Inconvenientes do uso do valor médio do diâmetro para determinação da área basal[1]

F. PIMENTEL GOMES[2]

1 — Recebido para publicação em 29-11-1965; 2 — Cadeira de Matemática e Estatística da E. S. A. Luiz de Queiroz.

RESUMO

Através do estudo matemático do problema, o autor demonstra que o uso do *valor médio do diâmetro* (GOMES, 1957), obtido através da média aritmética dos diâmetros das árvores, não convém para o cálculo da área basal de um povoamento florestal, pois não satisfaz aos postulados da Teoria da Medida.

1. *INTRODUÇÃO*

Nos trabalhos florestais é importante a determinação da *área basal* ou *área basimétrica*, que se define (GOMES, 1957) como sendo "a soma das áreas seccionais de tôdas as árvores" de um povoamento. Com base nessa área basal, pode-se obter a *área seccional média,* igual a área basal dividida pelo número de árvores. A essa área seccional corresponde um diâmetro, que é, por difinição, o *diâmetro médio* do povoamento. Se, porém, achamos a média aritmética dos diâmetros das árvores, teremos o que GOMES (1957) chama *valor médio do diâmetro.* Ora, propôs-se, no Serviço Florestal da Secretaria da Agricultura do Estado de São Paulo, que a área fôsse calculada a partir dêsse *valor médio do diâmetro.* Tal método, porém, tem inconvenientes graves, que são objeto dêste trabalho.

2 — *INCONVENIENTES DO USO DO VALOR MÉDIO DO DIÂMETRO*

Sendo D_{ij} o diâmetro de cada árvore, a média aritmética dos diâmetros seria:

$$D_p = \frac{\sum\limits_{i,j} D_{ij}}{N_p} = \frac{D_{..}}{N_p}$$

onde N_p é o número de árvores no povoamento.

Seja D_{1j} o diâmetro de cada árvore cortada, num desbaste, e D_{2j}, o de cada árvore remanescente. As médias aritméticas respectivas serão:

$$D_d = \frac{1}{N_d} \sum_j d_{1j} = \frac{1}{N_d} D_{1.} \quad ,$$

$$D_r = \frac{1}{N_r} \sum_j d_{2j} = \frac{1}{N_r} D_2. \quad .$$

As áreas basais calculdadas por êsse método seriam:

$$A'_p = (\pi/4)\ D^2_p\ .\ N_p = \frac{\pi}{4}\ \frac{D^2..}{N_p} \quad ,$$

$$A'_d = \frac{\pi}{4}\ D^2_p\ .\ N_d = \frac{\pi}{4}\ \frac{D^2_1.}{N_d} \quad ,$$

$$A'_r = \frac{\pi}{4}\ D^2_r\ N_r = \frac{\pi}{4}\ .\ \frac{D^2_2.}{N_r} \quad .$$

Vamos calcular $A'_p — A'_d — A'_r$. Obtemos:

$$A'_p — A'_d — A'_r = — \pi/4 \left[\frac{D^2_1.}{N_d} + \frac{D^2_2.}{N_r} — \frac{D^2..}{N_p} \right]$$

$$= — \pi/4 \left[\begin{array}{l} \text{Soma de quadrados do contraste} \\ \text{Desbaste v. Remanescente} \end{array} \right]$$

Segue-se que temos:

$$A'_p — A'_d — A'_r < 0 \quad ,$$

$$\therefore \quad A'_p < A'_d + A'_r \quad ,$$

o que é absurdo, do pontode vista de Teoria da Medida.

Aliás, sendo A_p a área basal do povoamento, dada pela fórmula clássica:

$$A_p = \frac{\pi}{4} \sum_{i,j} D^2_{ij} \quad ,$$

temos:

$$A_p — A'_p = \frac{\pi}{4} \left[\sum_{ij} D^2_{ij} — \frac{D^2..}{N_p} \right]$$

isto é,

$$A_p — A'_p = \pi/4 \left[\begin{array}{l} \text{Soma de quadrados dos desvios} \\ \text{dos diâmetros no povoamento} \end{array} \right]$$

$$= (\pi/4)\ S\ Q\ P$$

$$\therefore \quad A_p = A'_p + (\pi/4)\ S\ Q\ P \quad .$$

Anàlogamente deduzimos:

$$A_d = A'_d + (\pi/4)\ S\,Q\,D\ ,$$

$$A_r = A'_r + (\pi/4)\ S\,Q\,R\ ,$$

onde SQD e SQR se referem às árvores desbastadas e às remanescentes, respectivamente.

No caso de heterogeneidade grande no povoamento, a soma de quadrados SQP é elevada, de onde se segue que A será muito superior a A'_p .

Exemplos

Consideremos, como exemplo, um povoamento com apenas 4 árvores, de diâmetros 2, 4, 8, 10, cm.

Temos:

$$D_p = \frac{2 + 4 + 8 + 10}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ cm},$$

$$A'_p = \frac{\pi}{4} \frac{24^2}{4} = \frac{\pi}{4} \ .\ 144\ .$$

Se cortarmos as duas árvores mais finas, de diâmetros 2 e 4 cm, ficará:

$$A'_d = \frac{\pi}{4} \frac{6^2}{2} = \frac{\pi}{4} \ .\ 18\ .$$

$$A'_r = \frac{\pi}{4} \ .\ \frac{18^2}{2} = \frac{\pi}{4} \ .\ 162\ ,$$

de onde se conclui que

$$A'_d + A'_r = \frac{\pi}{4} \ .\ 180 > A'_p = \frac{\pi}{4}\ 144\ .$$

e, pior ainda, que

$$A'_p < A'_r\ ,$$

o que é verdadeiramente absurdo.

4 — *CONCLUSÕES*

Os argumentos apresentados são, como é evidente, profundamente desfavoráveis ao uso do valor médio do diâmetro para o cálculo da área basal de um povoamento. No entanto, é preciso convir que na formula

$$A'_p - A'_d - A'_r = -(\pi/4)\left[\begin{array}{l}\text{Soma de quadrados do contraste} \\ \text{Desbaste v. Remanescente}\end{array}\right]$$

o segundo membro poderá ser reduzido se, como não é raro, além das árvores de menor diâmetro se cortarem algumas de diâmetro maior, mas que tenham conformação defeituosa.

Por outro aldo, no caso, tão frequente, do uso de amostragem, realmente não temos os valores de A_p, A_d e A_r, mas suas estimativas respectivas $\hat{A}_p$, $\hat{A}_d$ e $\hat{A}_r$, o que não obsta que a igualdade

$$\hat{A}_p - \hat{A}_d - \hat{A}_r = 0 ,$$

ou

$$\hat{A}_p = \hat{A}_d + \hat{A}_p ,$$

se verifique *em média*. Já no caso das determinações baseadas novalor médio dos diâmetros, há um êrro sistemático, que a repetição da amostragem ou o aumento do tamanho da amostra não podem compensar.

4 — *SUMMARY*

This paper discusses the use of the arithmetic mean of diameters in the computation of basal area in forestry. This use, proposed in the Serviço Florestal of the Secretary of Agriculture of the State of São Paulo, leads to several difficulties, to be shown presently.

Let D_{ij} be the diameter of a tree, with $i = 1$ referring to trees to be cut, and $i = 2$ to trees to be left uncut. If N_d is the number of trees to be cut, N_r the nummber of trees to be left uncut, and $N_p = N_d + N_r$ is the total number of trees, then the basal area of the total population (A_p) is

$$A_p = (\pi/4) \sum_{i,j} D^2_{ij} ,$$

and the basal area of trees to be cut and to be left uncut are, respectively,

$$A_d = (\pi/4) \sum_{j} D^2_{1j} ,$$

$$A_r = (\pi/4) \sum_{j} D^2_{2j} .$$

The similar estimates A'_p, A'_d, A'_r, computed with the aritmetic means of diameters, are:

$$A'_p = (\pi/4) \frac{D^2..}{N_p} ,$$

$$A'_p = (\pi/4) \frac{D^2_1.}{N_d} ,$$

$$A'_r = (\pi/4) \frac{D^2_2}{N_r} .$$

It is shown that

$$A'_p - A'_d - A'_r = -(\pi/4) \left[\begin{array}{l} \text{Sum of square of contrast} \\ \text{cut thees v. uncut trees} \end{array} \right]$$

so that, since the contrast in question may be taken as alwys non-zero, we have

$$A'_p < A'_d + A'_r ,$$

which is certainly absurd from the point of view of the theory of measure. But indeed, in some cases we may even have

$$A'_p < A'_r ,$$

which is really an absurd.

On the other hand it is proved that

$$A_p = A'_p + (\pi/4) \left[\begin{array}{l} \text{Sum of squares of deviations} \\ \text{of diameters in population} \end{array} \right]$$

so that the difference A'_p A_p — increases with the heterogeneity of diameteres of the trees.

5. *BIBLIOGRAFIA CITADA*

GOMES, A. M. de Azevedo — 1957 — Medição dos Arvoredos, 413 pp., Livraria Sá da Costa, Lisboa.