Sôbre um Problema de Passagem ao Limite

Trabalho apresentado na Segunda Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Curitiba, em novembro de 1950.

FREDERICO PIMENTEL GOMES

Assistente e Livre-docente de Matemática
Universidade de São Paulo

ÍNDICE

1 — Introdução 70
2 — O Cálculo do Limite 70
3 — Outra Marcha a Seguir 74
4 — Bibliografia 74

1 — INTRODUÇÃO

Em trabalho anterior (PIMENTEL GOMES, 1948) discutimos o

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-(x-a)\frac{i}{N} \cdot \frac{h}{k}}}{\left(1+\frac{i}{N}\right)^{\theta+1}} \cdot \frac{1}{N},$$

sendo $x - a > 0$, $k = \frac{x-a}{N}$, θ um número real positivo e $\lim_{N \to \infty} \frac{h}{k} = 1$. O resultado exposto está correto, mas exige justificação melhor. Êste artigo tem por fim deduzir, por um método inteiramente diferente do que foi antes utilizado, o limite acima indicado.

2 — O CÁLCULO DO LIMITE

Das condições expostas, segue-se que

$$L = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-(x-a)\frac{i}{N} \cdot \frac{h}{k}}}{\left(1+\frac{i}{N}\right)^{\theta+1}} \cdot \frac{1}{N}$$

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-(x-a)\frac{i}{N}(1+\alpha)}}{\left(1+\frac{i}{N}\right)^{\theta+1}} \cdot \frac{1}{N}$$

onde $a \longrightarrow 0$ com $\dfrac{1}{N}$.

Temos, porém,

$$\frac{e^{-(x-a)\frac{i}{N}(1+a)}}{\left(1+\frac{i}{N}\right)^{\theta+1}} = \frac{e^{-(x-a)\frac{\bar{i}}{N}(1+a)}}{\left(1+\frac{\bar{i}}{N}\right)^{\theta+1}} \cdot \frac{\dfrac{e^{-(x-a)\frac{i}{N}(1+a)}}{\left(1+\frac{i}{N}\right)^{\theta+1}}}{\dfrac{e^{-(x-a)\frac{\bar{i}}{N}(1+a)}}{\left(1+\frac{\bar{i}}{N}\right)^{\theta+1}}},$$

sendo $i-1 < \bar{i} < i$ tal que

$$\frac{e^{-(x-a)\frac{\bar{i}}{N}(1+a)}}{\left(1+\frac{\bar{i}}{N}\right)^{\theta+1}} \cdot \frac{1}{N} = \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \frac{e^{-(x-a)\,y\,(1+a)}}{(1+y)^{\theta+1}}\, d\,y\,.$$

Logo

$$X_P = \sum_{i=1}^{P} \frac{e^{-(x-a)\frac{i}{N}(1+a)}}{\left(1+\frac{i}{N}\right)^{\theta+1}} \cdot \frac{1}{N}$$

$$= \sum_{i=1}^{P} Y_i \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \frac{e^{-(x-a)\, y\, (1+\alpha)}}{(1+y)^{\Theta+1}}\, dy \quad ,$$

em que Yi é um fator que tende para 1 quando $N \longrightarrow \infty$, qualquer que seja P. Para $H = \frac{1}{N}$ vem

$$X_P = \sum_{i=1}^{P} Y_i \int_{(i-1)H}^{iH} \frac{e^{-(x-a)\, y\, (1+\alpha)}}{(1+y)^{\Theta+1}}\, dy \quad ,$$

onde

$$Yi = \frac{\dfrac{e^{-(x-a)\, i\, H\, (1+\alpha)}}{(1+i\,H)^{\Theta+1}}}{\dfrac{e^{-(x-a)\, \bar{i}\, H\, (1+\alpha)}}{(1+\bar{i}\,H)^{\Theta+1}}}$$

$$= e^{-(x-a)\, H\, (i-\bar{i})\, (1+\alpha)} \left(\frac{1+\bar{i}\,H}{1+i\,H}\right)^{\Theta+1}$$

$$= e^{-(x-a)\,\frac{(i-\bar{i})\,(1+\alpha)}{N}} \left(1 - \frac{i-\bar{i}}{N+i}\right)^{\Theta+1} .$$

Qualquer que seja i , Yi converge uniformemente para 1, pois temos

$$1 > Yi > e^{-(x-a)\frac{1}{N}(1+a)} \qquad (1 - \frac{1}{N})^{\theta+1}$$

Temos pois

$$X_P < \sum_{i=1}^{P} \int_{(i-1)H}^{iH} \frac{e^{-(x-a)\,y\,(1+a)}}{(1+y)^{\theta+1}}\, dy =$$

$$= \int_{0}^{\frac{P}{N}} \frac{e^{-(x-a)\,y\,(1+a)}}{(1+y)^{\theta+1}}\, dy$$

Mas, como a integral

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-(x-a)\,y\,(1+a)}}{(1+y)^{\theta+1}}\, dy$$

Converge, para $1 + a > 0$, segue-se que existe o

$$\lim_{P \to \infty} X_P ,$$

uma vez que se trata de uma sucessão crescente e restrita acima.

E temos

$$I > \lim_{P \to \infty} X'_P > I \left[e^{-(x-a)(1+\alpha)\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{\theta+1}} \right]$$

Agora, se $N \longrightarrow \infty$, obtemos enfim, utilizando a convergência uniforme da integral,

$$L = \lim_{N \longrightarrow \infty} \left[\lim_{P \to \infty} X_P \right] = \int_0^\infty \frac{e^{-(x-a)\,y}}{(1+y)^{\theta+1}}\, dy$$

3 — OUTRA MARCHA A SEGUIR

Ao mesmo resultado se chegaria também através da demonstração de que

$$\lim_{N \to \infty} \left[\lim_{P \to \infty} X_P \right] = \lim_{P \to \infty} \left[\lim_{N \to \infty} X_P \right],$$

demonstração que é, porém, mais trabalhosa e que abordaremos em outra oportunidade.

4 — BIBLIOGRAFIA

PIMENTEL GOMES, Frederico — (1948). "Introdução ao Estudo dos Derigrais". Piracicaba.