M*. Dicha construcción se denomina *precuantificación* de la variedad simpléctica *M*.[11] Dicha extensión permitirá asociar a cada observable $\hat{v}_f \in TL$ un operador diferencial cuántico $\hat{v}_f \in TL$ tal que la correspondiente álgebra de operadores sea isomorfa al álgebra de Poisson.

Queremos, por lo tanto, definir nuevos operadores $\hat{v}_f$ de modo tal que los mismos satisfagan la siguiente *condición de inyectividad*: si $f = k \in \Re$, entonces $\hat{v}_{f=k} = kI$, donde I es el operador identidad. Pediremos además que la correspondencia entre los observables y los operadores cuánticos sea un homomorfismo de algebras de Lie, es decir que se satisfaga una condición análoga a la propiedad (8) satisfecha por los operadores clásicos v_f. Escribiremos dicha condición del modo siguiente: si $\{f, g\} = h$, entonces $\lfloor \hat{v}_f, \hat{v}_g \rfloor = -i\hbar \hat{v}_h$.

Sean v_f y v_g dos campos vectoriales Hamiltonianos que conmutan (o sea, $\lfloor v_f, v_g \rfloor = 0$), tales que $\{f, g\} = k \in \Re$. Se deduce de la condición de inyectivad que los operadores cuánticos asociados $\hat{v}_f$ y $\hat{v}_g$ deben satisfacer la relación de conmutación $\lfloor \hat{v}_f, \hat{v}_g \rfloor = -i\hbar \hat{v}_k = -i\hbar kI$. El conmutador entre $\hat{v}_f$ y $\hat{v}_g$ está entonces dado por:

$$\lfloor \hat{v}_f, \hat{v}_g \rfloor = -i\hbar \{f, g\} I = -i\hbar \omega(v_f, v_g) I .$$

Eso significa que la 2-forma simpléctica ω mide la no conmutatividad de los operadores cuánticos $\hat{v}_f$ y $\hat{v}_g$. En geometría diferencial, una 2-forma que juega el rol de obstrucción a la conmutatividad de operadores diferenciales es un objeto geométrico bien conocido, a saber una *curvatura* (cf. Kobayashi & Nomizu, 1963). Podemos, por lo tanto, concluir que es necesario definir una extensión geométrica de la variedad *M*, tal que la estructura simpléctica ω juegue el rol de una curvatura. El marco geométrico natural en el cual aparece la noción de curvatura es la teoría de los espacios fibrados dotados de una conexión. De hecho, aunque dos campos vectoriales sobre una varie-

11 Estrictamente hablando, un isomorfismo entre los observables clásicos y los operadores asociados solo puede establecerse para una subálgebra de $C^{\infty}(M)$ (cf. Abraham & Marsden, 1978; Guillemin & Sternberg, 1984).

dad conmuten, la extensión de dicha variedad por medio del agregado de una dimensión suplementaria (definida por las así denominadas *fibras* del espacio fibrado resultante) puede romper dicha conmutatividad. Más precisamente, las "copias" de dichos vectores en el espacio total del fibrado – o sea, los levantamientos horizontales de dichos vectores definidos por la conexión – pueden no conmutar. Podemos, por lo tanto, conjeturar que a los efectos de definir un álgebra de operadores isomorfa al álgebra de Poisson de los observables es necesario agregar una dimensión suplementaria a la variedad simpléctica *M*.[12]

Consideremos ahora más precisamente de qué manera el agregado de una dimensión suplementaria "vertical" permite introducir la no-conmutatividad deseada. Sea $P \xrightarrow{\tau} M$ un G-fibrado principal dotado de una conexión θ de curvatura *K*. Por definición, una conexión θ puede expresarse en términos de una 1-forma equivariante sobre *P* valuada en el álgebra de Lie *g* del grupo estructural G. El núcleo de la conexión define una *distribución equivariante horizontal* (cf. Kobayashi & Nomizu, 1963). Eso significa que en cada punto $p \in P$, la conexión θ define una separación del espacio tangente a P de la forma $T_pP = V_pP \otimes H_pP$, donde V_pP es el subespacio vertical canónico tangente a la fibra y H_pP es el *subespacio horizontal* definido por el núcleo de θ (i.e. $\theta(v) = 0$ si $v \in H_pP$). Dada una conexión , es posible definir los *levantamientos horizontales* $v^h \in H_pP$ de los campos vectoriales v sobre *M*. Estos levantamientos satisfacen $\tau_*(v^h) = v$ (o sea, se proyectan sobre v) y $\theta_*(v^h) = 0$ (es decir, son horizontales). Si consideramos ahora los levantamientos horizontales $v^h, w^h \in HP$ de dos campos vectorial $v, w \in TM$, puede demostrarse que $\widetilde{K}(v,w)$ es la componente vertical del corchete de Lie $\left[v^h, w^h\right]$, donde $\widetilde{K}$ es la forma local asociada a la curvatura K (o sea, $\widetilde{K}$ es una 2-forma sobre $U \subset M$ valuada en *g*). La relación entre la conexión θ, la curvatura K y la forma local $\widetilde{K}$ de K está dada por la expresión $K = \tau^*\widetilde{K} = d\theta + [\theta, \theta]$, donde d es la derivada exterior sobre *P*. El elemento $\widetilde{K}(v,w)$ puede ser calculado entonces del siguiente modo:

12 La situación es análoga a lo que sucede en la teoría electromagnética. El campo electromagnético está descripto por una 2-forma cerrada *F* sobre el espacio-tiempo *X*. Siguiendo el ejemplo provisto por la relatividad general, podríamos intentar intepretar *F* como la curvatura de una conexión. Sin embargo, esto no puede hacerse en el marco geométrico provisto por el espacio-tiempo *X*. En efecto, para interpretar *F* como la curvatura de una conexión es necesario extender el espacio-tiempo *X* definiendo un fibrado principal con grupo de estructura $U(1) = \left\{e^{ix}, x \in \Re\right\}$ sobre *X* dotado de una conexión *A* (cuya 1-forma local puede ser identificada con el potencial electromagnético).

$$\begin{aligned}\widetilde{K}(v,w) &= \left(\tau^{*}\widetilde{K}\right)\left(v^{h},w^{h}\right)\\ &= d\theta\left(v^{h},w^{h}\right)+\left[\theta\left(v^{h}\right),\theta\left(w^{h}\right)\right]\\ &= d\theta\left(v^{h},w^{h}\right)\\ &= v^{h}\left(\theta\left(w^{h}\right)\right)-w^{h}\left(\theta\left(v^{h}\right)\right)-\theta\left(\left[v^{h},w^{h}\right]\right)\\ &= -\theta\left(\left[v^{h},w^{h}\right]\right).\end{aligned}$$

Por definición de una conexión, $\theta\left(\left[v^{h},w^{h}\right]\right)$ es un elemento del álgebra de Lie g. Por otra parte, la isomorfía entre las fibras de un G-fibrado principal y el grupo estructural G implica la existencia de un isomorfismo $\iota_p : g \to V_pP$. Eso significa que $\widetilde{K}(v,w) = -\theta\left(\left[v^{h},w^{h}\right]\right) \in g \cong V_pP$ es la proyección de $\left[v^{h},w^{h}\right]$ sobre los subespacios verticales V_pP. En otras palabras, se tiene una descomposición de la forma:

$$\left[v^{h},w^{h}\right] = \underbrace{[v,w]^{h}}_{\in H_pP} - \underbrace{\xi_{\widetilde{K}(v,w)}}_{\in V_pP}, \tag{13}$$

donde $\xi_{\widetilde{K}(v,w)}$ denota la imagen en V_pP del elemento $\widetilde{K}(v,w) \in g$ por medio del isomorfismo $\iota_p : g \to V_pP$. Esta formula muestra claramente que, aunque v y w conmutan en $M\left([v,w] = [v,w]^{h} = 0\right)$, sus levantamientos horizontales v^{h} y w^{h} no necesariamente conmutan. En otros términos, el levantamiento horizontal $\widetilde{\gamma}$ de un camino cerrado $\gamma : [0,1] \to M$ (donde $\gamma(0) = \gamma(1)$) puede no cerrar, estando la no conmutatividad "vertical" dada por la curvatura $\widetilde{K}$. Si identificamos la forma local de curvatura $\widetilde{K}$ con la forma simpléctica ω, la expresión (13) puede considerarse una realización de la expresión (12) en términos de operadores diferenciales actuando sobre el espacio total del fibrado principal $L \to M$. El punto importante es que del lado izquierdo no tenemos un corchete de Poisson de funciones como en (12), sino un corchete de Lie de campos vectoriales. De esa manera, la expresión (13) provee una realización puramente geométrica de la extensión central (11). Podemos, por lo tanto, concluir que a los efectos de definir operadores diferenciales cuya álgebra de Lie sea isomorfa al álgebra de Poisson, es necesario definir un espacio fibrado sobre el espacio de fases M dotado de una conexión θ de curvatura localmente dada por la forma simpléctica ω.

Intentaremos ahora averiguar qué tipo de fibras es necesario agregar sobre la variedad simpléctica *M*. A dichos efectos, la secuencia exacta de álgebras de Lie (11) provee una orientación heurística. Brevemente, la extensión central (11) del álgebra de Lie H_M de campos vectoriales Hamiltonianos por medio de las funciones constantes $f = k \in \Re$, será implementada geométricamente en términos de operadores diferenciales $\hat{v}_f$ actuando sobre una extensión "fibrada" unidimensional de la variedad simpléctica *M*. Las funciones constantes $f = k$ que componen las "fibras" de la extensión central (11), lejos de proyectarse a un operador diferencial idénticamente nulo, serán representadas geométricamente por medio de un campo vectorial *constante* tangente a las fibras del espacio fibrado $P \xrightarrow{\iota} M$, es decir por un campo vectorial puramente vertical. Por lo tanto, la "dimensión interna cuántica" definida por las fibras permite representar el núcleo de la extensión central (11) como campos vectoriales *verticales*, garantizando de esa manera la inyectividad del mapa $f \mapsto \hat{v}_f$. En el caso de una función general $f \in C^\infty(M)$, el levantamiento horizontal ${v_f}^h$ del campo vectorial Hamiltoniano v_f será extendido por medio de una componente vertical tangente a las fibras. Los campos vectoriales resultantes satisfacen por construcción un álgebra de conmutadores isomorfa al álgebra de Poisson.

En términos formales, queremos asociar a toda función $f \in C^\infty(M)$ un campo vectorial vertical en TP que denotaremos ξ_f. Para ello, asociaremos a cada número real $f(x) = \zeta$ (para cada $x \in M$) un campo vectorial constante ξ_ς tangente a la fibra $\tau^{-1}(x)$. A dichos efectos, es necesario identificar el álgebra de Lie g del grupo estructural G con $\Re$. En efecto, si efectuamos dicha identificación, toda función *f* seleccionará un único elemento del álgebra de Lie $f(x) = \zeta \in \Re \equiv g$ para cada $x \in M$. El isomorfismo $\iota_p : g \to V_p P$ nos permite, entonces, definir un campo vectorial constante $\iota_p(\zeta) = \xi_\zeta$ para todo p en cada fibra $\tau^{-1}(x)$. El conjunto de estos campos vectoriales verticales para todo $x \in M$ define el campo vectorial ξ_f sobre *P* asociado a la función *f*. La situación puede ser resumida por medio del siguiente diagrama:

$$M \xrightarrow{f} \Re \equiv g \xrightarrow{\iota_p} V_p P$$
$$x \mapsto f(x) = \zeta \mapsto \xi_{f(x)=\zeta}\,.$$

Podemos, por lo tanto, concluir que el grupo estructural *G* del fibrado principal $P \to M$ tiene que tener $\Re$ como álgebra de Lie *g*. Esta construcción garantiza que cada función $f \in C^\infty(M)$ define un campo vectorial vertical ξ_f sobre *P* constante a lo largo de las fibras. En particular, si *f* es una función constante, el campo vectorial vertical ξ_f será constante en todos lados (o sea, no solo para todo $p \in \tau^{-1}(x)$, sino también para todo $x \in M$). Vale la pena observar que cada función constante $f = k$ define un campo vectorial ξ_k diferente. De este modo, la degeneración entre las diferentes funciones constantes $f = k$ (las cuales se proyectan todas al mismo campo vectorial Hamiltoniano) ha sido rota.

La identificación $g = \Re$ no permite definir sin ambiguedad el correspondiente grupo estructural *G*. De hecho, los grupos $GL(1,\Re) = \Re - \{0\}$ y $U(1) = \{e^{ix}, x \in \Re\}$ tienen a $\Re$ como álgebra de Lie. Como veremos a continuación, los estados cuánticos de la teoría estarán dados por las secciones del fibrado vectorial asociado $L = P \times_G V \to M$ (donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión 1).[13] Por definición, el grupo estructural G del fibrado principal $P \to M$ actúa sobre el conjunto de bases del espacio vectorial que define las fibras de *L*. Mientras que el grupo $GL(1,\Re)$ actúa sobre las bases no normalizadas de un espacio vectorial real unidimensional por medio de dilataciones, el grupo *U*(1) actúa sobre el conjunto de bases unitarias de un espacio vectorial complejo unidimensiónal. Por lo tanto, si uno elije $G = GL(1,\Re)$ como grupo estructural, entonces el fibrado vectorial asociado $L \to M$ será un fibrado de línea real. Si por el contrario uno elije *U*(1) como grupo estructural, entonces es necesario dotar el fibrado asociado de una métrica hermítica *h* a los efectos de definir bases unitarias (donde la estructura hermítica tiene que ser compatible con la conexión ∇ en el fibrado asociado).[14] Esa estructura hermítica permite definir un producto interno entre las secciones del fibrado vectorial asociado, es decir, entre los estados cuánticos. Resumiendo, podemos decir que mientras que $GL(1,\Re)$ es el grupo estructural de un fibrado de línea real, el grupo unitario *U*(1) es la reducción (definida por la estructura hermítica) del grupo estructural $GL(1,C) = C - \{0\}$ de un fibrado de línea complejo. Con el objeto de obtener la mecánica cuántica es necesario elegir *U*(1) como grupo de estructura. A los efectos de efectuar una deducción satisfactoria del formalismo cuántico es, entonces, necesario construir un argumento *a priori* capaz de justificar dicha elección.

4 Precuantización

Los argumentos heurísticos presentados en la sección anterior muestran que para construir operadores diferenciales $\hat{v}_f$ que representen fielmente el álgebra de Poisson de los observables $f \in C^\infty(M)$ es necesario definir un fibrado de línea complejo $L \xrightarrow{\pi} M$ dotado de una conexión hermítica ∇ de modo tal que la *curvatura de*

13 Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un *G*-fibrado principal y ρ una representación de *G* sobre un espacio vectorial *V*. Se puede definir entonces una relación de equivalencia sobre el producto $P \times V$ dada por $(p;v) \cong (pg; \rho(g^{-1})v)$ donde $g \in G$. El conjunto cociente $P \times V / G = L \times_G V$ define el espacio total del fibrado vectorial asociado $L = P \times_G V \xrightarrow{\tilde{\pi}} M$, donde la proyección $\tilde{\pi}$ es definida como $\tilde{\pi}(p;v) = \pi(p)$.

14 La relación entre la 1-forma θ de la conexión en *P* y la conexión ∇ sobre el fibrado asociado está dada por la expresión $\nabla(s) = s^*\theta \otimes s$, donde *s* es cualquier sección de P. Una estructura hermítica $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ es compatible con la conexión ∇ si se satisface la condición $d\langle s, s' \rangle = \langle \nabla s, s' \rangle + \langle s, \nabla s' \rangle$ (c.f. Brylinski, 1993).

la conexión esté definida por la forma simpléctica ω. Intentaremos ahora describir brevemente el formalismo de precuantificación por medio del cual se efectúa dicha construcción.

En la sección precedente, hemos mostrado que los operadores diferenciales $\hat{v}_f$ deben ser campos vectoriales sobre la extensión fibrada $P \to M$ de la variedad simpléctica *M*. Mientras que la componente horizontal de un operador $\hat{v}_f$ está dada por el levantamiento horizontal v_f^h definido por la conexión θ del campo vectorial Hamiltoniano v_f, la componente vertical de $\hat{v}_f$ está dada por el campo vectorial vertical ξ_f. Los campos vectoriales resultantes $\hat{v}_f = v_f^h + \xi_f$ son invariantes a lo largo de las fibras y satisf $\tau_* \hat{v}_f = v_f$ y $L_{\hat{v}_f}\theta = 0$ (c.f. Brylinski, 1993). Esta propiedad de preservación de la conexión es una consecuencia del hecho de que el campo vectorial Hamiltoniano correspondiente v_f preserva la forma simpléctica ($L_{v_f}\omega = 0$). Denotaremos Λ el álgebra de Lie de los campos vectoriales $\hat{v}_f$ sobre *P* que son *G*-invariantes y que preservan la conexión. Por medio de las aplicaciones $f \to v_f \to v_f^h$ y $f \to \xi_f$, el observable clásico $f \in C^\infty(M)$ determina unívocamente el campo vectorial $\hat{v}_f = v_f^h + \xi_f \in \Lambda$. De esta manera obtenemos el mapa entre observables $f \in C^\infty(M)$ y operadores cuánticos que estabamos buscando:

$$C^\infty(M) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \Lambda \qquad (14)$$

$$f \mapsto \hat{v}_f = v_f^h + \xi_f$$

Mientras que la componente horizontal v_f^h depende de la correspondencia clásica entre observables $f \in C^\infty(M)$ y campos vectoriales Hamiltonianos $v_f \in H_M$, la componente vertical ξ_f provee la corrección cuántica que garantiza la inyectividad de la aplicación (14) entre observables y operadores.

El núcleo del homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie $\Lambda \xrightarrow{\tau_*} H_M$ (donde $\tau_* \hat{v}_f = v_f$) está compuesto de los campos vectoriales de la forma $\hat{v}_f = \xi_{f=k}$. A los efectos de eliminar la componente horizontal v_f^h es necesario imponer $f = k$ (lo cual implica en efecto $v_f = v_f^h = 0$). Por lo tanto, el núcleo de τ_* está definido por las funciones constante $f = k$ (cf. Brylinski, 1993, p. 91). Eso significa que las funciones constantes definen campos vectoriales e Λ puramente verticales. Tenemos por lo tanto la secuencia exacta corta $0 \to \Re \to \Lambda \xrightarrow{\tau_*} H_M \to 0$. Puede ser demostrado que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Lambda \arrow[dr, "\pi_*"] & & \\
0 \arrow[r] & \Re \arrow[ur] \arrow[r] & C^\infty(M) \arrow[u, "\tilde{\delta}"] \arrow[r] & H_M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde la línea inferior es la extensión central (11) y el mapa $C^{\infty}(M)\xrightarrow{\tilde{\delta}}\Lambda$ es un homomorfismo de álgebras de Lie (cf. Konstant, 1970).

Resumiendo, podemos decir que existen dos representaciones del álgebra de Poisson de los observables $f \in C^{\infty}(M)$ en términos de operadores diferenciales, a saber, el álgebra de campos vectoriales Hamiltonianos H_M (o sea, el álgebra de operadores clásicos) y el álgebra Λ de operadores cuánticos, siendo esta última una extensión de la primera. Mientras que H_M no es una representación fiel de $C^{\infty}(M)$ (dado que todas las funciones constantes $f = k$ se proyectan al mismo campo vectorial Hamiltoniano nulo $v_k = 0$), Λ es una representación fiel (dado que cada función constante $f = k$ define un campo vectorial vertical $\hat{v}_k = \xi_k$ *distinto*). De esa manera, la adición de una dimensión interna "cuántica" a la variedad simpléctica *M* permite definir un álgebra cuántica de operadores Λ isomorfa al álgebra de Poisson de los observables clásicos. Dado que los campos vectoriales $\hat{v}_f \in \Lambda$ fueron obtenidos adicionando a los campos vectoriales Hamiltonianos $\hat{v}_f$ (más precisamente a sus levantamientos horizontales v_f^h) una componente vertical ξ_f, el álgebra Λ de operadores cuánticos puede ser considerada una extensión del álgebra de campos vectoriales Hamiltonianos H_M.

Es necesario especificar ahora sobre qué tipo de estados actúan los operadores diferenciales cuánticos $\hat{v}_f$. Por definición, los campos vectoriales $\hat{v}_f$ actúan sobre funciones sobre *P*. En particular, si restringimos la atención a una cierta clase de funciones, es posible definir una acción inducida sobre las secciones del fibrado asociado $L = P \times_G C \xrightarrow{\pi} M$. De hecho, a partir de una sección $\psi : M \to L$ es posible definir una función $U(1)$-homogénea $\rho : P \to C$ de grado -1 $\rho(\lambda l) = \lambda^{-1}\rho(l)$ para $l \in L$) del modo siguiente:

$$\psi(\tau(p)) = \rho(p)p\,.$$

La homogeneidad de la función ρ garantiza que el valor de la sección ψ para cierto $x = \tau(p) \in M$ no depende del elemento $p \in P$ sobre x (ou seja, $\psi(\tau(p\lambda)) = \rho(p\lambda)p\lambda = \rho(p)p$). Usando esta correspondencia, puede demostrarse que el álgebra de Lie Λ de los operadores cuánticos actúa sobre las secciones $\psi : M \to L$ por medio de la siguiente expresión:

$$\hat{v}_f \cdot \psi = -i\hbar \nabla_{v_f}\psi + f\psi \text{, donde } \nabla_{v_f} = v_f + \frac{i}{\hbar}\theta(v_f).$$

A modo de ejemplo, calculemos los operadores cuánticos $\hat{v}_q$ y $\hat{v}_p$ asociados a los observables q y p sobre la variedad simpléctica $M = T^*Q$, donde el potencial simpléctico está dado por $\theta = -pdp$:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_q &= -i\hbar\nabla_{v_q} + q \\
&= -i\hbar\left(v_q + \frac{i}{\hbar}\theta(v_q)\right) + q \\
&= -i\hbar v_q - pdq(v_q) + q \\
&= -i\hbar\left(-\frac{\partial}{\partial p}\right) - pdq\left(\frac{\partial}{\partial p}\right) + q \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial p} + q
\end{aligned} \tag{15}$$

y análogamente:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_p &= -i\hbar v_p - pdq(v_q) + p \\
&= -i\hbar\left(-\frac{\partial}{\partial q}\right) - pdq\left(\frac{\partial}{\partial q}\right) + p \\
&= -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Las secciones $\psi : M \to L$ serán denominadas *estados precuánticos*. Vale la pena remarcar que estrictamente hablando, los estados precuánticos (y, en consecuencia, también los estados cuánticos) no están dados por *funciones de onda*, sino por *secciones de onda*. Los operadores cuánticos $\hat{v}_f$ son operadores hermíticos con respecto al siguiente producto interno entre dos estados precuánticos:

$$\langle \psi, \varphi' \rangle = \int_M \langle \psi(x), \varphi'(x) \rangle \frac{\omega^n}{n!}.$$

5 Polarización

La definición de los operadores cuánticos $\hat{v}_f$ y de los estados precuánticos $\psi : M \to L$ no alcanza para reobtener la mecánica cuántica. En efecto, los estados precuánticos no pueden ser identificados con los estados cuánticos, dado que las secciones $\psi : M \to L$ dependen de las $2n$ coordenadas del espacio de fases, mientras que los estados cuánticos pueden depender sólo de n variables. En efecto, es posible definir estados precuánticos localizados tanto en q como en p, es decir estados que no satisfacen el principio de indeterminación de Heisenberg. El hecho de que el espacio de Hilbert de los estados precuánticos sea demasiado grande tiene como consecuencia que el conjunto de operadores cuánticos $\{\hat{v}_{f_i}\}$ asociado a un conjunto completo de observables $\{f_i\}$ no actúa de manera irredutible sobre el espacio de Hilbert de los estados precuánticos.[15] En el marco de la cuantificación geométrica, ese problema es resuelto introduciendo una estructura geométrica suplementaria, a saber, una polarización (cf. Woodhouse, 1992). Brevemente, la elección de una polarización reduce a la mitad el espacio de Hilbert de los estados precuánticos.

Una polarización P de una variedad simpléctica (M,ω) es una foliación de M por medio de subvariedades lagrangianas, es decir, subvariedades de M maximalmente isotrópicas. Una subvariedad lagrangiana de una variedad simpléctica (M,ω) de dimensión $2n$ es una subvariedad $K \subset M$ de dimension n tal que ω es idénticamente nula cuando se la evalúa en $T_xK \times T_xK$. Un ejemplo canónico de una subvariedad lagrangiana es el espacio de configuración Q del fibrado cotangente $P = T^*Q$. La identidad $i_{v_g} i_{v_f} \omega = \{f, g\}$ implica que los observables asociados a los campos vectoriales Hamiltonianos que definen una polarización forman un conjunto completo de observables que conmutan. En otros términos, la noción de polarización es la traducción geométrica de la noción algebraica de *conjunto completo de observables que conmutan*. Una sección $\psi : M \to L$ está *polarizada* con respecto a la polarización P si es covariantemente constante a lo largo de P, a saber, si satisface la siguiente condición:

$$\nabla_P \psi = 0 \tag{17}$$

Existen dos tipos de variedades simplécticas con polarizaciones naturales, a saber los fibrados cotangentes y las variedades de Kähler. Consideremos, en primer lugar, la así denominada *polarización vertical* del fibrado cotangente $P = T^*Q$, es decir, la polarización generada por los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial p}$. Si se elije como forma local de la

15 Por ejemplo, la precuantificación del fibrado cotangente $M = T^*\Re$ permite definir los operadores cuánticos $\hat{v}_q = i\hbar\frac{\partial}{\partial p} + q$ y $\hat{v}_p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ asociados al conjunto completo de observables q y p respectivamente (ver expresiones (15) y (16)). Consideremos ahora el subconjunto $C^\infty(\Re) \subset C^\infty(M)$ de estados de la forma $\psi(q)$. Aplicando los operadores $\hat{v}_q$ y $\hat{v}_p$ a dichos estados, se obtienen los nuevos estados $\hat{v}_q\psi(q) = q\,\psi(q)$ y $\hat{v}_p\psi(q) = -i\hbar\frac{\partial\psi(q)}{\partial q}$, los cuales también dependen sólo de q. En consecuencia, $C^\infty(\Re)$ es un subespacio propio de estados que es invariante ante la acción de los operadores cuánticos $\hat{v}_q$ y $\hat{v}_p$.

conexión a la forma $\theta = -pdp$, entonces las secciones polarizadas serán las funciones en T^*Q que satisfacen la condición $\frac{\partial \psi}{\partial p} = 0$. En otros términos, los estados polarizados serán los estados constantes a lo largo de las fibras del fibrado cotangente T^*Q. En consecuencia, los estados polarizados resultantes sólo dependen de la coordenada q del espacio de configuración Q (representación de Schrödinger). Análogamente, la representación en términos de los momentos p puede ser obtenida usando la polarización generada por los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial q}$. Esos ejemplos triviales muestran que la elección de una polarización equivale a elegir una representación particular de la correspondiente teoría cuántica.

Mostraremos ahora que las así denominadas *polarizaciones complejas* permiten reobtener la representación de Fock en términos de operadores de creación y destrucción. Una polarización compleja es básicamente una estructura compleja compatible con la estructura simpléctica. Definamos primero una *estructura casi compleja* sobre M. Una *estructura compleja* sobre un espacio vectorial V es un endomorfismo lineal $J: V \to V$, tal que $J^2 = -1$.

La estructura compleja J hace de V un espacio vectorial complejo de dimensión n donde la multiplicación por $z = a + bi$ se define del modo siguiente $(a+bi)v = av + bJ(v)$.[16] De ese modo, una estructura casi compleja, al definir una multiplicacion por la unidad imaginaria i, especifica que coordenada de V asume el rol de coordenada real y cual de coordenada compleja. Una estructura casi compleja J sobre una variedad M es un campo suave de estructuras complejas $J_x: T_xM \to T_xM$ sobre los espacios tangentes T_xM. El par (M, J) se denomina *variedad casi compleja*. Dada una variedad simpléctica (M, ω), una estructura casi compleja J sobre M es ω*-compatible* si la forma bilineal

$$g_x : T_xM \times T_xM \to \Re$$
$$(u,v) \mapsto g_x(u,v) = -\omega_x(J_x u, v) \quad (18)$$

16 Definamos J tal que $J(1,0) = (0,1)$. Si identificamos la acción de J con la multiplicación por i, entonces $(1,0)$ y $(0,1)$ no son linealmente independientes en el campo de los números complejos. Por lo tanto, $\dim(VJ) = n$ como espacio vectorial complejo.

es una métrica riemanniana sobre M. A su vez, la estructura simpléctica y la métrica g definen el siguiente producto interno hermítico:[17]

$$h(z,w)=g(s,w)-i\omega(z,w).$$

La terna (ω, g, J) se denomina una *terna compatible* y cada una de las tres estructuras puede obtenerse a partir de las otras dos. Puede demostrarse que toda variedad simpléctica tiene estructuras casi complejas compatibles. Por otra parte, toda *variedad compleja* (o sea, toda variedad dotada de cartas locales valuadas en *Cn* y cuyas funciones de transición son holomorfas) tiene una estructura casi compleja canónica inducida. En efecto, se pude mostrar que las funciones de transición $\varphi_{ij}: C^n \to C^n$ preservan la estructura casi compleja si y sólo si φ_{ij} son funciones holomorfas, es decir, si la variedad es una variedad compleja. La recíproca no es siempre cierta. En otros términos, una estructura casi compleja no siempre es inducida por una estructura compleja. Una estructura casi compleja J se dice integrable si y solo si J es la estructura casi compleja inducida por una estructura de variedad compleja sobre M. El teorema de Newlander-Nirenberg establece que una estructura casi compleja es integrable si y solo si el así denominado *tensor de Nijenhuis* se anula. Una *variedad de Kähler* es una variedad simpléctica (M,ω) dotada de una estructura casi compleja compatible integrable. La forma simpléctica ω se denomina *forma de Kähler*. Se sigue de la definición que (M,ω) es una variedad compleja.

El endomorfismo J no puede ser diagonalizado en el campo de los números reales, ya que los autovalores de J son $\pm i$. En consecuencia, extenderemos el campo de escalares del espacio vectorial TM a C por medio de la *complexificación* $TM \otimes C$ de TM.

17 Supongamos un espacio vectorial complejo *Cn* cuyos vectores serán expresados como $z = (z_1,\dots, zn)$. El producto interno hermítico h entre dos vectores es:

$$\langle z,w\rangle=\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{w}_j=\sum_{j=1}^{n}\left(x_ju_j+y_jv_j\right)+i\sum_{j=1}^{n}\left(u_jy_j-v_jx_j\right)$$

donde $z_j = x_j + iy_j$ y $w_j = u_j + iv_j$. Analicemos ahora el producto hermitico entre $z = x + iy$ y $w = u + iv$ en $C = \Re\times\Re$. La parte real de dicho producto hermítico coincide con el producto interno real $g((x,y),(u,v)) = xu + yv$. La parte imaginaria coincide (módulo un signo) con la forma simpléctica standard en $\Re\times\Re$ evaluada en (x,y) y (u,v). En otros términos, $\omega((x,y),(u,v)) = vx - uy = -\mathrm{Im}\langle x+iy, u+iv\rangle$. Por otra parte, el producto interno real puede definirse por medio de la expresión (18). En efecto, utilizando $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, se tiene:

$$\begin{aligned}-\omega(Jz,w)&=-\omega(J(x,y),(u,v))\\&=-\omega((-y,x),(u,v))\\&=-(-vy-ux)\\&=ux+vy\\&=g((x,y),u,v).\end{aligned}$$

La estructura casi compleja *J* puede extenderse linealmente a *TMC* por medio de la expresión $J(v \otimes z) = J(v) \otimes z$. Definamos ahora los operadores de proyección $P^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \mp iJ) : TM^{C} \to TM^{\pm}$ donde $TM^{\pm}$ son los autoespacios asociados a los autovalores $\pm i$. Un elemento $v \in TM^{C}$ puede ser descompuesto en la forma $v = v^{+} + v^{-}$ con $v^{\pm} = P^{\pm} v$. En consecuencia, tenemos una descomposición de *TMC* de la forma $TM^{C} = TM^{+} \otimes TM^{-}$. Queremos ahora hallar una base de *TMC* asociada a dicha descomposición. Para ello, escribamos los vectores ∂_x y ∂_y de la base original del modo siguiente:

$$\partial_x = \frac{i}{2}(\partial_y - i\partial_x) - \frac{i}{2}(\partial_y + i\partial_x),$$

$$\partial_y = \frac{1}{2}(\partial_y - i\partial_x) + \frac{1}{2}(\partial_y + i\partial_x).$$

Definamos entonces los siguientes vectores:

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_y - i\partial_x) \quad (19)$$

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_y + i\partial_x), \quad (20)$$

de modo tal que $\partial_x = -i\partial_z - i\partial_{\bar{z}}$ y $\partial_y = \partial_z + i\partial_{\bar{z}}$. Esas definiciones son consistentes, si definimos z y $\bar{z}$ del modo siguiente:

$$z = x + iy,$$
$$\bar{z} = y - ix.$$

Esas coordenadas complejas están definidas por una estructura casi compleja *J*, tal que $J(\partial_y) = \partial_x$ y $J(\partial_x) = -\partial_y$. Si aplicamos *J* a los vectores (19) obtenemos $J(\partial_z) = i\partial_z$ y $J(\partial_z) = -i\partial_z$. En otros términos, ∂_z y $\partial_{\bar{z}}$ son autovectores de J con autovalores i y $-i$ respectivamente. En la base $\{\partial_z, \partial_{\bar{z}}\}$, la estructura compleja tiene entonces la forma diagonal

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Los operadores $P^{\pm}$ proyectan sobre los autoespacios de J. De hecho,

$$J\left(P^{\pm}v\right)=\frac{1}{2}\left(J\mp iJ^{2}\right)v=\frac{1}{2}\left(J\pm i\right)v=\pm\frac{i}{2}\left(1\mp iJ\right)v=\pm iP^{\pm}v\,.$$

La forma simpléctica asume la forma:

$$\omega=\frac{i}{2}d\bar{z}\wedge dz\,.$$

Una función K, tal que

$$\omega=i\partial\bar{\partial}K\,,$$

donde $\partial=dz\wedge\frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{\partial}=d\bar{z}\wedge\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$, se denomina *potencial de Kähler*. En particular, $K=-\frac{1}{2}z\bar{z}$ es un potencial de Kähler. Elijamos ahora el potencial simpléctico $\theta=-i\partial K=\frac{i}{2}\bar{z}dz$. La ecuación de polarización de los estados a lo largo de $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ asume entonces la forma:

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}}}\psi&=\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}+\frac{i}{\hbar}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)\\&=\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}+\frac{i}{\hbar}\left(\frac{i}{2}\bar{z}dz\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)\\&=\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\,.\end{aligned}$$

De esa manera, la condición de polarización $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{z}}}\psi=0$ selecciona las funciones holomorfas $f(z)$. En efecto, escribamos $\psi(z,\bar{z})=u(x,y)+iv(x,y)$. La condición de polarización es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}&=\frac{1}{2}\left(\partial_{y}+i\partial_{x}\right)\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}+i\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)=0\,.\end{aligned}$$

Esa condición implica las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

para la variable compleja $z = x + iy$. Esa representación se denomina representación *holomorfa o de Bargmann-Fock*.

Vale la pena destacar que la necesidad de polarizar los estados precuánticos, lejos de derivar de resultados matemáticos generales o de una necesidad estrictamente conceptual, es una generalización de diversos métodos de cuantificación cuya única justificación es que permite recuperar la mecánica cuántica ordinaria.

6 Topología y cuantificación

En esta sección, analizaremos bajo qué condición una variedad simpléctica puede ser cuantificada. El principal resultado es que es posible definir un fibrado de línea complejo sobre el espacio de fases *M*, de modo tal que la 2-forma simpléctica ω defina la curvatura de una conexión hermética si y solo si la siguiente condición de integralidad es satisfecha:

$$\int_{\Sigma} \omega = 2\pi\hbar n, \tag{21}$$

donde Σ es cualquier superficie de dimensión 2 cerrada y orientada en M. Una variedad simpléctica (M, ω) que satisface la condición de integralidad (21) se denomina quantizable.[18] Como veremos a continuación, esa condición tiene un origen esencialmente topológico.

Puede demostrarse que la condición de integralidad permite explicar el carácter discreto de ciertos observables físicos, como, por ejemplo, la energía y el spin (cf. Souriau, 1997; Woodhouse, 1992). Eso significa que el carácter discreto de los espectros cuánticos, asociados a los observables es una consecuencia directa de la topología del fibrado de línea complejo $L \to M$. Sea un sistema clásico, cuyos estados están descriptos por la variedad simpléctica (M, ω) de dimensión $2n$, y un observable

18 Aunque la variedad simpléctica (M, ω) sea cuantizable, el fibrado de línea complejo $L \to M$ dotado de una conexión hermítica de curvatura dada por ω no está únicamente determinado por la variedad simpléctica (M, ω). Existe una única cuantización solo si *M* es simplemente conexa. En caso contrario, el sistema clásico admite varias quantizaciones no equivalentes.

$f(q,p) \in C^{\infty}(M)$. Queremos describir los estados caracterizados por un valor determinado f_0 del observable $f(q,p)$. Para ello, restringiremos el espacio de fases a la subvariedad $f^{-1}(f_0) \subset (M)$. La acción generada por el campo vectorial Hamiltoniano v_f asociado a f permite definir una fibración $\pi : f^{-1}(f_0) \to M_0$ sobre el espacio cociente M_0, tal que las fibras son las órbitas definidas por la acción de v_f. El espacio cociente M_0 es una variedad simpléctica de dimensión $2n$-2 cuya forma simpléctica satisface $i^* \omega_M = \pi^* \omega_{M_0}$, donde $i : f^{-1}(f_0) \to M$. Dicho espacio cociente se denomina *espacio de fases reducido*. Ahora queremos obtener los estados cuánticos caracterizados por el autovalor f_0 asociado al operador cuántico. Para ello, podemos aplicar el formalismo de cuantificación geométrica a la variedad simpléctica M_0. A dichos efectos, la 2-forma ω_{M_0} debe satisfacer la condición de integralidad (21). Dado que la forma simpléctica ω_{M_0} depende en general del valor f_0, la expresión (21) permite obtener los posibles valores discretos de f_0.

Presentaremos, ahora, un argumento que permite entender el significado físico de la condición (21). Consideremos un loop $\gamma : [0,1] \to M$, tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x \in M$. El transporte paralelo, definido por la conexión θ a lo largo de γ, define la siguiente transformación de los elementos de la fibra $\tau^{-1}(x) \subset P$:

$$\xi_\gamma = \tau^{-1}(x) \to \tau^{-1}(x)$$
$$p \mapsto p g_\gamma ,$$

donde $g_\gamma \in G$. Puede demostrarse que el elemento g_γ está dado por la siguiente expresión:

$$g_\gamma = e^{\frac{i}{\hbar}\oint_\gamma \theta} .$$

En otros términos, el transporte paralelo a lo largo de un loop γ en M produce un cambio de fase dado por la integral de la conexión θ a lo largo del loop. Elijamos ahora una superficie $\Sigma_+ \subset M$ tal que γ sea el borde de Σ_+, i.e. tal que $\gamma = \partial \Sigma_+$. Usando el teorema de Stokes, el elemento g_γ puede reformularse en términos de la forma simpléctica ω del modo siguiente:

$$g_\gamma = e^{\frac{i}{\hbar}\oint_\gamma \theta} = e^{\frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma_+} \omega} .$$

Consideremos ahora otra superficie $\Sigma_- \subset M$, tal que $\gamma^{-1} = \partial \Sigma_-$ y sea Σ la unión de las superficies Σ_+ y Σ_-. El elemento g_γ puede expresarse tanto en términos de Σ_+ como en términos de Σ_-:

$$g_\gamma = e^{\frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma_+}\omega} = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma_-}\omega}. \tag{22}$$

Por lo tanto,

$$e^{\frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma_+}\omega + \frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma_-}\omega} = e^{\frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-}\omega} = 1 .$$

Para que esa condición se satisfaga, o sea, para que el elemento g_γ en (22) no dependa de la superficie bordeada por γ sobre la cual se realiza la integración, la integral de ω sobre Σ debe satisfacer la condición de integralidad (21).

Mostraremos ahora que la condición de integralidad sobre la forma simpléctica ω es una consecuencia directa de la condición de compatibilidad (denominada *condición de cociclos*) que garantiza que las distintas trivializaciones locales del espacio fibrado $L \to M$ se "pegan" bien en las intersecciones de los abiertos que definen dichas trivializaciones. Supongamos que $U = \{U_i\}_{i\in I}$ es un buen recubrimiento abierto de *M*.[19] Elijamos para cada conjunto abierto U_i una sección no-nula $s_i : U_i \to L$. Estas secciones definen una trivialización local por medio de las aplicaciones $\psi_i : C \times U_i \to \pi^{-1}(U_i)$, donde $\psi_i(z,x) = s_i(x)z$. Podemos decir, entonces, que un espacio fibrado es un producto "torcido" (twisted) entre dos variedades, tal que localmente dicho producto se descompone en un conjunto de productos triviales $C \times U_i$ por medio de los isomorfismos (no-canónicos) ψ_i definidos por las secciones locales s_i. En cada intersección $U_{ij} = U_i \cap U_j$, existen dos trivializaciones diferentes ψ_i y ψ_j. Usando la composición

$C \times U_i \xrightarrow{\psi_i} \pi^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{\psi_j^{-1}} C \times U_j$, podemos definir las *funciones de transición*

$\psi_{ij} = \psi_j^{-1} \circ \psi_i : C \times U_i \to C \times U_j$,

donde $\psi_{ij}(z,x) = \left(\dfrac{s_i(x)}{s_j(x)}, x\right)$. Esas funciones permiten "pegar" las trivializaciones ψ_i y

ψ_j en las intersecciones U_{ij}. Las funciones $c_{ij} = \dfrac{s_i(x)}{s_j(x)}$ son denominadas *cociclos*.

Dichos cociclos satisfacen $c_{ii} = 1$, $c_{ij} = c_{ji}^{-1}$ y la así denominada condición de cociclos:

19 Un recubrimiento abierto es un buen recubrimiento si todas las intersecciones finitas no vacías son isomorfas a $\Re^n$.

$$c_{ij}c_{jk}c_{ki} = \frac{s_i(x)}{s_j(x)}\frac{s_j(x)}{s_k(x)}\frac{s_k(x)}{s_i(x)} = 1\,, \tag{23}$$

en las triples intersecciones $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$. Dado que los cociclos c_{ij} especifican como las diferentes trivializaciones locales son "pegadas" en las intersecciones correspondientes, los mismos definen la estructura topológica global del fibrado. De hecho, dichos cociclos definen clases de la cohomología de Èech $H^1_{Cech}(M,\Re)$ (ver apéndice). En efecto, el conjunto $\{c_{ij}\}$ define funciones reales en cada intersección U_{ij}, definiendo de esa manera una 1-cocadena de Èech. Por otra parte, la condición de cociclos (23) significa que c_{ij} es un 1-cociclo de Èhech, o sea. que $\delta c_{ij} = 1$, donde δ es el diferencial de Èech y el grupo es un grupo multiplicativo.

La relación de isomorfismo entre espacios fibrados permite definir una relación de equivalencia en el conjunto de los fibrados de línea complejos $L \to M$. El conjunto de clases de isomorfía tiene una estructura de grupo conmutativo definida por el producto tensorial de fibrados de línea.[20] Dicho grupo se denomina grupo de Picard de *M*, y se denota $Pic(M)$. Se puede mostrar que los cociclos c_{ij} de dos fibrados isomorfos pertenecen a la misma clase de cohomología en $H^1_{Cech}(M,\Re)$.[21] Por lo tanto, las clases de cohomología en $H^1_{Cech}(M,\Re)$ clasifican a las clases de isomorfía de fibrados de línea complejos $L \to M$ en $Pic(M)$.

Mostraremos ahora que existe una aplicación entre los cociclos $c_{ij} \in H^1_{Cech}(M,\Re)$ y las clases de cohomología a valores enteros en $H^2_{Cech}(M,Z)$. Dado que las intersecciones U_{ij} son simplemente conexas, es posible definir funciones suaves $u_{ij} = -i\hbar \ln c_{ij}$.

20 El producto tensorial de dos fibrados vectoriales de línea es también un fibrado de línea. En efecto, el producto tensorial de los fibrados de línea $L \to M$ y $L' \to M$ cuyas fibras son los espacios vectoriales V y V' respectivamente, es el fibrado $L \otimes L' \to M$ cuyas fibras están dadas por el producto tensorial $V \otimes V'$. Los elementos de $V \otimes V'$ son de la forma $w = a\hat{e} \otimes \hat{e}'$ donde los vectores $\hat{e}$ y $\hat{e}'$ definen las bases de V y V' respectivamente. En consecuencia, el elemento $w \in V \otimes V'$ depende de una sola coordenada, por lo cual $V \otimes V'$ puede ser considerado un espacio vectorial de dimensión 1. El producto tensorial de fibrados de línea permite definir una estructura de grupo, donde el fibrado trivial define el elemento identidad y el fibrado dual L^* define el inverso L^{-1} de L.

21 Supongamos dos trivializaciones distintas $\psi_i, \widetilde{\psi}_i : C \times U_i \to \pi^{-1}(U_i)$ del mismo fibrado definidas por las secciones $s_i, \widetilde{s}_i : U_i \to L$. Tendremos por lo tanto dos conjuntos de funciones de transición $\psi_{ij} = \psi_j^{-1} \circ \psi_i$ y $\widetilde{\psi}_{ij} = \widetilde{\psi}_j^{-1} \circ \widetilde{\psi}_i$. Las funciones de transición ψ_{ij} y $\widetilde{\psi}_{ij}$ están relacionadas por medio de la expresión $\widetilde{\psi}_{ij} = t_j^{-1}\psi_{ij}t_i$ donde $t_i = \psi_j^{-1} \circ \widetilde{\psi}_i : C \times U_i \to C \times U_i$ está dado por $t_i(z,x) = \left(\frac{s_i(x)}{\widetilde{s}_i(x)}z, x\right)$. La relación entre los dos conjuntos de cociclos está dada por $\widetilde{c}_{ij} = \alpha_i^{-1}c_{ij}\alpha_j$, donde $\alpha_j = \dfrac{s_j(x)}{\widetilde{s}_j(x)}$. Dos fibrados son isimorfos si los correspondientes cociclos satisfacen la relación $\widetilde{c}_{ij} = \alpha_i^{-1}c_{ij}\alpha_j$. Dado que $\delta(\alpha_i) = \alpha_j(x)\alpha_i(x)^{-1}$ donde α_i es una 0-cadena de Èech, la relación entre los dos cociclos puede rescribirse como $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij}\delta(\alpha_i)$. Esto significa que $\widetilde{c}_{ij}$ y c_{ij} difieren en una forma exacta y que por lo tanto pertenecen a la misma clase de cohomología.

En la triple intersección U_{ijk}, la condición de cociclos (23) se traduce en la siguiente condición sobre las funciones u_{ij}:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\left(u_{ij}+u_{jk}+u_{ki}\right)=z_{ijk}\in Z\,. \tag{24}$$

El pasaje de las funciones c_{ij} a valores reales sobre las intersecciones U_{ij} a las funciones z_{ijk} a valores enteros sobre las triples intersecciones U_{ijk} es un caso particular del así denominado *morfismo de conexión* en homología algebraica. Sea la siguiente secuencia exacta corta

$$0\to Z\xrightarrow{\;i\;}O\xrightarrow{\;\exp\;}O^{*}\to 0\,, \tag{25}$$

donde O es el conjunto de funciones holomorfas considerado como un grupo aditivo, O^{*} el conjunto de funciones holomorfas que nunca se anulan considerado como un grupo multiplicativo, y *exp* la aplicación $f\to e^{2\pi i f}$. El morfismo de conexión es el morfismo entre los grupos de cohomología $H^{n}_{Cech}\left(M,O^{*}\right)$ y $H^{n+1}_{Cech}\left(M,Z\right)$. En nuestro caso, la relación entre los cociclos c_{ij} y los elementos z_{ijk} está implementada en términos cohomológicos por medio del siguiente morfismo de conexión:[22]

$$\varepsilon:H^{1}_{Cech}\left(M,O^{*}\right)\to H^{2}_{Cech}\left(M,Z\right)$$
$$c_{ij}\mapsto z_{ijk}$$

La clase de cohomología definida por z_{ijk} se denomina *clase de Chern* $c_i(L)$ del fibrado vectorial $L\to M$.

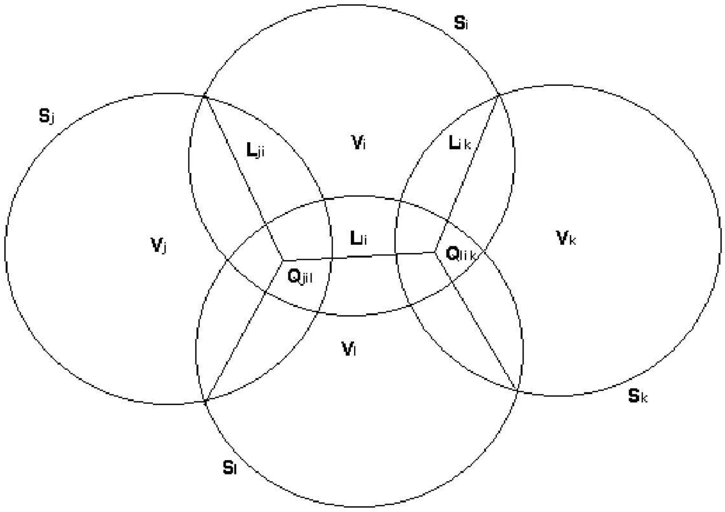
Calcularemos ahora la integral (21). Sea $U|_{S}=\{S_i=U_i\cup S\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de la 2-superficie cerrada S inducido por *U*. Dado que los conjuntos abiertos $\{S_i\}_i$ se intersectan, no podemos simplemente sumar las contribuciones $\int_{S_i}\omega|S_i$. Si así lo hiciesemos, dichas contribuciones serían contadas varias veces en las intersecciones. Usando como bordes las líneas $\{L_{ij}\}_{ij}$ que unen los puntos de intersección entre los conjuntos superpuestos $\{S_i\}_i$, es posible definir los conjuntos disjuntos $\{V_i\}_i$ (ver Fig. 1). La integral (21) puede entonces descomponerse del modo siguiente:

22 Como la aplicación *exp* es sobreyectiva (dada la exactitud de la secuencia corta (25)), existe un elemento $u_{ij}\in O$ tal que $exp\left(u_{ij}\right)=c_{ij}$. Ahora bien, $\delta\left(c_{ij}\right)=\delta\left(\exp\left(u_{ij}\right)\right)=\exp\left(\delta\left(u_{ij}\right)\right)=0$ ya que c_{ij} es un cociclo. Por lo tanto, $\delta\left(u_{ij}\right)\in\ker(\exp)$. Dado que la secuencia corta es exacta, se tiene $\delta\left(u_{ij}\right)=i\left(z_{ijk}\right)$ para algún $z_{ijk}\in Z$. Ahora queremos ver que $z_{ijk}\in H^{2}_{C}(M,Z)$, es decir que z_{ijk} es un cociclo. Aplicando δ a $\delta\left(u_{ij}\right)=i\left(z_{ijk}\right)$ se obtiene $\delta\delta\left(u_{ij}\right)=\delta i\left(z_{ijk}\right)=0$ ya que $\delta^{2}=0$. Entonces se tiene $i\left(\delta\left(z_{ijk}\right)\right)=0$. Como la aplicación i es inyectiva, $\delta\left(z_{ijk}\right)=0$.

$$\int_S \omega = \sum_i \int_{V_i} \omega\Big|_{V_i} = \sum_i \int_{V_i} d\theta_i = \sum_i \int_{\partial V_i} \theta_i = \sum_{i<j} \int_{L_{ij}} \left(\theta_i - \theta_j\right), \tag{26}$$

donde θ_i son las formas locales de la conexión θ y donde hemos utilizado el teorema de Stokes $\int_C d\alpha = \int_{\partial C} \alpha$. Puede demostrarse que la restricción de las formas locales θ_i y θ_j a las intersecciones U_{ij} están relacionadas por medio de la siguiente expresión:[23]

$$\theta_i - \theta_j = du_{ij}. \tag{27}$$



23 Dada una conexión θ, la derivada covariante de la sección s está dada por $\nabla s = s^*\theta \otimes s$. Las secciones s_i que definen las trivializaciones definen las formas locales $\theta_i = \frac{\nabla s_i}{s_i}$. En las intersecciones $U_{ij} = U_i \cap U_j$, tenemos:

$$\begin{aligned}\theta_i - \theta_j &= \frac{\nabla s_i}{s_i} - \frac{\nabla s_j}{s_j} \\ &= \frac{\nabla\left(c_{ij} s_j\right)}{c_{ij} s_j} - \frac{\nabla s_j}{s_j} \\ &= \frac{c_{ij} \nabla s_j + dc_{ij} \otimes s_j}{c_{ij} s_j} - \frac{\nabla s_j}{s_j} \\ &= \frac{dc_{ij}}{c_{ij}} = du_{ij},\end{aligned}$$

donde usamos $c_{ij} = \frac{s_i}{s_j}$ y la regla de Leibniz $\nabla(fs) = f\nabla(s) + df \otimes s$.

Utilizando esta ley de transformación, la expresión (26) da

$$\int_S \omega = \sum_{i<j} \int_{L_{ij}} du_{ij} = \sum_{i<j} \int_{\partial L_{ij}} u_{ij} = \sum_{ijk} \left(u_{ij} + u_{jk} + u_{ki}\right)\left(Q_{ijk}\right),$$

donde Q_{ijk} es el punto de intersección entre los lados L_{ij}, L_{ji} y L_{ki}.[24] Usando la condición (24), obtenemos:

$$\int_S \omega = 2\pi\hbar \sum_{ijk} z_{ijk} = 2\pi\hbar n \qquad (28)$$

Ese cálculo muestra que la condición de integralidad (21) es una consecuencia directa de la condición de cociclos (23), es decir, de las condiciones de consistencia que deben satisfacer las funciones de transición a los efectos de definir un fibrado de línea complejo $L \to M$.

Estudiaremos ahora la relación entre la 2-forma cerrada ω y el cociclo z_{ijk}. Mientras que ω define una clase en la cohomología de Rham $H^2_{deRham}(M)$ de *M* definida por el diferencial exterior d, el cociclo $\{Z_{ijk}\}$ define una clase en la cohomología de Èech $H^2_{Cech}(M, Z)$ de *M* a valores enteros definida por el diferencial de Chech δ (ver apéndice). Puede demostrarse que los dos grupos de cohomología son isomorfos. En lugar de demostrar eso en general, mostraremos como es posible pasar de ω a $\{Z_{ijk}\}$ y viceversa.

Mostraremos primero como es posible definir el cociclo $\{Z_{ijk}\}$ a partir de la estructura simpléctica ω. Para ello utilizaremos: (1) el hecho de que toda forma diferencial cerrada es localemente exacta (lema de Poincaré), (2) la nilpotencia de los diferenciales d y δ, y 3) la conmutatividad entre d y δ (i.e. $d\delta = \delta d$). Como veremos a continuación, las relaciones entre los distintos elementos involucrados pueden resumirse por medio del siguiente diagrama (cf. Alvarez, 1985; Bott & Tu, 1982):

$$\begin{array}{ll|llll}
\Omega^3 & 0 & 0 & & & \\
\Omega^2 & \omega & \omega_i = d\theta_i & 0 & & \\
\Omega^1 & & \theta_i & \delta\theta_i = \theta_i - \theta_j = du_{ij} & 0 & \\
\Omega^0 & & & u_{ij} & \delta u_{ij} = u_{ij} + u_{jk} + u_{ki} = z_{ijk} & 0 \\
\hline
d & \uparrow & & & z_{ijk} & 0 \\
\delta & \rightarrow & C^0 & C^1 & C^2 & C^3
\end{array}$$

(29)

24 Por ejemplo, la contribución al punto de intersección Q_{123} proveniente de los lados $\{Z_{ijk}\}$, L_{32}, L_{31} es $(u_{12} - u_{32} - u_{13})(Q_{123})$. Usando que $u_{ij} = -u_{ji}$, se obtiene $(u_{12} + u_{23} + u_{31})(Q_{123})$.

Supongamos que tenemos una 2-forma global cerrada $\omega \in \Omega^2(M)$. Dicha forma puede ser restringida a las formas locales ω_i definidas en los abiertos U_i. Esta operación de restricción define la acción del diferencial δ sobre $\Omega^q(M)$, o sea, $\delta\omega = \{\omega_i\}$. Si aplicamos nuevamente δ, tenemos $\delta\omega_i = \omega_i - \omega_j = 0$, ya que ω_i y ω_j provienen de la misma forma global ω. En los abiertos U_i, el lema de Poincaré asegura que las formas locales cerradas ω_i son exactas. Podemos escribir, entonces, $\omega_i = d\theta_i$, donde $\theta_i \in C^0(U,\Omega^1)$. Aplicando δ a θ_i se obtiene $\delta\theta_i = \theta_i - \theta_j$. Dado que d y δ conmutan, se tiene $d\delta\theta_i = \delta d\theta_i = \delta\omega_i = 0$. Eso implica que $\delta\theta_i$ es d-cerrada y, por lo tanto, (via el lema de Poincaré) localmente exacta. En consecuencia, $\delta\theta_i = du_{ij}$, donde $u_{ij} \in C^1(U,\Omega^0)$. Aplicando δ a u_{ij}, se obtiene $\delta u_{ij} = u_{ij} + u_{jk} + u_{ki} = z_{ijk}$. Aplicando nuevamente la conmutatividad entre d y , se tiene $dz_{ijk} = d\delta u_{ij} = \delta du_{ij} = \delta\delta\theta_i = 0$. En consecuencia, los elementos $z_{ijk} \in C^2(U,\Omega^0)$ no sólo son δ-cerrados (dada la nilpotencia de δ), sino también d-cerrados.[25] En otros términos, las 2-cocadenas z_{ijk} son cociclos localmente constantes, es decir, pertenencen a $H^2_{Cech}(M,\Re)$. De esa manera, hemos definido un mapa entre $\omega \in H^2_{DeRham}(M)$ y $z_{ijk} \in H^2_{Cech}(M,\Re)$.

Recíprocamente, mostremos ahora como la 2-forma cerrada global ω puede ser obtenida a partir de los cociclos z_{ijk}. Para ello, utilizaremos el hecho de que toda cociclo en $C^p(U,\Omega^q)$ es exacto para $p>0$. En otros términos, usaremos que $H^p(U,\Omega^q)$ es trivial para $p>0$ (ver apéndice). Las 2-cocadenas z_{ijk} son δ-cerradas. Ahora bien, las 2-cocadenas z_{ijk} son también -exactas, es decir, existen 1-cocadenas $u_{ij} \in C^1(U,\Omega^0)$ tal que $z_{ijk} = \delta u_{ij}$. Los elementos u_{ij} pueden ser expresados en términos de z_{ijk} por medio de la expresión $u_{ij} = \sum_k z_{ijk}\rho_k$, donde ρ_i es una partición de la unidad (o sea, $p_j > 0, \sum_j p_j = 1$ y p_j tiene soporte compacto en U_j). De hecho,

$$(\delta u)_{ijk} = u_{ij} + u_{jk} + u_{ki} = \sum_l \left(z_{ijl} + z_{jkl} + z_{kil} \right)\lambda_l = z_{ijk}\sum_l \lambda_l = z_{ijk}\,,$$

donde usamos que z_{ijk} es un cociclo (o sea, *(äz)ijkl = zjkl " zikl + zijl " zijk = 0*). Ahora bien, z_{ijk} satisface $dz_{ijk} = 0$ ya que son funciones localmente constantes. Por lo tanto,

25 Verifiquemos explícitamente que $\delta z_{ijk} = 0$:

$$\begin{aligned}(\delta z)_{ijk} &= z_{jkl} - z_{ikl} + z_{ijl} - z_{ijk}\\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\left[(u_{jk} + u_{kl} + u_{lj}) - (u_{ik} + u_{kl} + u_{li}) + (u_{ij} + u_{jl} + u_{li}) - (u_{ij} + u_{jk} + u_{ki})\right]\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

$\delta du_{ij} = d\delta u_{ij} = dz_{ijk} = 0$. En otros términos, los elementos du_{ij} son δ-cerrados. Análogamente a lo hecho anterioremente, se tiene $\delta d\theta_i = d\delta\theta_i = ddu_{ij} = 0$. En consecuencia, los elementos $d\theta_i$ son ä-cerrados, o sea, $\delta(d\theta_i) = d\theta_i - d\theta_j = 0$. En otros términos, $d\theta_i = d\theta_j$. Por lo tanto, existe una 2-forma global ω tal que $\omega_i = d\theta_i$. Esa 2-forma es cerrada, ya que $d\omega_i = dd\theta_i = 0$. Esa forma puede ser expresada en término del cociclo z_{ijk} por medio de la siguiente expresión:

$$\omega_i = d\theta_i = d\sum_k \rho_k du_{ik} = \sum_k du_{ik} d\rho_k = \sum_k d\left(\sum_l z_{ikl}\rho_l\right) d\rho_k = \sum_{kl} z_{ikl} d\rho_l d\rho_k .$$

De esa manera, la trivilidad de los grupos de cohomología $H^p(U,\Omega^q)$ para $p > 0$ permite definir una 2-forma diferencial cerrada $\omega \in H^2_{deRham}(M)$ a partir del cociclo $z_{ijk} \in H^2_{Cech}(M,\Re)$.

El diagrama (30) también puede ser usado para mostrar que tanto la forma diferencial $\omega \in H^2_{deRham}(M)$ como el cociclo $z_{ijk} \in H^2_{Cech}(M,\Re)$ quedan fijados, si se especifican los potenciales locales θ_i, las funciones de pegado u_{ij} que satisfagan la condición de cociclos (24) y las leyes de transformación $\delta\theta_i = \theta_i - \theta_j = -du_{ij}$ en las intersecciones U_{ij}. Tenemos entonces que $\delta d\theta_i = d\delta\theta_i = ddu_{ij} = 0$. En consecuencia, $\delta d\theta_i = d\theta_i - d\theta_j = 0$. En otros términos, $d\theta_i = d\theta_j$ en U_{ij}. Es posible, por lo tanto, definir una 2-forma diferencial global $\omega \in \Omega^2(M)$ tal que $\omega_i = d\theta_i$. Esa forma es cerrada, es decir satisface $d\omega_i = dd\theta_i = 0$. Veamos ahora como obtener el cociclo $z_{ijk} \in H^p_{Cech}(M,\Re)$. Aplicando δ a u_{ij} se obtiene $(\delta u)_{ijk} = u_{ij} + u_{jk} + u_{ki} \equiv z_{ijk}$. Ahora bien, $d\delta u_{ijk} = \delta du_{ij} = \delta\delta\theta_i = 0$. Por lo tanto, $d\delta u_{ij} = 0$, lo que significa que $\delta u_{ij} \equiv z_{ijk}$ describe funciones localemente constantes. Por lo tanto, $z_{ijk} \in C^2(U,Z)$. Por otra parte, z_{ijk} es un 2-cociclo, ya que $\delta z_{ijk} = \delta\delta u_{ij} = 0$. Hemos demostrado, entonces, que $z_{ijk} \in H^2_{Cech}(M,Z)$.

Conclusion

A partir del análisis realizado de la cuantificación geométrica, podemos proponer la tesis según la cual la mecánica cuántica, lejos de ser un nuevo "paradigma" inconmensurable al paradigma clásico, constituye más bien una "superación dialéctica" de la mecánica clásica. Según tal punto de vista, la diferencia entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica no debe ser comprendida en términos de una "revolución científica" discontinua, sino más bien como un proceso continuo de mediación por medio del cual la mecánica cuántica se presenta como una *extensión* – y no como una refutación – de la mecánica clásica. Diremos que una teoría *supera* a otra teoría cuando la primera permite resolver ciertos impasses *teóricos* de la teoría superada, conservando esta una validez aproximativa en ciertos límites. Mientras que la noción popperiana de *falsabilidad* se basa en la posibilidad de elegir entre teorías rivales apelando al tribunal de la experiencia, la noción hegeliana de *superación*, haciendo abstracción de toda relación a la experiencia, permite focalizarse sobre las relaciones puramente teóricas entre dos teorías consecutivas. La relación de superación dialéctica entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica se declina de dos modos complementarios. En primer lugar, diremos que la mecánica clásica, lejos de ser simplemente "falsa", lejos de haberse tornado obsoleta luego del advenimiento de la mecánica cuántica, debe ser comprendida como un momento parcial y unilateral de la "imagen" cuántica de la naturaleza física. Como sostiene Hegel, "la exposición de la conciencia no verdadera en su no verdad no es un movimiento puramente negativo" (Hegel, 1998, p. 55). La superación cuántica de la mecánica clásica deve ser comprendida como una "negación determinada" que nos permita compreender tanto el origen de su unilateralidad y de su parcialidad como los límites de su validez aproximativa. El que una teoría sea superable por otra constituye un síntoma del hecho de que dicha teoría es capaz de encontrar una resistencia que podríamos denominar *real*. La existencia de "puntos de impasse" (tanto teóricos como experimentales), es decir de una resistencia en relación a la potencia explicativa de la teoría en cuestión, lejos de ser un argumento a favor de su falsedad, es un síntoma del hecho de que dicha teoría, lejos de ser como "lijera paloma" que – según la imagen propuesta por Kant –, "podría imaginarse que volaría mucho mejor aún en un espacio vacío", es capaz de sentir la "fricción" producida por el contacto con la "naturaleza misma" (Kant, 1998, A5-B9).

Que la mecánica cuántica sea una "superación" de la mecánica clásica implica, en primer lugar, la tesis según la cual deberíamos ser capaces de justificar y entender, gracias al formalismo cuántico, la validez aproximativa de la mecánica clásica. El estudio de las limitaciones y de la unilateralidad de la mecánica clásica consideradas desde el punto de vista de la mecánica cuántica define el así llamado *límite clásico* de la mecánica cuántica. Dicho límite debería permitir comprender las condiciones mínimas de compatibilidad entre la descripción cuántica fundamental de un sistema físico y su comportamiento aproximativamente clásico. Dicho de otro modo, el estudio del límite clásico debe permitir comprender porque la naturaleza física, siendo fundamentalmente cuántica, aparece – al ser "observada" por medio de ciertos "observables" – bajo la forma descripta por la mecánica clásica.

Ahora bien, el estudio del límite clásico no agota las relaciones entre ambas teorías. En el marco de las diversas tentativas por comprender el límite clásico, *se asume el formalismo cuántico* y se intenta comprender bajo qué condiciones de observación, en que escalas y por medio de qué mecanismos un comportamiento aproximativamente clásico puede ser "observado". En consecuencia, el estudio del límite clásico simplemente asume la validez de la mecánica cuántica sin preguntarse por que la mecánica cuántica es preferible a la mecánica clásica desde un punto de vista estrictamente teórico, es decir, independientemente de la superioridad empírica de la teoría cuántica. Ahora bien, el desarrollo de la tesis según la cual la mecánica cuántica es una *superación* de la mecánica clásica no requiere únicamente comprender el límite clásico, sino también entender cuáles son los puntos de impasse teóricos de la mecánica clásica resueltos por la extensión cuántica. La localización de dichos puntos de impasse permite comprender lo que podríamos denominar la "plusvalía teórica diferencial" de la mecánica cuántica en relación con la mecánica clásica. Desde un punto de vista especulativo, es decir, haciendo completa abstracción del hecho de que la mecánica cuántica sea una teoría *experimentalmente* más satisfactoria que la mecánica clásica, es necesario comprender de una perspectiva estrictamente teórica *por qué* la mecánica cuántica es de hecho más satisfactoria que la mecánica clásica. Dicha prescripción requiere suspender la idea según la cual las dificultades encontradas para entender la mecánica cuántica contrastan con la comprensión pretendidamente satisfactoria de la mecánica clásica. De hecho, podríamos afirmar que la falta de una comprensión satisfactoria de la mecánica cuántica es una consecuencia directa del carácter todavía insatisfactorio de la comprensión actual de la mecánica clásica. En particular, todavía no hemos entendido cuales son los puntos de impasse intrínsecos de la mecánica clásica susceptibles de explicar la necesidad racional de la superación cuántica. En consecuencia, todavía no hemos entendido en qué medida el hecho de que la mecánica cuántica provea una formalización más satisfactoria de la consistencia objetiva de la naturaleza física, lejos de ser una contingencia empírica, sea una necesidad racional. Con el objeto de entender la plusvalía teórica diferencial de la extensión cuántica, es necesario retornar a la mecánica clásica e intentar identificar sus puntos de impasse teóricos. Según esa manera de concebir las relaciones entre ambas teorías, la mecánica cuántica, lejos de inaugurar un nuevo "paradigma" no clásico, debe ser entendida como una profundización del programa iniciado por medio de la mecánica clásica. En otros términos, el éxito de la mecánica cuántica muestra retrospectivamente en qué medida Newton, Lagrange y Hamilton (entre otros) estaban en lo cierto.

Con el objeto de comprender la plusvalía teórica diferencial de la mecánica cuántica no podemos asumir de entrada el formalismo cuántico. Hay que proceder más bien a la inversa, es decir, partir del formalismo clásico e identificar los puntos de impasse susceptibles de justificar la necesidad teórica de efectuar una "superación cuántica". Dicho de otro modo, la comprensión de la plusvalía teórica de la mecánica cuántica en relación con la mecánica clásica, lejos de poder resultar del análisis del límite clásico de la mecánica cuántica, solo puede provenir del análisis de los así denominados *formalismos de cuantificación*. El análisis de los procedimientos de cuantificación debería ayudar a entender la necesidad puramente racional de pasar de la mecánica clásica a la mecánica cuántica independientemente del éxito empírico de esta última.

En este artículo, hemos analizado en detalle la manera en que el formalismo de cuantificación denominado *cuantificación geométrica* permite entender a la mecánica cuántica como una *extensión* de la mecánica clásica. Si las variedades simplécticas constituyen el sustrato geométrico de la mecánica clásica, la mecánica cuántica puede ser reobtenida por medio de una extensión fibrada de dichas variedades. De ese modo, del mismo modo en que el espacio-tiempo forma parte constitutiva de la teoría de Yang-Mills (definida sobre un espacio fibrado sobre el espacio-tiempo), podemos decir que la mecánica clásica forma parte constitutiva de la mecánica cuántica (definida sobre un espacio fibrado sobre una variedad simpléctica). El análisis efectuado muestra que la no-inyectividad entre el álgebra de Poisson de los observables $C^{\infty}(M)$ y el algebra de operadores clásicos H_M constituye el "punto de impasse" clásico superado por la extensión cuántica. De hecho, la cuantificación geométrica muestra que los operadores cuánticos $\hat{v}_h \in \Lambda$ pueden ser obtenidos por medio de una extensión "vertical" de los operadores clásicos "horizontales" $v_f \in H_M$ (campos vectoriales Hamiltonianos). Dicha extensión cuántica de los operadores clásicos permite representar inyectivamente el álgebra de Poisson de los observables $f \in C^{\infty}(M)$. Por lo tanto, podemos afirmar que, desde un punto de vista formal, la mecánica cuántica resulta de la necesidad de forzar una correspondencia inyectiva entre los observables y los operadores asociados. La consecuencia fundamental del hecho de que la aplicación clásica $f \to v_f$ definida por la estructura simpléctica ω no sea un isomorfismo de álgebras de Lie es que la transformación de un observable f no necesariamente modifica al operador diferencial asociado v_f. En consecuencia, y a los efectos de alcanzar una comprensión satisfactoria de la mecánica cuántica, es necesario entender la necesidad puramente teórica de establecer dicho isomorfismo entre los observables y los operadores asociados (cf. Catren, en prensa).

La cuantificación geométrica también permite entender la naturalidad de ciertas características distintivas de la mecánica cuántica. En primer lugar, dicho formalismo muestra que la no-conmutatividad de los operadores cuánticos asociados a variables canónicamente conjugadas puede ser explicada de manera puramente geométrica en términos de los transportes paralelos definidos por una conexión de curvatura no nula definida por la forma simpléctica ω. De esa manera, la no-conmutatividad cuántica adquiere el mismo sentido geométrico que la no-conmutatividad de los transportes paralelos en el marco de la relatividad general y de la teoría de Yang-Mills (cf. Catren, 2008b). Por otra parte, la condición de integralidad analizada en la sección 6 muestra que el carácter discreto del espectro de ciertos observables como el spin y la energía es una consecuencia de la topología no-trivial del fibrado $L \to M$.

También vale la pena destacar que la cuantificación geométrica permite reconstruir la mecánica cuántica en dos etapas independientes, a saber, la precuantificación de la variedad simpléctica y la elección de una polarización de los estados (o sea, de una representación). Sin embargo, mientras que la precuantificación de la variedad simpléctica permite resolver el carácter no-inyectivo de la correspondencia entre observables y operadores clásicos, la polarización de los estados precuánticos es un procedimiento *ad hoc* cuya única justificación es la necesidad de recuperar el formalismo cuántico conocido. En otro lugar (Catren, en prensa), propongo una interpretación de la cuantificación geométrica que permite entender la necesidad de polarizar los estados precuánticos a partir de un principio físico proveniente de las teorías de gauge (o teorías hamiltonianas con vínculos), a saber la existencia de una correspondencia entre los vínculos de primera clase y las transformaciones de gauge (cf. Catren, 2008a; 2009).

Agradecimientos. Este trabajo fué parcialemente realizado en el marco del proyecto ERC Starting Grant *Philosophy of Canonical Quantum Gravity* (Grant N° 263523) financiado por el European Research Council.

Gabriel Catren
Investigador del laboratorio Sphere (UMR 7219),
Université Paris 7 – Denis Diderot,
Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Francia.
gabrielcatren@gmail.com

Quantic fibers for classical systems: an introduction to geometric quantization

ABSTRACT
In this article, We shall introduce the formalism of canonical quantization called "geometric quantization". Since this formalism let us understand quantum mechanics as a *geometric extension* of classical mechanics, we shall identify the insufficiencies of the latter that are resolved by such an extension. We shall show that geometric quantization permits us to explain some fundamental features of quantum mechanics, such as the non-commutativity of quantum operators and the discrete spectrum of some operators describing physical quantities.

Keywords • Quantum mechanics. Geometric quantization. Symplectic geometry.

referencias bibliográficas

Abraham, R. & Marsden, J. E. *Foundations of mechanics*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1978.

Alvarez, O. Topological quantization and cohomology. *Communications in Mathematical Physics*, 100, p. 279-309, 1985.

Arnold, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer, 1989.

Arnold, V. I.; Kozlov, V. V. & Neishtadt, A. I. (Ed.). *Encyclopaedia of mathematical sciences*. Berlin: Springer, 1985. v. 4: Dynamical systems.

Bayen, F. et al. Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics. *Letters of Mathematical Physics*, 1, p. 521-30, 1977.

____. Deformation theory and quantization. *Annals of Physics*, 1, 3, p. 61-110, 1978.

Bitbol, M., Kerszberg, P. & Petitot, J. (Ed.). *Constituting objectivity: transcendental approaches of modern physics*. Berlin: Springer-Verlag, 2009. (The Western Ontario Series in the Philosophy of Science, 74).

Bott, R. & Tu, W. *Differential forms in algebraic topology*. New York: Springer-Verlag, 1982.

Brylinski, J. L. *Loop spaces, characteristic classes, and geometric quantization*. Boston: Birkhäuser Boston, 1993. (Program of Mathematics, 107).

Catren, G. On classical and quantum objectivity. *Foundations of Physics*, 38, p. 470-87, 2008a.

____. Geometric foundations of classical Yang-Mills theory. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 39, p. 511-31, 2008b.

____. Can classical description of physical reality be considered complete? In: Bitbol, M., Kerszberg, P. & Petitot, J. (Ed.). *Constituting objectivity: transcendental approaches of modern physics*. Berlin: Springer-Verlag, 2009. p. 375–86.

____. *Quantum ontology in the light of Gauge theories*. In: De Ronde, C.; Aerts, S. & Aerts, D. (Ed.). *Probing the meaning of quantum mechanics: physical, philosophical, and logical perspectives*. Singapore: World Scientific, en prensa.

de Ronde, C.; Aerts, S. & Aerts, D. (Ed.). *Probing the meaning of quantum mechanics: physical, philosophical, and logical perspectives*. Singapore: World Scientific, en prensa.

Dirac, P. A. M. Quantized singularities in the electromagnetic field. *Procedings of Royal Society* A, 133, p. 60, 1931.

____. *The principles of quantum mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1967.

Flato, M. et al. Crochet de Moyal-Vey et quantification. *Comptes Rendus de la Academie des Sciences de Paris I Math.*, 283, p. 1924, 1976.

Ginzburg, V. et al. *Moment maps cobordisms and hamiltonian group actions*. Rhode Island: American Mathematical Society, 2001.

Goldstein, H. *Classical mechanics*. 3. ed. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 2001.

Guillemin, V. & Sternberg, S. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

Hegel, G. W. F. *Fenomenología del espíritu*. Traducción W. Roses. México: Fondo de Cultura Económica, 1998.

Kant, I. *Crítica de la razón pura*. Traducción P. Ribas. Madrid: Alfaguara, 1998.

Kirillov, A. A. Geometric quantization. In: Arnold, V. I.; Kozlov, V. V. & Neishtadt, A. I. (Ed.). *Encyclopaedia of mathematical sciences.* Berlin: Springer, 1985. v. 4: Dynamical systems. p. 137-72.

Kobayashi, S. & Nomizu, K. *Foundations of differential geometry*. New York: Wiley, 1963. v. 1.

Konstant, B. Quantization and unitary representations. *Lecture notes in mathematics*. New York: Springer-Verlag, 170, 1970.

Marsden, J. E. & Ratiu, T. S. *Introduction to mechanics and symmetry*. New York: Springer-Verlag, 1999.
Puta, M. *Hamiltonian mechanical systems and geometric quantization*. London: Kluwer Academic Publishers, 1993.
Souriau, J. M. *Structure of dynamical systems. A symplectic view of physics*. Boston: Birkhäuser, 1997.
Woodhouse, N. *Geometric quantization*. Oxford: Oxford University Press, 1992.