ソルバーを用いた有限要素法による単相変圧器の磁界解析

木 村 昭 穂*・松 坂 知 行**

Magnetic Field Analysis of Single-Phase Transformer by Finite Element Using Solver

Akio KIMURA and Tomoyuki MATSUZAKA

Abstract

This is paper deals with the magnetic field analysis of a single-phase transformer by the finite element method using. The unique feature of this model is that it allowed a decrease of programming using solver. For example, the single-phase transformer is analyzed using the finite element method with solver. This method was proved effective.

Key words: 変圧器，有限要素法，数値計算

1. はじめに

有限要素法等のプログラミングの軽減を図る為に，行列方程式を含む計算全体を記号で実行する計算方法が試みられている。記号による代表的な数式処理言語として Mathematica と MATLAB が上げられる。Mathematica[1,2] の場合には，要素行列の次数が大きくなると，計算に必要な行列が大規模行列となり，計算に必要なモメリーが指数的に増大するので，元の行列を部分行列に分割して解く等の工夫が必要であることが指摘されている。MATLAB の場合には，数式が Mathematica 同様に記述可能であることや，疎行列が簡単に取り扱えられるので大きな行列の計算が可能である。またインタプリタ方式であるのでデバックが容易であることや，グラフィック表示が簡単に記述できる。そこで筆者らは，このような利点を考慮して MATLAB を有限要素解析のソルバーとして用い，プログラミングの軽減を図ることを試みた。例として，単相変圧器に適用し，その有効性を明らかにしたので報告する。

2. 基礎方程式と行列の処理

図 1 は，解析に用いた単相変圧器の構造図を示したものである。左右上下対称であるので 1/4 領域について解析を行なった。図 2 は，端子電圧や負荷を考慮したときの回路図を示したものである。図から変圧器の二元場の磁界解析に必要な基礎方程式は，次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=-\left(\frac{N_1I_1}{S_1}+\frac{N_2I_2}{S_2}\right)+\sigma\frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (1)$$

N_1, N_2 は一次側，二次側のコイルの巻き線数，S_1, S_2 は一次側，二次側のコイルの断面積である。また変圧器に負荷が接続され，印加電圧が与えられ電流が未知であるとすると，図 2 より一次側，二次側の電圧 V_1, V_2 に関す方程式は，

平成 8 年 12 月 10 日受理
* 八戸工業大学 情報システム工学研究所 講師
** 八戸工業大学 情報システム工学研究所 教授

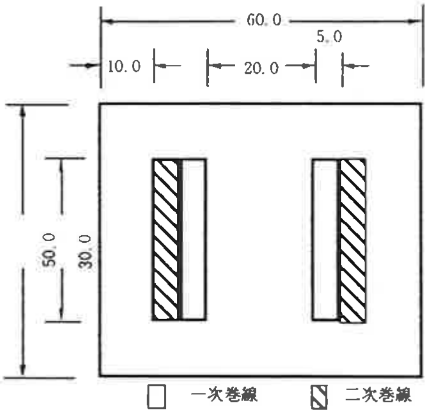


図1．単相変圧器の構造図

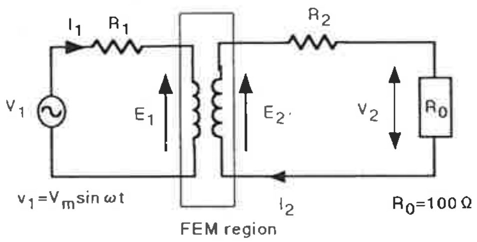


図2．等価回路

一次側では，

$$V_1 = \frac{d\phi_1}{dt} + R_1 I_1 \qquad (2)$$

二次側では，

$$V_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} - R_2 I_2 - R_0 I_2 = 0 \qquad (3)$$

である。

ここで，R_1, R_2 は一次および二次の巻き線抵抗，R_0 は負荷抵抗，I_1, I_2 は一次および二次電流，ϕ_1 は一次巻線との磁束鎖交数，ϕ_2 は二次巻線との磁束鎖交数，V_1 は外部から与えられるので既知である。V_2 は負荷抵抗の端子電圧である。

(1) 式をガラーキン法を用いて離散化し，(2), (3) 式を考慮すると，解くべき連立一次方程式は，次式のように表される。

$r_0 = b - Ax_0$	第0近似解 x_0 を適当に定め残差 r_0 を計算する
$p_0 = A^{-1} r_0$	補助変数 p の出発
$k = 0, \cdots\cdots, n$	繰り返し k
$q = Ap_k$	q を求める
$\alpha_k = \dfrac{(A^{-1} r_k, r_k)}{(p_k, A^{-1} p_k)}$	修正係数 α_k を求める
$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$	第 $k+1$ の近似解 x_{k+1} を求める
$r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k$	第 $k+1$ の残差 r_{k+1} を求める
$if \ \| r_{k+1} \| \leq \varepsilon \| b \|$	収束判定をする
$q = A^{-1} r_{k+1}$	q を求める
$\beta_k = \dfrac{(A^{-1} r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, A^{-1} r_k)}$	補助変数 p_k の修正係数 β_k を求める
$p_{k+1} = q + \beta_k p_k$	補助変数 p_{k+1} を求める 収束をしていない場合には k に戻り繰り返す

図3．共役勾配法のアルゴリズム

$$Ax = b \qquad (4)$$

ただし，A は係数行列，b は右辺ベクトル，x は未知ベクトルである。

一次連立方程式を解く場合に，解法のアルゴリズムが簡潔で精度が良く，しかも数式形式で記述ができ，解りやすいことが望まれる。MATLAB は，行列の演算が記号形式で記述できるので，共役勾配法のアルゴリズムが適している。さらに，共役勾配法は解の精度がよいことでも知られているので，行列の解法に共役勾配法を適用した。MATLAB による共役勾配法のアルゴリズムは，図3のように表される。

共役勾配法の反復計算は[4,5,6]，右辺ベクトル b の最大コルム $\| b \|$ に対する反復 $(k+1)$ 回目の残差ベクトル r_{k+1} 最大ノルム $\| r_{k+1} \|$ の比が，指定した収束判定値 ε 以下になった場合に打ち切る。

3. 解析結果

図4は，要素の分割例を示したものであり，要素数1,642，節点数871である。

図5は，無負荷のときの等ポテンシャル線図

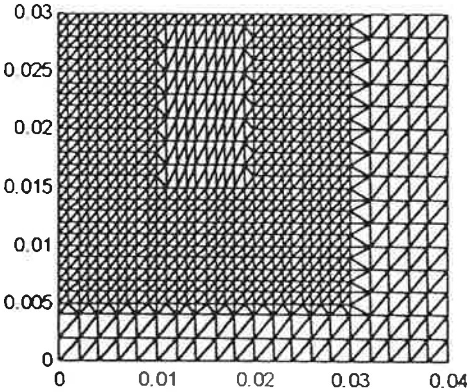


図 4. 分割図

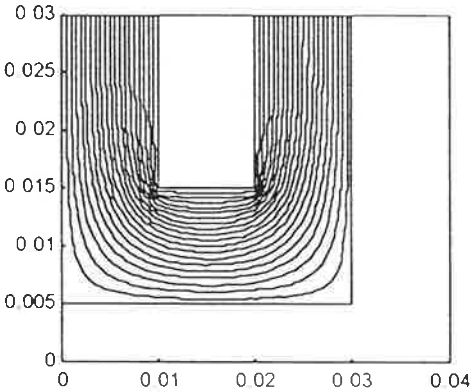
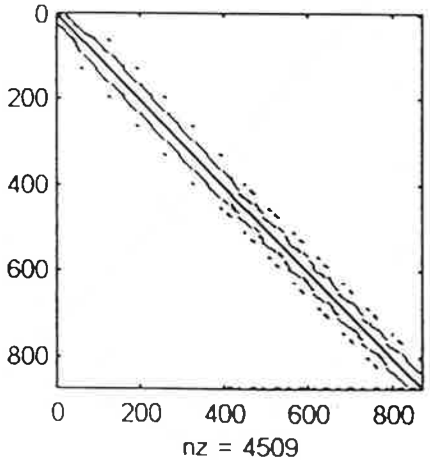
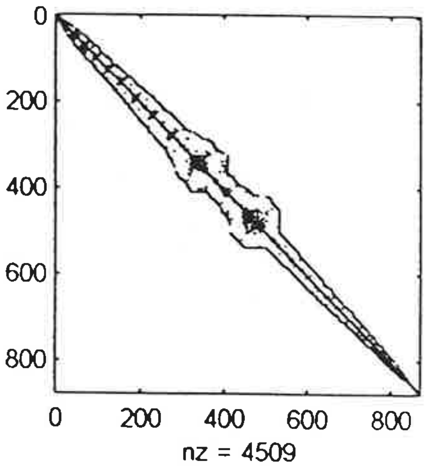


図 5. 等ポテンシャル線図



① 疎行列



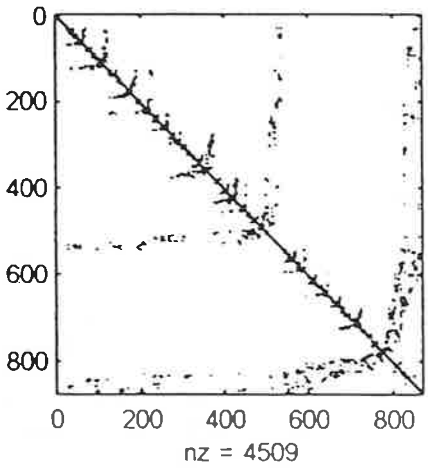
② RCM

を示したものである。図より磁束分布が内側の角の部分に集中していることがいえる。

図 6 は，図 3 の要素分割のときに生成された行列の非ゼロ要素値の構造のパターンを示したものである。図 6 の (a) は，疎行列を示したものである。(b) は，疎行列の帯幅を少なくする為に，RCM 法を適用したときの行列のパターンを示したものである。(c) は，最小次数順序法を適用したときの行列のパターンを示したものである。MATLA は，コマンドを指定することにより解析の為に生成された行列を容易に確認できる等の利点を有している。

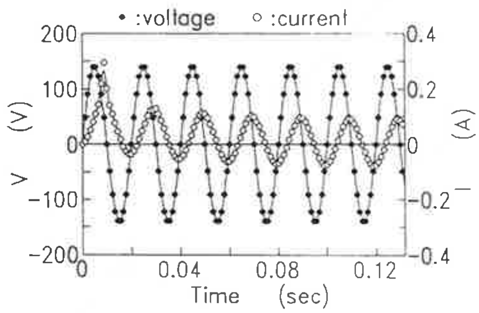
図 7 の (a), (b) は，無負荷時のときに渦電流考慮無しと有りの場合の入力電圧と電流の解析結果を示したものである。(a) の渦電流を考慮しない場合には，初期の段階に大きな電流が流れ，時間の経過とともに電流値が安定して行くことがいえる。図より (b) の渦電流を考慮した場合には，全体的に大きな電流値が流れている。また時間の経過と共に緩やかに定常状態に近づくことがいえる。渦電流の影響により電流波形の先端が急峻である。これは，渦電流を考慮したことによる渦電流の影響によるものである。

図 8 の (a), (b) は，負荷 ($R=100\,\Omega$) のときに

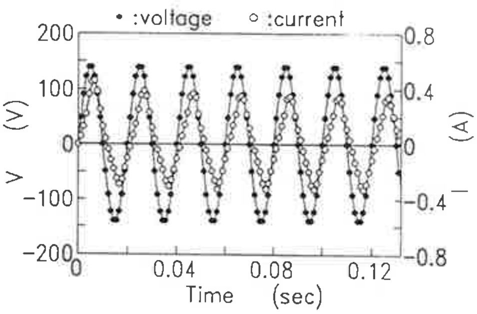


③　最小次数順序法

図6.　オーダーリングによる行列の生成パターン

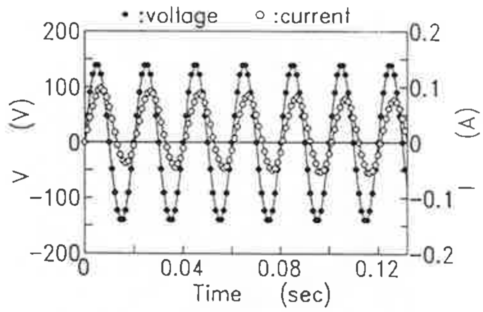


(a)　渦電流考慮なし

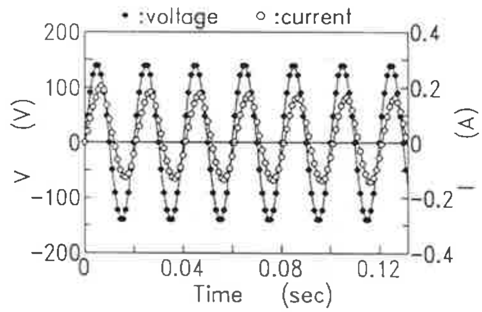


(b)　渦電流考慮あり

図7.　入力電圧と電流の関係（無負荷）



(a)　渦電流考慮なし

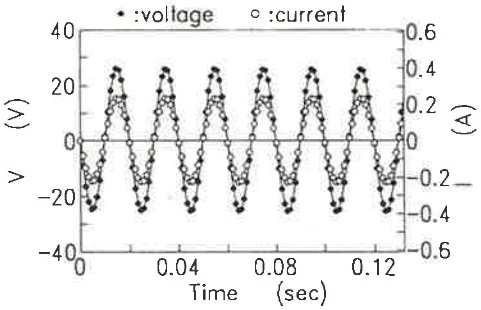


(b)　渦電流考慮あり

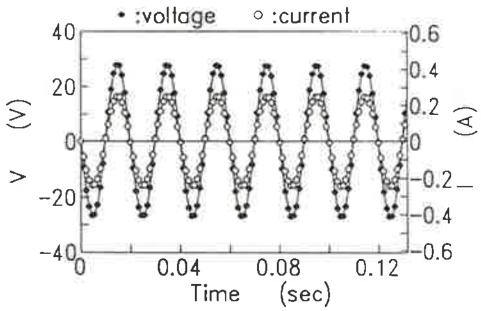
図8.　入力電圧と電流の関係（負荷）

渦電流考慮なしと有りの場合の入力電圧と電流の解析結果を示したものである。図7の時と同様なことがいえる。(a)の渦電流を考慮しない場合には，初期の段階に大きな電流が流れ，時間の経過とともに電流値が安定して行くことがいえる。(b)の渦電流を考慮した場合には，初期の電流値の大きさはほぼ同じであるが，定常状態の電流値は(a)の2倍程度の大きさであることがいえる。これは，渦電流を考慮したことによる影響によるものと思われる。実際に変圧器には渦電流が流れるので，解析をする場合には渦電流を考慮することが必要である。

図9の(a),(b)は，負荷（$R=100\Omega$）のときに渦電流考慮無しと有りの場合の二次側の電圧と電流を示したものである。負荷が抵抗負荷であるので，電圧，電流値が安定するまでの過渡現象が小さいことがいえる。渦電流を考慮した場



(a) 渦電流考慮なし



(b) 渦電流考慮あり

図9. 出力電圧と出力電流の関係（負荷）

合に，電圧，電流値が幾分小さめとなっている。これは，渦電流の影響によるものと思われる。

4. まとめ

MATLABの利点は，行列の演算が数式形式で記述できるのでプログラミングがしやすく，且つ簡潔でかかりやすい事や，疎行列が簡単に取り扱えるので大きな行列の計算が容易に出来ることである。また，回路方程式を考慮して解析することにより，出力電圧，電流を推定することが出来るようになった。今後の課題として，磁性材料そのものがヒステリシスを有しているので，ヒステリシスを考慮した解析が必要である。ヒステリシスを考慮することにより，入出力電流をより正確に推定することが出来るものと思われる。

なお，本研究の一部は平成8年度文部省科研費の補助により行った。

参考文献

1) 依田：Mathematicaを用いた2次元有限要素逆解析，日本シミュレーション学会，1992, pp 103-105
2) 安武，加川：数式処理言語Mathematicaによる静電場逆解析，日本シミュレーション学会，1995, pp 225-227
3) Jose Roberto Cardoso: Finite Element Method with BiCG Solber Applied to Moving Linear Induction Motors, IEEE, p 1888-1891, 1995
4) 小国：MATLABと利用の実際，サイエンス社
5) 藤原，中田，高橋：ICCG法の高速化手法に関する検討，静止器・回転機合同研究会 SA-91-43, RM-91-106
6) 戸川：共役勾配法，教育出版