

# O PROBLEMA TÉCNICO-ECONÔMICO DA ADUBAÇÃO (\*)

A. G. Zagatto e F. Pimentel Gomes  
Escola Superior de Agricultura «Luiz de Queiroz»

## 1. INTRODUÇÃO

Tôda análise de experimentos de adubação, tanto do ponto de vista agrônômico como do econômico, se baseia na hipótese de que há uma relação funcional entre as quantidades de adubo empregadas e o rendimento cultural obtido. Essa relação não é conhecida *a priori*, mas pode ser aproximada empiricamente a partir dos dados numéricos que exprimem o comportamento da produção relativamente às doses de adubo utilizados.

A produção agrícola  $y$  é uma função de muitos fatores, cuja expressão simbólica pode ser dada como  $y = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , em que  $y$  é a produção por unidade de área (toneladas de cana-de-açúcar por hectare, por exemplo), e  $X_1, \dots, X_n$  são as quantidades dos fatores produtivos empregados, tais como adubo, mão-de-obra, água de irrigação, capinas, etc.

É claro que um estudo científico da economia da produção vai começar por casos simples, e o primeiro, que nos interessa aqui, é o estudo do comportamento da produção quando há só um fator variável — o *adubo*. A função será de uma só variável independente, e se exprimiria assim :

$$y = F(X_1 | X_2, X_3, \dots, X_n),$$

considerando-se constantes os fatores à direita da barra vertical, o que equivale a tomar  $y = F_1(X_1)$ . É isto o que se procura fazer quando se planejam e se executam experimentos de adubações com doses crescentes de um só nutriente. Se não se conseguir manter constantes os demais fatores em jôgo, a análise estatística mostrará a influência ou importância deles, através da estimativa do erro experimental.

A hipótese de trabalho que orienta o pesquisador neste estágio é a *lei das proporções variáveis*, também denominada *lei dos rendimentos decrescentes* ou *lei dos acréscimos não proporcionais*, que pode ser assim enunciada: Se a quantidade de um fator produtivo for aumentada por incrementos iguais, permanecendo fixas as quantidades de outros fatores, os acréscimos na produção correspondentes poderão crescer al princípio, mas decrescerão depois de um certo ponto. Esta lei pode ser ilustrada pela curva PFT da Fig. 1, na qual as ordenadas representam o *produto físico total*, e as abscissas indicam o *fator variável*. A curva do produto físico total PFT apresenta um estágio inicial de rendimentos crescentes, isto é, PFT aumenta mais que proporcionalmente à quantidade do

(\*) Recebido para publicação em 19/9/1960.

fator; vem depois um estágio de acréscimos de rendimentos decrescentes, mas ainda positivos, e finalmente um último estágio de acréscimos de rendimentos decrescentes e negativos.

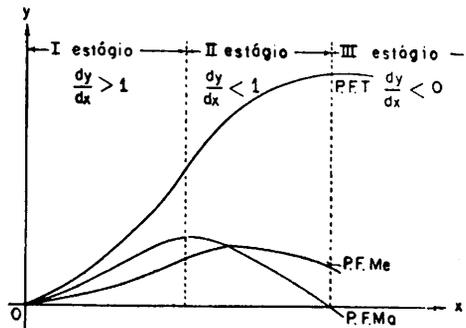


FIGURA 1

Comportamento da produção quando há um fator variável

Interessa-nos conhecer o comportamento da curva do produto físico médio (PFMe) e o do produto físico marginal (PFMa).

O PFMe ou produtividade média se refere à relação  $y / x$ , ou seja, o produto físico total dividido pela quantidade do fator variável. Para qualquer ponto de uma curva do produto físico total (PFT) o produto físico médio é dado pela tangente do ângulo formado com o eixo das abscissas pela reta que o liga à origem.

O produto físico marginal, ou a produtividade marginal do fator, (PFMa), é dado pela derivada  $dy / dx$ , limite da razão incremental  $\Delta y / \Delta x$ , quando  $\Delta x$ , acréscimo da quantidade do fator variável, tende para zero. O produto físico marginal em um ponto é dado, pois, pela declividade da tangente geométrica à curva PFT conduzida por esse ponto. Ele aumenta até o ponto de inflexão, depois decresce até zero, no ponto de produção máxima, e depois se torna negativo. No 1.º estágio (antes do ponto de inflexão) PFMa é crescente e positiva; no 2.º estágio (entre o ponto de inflexão e o ponto de máximo), PFMa é decrescente e positiva; daí por diante é decrescente e negativa.

Note-se que nos experimentos de adubação quase nunca existe o 1.º estágio, de produto físico marginal crescente, pois desde o começo os acréscimos de produção são, na grande maioria dos casos, menos do que proporcionais às quantidades de nutrientes empregadas. Isto se deve, sem dúvida, ao fato de que o nutriente

em estudo já se acha no solo, além de que as doses de nutrientes empregadas não são nunca muito pequenas.

## 2. AS EQUAÇÕES PROPOSTAS

O estudo de ensaios de adubações com o auxílio dos princípios econômicos expostos exige a determinação, a partir dos dados experimentais, da equação matemática da curva  $y = f(x)$ . Várias funções têm sido propostas. Uma delas é dada pela equação de Mitscherlich

$$y = A [1 - 10^{-c(x+b)}]$$

na qual  $A$  é uma produção máxima teórica possível com valores muito elevados de  $x$ ;  $c$ , o *coeficiente de eficácia*, é típico de cada nutriente ou adubo;  $b$  corresponderia à fertilidade natural do solo isolada em termos do nutriente em estudo;  $x$  é a quantidade de nutriente adicionado ao solo por unidade de área. Em geral, nos países onde se usa o sistema métrico,  $x$  é expresso em quintais métricos (de 100 kg cada) por hectare, e então  $c$  é expresso em ha/quintal. Neste artigo, porém, usaremos as doses de nutrientes em kg/ha, e  $c$  será expresso em ha/kg.

Alguns autores, como STEVENS, preferem dar à lei de Mitscherlich a forma :

$$y = \alpha + \beta \rho^x$$

ou, o que é o mesmo,

$$y = m - a.r^x$$

esta devida a SPILLMAN e correspondente exatamente à equação proposta por Mitscherlich.

A equação de Mitscherlich admite uma assíntota horizontal de ordenada  $A$ , que só seria atingida para  $x = \infty$ . Isto combina bem com o que se observa na prática do uso de fertilizantes, pois estes, de uma certa dose em diante, pouco ou nenhum acréscimo de produção trazem, e só para doses excessivamente elevadas é que manifestam efeito prejudicial.

Outros, como PESEK e HEADY, preferem usar um trinômio de segundo grau :

$$y = a + b_1x + b_2x^2.$$

Esta equação conduz a cálculos geralmente mais simples, mas tem defeitos graves que a desaconselham, como :

- 1) É absolutamente imprópria para extrapolação, o que não acontece com a equação de Mitscherlich.

- 2) Os parâmetros, com execução de  $a$ , não têm interpretação objetiva conveniente.
- 3) Torna-se difícil o aproveitamento de dados obtidos anteriormente para o estudo de novos ensaios.

Ao contrário, a maior dificuldade inicial do uso da equação de Mitscherlich é compensada por vantagens que aparecem posteriormente e que a indicam como mais aconselhável e de uso mais geral.

Outra função, sugerida por HEADY e de defeitos análogos aos do trinômio do segundo grau é

$$y = a + b_1 \sqrt{x} + b_2 x .$$

Seu máximo é atingido para valores mais altos de  $x$ .

A função de Cobb-Douglas.

$$y = a x^b$$

também tem sido usada em investigações agrônômicas e econômicas. Se aplicarmos logarítmos obteremos uma equação linear :

$$z = \log y = \log a + b \log x .$$

Mencionemos ainda uma curva que reflete possíveis produtos físicos marginais crescentes para níveis muito baixos de fertilização, que é a de Gompertz :

$$y = e^m - a r^x .$$

Na prática as curvas mais usadas são a de Mitscherlich e o trinômio de segundo grau. A primeira exige, para aplicação conveniente, experimentos de grande precisão ou, melhor ainda, grupos de experimentos numerosos. Nesses casos, os valores de  $c$  obtidos para cada nutriente são praticamente constantes. Em experimentos de campo e em regiões tropicais ou subtropicais êles são :  $c = 0,49$  ha/quintal para o nitrogênio;  $c = 0,88$  h/quintal para o fósforo (expresso em  $P_2O_5$ ) e a potassa ( $K_2O$ ); para o estêrco temos aproximadamente  $c = 0,018$  ha/tonelada. Isto permite o uso da equação de Mitscherlich mesmo quando dispomos só de dois níveis do nutriente em estudo (sem adubo e com uma dose arbitrária  $x_n$ , por exemplo).

O trinômio de segundo grau pode ser sempre aplicado, mas a falta de constância, pelo menos relativa, de qualquer de seus coeficientes prejudica seu uso, bem como a absoluta contra-indicação de extrapolação por seu intermédio. Por tudo isso, a equação de Mitscherlich tem uso cada vez mais geral e ganha terreno à medida que se compreendem melhor suas vantagens e limitações.

## 3. O PROBLEMA ECONÔMICO

Até agora encaramos a função fertilizante-produto do ponto de vista físico. Mas nesta altura impõe-se a pergunta: Do ponto de vista econômico, qual é a quantidade ótima de um adubo que se deve aplicar? É claro que, sendo  $P_y$  o preço do produto e  $P_x$  o preço do adubo (preços referidos às unidades utilizadas na curva fertilizante-produto) só continuaremos a aplicar doses adicionais de adubos enquanto o acréscimo  $P_y \cdot dy$ , no valor da produção não fôr inferior ao acréscimo  $P_x \cdot dx$  nas despesas de adubação, isto é, enquanto o rendimento marginal fôr maior do que o custo marginal :

$$P_y dy \geq P_x dx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} \geq \frac{P_x}{P_y} \quad (1).$$

Nos estudos de adubação  $dy/dx$  é função decrescente de  $x$ , de onde se segue que, sendo  $x^*$  a solução da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_x}{P_y} \quad (2),$$

deveremos usar sempre uma dose  $x \leq x^*$ , isto é,  $x^*$  é a dose máxima economicamente conveniente, mas qualquer dose de adubo inferior a  $x^*$  será também lucrativa.

No caso de termos uma função quadrática

$$y P_y = k + s x + t x^2,$$

já dando a produção expressa em dinheiro, temos a partir da equação (2), o seguinte :

$$s + 2 t x = P_x,$$

de onde se conclui, que, com  $P_x = r$ , temos

$$x^* = \frac{r - s}{2 t}.$$

PIMENTEL GOMES, considerando um *fator de segurança*  $f \geq 1$  e tendo em conta os efeitos residuais do adubo em anos sucessivos, obteve a equação :

$$P_y \left( \frac{1}{f} dy_1 + \frac{1}{f^2} dy_2 + \frac{1}{f^3} dy_3 + \dots \right) \geq P_x dx,$$

onde  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) refere-se à produção no  $i$ -ésimo ano,

ou na  $i$ -ésima colheita. Mediante algumas hipóteses simplificadoras do problema, PIMENTEL GOMES obteve a equação :

$$x^* = \frac{1}{c [1 - h(1-h)/f]} \log \left\{ \frac{A P_y c}{(f-h) P_x \log e} - b c \right\} \quad (3)$$

suposta adotada a lei de Mitscherlich; nesta fórmula  $h$  mede o efeito residual do adubo.

Com  $f - h = 1$ , PIMENTEL GOMES daí deduziu a fórmula aproximada, conservadora,

$$x^* = \frac{1}{c} \log \frac{A P_y c}{f P_x \log e} - b \quad (4)$$

a qual, com  $f = 1$ , corresponde exatamente à solução da equação (1).

No caso usual de termos dois níveis (zero e  $x_u$ ) de nutrientes, com acréscimo de produção  $u$  causado pelo fertilizante, PIMENTEL GOMES e ABREU demonstraram que a fórmula (4) corresponde, com excelente aproximação, a tomar

$$x^* = (1/2) x_u + (1/c) \log \frac{u P_y}{x_u P_x} \quad (5).$$

Mas, para que se possa aplicar a dose máxima  $x^*$  será preciso que não haja limitações de capital à disposição do agricultor para tal fim, isto é, que o capital seja suficiente para a compra dessa quantidade ótima. Suponhamos, porém, que o agricultor dispõe apenas de um montante  $C$  a ser empatado na compra do nutriente. Então temos a restrição adicional

$$x P_x \leq C.$$

Sendo  $x^{**} = C/P_x$ , a dose  $x$  de nutriente a ser aplicada pelo lavrador será limitada pelas inequações  $x \leq x^*$ ,  $x \leq x^{**}$ ; logo não poderá exceder o menor dos valores  $x^*$  e  $x^{**}$ .

Na prática surge, porém, um problema econômico mais importante ainda. É que em caso de capital insuficiente e havendo terras incultas disponíveis, poderá ser mais lucrativo estender as lavouras, pelo aumento de área cultivada, do que empatar o capital correspondente na compra de adubos.

Exemplifiquemos. Consideremos um solo, relativamente fértil para o qual seja o fóstoro o elemento no mínimo e admitamos que temos

$$y = 3000 [1 - 10^{-0,0088 (x + 90)}] \text{ kg/ha}$$

de milho. Daí tiramos :

$$\frac{dy}{dx} = 3000 (0,0088) (L 10) 10^{-0,0088 (x + 90)} .$$

Sendo  $P_x = \text{Cr\$ } 26,00$  o preço do quilo de fósforo ( $P_2O_5$ ) e  $P_y = \text{Cr\$ } 5,00$  o preço de venda do quilo de milho pelo agricultor, a equação (2) ou a fórmula (4) nos dão  $x^* = 31 \text{ kg/ha}$  de fósforo, querendo isto dizer que cada cruzeiro assim empatado no nutriente trará acréscimo de produção no valor de pelo menos um cruzeiro.

No entanto, com  $x = 0$ , isto é, sem adubo, temos uma produção  $y = 2516 \text{ kg/ha}$  de milho. Se os trabalhos agrícolas todos, sem o custo do adubo, isto é, as despesas fixas ficarem em  $\text{Cr\$ } 5.000,00$  por hectare, então o custo de produção do milho sem adubo será de  $5.000/2516 = 1,99$  cruzeiro por quilo. Já com a adubação de  $31 \text{ kg/ha}$  de fósforo ( $P_2O_5$ ) a quantidade produzida será de  $2.742 \text{ kg/ha}$ . O custo do adubo equivaleria a  $\text{Cr\$ } 806,00$ , o que se deve juntar à despesa de aplicação, que suporemos desprezível, por ser feita no plantio. Então o novo custo de produção será de  $5806/2742 = 2,12$  cruzeiros por quilo de milho. Nestas condições, do ponto de vista econômico seria realmente preferível, ao lavrador de limitados recursos financeiros, aumentar a área de cultura de milho, e evitar usar adubo.

O assunto é melhor ilustrado pela fig. 2 em que  $CMe$  é a curva do custo total médio, que vem a ser o quociente do custo total (custos fixos + custos variáveis) pela quantidade produzida e que tem em geral a conformação de um U;  $CMa$  é a curva do custo marginal, isto é, o custo da última unidade produzida. Esta curva está abaixo do  $CMe$  quando este está baixando, e acima quando estiver se elevando. Por sua própria definição ela corta a curva do  $CMe$  em seu ponto de mínimo;  $LP$  é a reta representativa do preço da unidade do produto, paralela ao eixo dos  $XX$ , porque admite-se que qualquer quantidade dêle pode ser vendida sempre ao mesmo preço.

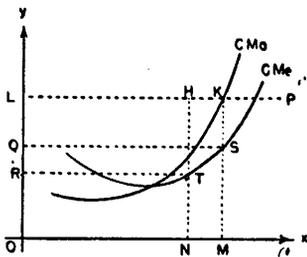


FIG. 2

O comportamento dos custos total médio e marginal

O ponto de máximo lucro é  $K$ , ponto de intersecção de  $LP$

com CMa. Aí o custo da última unidade produzida é igual a seu preço de venda. Mas tôdas as unidades anteriores foram produzidas a custos marginais menores.

O custo médio por unidade a êsse volume de produção é MS. O custo total é dado pela área MSQO, e a renda líquida total, pela área KSQL.

Uma quantidade menor do que a ótima, digamos, ON, traria uma renda líquida menor HTRL, não obstante o custo total médio NT ser menor.

A relação entre o preço de venda e o custo médio (ou, o que é a mesma coisa, entre o rendimento total e o custo total) ou entre a renda líquida e o custo médio mede a eficiência do emprêgo do capital.

Pela fig. 2, a eficiência, medida pelo segundo critério, é, na quantidade ótima, igual a KS/SM e para a quantidade  $ON < OM$ , HT/TN. Vê-se claramente que

$$\frac{HT}{TN} > \frac{KS}{SM}$$

No nosso exemplo, para a produção sem adubo temos uma renda bruta de Cr\$ 12.580,00 (2516 kg x Cr\$ 5,00), um custo de Cr\$ 5.000,00 e um líquido de Cr\$ 7.580,00 por hectare. A relação entre a renda líquida e o custo é de 1,51, isto é, um cruzeiro rende Cr\$ 1,51. Com a dose ótima de adubo a renda bruta é de Cr\$ 13.710,00 (2742 kg x Cr\$ 5,00), o custo Cr\$ 5.806,00 e o líquido de Cr\$ 7.904,00. Aqui, um cruzeiro rende Cr\$ 1,35.

Que se depreende disso?

Não sendo a terra o fator escasso e sim o capital, o agricultor estará mais interessado na renda máxima do dinheiro investido do que na renda máxima por hectare, ou seja, preferirá ganhar menos por hectare adubando menos ou mesmo deixando de adubar e aumentar a área cultivada e com isso obter um rendimento maior do seu dinheiro. Circunstâncias como esta é que, no passado, obstaram o uso mais extenso de adubos no Brasil, nos Estados Unidos e em outros países e, pelo contrário, favoreceram a extensão das lavouras, principalmente nas zonas novas.

De um modo geral, pode-se dizer que quando se utiliza uma quantidade  $x$  de fertilizante menor do que a ótima  $x^*$  ( $x < x^*$ ), o rendimento médio por cruzeiro investido em adubo aumenta, e tem-se utilização mais eficiente do fertilizante (sob a condição de capital escasso), embora o lucro por hectare diminua.

Sob condição de capital escasso é, pois, preferível utilizar uma quantidade  $x_0$  de nutriente tal que seja máxima a relação entre o

rendimento líquido e o custo bruto. Sendo  $R$  a renda bruta e  $C$  o custo bruto, devemos procurar o máximo da função :

$$z = \frac{R - C}{C} = \frac{R}{C} - 1 .$$

Como :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{CR' - RC'}{C^2} ,$$

devemos impôr a condição  $CR' - RC' = 0$  para obter o valor  $x_0$  procurado.

Em geral a adubação tem despesas fixas  $M$ , independentes da quantidade de adubo. Nestas condições o custo bruto sem adubo será  $C = m'$ , e com a dose  $x$  de adubo será  $C = M + rx$ , com  $M > m'$ ,  $r = P_x$ . Assim, o rendimento líquido em relação ao custo bruto será :

$$z_1 = \frac{R}{m'} - 1 ,$$

no caso de não se usar adubo, e

$$z = g(x) = \frac{R}{M + rx} - 1 ,$$

quando se o utiliza. O máximo de  $z$  se dará para

$$(M + rx)R' - rR = 0 \quad (7) .$$

Convirá usar uma dose  $x_0$  de nutriente, raiz da equação (7) sempre que o valor mínimo de  $z = g(x_0)$  fôr tal que tenhamos  $g(x_0) < z_1$ .

Se adotarmos  $R = k + sx + tx^2$ , a equação (7) nos dará :

$$(M + rx)(s + 2tx) - r(k + sx + tx^2) = 0 ,$$

∴  $rtx^2 + 2Mtx + (Ms - kr) = 0$ , de onde tiramos :

$$x_0 = \frac{-Mt - \sqrt{M^2t^2 - rt(Ms - kr)}}{rt} .$$

Se, por outro lado, tomarmos

$$R = P_y A [1 - 10^{-c(x + b)}] ,$$

então obteremos a equação

$(m + rx) c (L10) 10^{-c(x+b)} - r [1 - 10^{-c(x+b)}] = 0$ ,  
isto é,

$$(m + rx)cL10 + r - r10^{-c(x+b)} = 0, \quad (8).$$

Outro caminho a seguir, utilizado por PESEK e HEADY, é o de tornar máxima a relação entre o rendimento bruto da adubação e o seu custo. Isto corresponde a buscar o máximo de

$$z = \frac{sx + tx^2}{m + rx},$$

o que nos dá o ponto de máximo

$$x^+ = \frac{-mt - \sqrt{m^2t^2 - mrst}}{rt} \quad (9).$$

No entanto, devemos exigir  $x^+ < x^* = \frac{r-s}{2t}$ , este

último valor dado pela equação (2). Esta condição é satisfeita para

$$m < \frac{(s-r)^2}{-4t} \quad (10).$$

Quando esta condição não é satisfeita, o caminho seguido por PESEK e HEADY não é satisfatório, embora êsses autores não tenham percebido essa falha. Aliás quando isso se dá, o máximo de

$$z = \frac{sx - tx^2}{m + rx}$$

é menor que um, o que mostra que não convém empatar capital em adubo.

Raciocínio idêntico com a equação de Mitscherlich nos levaria a procurar o máximo da função

$$Z = \frac{P_y A 10^{-bc} (1 - 10^{-cx})}{m + rx}$$

que se dá quando temos

$$(m + rx) c (L 10) 10^{-cx} - (1 - 10^{-cx}) r = 0,$$

isto é,

$$(mL 10 + r) + cr(L 10)x - r 10^{cx} = 0 \quad (11).$$

Mas este raciocínio apresenta perigo análogo ao apontado anteriormente para a fórmula de PESEK e HEADY.

#### 4. UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Dados de VIEGAS referentes a 13 ensaios de adubação de milho híbrido no Estado de São Paulo nos deram a equação,

$$Y = 1534 + 22,99 x - 0,1069 x^2,$$

com  $x$  expresso em kg/ha de fósforo ( $P_2O_5$ ) e  $y$  em kg/ha de milho em grão.

Com o milho a Cr\$ 5,00 e o fósforo a Cr\$ 26,00, ambos por quilo, então a equação (2) nos dá  $x^* = 83$  kg/ha de  $P_2O_5$ .

Com os mesmos dados de VIEGAS, a equação de Mitschelich obtida foi

$$y = 2954 [1 - 10^{-0,00876 (x + 35)}],$$

nas mesmas unidades usadas anteriormente. Nestas condições, a equação (4), com  $f = 1$ , nos dá  $x^* = 86$  kg/ha, solução que combina muito bem com a obtida acima.

Se tomarmos  $M = 5.000$  cruzeiros para as despesas fixas da lavoura, por hectare, a fórmula (7) nos dará  $x = 61$  kg/ha de fósforo, e com esta dose o capital empatado terá o rendimento máximo por cruzeiro investido. Aplicação análoga da fórmula (8) nos dá  $x_0 = 53$  kg/ha de fósforo.

Suponhamos agora que as despesas fixas de adubação são equivalentes a  $m = 600$  cruzeiros por hectare. Este valor de  $m$  satisfaz à condição (10) e, pois, podemos prosseguir o cálculo sem receio. Temos então :

$$z = \frac{114,95 x - 0,5345 x^2}{600 + 26 x}$$

e achamos pela fórmula (9)  $x^+ = 51$  kg/ha de fósforo.

Em condições análogas a equação (11) nos dá  $x^+ = 41$  kg/ha de  $P_2O_5$ .

Note-se que com  $m = 5.000$  cruzeiros, por exemplo, a condição (10) não seria satisfeita, e obteríamos pela fórmula (9)  $x^+ = 88$  kg/ha. Este resultado é absurdo, pois pela regressão quadrática, toda dose acima de 83 kg/ha não dá aumento de produção suficiente para pagar o excesso de adubo. A dose  $x^+ = 88$

kg/ha dá realmente um prejuízo mínimo (quando se considera só o custo marginal e a renda marginal da adubação) e não um lucro máximo.

## 5. SUMMARY

The authors discuss from the economic point of view the use of a few functions intended to represent the yield  $y$  corresponding to a level  $x$  of the nutrient. They point out that under conditions of scarce capital what is actually most important is not to obtain the highest profit per hectare but the highest return per cruzeiro spent, so that we should maximize the function

$$z = \frac{R - C}{C} = \frac{R}{C} - 1,$$

where  $R$  is the gross income and  $C$  the cost of production (fixed plus variable, both per hectare). Being  $C = M + rx$ , with  $r$  the unit price of the nutrient and  $M$  the fixed cost of the crop, we are led to the equation

$$(M + rx)R' - rR = 0.$$

With  $R = k + sx + tx^2$ , this gives a solution

$$x_0 = \frac{-Mt - \sqrt{M^2t^2 - rt(Ms - kr)}}{rt};$$

on the other hand, with  $R = P_y A [1 - 10^{-c(x+b)}]$ ,  $x_0$  will be the root of equation

$$(M + rx)cL 10 + r 10^{c(x+b)} = 0 \quad (12).$$

Another solution, pointed out by PESEK and HEADY, is to maximize the function

$$z = \frac{sx + tx^2}{m + rx}$$

where the numerator is the additional income due to the nutrient, and  $m$  is the fixed cost of fertilization. This leads to a solution

$$x^+ = \frac{-mt - \sqrt{m^2t^2 - mrst}}{rt} \quad (13).$$

However, we must have  $x^+ \leq \frac{r - s}{t}$  if we want to satisfy

$$\frac{dy}{dx} \geq r.$$

This condition is satisfied only if we have

$$m \leq \frac{(s - r)^2}{-4t} \quad (14),$$

a restriction apparently not perceived by PESEK and HEADY.

A similar reasoning using Mitscherlich's law leads to equation

$$(mL 10 + r) + cr(L 10)x - r 10^{cx} = 0 \quad (15),$$

with a similar restriction.

As an example, data of VIEGAS referring to fertilization of corn (maize) gave the equation

$$y = 1534 + 22.99x - 0.1069x^2,$$

with  $x$  in kg/ha of the cereal. With the prices of Cr\$ 5.00 per kilo of maize, Cr\$ 26.00 per kilo of  $P_2O_5$ , and  $M = \text{Cr\$ } 5,000.00$ , we obtain  $x_0 = 61$  kg/ha of  $P_2O_5$ . A similar reasoning using Mitscherlich's law leads to  $x_0 = 53$  kg/ha.

Now, if we take in account only the fixed cost of fertilization  $m = \text{Cr\$ } 600.00$  per hectare, we obtain from (13)  $x^+ = 51$  kg/ha of  $P_2O_5$ , while (14) gives  $x^+ = 41$  kg/ha.

Note that if  $m = \text{Cr\$ } 5,000.00$ , we obtain by formula (13)  $x^+ = 88$  kg/ha of  $P_2O_5$ , a solution which is not valid, since condition (14) is not satisfied.

## 6. LITERATURA CITADA

- FRENCH, B. L. — 1956 — Functional Relationships for Irrigated Corn Response to Nitrogen. **Journal of Farm Economics** 38 : 736 — 747.
- HEADY, E. O. — 1952 — **Economics of Agricultural Production and Resource Use**. Préntice Hall, New York.
- PESEK, J. e E. O. HEADY — 1958 — Derivation and Application of a Method for Determining Minimum Recommended Rates of Fertilization. **Soil Science Society of America Proceedings** 22 : 419 — 423.
- PIMENTEL GOMES, F. — 1953 — The Use of Mitscherlich's Regression Law in the Analysis of Experiments with Fertilizers. **Biometrics** 9 : 498 — 516.

- 
- PIMENTEL GOMES, F. e CLOVIS P. ABREU — 1959 — Sôbre uma  
Fórmula para o Cálculo da Dose Mais Econômica de Adubo. — **Anais  
E. S. A. «Luiz de Queiroz»** 16 : 191-198.
- SPILLMAN, W. J. — 1924 — The Law of Diminishing Returns. World  
Book Company. New York.
- STEVENS, W. L. — 1951 — Asymptotic Regression. **Biometrics** 7 :  
247 — 267.
- VIEGAS, G. P. — 1954 — 55 — Adubação do Milho II. **Bragantia** 14 :  
149 — 170.