

## ASPECTOS DA DETERMINAÇÃO DA ÁREA BASAL EM FUNÇÃO DA MÉDIA ARITMÉTICA DOS DIÂMETROS.

### II — Vícios na Determinação da Área Basal Retirada (\*).

RICARDO A. A. VEIGA \*\*

F. PIMENTEL GOMES \*\*\*

CÁSSIO R. M. GODOY \*\*\*\*

VIVALDO F. DA CRUZ \*\*\*\*

Em estudos teóricos, em amostras geradas em computador, e em desbastes conduzidos em povoamentos florestais, foram determinados os vícios cometidos no cálculo da área basal retirada a partir da média aritmética dos diâmetros. Os resultados contra-indicam êsse tipo de cálculo para a determinação da área basal retirada, devendo ser utilizada a determinação a partir da soma dos quadrados dos diâmetros.

### INTRODUÇÃO

Em manejo florestal, são constantemente necessárias determinações da área basal dos povoamentos. Os dados podem ser obtidos com aparelhos de contagem angular ou através de mensuração de diâmetros em amostras representativas dos maciços.

No caso das parcelas de amostragem, os cálculos de área basal podem ser realizados ou a partir da soma dos quadrados dos diâmetros, ou a partir da média aritmética dos diâmetros. Embora ambos os processos sejam utilizados, o último pode trazer vícios muitas vezes graves, como procura enfocar o presente trabalho para o caso específico da determinação da área basal a ser retirada em desbaste.

---

\* Trabalho entregue para publicação em 13/8/71.

\*\* Professor Titular de Silvicultura na Faculdade de Ciências Médicas e Biológicas de Botucatu.

\*\*\* Professor Catedrático, Chefe do Depto. de Matemática e Estatística da ESALQ.

\*\*\*\* Auxiliares de Ensino do Depto. de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz".

## MÉTODO

Indiquemos por  $d_{ij}$  o diâmetro de uma árvore, medido por convenção a 1,30 m do solo, com  $i = 1$  representando as árvores retiradas em desbaste e  $i = 2$  as remanescentes. Representemos por  $N_d$  o número de árvores retiradas. A média aritmética dos diâmetros retirados será

$$d_d = \frac{\sum_j d_{1j}}{N_d}$$

enquanto

$$D_d = \sqrt{(1/N_d) \sum_j d_{1j}^2}$$

representará o diâmetro quadrático médio retirado.

Dêsse modo, a área basal retirada poderá ser calculada ou a partir da média aritmética dos diâmetros

$$B'_d = \frac{\pi}{4} N_d d_d^2$$

ou também por

$$B_d = \frac{\pi}{4} \sum_j d_{1j}^2 = \frac{\pi}{4} N_d D_d^2,$$

essa determinada a partir da soma dos quadrados dos diâmetros.

### Desenvolvimento Teórico

Procuramos o vício cometido na determinação da área basal a partir da média aritmética dos diâmetros retirados. Em relação à área calculada a partir da soma dos quadrados dos diâmetros, será dado pela tendenciosidade

$$B_d - B'_d = \frac{\pi}{4} N_d (D_d^2 - d_d^2)$$

ou seja

$$B_d - B'_d = \left[ \sum_j d_{1j}^2 - \frac{(\sum_j d_{1j})^2}{N_d} \right]$$

como demonstrou PIMENTEL GOMES (1965).

Desenvolvendo essa equação, teremos

$$B_d - B'_d = \frac{\pi}{4} (N_d - 1) \sigma_d^2$$

de modo análogo ao demonstrado para tendenciosidade relacionada à área basal o povoamento antes do desbaste (VEIGA, 1971), e a estimativa será dada por

$$\hat{B}_d - \hat{B}'_d = \frac{\pi}{4} (N_d - 1) s_d^2$$

Na prática silvicultural do desbaste é comum serem cortadas árvores inferiores a um D.A.P. escolhido previamente, incluindo na retirada algumas de diâmetro superior, desde que portadoras de características indesejáveis. Devido a isso procuraremos estudar o vício  $B_d - B'_d$  no caso de serem extraídas tôdas as árvores até diâmetros previamente escolhidos.

Admitamos que os diâmetros medidos a 1,30 m do solo seguem distribuição normal, que é contínua com função de densidade

$$n(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

Para a função de distribuição, tem-se

$$N(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Para determinação da variância dos diâmetros retirados ( $\sigma_d^2$ ), pode-se partir de

$$\sigma_d^2 = \mu'_{2d} - (\mu'_{1d})^2$$

onde  $\mu'_{1d}$  e  $\mu'_{2d}$  representam o primeiro e o segundo momento em relação à origem, na distribuição. Esses momentos são dados por

$$\mu'_{2d} = \frac{\frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x t^2 e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma_p^2}} dt}{\frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma_p^2}} dt}$$

$$\mu'_{1d} = \frac{\frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_p^2}} dt}{\frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_p^2}} dt}$$

Estabelecendo-se uma translação de eixos de modo a fazer  $\mu = 0$ , e fazendo a transformação  $y = t/\sigma_p$ , teremos

$$\sigma_d^2 = \sigma_p^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z y^2 e^{-y^2/2} dy}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy} = \sigma_p^2 \left[ \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z y e^{-y^2/2} dy}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy} \right]^2$$

Mas pela transformação  $w = y^2/2$  tem-se

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 y^2 e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 w^{1/2} e^{-w} dw = 0,5$$

pois a função integrada é par e

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) = 0,5$$

Por outro lado a determinação do número de árvores retiradas pode ser feito através de

$$N_d = N_p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy$$

onde

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} dy = 0,5$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 y e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

pois a função integrada é ímpar e

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (1) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Dêsse modo, considerando-se

$$x = \frac{N}{10} \mu - \mu \dots \quad z = \frac{x}{\sigma_p} = \frac{\mu}{\sigma_p} \frac{N - 10}{10}$$

chegaremos à equação teórica que indica o vício cometido na determinação da área basal retirada a partir da média aritmética:

$$B_d - B'_d = (N_p - F_4) \sigma_p^2 \frac{\pi}{4} \left[ 0,5 + F_2 - \frac{(F_1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}})^2}{0,5 + F_3} \right]$$

para  $z \geq 0$ , e

$$B_d - B'_d = (N_p - F_5) \sigma_p^2 \frac{\pi}{4} \left[ 0,5 - F_2 - \frac{(F_1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}})^2}{0,5 - F_3} \right]$$

para  $z \leq 0$ ,

onde

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z y e^{-y^2/2} dy$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z y^2 e^{-y^2/2} dy$$

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-y^2/2} dy$$

$$F_4 = \frac{1}{0,5 + F_3}$$

$$F_5 = \frac{1}{0,5 - F_3}$$

### Estudo em populações geradas

No computador eletrônico IBM-1130 da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", foram geradas amostras segundo valores previamente escolhidos de  $\sigma$  e  $\mu$  constantes no quadro I. Os diâmetros foram gerados ao acaso de modo a fornecerem acumuladamente os valores de

$$i, \sum_j d_{ij} \quad , \quad i, \sum_j d_{ij}^2$$

para as faixas de extração contendo tôdas as árvores até o diâmetro limite de

$$d_{ij} = \frac{10}{N} \mu$$

$$N = 2, 3, \dots, 12$$

com  $\mu = d_p$  representando a média aritmética dos diâmetros das árvores do maciço antes de iniciado o desbaste.

### Estudos em Populações Reais

As tenciosidades foram também calculadas para 15 povoamentos desbastados, cujos dados estão relacionados no quadro II. Os desbastes foram conduzidos em *Araucaria angustifolia* (Bert) O Ktze em propriedades da Celulose Cambará, no Estado do Rio Grande do Sul, e em *Pinus* no Horto Florestal de Tupi, Estado de São Paulo. Os dados referentes a *Pinus* foram cedidos pelo Dr. Alceu de Arruda Veiga, do Instituto Florestal do Estado de São Paulo.

QUADRO I — Populações estabelecidas para estudo da tendenciosidade decorrente do uso da média aritmética dos diâmetros para determinação da área basal retirada.

Populações	Valores da população antes da realização do desbaste			
	Área basal (m <sup>2</sup> /ha)	Média aritmética dos diâmetros (cm)	Número de árvores por hectare	Desvio-padrão (cm)
A	30	10	3820	1
B	30	10	3820	2
C	30	10	3820	3
D	30	10	3820	4
E	30	10	3820	5
F	20	10	2550	1
G	20	10	2550	2
H	20	10	2550	3
I	20	10	2550	4
J	20	10	2550	5
K	30	15	1700	1
L	30	15	1700	2
M	30	15	1700	3
N	30	15	1700	4
O	30	15	1700	5
P	20	15	1130	1
Q	20	15	1130	2
R	20	15	1130	3
S	20	15	1130	4
T	20	15	1130	5

QUADRO II — Dados coletados em desbastes de *Araucaria angustifolia* (Bert) O. Ktze e *Pinus* sp.

Amostra	Espécie florestal	Superfície (m <sup>2</sup> )	$\sum_j d_{lj}$ (cm)	$\sum_j d^2_{lj}$ (cm <sup>2</sup> )	$N_d$
1	<i>A. angustifolia</i>	200,00	158,00	1578,00	17
2	<i>A. angustifolia</i>	200,00	95,00	1015,00	10
3	<i>A. angustifolia</i>	400,00	448,00	4092,00	52
4	<i>A. angustifolia</i>	400,00	363,00	3207,00	45
5	<i>A. angustifolia</i>	400,00	247,00	2685,00	25
6	<i>A. angustifolia</i>	200,00	135,00	1814,00	11
7	<i>A. angustifolia</i>	200,00	150,00	1254,00	19
8	<i>A. angustifolia</i>	200,00	169,00	1913,00	17
9	<i>P. elliotii</i>	281,25	461,10	3961,09	57
10	<i>P. taeda</i>	500,00	347,00	2687,00	50
11	<i>P. taeda</i>	281,25	262,60	1562,04	49
12	<i>P. caribaea</i> v. <i>hondurensis</i>	225,00	385,00	3719,50	45
13	<i>P. caribaea</i> v. <i>hondurensis</i>	281,25	422,80	3642,18	52
14	<i>P. caribaea</i> v. <i>hondurensis</i>	281,25	461,90	3810,03	60
15	<i>P. caribaea</i> v. <i>hondurensis</i>	281,25	430,00	3665,50	54

## RESULTADOS

### Estudos em Amostras Geradas

Com base nos resultados de  $\sum_j d_{lj}$  e  $\sum_j d^2_{lj}$  obtidos nas diferentes faixas de extração das 20 populações indicadas no quadro I, foram determinados os valores do vício  $B_d - B'_d$ , assinalados no quadro III. Foram também calculados os vícios percentuais, relacionados no quadro IV.

### Estudos em Amostras Reais

Com os dados coletados na prática e reunidos no quadro II, foram determinadas as tendenciosidades  $\hat{B}_d - \hat{B}'_d$  e  $100(\hat{B}_d - \hat{B}'_d)/\hat{B}_d$ . Os resultados constam no quadro V, juntamente com os valores, encontrados nas amostras, dos desvios-padrões, das estimativas das variâncias e dos coeficientes de variação dos diâmetros retirados.

Para estudos de correlação, tomaram-se as variáveis.

$$X_1 = 100 \frac{\hat{B}_d - \hat{B}'_d}{\hat{B}_d} \quad (\%)$$

$$X_2 = s_d^2 \quad (\text{cm}^2)$$

$$X_3 = s_d^2 \quad (\text{cm})$$

$$X_4 = C. V_d \quad (\%)$$

empregando-se a transformação

$$\text{arc sen } \sqrt{\frac{p}{100}}$$

para as variáveis expressas em porcentagem. Encontraram-se os seguintes coeficientes de correlação linear:

$$r_{12} = 0,6886 \quad **$$

$$r_{13} = 0,7131 \quad **$$

$$r_{14} = 0,9963 \quad **$$

com (\*\*) representando a significância ao nível de 1% de probabilidade, determinada através do teste *t* com *N* — 2 graus de liberdade.

#### Estudos em Amostras Teóricas

Para estudos teóricos tomou-se uma população de  $\mu = 10,2 \text{ cm}$  e  $\sigma^2 = 15,25 \text{ cm}^2$ , iguais aos  $\hat{\mu}$  e  $s^2$  determinados para a amostra 10, <sub>p</sub> escolhida por sorteio realizado ao acaso entre 15 relacionadas no quadro II. As integrais foram solucionadas segundo a Regra de Simpson, com auxílio de computação eletrônica. Os resultados encontrados para a tendenciosidade  $\hat{B}_d - \hat{B}'_d$  foram assinalados no

quadro VI. Para comparação foram gerados diâmetros ao acaso com as citadas médias e variância, e a partir dos resultados foram calculados os valores correspondentes a  $\hat{B}_d - \hat{B}'_d$  também apresentados no quadro VI. Ainda para comparação, foram reunidos no mesmo quadro os valores correspondentes ao caso real da amostra 10. Os resultados encontrados nas populações teórica, gerada e real não diferiram entre si ao nível de 1% de probabilidade.

QUADRO III — Resultados de  $\hat{B}_d - \hat{B}'_d$  calculados a partir de dados gerados para populações constantes no quadro I. Valores correspondentes à extração de todas as árvores até  $d_{ij} = (N/10)\mu$ , com  $N = 2, 3, \dots, 12$ , expressos em  $m^2/ha$ .

$d_{ij}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
( 2/10) $\mu$			0,00	0,01	0,04			0,00	0,00	0,03
( 3/10) $\mu$			0,00	0,02	0,08			0,00	0,01	0,05
( 4/10) $\mu$			0,01	0,04	0,14			0,00	0,02	0,10
( 5/10) $\mu$		0,00	0,01	0,08	0,24		0,00	0,01	0,05	0,16
( 6/10) $\mu$		0,00	0,04	0,15	0,39		0,00	0,02	0,10	0,26
( 7/10) $\mu$	0,00	0,01	0,09	0,28	0,58		0,01	0,06	0,16	0,38
( 8/10) $\mu$	0,00	0,03	0,19	0,45	0,80	0,00	0,02	0,11	0,25	0,53
( 9/10) $\mu$	0,01	0,09	0,32	0,64	1,06	0,10	0,07	0,19	0,39	0,70
$\mu$	0,06	0,23	0,51	0,90	1,39	0,04	0,15	0,32	0,55	0,92
(11/10) $\mu$	0,17	0,40	0,77	1,21	1,79	0,10	0,28	0,49	0,79	1,18
(12/10) $\mu$	0,28	0,65	1,14	1,65	2,30	0,18	0,45	0,71	1,07	1,53

$d_{ij}$	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
( 2/10) $\mu$				0,00	0,00				0,00	0,00
( 3/10) $\mu$				0,00	0,00			0,00	0,00	0,00
( 4/10) $\mu$			0,00	0,00	0,01			0,00	0,00	0,01
( 5/10) $\mu$			0,00	0,01	0,03			0,00	0,00	0,02
( 6/10) $\mu$		0,00	0,00	0,02	0,06		0,00	0,00	0,01	0,05
( 7/10) $\mu$		0,00	0,01	0,05	0,12		0,00	0,01	0,03	0,09
( 8/10) $\mu$		0,00	0,04	0,13	0,22	0,00	0,00	0,02	0,09	0,16
( 9/10) $\mu$	0,00	0,03	0,11	0,24	0,38	0,00	0,02	0,06	0,16	0,26
$\mu$	0,02	0,10	0,23	0,40	0,62	0,02	0,07	0,14	0,27	0,40
(11/10) $\mu$	0,10	0,23	0,41	0,64	0,90	0,06	0,16	0,27	0,42	0,58
(12/10) $\mu$	0,13	0,39	0,67	0,96	1,21	0,09	0,26	0,43	0,64	0,81

QUADRO IV — Resultados de  $100 \frac{\hat{B}_d - \hat{B}'_d}{\hat{B}_d}$  calculados a partir de dados gerados para as populações constantes no quadro I. Valores correspondentes à extração de todas as árvores até  $d_{ij} = (N/10)\mu$ , com  $N = 2, 3, \dots, 12$ , expressos em percentagem.

$d_{ij}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
( 2/10) $\mu$			1,95	52,79	97,69			10,41	66,03	97,50
( 3/10) $\mu$			12,60	33,85	91,17			11,13	35,64	92,30
( 4/10) $\mu$			5,51	28,34	68,33			8,22	25,26	68,10
( 5/10) $\mu$		0,18	5,20	23,10	51,11		0,24	6,65	18,90	50,85
( 6/10) $\mu$		0,81	6,15	18,98	38,25		0,72	5,93	14,48	38,26
( 7/10) $\mu$	0,00	1,17	6,21	15,55	29,66		1,10	5,15	12,47	29,78
( 8/10) $\mu$	0,11	1,39	5,79	13,18	25,20	0,11	1,43	4,85	11,35	25,16
( 9/10) $\mu$	0,29	1,67	5,49	12,08	22,53	0,22	1,78	4,83	10,75	22,40
$\mu$	0,45	2,02	5,60	11,65	20,92	0,40	2,00	5,07	10,60	20,81
(11/10) $\mu$	0,71	2,35	5,88	11,49	18,83	0,65	2,48	5,43	10,63	19,69
(12/10) $\mu$	0,94	2,82	6,28	11,54	19,15	0,90	2,91	5,86	10,76	18,96

$d_{ij}$	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
( 2/10) $\mu$				0,25	7,81				0,27	29,47
( 3/10) $\mu$				0,39	11,46			0,00	0,33	21,29
( 4/10) $\mu$			0,02	5,55	10,85			0,00	4,83	16,43
( 5/10) $\mu$			0,78	2,85	8,28			4,01	2,73	12,62
( 6/10) $\mu$		0,02	0,92	3,44	7,45		0,00	1,20	3,33	9,84
( 7/10) $\mu$		0,29	1,22	4,20	7,15		0,24	1,36	4,14	8,04
( 8/10) $\mu$		0,43	1,78	4,21	6,96	0,00	0,43	1,33	4,24	7,15
( 9/10) $\mu$	0,06	0,57	1,88	3,98	6,99	0,07	0,57	1,61	3,97	6,79
$\mu$	0,17	0,78	2,09	4,14	6,98	0,17	0,81	1,97	4,14	6,83
(11/10) $\mu$	0,35	1,11	2,47	4,52	7,08	0,35	1,12	2,33	4,50	7,10
(12/10) $\mu$	0,44	1,43	2,92	4,97	7,37	0,44	1,44	2,77	4,98	7,48

QUADRO V — Resultados de  $\hat{B}_d - \hat{B}'_d$  e  $100 \frac{\hat{B}_d - \hat{B}'_d}{\hat{B}_d}$  em desbastes realizados em povoamentos reais e valores dos desvios-padrões, das estimativas das variâncias e dos coeficientes de variação, determinados a partir dos diâmetros retirados. Resultados decorrentes de dados reunidos no quadro II.

Amostra	$\hat{B}_d - \hat{B}'_d$ (m <sup>2</sup> /ha)	$100 \frac{\hat{B}_d - \hat{B}'_d}{\hat{B}_d}$	$s_d$ (cm)	$s^2_d$ (cm <sup>2</sup> )	C. V. <sub>d</sub>
1	0,42	6,82 %	2,59	6,73	27,85 %
2	0,44	11,02 %	3,54	12,50	37,26 %
3	0,46	5,81 %	2,16	4,67	25,12 %
4	0,55	8,70 %	2,52	6,34	31,11 %
5	0,48	9,11 %	3,19	10,19	32,22 %
6	0,75	10,34 %	4,37	19,12	35,53 %
7	0,27	5,57 %	1,97	3,88	24,94 %
8	0,91	12,18 %	3,82	14,56	38,58 %
9	0,64	5,83 %	2,03	4,13	25,06 %
10	0,44	10,43 %	2,39	5,69	34,38 %
11	0,43	9,91 %	1,80	3,22	33,96 %
12	1,49	11,45 %	3,11	9,67	36,59 %
13	0,57	5,62 %	2,00	4,01	24,69 %
14	0,71	6,69 %	2,08	4,32	27,01 %
15	0,67	6,58 %	2,13	4,55	26,62 %

QUADRO VI — Valores de  $B_d - B'_d$  estimados teoricamente e calculados para amostra real e para amostra gerada em computador, todas com desvio padrão de 3,9 cm e média de 10,2 cm.

Diâmetro limite da faixa de extração	Amostra teórica	Amostra real	Amostra gerada
	$B_d - B'_d$ (m <sup>2</sup> /ha)	$\hat{B}_d - \hat{B}'_d$ (m <sup>2</sup> /ha)	$\hat{B}_d - \hat{B}'_d$ (m <sup>2</sup> /ha)
( 3/10) $\mu$	0,01	0,00	0,01
( 4/10) $\mu$	0,02	0,01	0,02
( 5/10) $\mu$	0,05	0,02	0,04
( 6/10) $\mu$	0,08	0,07	0,08
( 7/10) $\mu$	0,15	0,13	0,14
( 8/10) $\mu$	0,24	0,22	0,22
( 9/10) $\mu$	0,36	0,27	0,35
$\mu$	0,53	0,49	0,54
(11/10) $\mu$	0,75	0,77	0,77
(12/10) $\mu$	1,01	1,01	0,99
(13/10) $\mu$	1,30	1,18	1,27
(14/10) $\mu$	1,62	1,57	1,58

### DISCUSSÃO

Depreende-se do exame dos dados do quadro III que em cada amostra os valores do vício  $B_d - B'_d$  aumentam à medida em que aumenta o valor de N da faixa de extração limitada pelo diâmetro

$$d_{ij} = \frac{N}{10} \mu$$

Do quadro III observa-se que em populações de idênticos  $\mu$  e  $N_p$ , a tendenciosidade é maior nas de maior  $\mu$ , quando se considera a mesma faixa de extração, o que já era de se esperar pela própria equação deduzida no estudo teórico.

A comparação dos resultados de  $B_d - B'_d$  calculados teoricamente para faixas de extração limitadas por

$$d_{ij} = \frac{N}{10} \mu$$

em populações de  $\sigma_p$ ,  $\mu$  e  $N_p$  previamente escolhidos, com valores calculados com dados coletados na prática para a amostra 10, aponta a viabilidade de estimativa teórica dessa tendenciosidade a partir das equações apresentadas neste trabalho.

Do exame do quadro III depreende-se que os valores encontrados para  $\hat{B}_d - \hat{B}'_d$  nas amostras geradas são pequenos quando comparados com os relacionados a  $\hat{B}_p - \hat{B}'_p$ , apresentados por VEIGA (1971). Para desbaste de poucas árvores ou em desbaste de amostra de pequena variância dos diâmetros, como já se discutiu, os valores da tendenciosidade são pequenos, chegando a ser praticamente nulos. Mas para maiores retiradas ou maiores variâncias aumentam, a ponto de ter-se para amostra E 2,30 m<sup>2</sup>/ha para a extração até o diâmetro de (12/10)  $\mu$ .

Na prática 14 das 15 amostras desbastadas apresentam o vício,  $\hat{B}_d - \hat{B}'_d$  superior a 0,4 m<sup>2</sup>/ha, como mostra o quadro V, encontrando-se como o maior valor 1,49 m<sup>2</sup>/ha.

O vício  $100 \frac{\hat{B}_d - \hat{B}'_d}{\hat{B}_d}$  aumenta com o aumento da heteroge-

neidade dos diâmetros da população retirada, como se depreende dos coeficientes de correlação linear positivos e significativos entre as estimativas em 15 amostras desbastadas na prática e os valores  $s_d^2$ ,  $s_d$  e C. V. correspondentes. A variável que melhor se correlacionou com o vício foi o coeficiente de variação dos diâmetros retirados. O exame do quadro VI mostra ser variável o valor apresentado por essa tendenciosidade nas diferentes amostras geradas, com a possibilidade de encontrar-se valores altos para

$$100 \frac{B_d - B'_d}{B_d}$$

inclusive superiores a 90%.

Depreende-se do quadro V que para os dados práticos examinados, o vício

$$100 \frac{\hat{B}_d - \hat{B}'_d}{\hat{B}_d}$$

é cometido em porcentagens sempre superiores a 5%, encontrando-se no máximo 12,18%, e com 7 desbaste apresentando porcentagem superior a 9%, resultando ser preferível na prática a determinação da área basal retirada a partir da soma dos quadrados dos diâmetros.

### CONCLUSÕES

Da discussão dos resultados podem ser tiradas as seguintes conclusões:

- a — A determinação da área basal retirada a partir da média aritmética dos diâmetros conduz a um vício, quando comparada com a média determinada a partir da soma dos quadrados dos diâmetros, dado por

$$B_d - B'_d = -\frac{\pi}{4} (N_d - 1) \sigma_d^2$$

e é, pois, diretamente proporcional ao produto do número de árvores pela variância dos diâmetros retirados.

- b — As tendenciosidades  $B_d - B'_d$  podem ser determinadas teoricamente para populações com distribuição normal dos diâmetros, pelas equações

$$B_d - B'_d = (N_p - F_4) \sigma_p^2 R_1 \quad \text{para } z \geq 0$$

$$B_d - B'_d = (N_p - F_5) \sigma_p^2 R_2 \quad \text{para } z \leq 0$$

onde

$$z = \frac{x}{\sigma_p} \quad x = \frac{N}{10} \mu - \mu \quad x \cap N(\mu, \sigma_p^2)$$

$$\begin{aligned}
 & e \\
 R_1 &= \frac{\pi}{4} \left[ 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z y^2 e^{-y^2/2} dy - \frac{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z y e^{-y^2/2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2}{0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-y^2/2} dy} \right] \\
 R_2 &= \frac{\pi}{4} \left[ 0,5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z y^2 e^{-y^2/2} dy - \frac{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z y e^{-y^2/2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2}{0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-y^2/2} dy} \right] \\
 F_4 &= \frac{1}{0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-y^2/2} dy} \\
 F_5 &= \frac{1}{0,5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-y^2/2} dy}
 \end{aligned}$$

Determinações realizadas com essas equações não diferiram significativamente dos vícios calculados em povoamento florestal.

- c — Os vícios determinados em populações geradas em muitos casos assumiram valores elevados, confirmando os encontrados em amostras reais, onde, de 15 povoamentos desbastados 14 apresentaram para  $\hat{B}_d - \hat{B}'_d$  mais que 0,4 m<sup>2</sup>/ha, enquanto para

$$100 \frac{\hat{B}_d - \hat{B}'_d}{\hat{B}_d}$$

7 superaram 9% e todos apresentaram vício superior a 5%.

- d — Os resultados encontrados em população teóricas, e em amostras geradas e confirmados em povoamentos reais, contradicam o uso da média aritmética dos diâmetros para determinação da área basal retirada.

### SUMMARY

#### THE USE OF THE ARITHMETIC MEAN OF DIAMETERS IN THE ESTIMATION OF BASAL AREA. II. BIASES IN THE ESTIMATION OF CUT OUT BASAL AREA.

As shown by PIMENTEL GOMES (1965), the theory proves that the use of the arithmetic mean of diameters to estimate basal areas in forestry leads to a bias. This paper evaluates this bias in the computation of cut out basal area in forestry thinnings, by means of theoretical study, samples generated in a computer, and also through the study of actual populations of trees in groves of *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze, *Pinus elliottii* Eng., *P. taeda* L. and *P. caribaea* var. *hondurensis* Mor. The study thus carried out showed that the bias indicated can be rather serious.

#### LITERATURA CITADA

- PIMENTEL GOMES, F. — 1965 — Inconvenientes do uso do valor médio do diâmetro para determinações da área basal. *Anais da E. S. A. "Luiz de Queiroz"* 22: 111-116.
- VEIGA, R. A. A. — 1971 — Aspectos da determinação da área basal em função da média aritmética dos diâmetros. I — Erros da determinação da área basal do povoamento. *Floresta*, 3 (1): 76-84.