ブール関数簡単化問題の発生アルゴリズム

苫米地　宣　裕

An Algorithm for Generating Problems on Boolean-Function Minimization

Nobuhiro TOMABECHI

Abstract

This paper studies on generation of the good problems on Boolean-function minimization which are presented to the learners in the logic circuit design training system. At first, the conditions required for the good problems on Boolean-function minimization are considered. Following conditions are obtained ; ① The simplification is feasible. ② The answer is not 1. ③ The number of terms is reasonable. ④ The problem is not the same to already generated ones. An algorithm realizing all of the conditions ①～④ is proposed.

1. まえがき

本研究は，論理回路演習用 CAI ソフトを開発する一環として行ったもので，ブール関数簡単化演習[1),2)]において問題を学習者に提示するとき，適切な問題を自動的に作成する方法について検討している。

ブール関数簡単化問題をコンピュータで作成するとき，例えば乱数を用いて真理値表の出力欄を 1 か 0 に決める方法が考えられるが，この方法では，簡単化できない問題が発生する可能性がある。また，答が恒等的 1 となる問題がひんぱんに発生する可能性もあり，これも適切とは言い難い。

本論文では，まず，ブール関数簡単化問題として備えるべき条件について考察し，a 簡単化可能，b 恒等的 1 とならない，c 項数が適切，d 同一の問題でない，などの条件を明らかにしている。次に 2 つの項を組み合わせたとき簡単化が可能となる項の性質を明らかにしている。そして，簡単化可能な問題を発生する次のような方法を提案している。① 中心とする 1 つの最小項を定める。② 乱数により 1 つの項を発生する。③ 発生した項と中心となる項を組み合わせたとき簡単化が可能か否か判定し，簡単化可能ならばこの項を出題する式に加える。④ ②～③ の操作を必要な項の数だけくり返す。さらに，a～d の条件をすべて満足する問題を作成する方法も提案している。

平成 6 年 12 月 15 日受理
八戸工業大学 電気工学科 教授

2. ブール関数簡単化問題の条件

まず，次の条件を前提とする。

(前提 1)　出題するブール関数式は積和の形式とする。

(前提 2)　変数（論理変数）の数は予め定められているとする。この変数の数を P と表わす。

ブール関数簡単化問題として備えるべき条件について考察すると，次のようなものが上げられる。

(条件 1)　簡単化できること。

(条件 2)　答が恒等的 1 とならないこと。

(条件 3)　項の数が適切であること。

(条件 4)　一度出題した問題と同一でないこ

と。

条件３の項数は，次のようにとるのが適切と考えられる。ただし，N は項数を表わしている。

$$2 \leqq N \leqq P+1 \qquad (1)$$

3. 項の表現と分類

3・1　3進数，および3値カルノー図を用いた項の表現

変数記号（リテラルともいう）の個数が一定しない項を表現する方法としては，まず，３進数を用いる方法が考えられる。これは次のように定義される。

［定義１］　項の３進数表現

項を $F=S_1S_2\cdots S_p$，３進数を $X=(x_1x_2\cdots x_p)_3$ と表わす。ただし，$S_i(i=1\sim P)$ は変数記号を，P は変数の数を示している。このとき，項 F の S_i と３進数 X の x_i を次のように対応づける。

$$\left.\begin{array}{ll} S_i \text{ が偽} & :\ x_i=0 \\ S_i \text{ が真} & :\ x_i=1 \\ S_i \text{ が1（式に含まれない）} & :\ x_i=2 \end{array}\right\}(i=1\sim \mathrm{P}) \qquad (2)$$

□

［例１］　３進数を用いた項の表現例

変数の個数 P＝3 の場合を示す。

項 $AB\bar{C}$ は，３進数 $(1\ 1\ 0)_3$ に対応する

項 A は，３進数 $(1\ 2\ 2)_3$ に対応する

変数記号の個数が一定しない項から構成されるブール関数式を図に表わす手段として，３値カルノー図が提案されている[3]。これは，通常の２値のカルノー図においては，変数記号が真と偽のみをとるのに対して，真，偽，ヌールの３値をとるものである。ここで，ヌールはその変数記号が項に含まれないことを表わしている。３値カルノー図のセルと項の関係を，２変数の場合について，図１に示している。

	$\bar{A}$	A	A_n
$\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$	$\bar{B}$
B	$\bar{A}B$	AB	B
B_n	$\bar{A}$	A	1

A_n：Aのヌール
B_n：Bのヌール

図１　３値カルノー図のセルと項の対応（２変数の場合）

3・2　簡単化可能な項の分類

１つの最小項を中心となる項（以下，中心項とよぶ）と定めるとき，中心項と論理和をとることにより簡単化が可能となる項を次の３種に分類する。① 隣接項，② 吸収項，③ 半吸収項。ただし，各項は以下のように定義される。

［定義２］　隣接項

２つの項について，変数記号の数が等しく，かつ，ただ１つの変数記号の真偽が異なるとき，「２つの項は互いに隣接項である」という。

［例２］　隣接項の例

３変数 A, B, C の場合，項 ABC と項 $\bar{A}BC$ は互いに隣接項である。３進数表示を用いると，次のように隣接項の判定が容易となる。

$$ABC \rightarrow (1\ 1\ 1)_3$$
$$\bar{A}BC \rightarrow (0\ 1\ 1)_3$$

簡単化は次のように行われる。

$$ABC+\bar{A}BC=(A+\bar{A})BC=BC$$

［定義３］　吸収項

２つの項 X, Y について，X には含まれないが Y には含まれる変数記号が少なくとも１個あり，かつ，その他のすべての変数記号が等しいとき，「X は Y の吸収項である」という。

［例３］　吸収項の例

３変数 A, B, C の場合，項 AB は項 ABC の吸収項である。３進数表示を用いると，

$$AB \rightarrow (1\ 1\ 2)_3$$
$$ABC \rightarrow (1\ 1\ 1)_3$$

簡単化は次のように行われる。

$AB+ABC=AB(1+C)=AB$

［定義 4］　半吸収項

2 つの項 X, Y について，X には含まれないが Y には含まれる変数記号が少なくとも 1 個あり，かつ，X と Y で真偽の異なる変数記号が 1 個だけあり，かつ，その他のすべての変数記号が等しいとき，「X は Y の半吸収項である」という。

［例 4］　半吸収項の例

3 変数 A, B, C の場合，項 $\bar{A}B$ は項 ABC の半吸収項である。3 進数表示を用いると，

$$\bar{A}B \rightarrow (0\ 1\ 2)_3$$
$$ABC \rightarrow (1\ 1\ 1)_3$$

簡単化は次のように行われる。

$$\begin{aligned}\bar{A}B+ABC &= \bar{A}B+\bar{A}BC+ABC \\ &= \bar{A}B+(\bar{A}+A)BC \\ &= \bar{A}B+BC\end{aligned}$$

ブール代数の諸法則の中で 2 つの項からなる式の簡単化に寄与するものは次の 3 つである[1]。

① 　べき等律：$A+A=A$

② 　相補律：$A+\bar{A}=1$

③ 　吸収律：$A+AB=A$

これより次の定理が成り立つ。

［定理 1］　簡単化可能な項

1 つの項を中心項とするとき，これとの論理和をとることにより簡単化が可能となる項は，中心項と同一の項，隣接項，吸収項，および，半吸収項がすべてであり，これ以外には存在しない。

（証明）　べき等律が成り立つ項は中心項と同一の項に限られる。吸収律が成り立つ項は吸収項に限られる。相補律が成り立つ項は，隣接項であるか，または，隣接項に対して吸収項となる項に限られる。隣接項に対して吸収項となる項は半吸収項に等しい。従って，簡単化が可能となる項は，中心項と同一の項，隣接項，吸収項，半吸収項がすべてである。　□

2 つの項の簡単化可能性の判定に関して次の定理が成り立つ。

［定理 2］　簡単化可能性の判定

2 つの項の論理和をとることにより簡単化が可能となる条件は，項を 3 進数表現したとき，一方が 0 で他方が 1 の桁が 1 個以内であることである。

（証明）　2 つの項の間で一方が 0 で他方が 1 となる桁の数を Q とする。定義 2～定義 4 より，Q=0 となる項はすべて，同一の項か，または，吸収項のいずれかである。Q=1 となる項はすべて，隣接項か，または，半吸収項のいずれかである。定理 1 より，簡単化が可能となる項は，同一の項，隣接項，吸収項，半吸収項のいずれかであるから，簡単化が可能となる条件は，一方が 0 で他方が 1 の桁の数が 1 個以内となる。　□

図 2～図 4 に，2 変数～4 変数の場合について，簡単化可能なすべての項を 3 値カルノー図を用いて示している。

4. ブール関数簡単化問題発生方法

4・1　簡単化可能な問題作成アルゴリズム

条件 1（簡単化が可能）を満たす問題を作成するには，1 つの最小項を中心項と定め，この項と論理和をとったとき簡単化できる項のみで式を作成すればよいと考えられる。本方法は次のように定式化することができる。

［アルゴリズム］　簡単化可能な式の作成

（手順 1-1）　すべての変数記号が真である最小項を中心項と定め，出題する式に代入する。

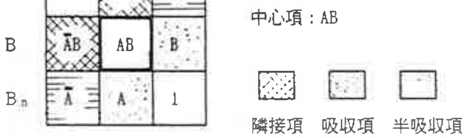

図 2　簡単化可能な項-1（2 変数の場合）

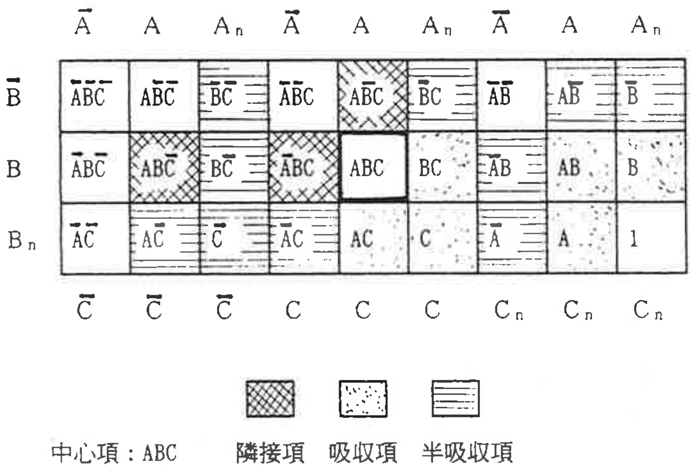

図３　簡単化可能な項-2（３変数の場合）

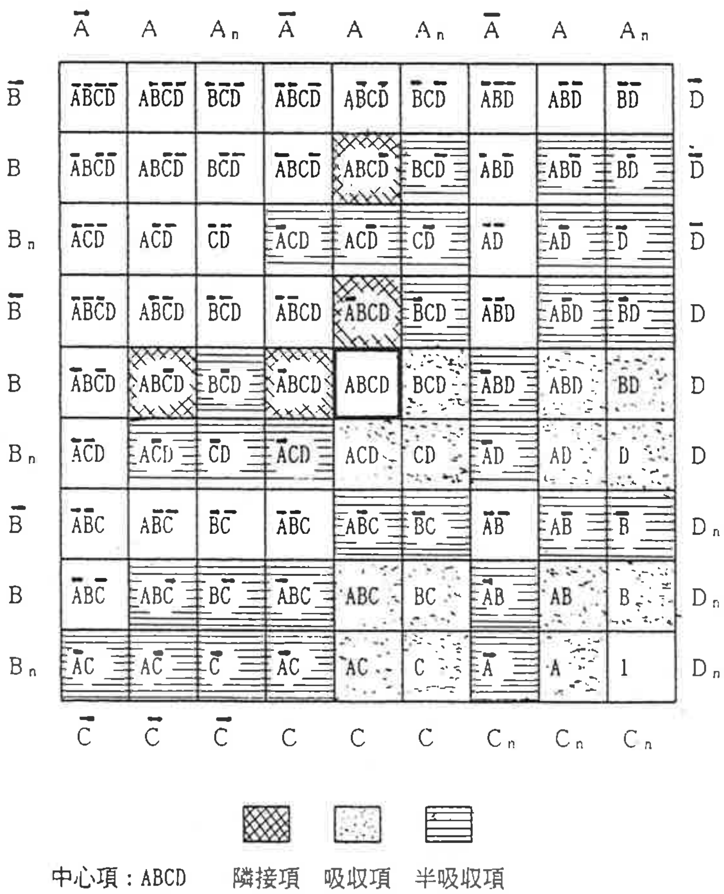

図４　簡単化可能な項-3（４変数の場合）

(手順 1-2)　乱数を発生し，1つの項を作成する。
(手順 1-3)　発生した項と中心項の論理和をとったとき簡単化が可能な否か判定する。判定は定理2に基づいて行う。
可能なとき：発生した項を式に加える。
不可能なとき：発生した項は式に加えない。
(手順 1-4)　手順 1-2，手順 1-3 を，項が必要な数だけ求まるまでくり返す。　□

手順 1-2 において，乱数より項を求める手続きは，乱数 $R(0<R<1)$ を3進数に変換し，3進数を項に変換することにより行うことができる。これは次のように定式化できる。ただし，乱数を R，変数の数を P と表わす。

[アルゴリズム 2]　乱数より項を求める手続き
(手順 2-1)　$X=R\ (3^{P}-2)$ を求め，かつ X を整数化する。
(手順 2-2)　X を3進数 $X'=(x_1x_2\cdots x_P)_3$ に表わす。
(手順 2-3)　$X'=(x_1x_2\cdots x_P)_3$ より項 $F=S_1S_2\cdots S_P$ を求める。x_i と S_i (i=1～P) の対応づけは，定義1の式 (2) に従って行う。　□

手順 2-1 において，(　)の中は 3^P-1 とすると，$(2\ 2\cdots 2)_3$，すなわち恒等的1の項が生ずる可能性があり，これを防ぐため 3^P-2 としている。

4・2　適切な問題を作成する全アルゴリズム

適切な問題の条件2（答が恒等的1とならないこと）を実現するには，作成した式が恒等的1となるか否かを判定し，恒等的1となるときは式の作成をすべてやり直す方法をとるのか適当と考えられる。また，条件4(一度出題した問題と同一でないこと）を実現するには，中心項を乱数によって決める方法が考えられる。ただし，この操作によっても同一の式が発生した場合は，式の作成をやり直すのが適当と考えられる。

条件1～条件4をすべて満足する問題の発生方法は次のようになる。

[アルゴリズム 3]　全アルゴリズム
すでに出題した式を記録する式メモリ M を用意する。
(手順 3-1)　必要な項数を，乱数により式(1)の範囲に決定する。
(手順 3-2)　乱数を発生して中心項を作成し，かつ，出題する式に代入する。
(手順 3-3)　乱数を発生して，中心項と合わせて簡単化可能となる項を作成し，式に加える。この手続きは，アルゴリズム1の手順 1-2，手順 1-3 に相当する。
(手順 3-4)　手順 3-3 を項が必要な数が求まるまでくり返す。
(手順 3-5)　式が恒等的1になるか否か判定する。
恒等的1のとき：手順 3-2 に戻る。
恒等的1でないとき：次の手順に行く。
(手順 3-6)　作成した式が，式メモリ M に記録されている式と一致するか否か判定する。
一致するとき：手順 3-2 に戻る。
一致しないとき：式を M に記録した後，終了とする。　□

手順 3-2：乱数より中心項を求める手続きは，中心項は最小項でありすべての変数記号を含むことを考慮してアルゴリズム2を修正することにより求めることができる。これは次のように定式化できる。ただし，乱数を R と表わす。

[アルゴリズム 4]　乱数より中心項を求める
(手順 4-1)　$\mathrm{X}=\mathrm{R}(2^{P}-1)$ を求め，かつ，X を整数化する。
(手順 4-2)　X を2進数 $\mathrm{X}'=(x_1x_2\cdots x_p)_2$ に表わす。
(手順 4-3)　$X'=(x_1x_2\cdots x_p)_2$ より項 $\mathrm{F}=S_1S_2\cdots S_p$ を求める。x_i と $S_i(i=1\sim\mathrm{P})$ の対応づけは，式 (2) に従って行う。

手順 3-5：恒等的1の判定は，式より真理値表 T を求め，T のすべての出力欄が1となるか否か判定する。

5. む す び

本論文では，論理回路演習用 CAI ソフトにおいてブール関数簡単化問題を自動的に出題するとき，適切な問題を作成する方法について考察を行った。まず，ブール関数簡単化問題として備えるべき条件について考察し，a 簡単化可能，b 恒等的1とならない，c 項数が適切，d 同一の問題でない，などの条件を明らかにした。そして，これらの条件すべてを満足する問題を作成する方法を提案した。

本論文で提案した方法には次のような問題点も存する。

① 発生した項をすべて用いているが，この場合，図4より知られるように，4変数のとき項の発生は半吸収項に偏ることとなる。この点を改善するには，項の種類ごとに採用確率を定め，発生した項を採用するか否かを乱数で決める方法が考えられる。なお，項を，隣接項，吸収項，半吸収項に類別しているのは，この方法に発展させるための措置である。

② 中心項と合わせたとき簡単化が可能となる項のみを発生しているが，この場合，中心項が簡単化されると項が他にいくつかあってもそれ以上の簡単化ができない可能性が大きい。この点を改善するには，中心項ではなく直前に発生した項と合わせて簡単化が可能となる項を発生する方法が考えられる。

今後，問題の難易度を指定できるようにする方法も検討の予定である。

参 考 文 献

1) 向殿，笹尾，“スイッチング理論演習”，朝倉書店，(1984)
2) 鈴木宣夫，“論理回路演習”，朝倉書店，(1985)
3) 苫米地宣裕，“新しいブール関数簡単化アルゴリズム”，八戸工業大学情報システム工学研究所紀要，vol. 6, pp. 1-12, (1994)