# 制約のあるスパンニングツリー問題について

大川　知*

# On the Spanning Tree Problems with Restrictions

Satoshi OKAWA

Abstract

Many probrems concerning network design are very important and considered to be diffdicult combinatorial problems to solve. In fact, most of them are known to be NP-complete.

We define a new network design problem ( and its subproblems ), the sapanning caterpillar problem, that is, the problem to decide whether or not, for a graph G ( with the degree at most d ) given as input, there exists a spanning caterpillar in G. We show this problem is NP-complete even if d≦3. It is a trivial problem for d≦2 because a connected graph with the degree at most 2 is a cycle or a path. So our result is best for the degree constraint.

## １．はじめに

多数の計算機を相互に接続し、分散的な環境で各種の処理を行なうことの利点があきらかになり、計算機ネットワークが構築されている。特に最近は、エンジニアリングワークステーション（ＥＷＳ）やパーソナルコンピュータ（ＰＣ）をも含めて、ネットワークを構成したり、それらを中心とした構内ネットワークを構築したりすることが多くなっている。資源の少ない小型計算機の利用者は、ネットワークを介して大型機や他の資源を利用できるので、恩恵はきわめて大きい。

このようなネットワークは計画的に構築された場合も含め、次々と新しい計算機がネットワークに加わって、乱雑なネットワークになりがちである。

---

昭和６３年１２月１５日受理

＊　電気工学科助教授

そこで、既存のネットワークを見直し、ある意味で最適なネットワークに改造するという問題が生じる。本稿では、このようなネットワークの問題を、グラフの問題として定式化して考察し、最適なネットワークを得るのは困難であることをあきらかにする。

## 2．準備

本節では、グラフ、問題、計算量など基本的な事項について簡単に説明する（詳細は文献（1）（2）などを参照）。次に、本稿で考察する問題に関して必要な定義等を与え、最後に問題の定義をする。

グラフとは有限集合Ｖと，Ｖの元の対（ｕ，ｖ）（$u \neq v$）の有限集合Ｅからなる組Ｇ＝（Ｖ，Ｅ）である。Ｖの元を点、Ｅの元を枝という。Ｇにおいて、枝（ｕ，ｖ）と枝（ｖ，ｕ）を区別するとき有向グラフ、区別しないとき無向グラフという。本稿では、無向グラフだけを考え、無向グラフの意味でグラフということにする。

問題とは、通常、値が不定になっているパラメータや変数を含む一般的な形をした問題のことである。不定になっているパラメータや変数に具体的な値を入れたものを問題の実例（instance）という。例えば、２次方程式を解く問題といえば、不定のパラメータａ，ｂ，ｃを含む$ax^2+bx+c=0$を解く問題を意味し、$a=1$，$b=2$，$c=1$とした$x^2+2x+1=0$はその実例である。ある問題を解くアルゴリズムとは、上述の意味の一般的な形の問題について、どのような実例が入力されても解くことができる解法を意味し、特定の実例を解くというものではないことに注意する。

ある問題を解くのに要する計算時間を考えるとき、実例の大きさに依存すると考えるのが自然であるから、長さｎの実例に対して$t(n)$ステップ以下で計算できるとき、その問題の時間計算量は$t(n)$であるという。基本ステップとして何をとるかは計算機モデルに依存する。本稿では計算機モデルとして（非決定性）Turing機械を考える。

問題を解くのに要する時間によって問題の難しさを測ることができる。非決定性Turing機械によって多項式時間で解くことのできる問題のクラスをＮＰと表わす。ある問題ＰがＮＰに属しており、しかもＮＰに属する他のすべての問題Ｐ’が決定性Turing機械で多項式時間でＰに変換可能であるとき、ＰはＮＰ完全な問題であるという。ＮＰ完全な問題とは、ＮＰの中で最も難しい問題で、現実的な時間（決定性多項式時間）で解くアルゴリズムが存在しない問題と考えられている。

次に本稿で考察する問題について述べる。前節で述べたように、ネットワークは次第に乱雑なものになりがちであるので、それを編成しなおす必要が生じる。このとき、幹線と支線とが生じるのはやむを得ないとしても、末端からでも十分速く幹線に入れるようにしなければ、ネットワークの利用者か

ら不満が出ることはあきらかである。このようなことを考慮して、末端から長さ１の道で幹線に入ることのできるように幹線を決定する問題を以下に定式化する。

まず、末端から長さ１で幹線に入るようなグラフ、キャタピラ（caterpillar）を定義する。すなわち、キャタピラとは、次数１の点を除去して得られるグラフが道となる木Ｔc＝（Ｖ，Ｅ）のことである。このとき、残った道をキャタピラの幹といい、ネットワークの幹線に対応する。あきらかに、道、スターグラフもキャタピラである。グラフＧのスパンニングキャタピラ（spanning caterpillar，ＳＣ）とは、Ｇのすべての点を連結するキャタピラのことである。本稿で扱う問題は、ＳＣを用いて次のように定義される。

スパンニングキャタピラ問題ＳＣ：グラフＧが与えられたとき、ＧにＳＣが存在するかどうかを判定せよ。
次数制限スパンニグキャタピラ問題ＳＣ（ｄ）：次数がｄ以下のグラフＧが与えられたとき、ＧにＳＣが存在するかどうかを判定せよ。

最後に、次節で必要なことを命題としてあげておく。

［命題１］問題ＰがＮＰに属しており、しかも、既にＮＰ完全であることが知られている問題Ｐ’がＰに多項式時間で変換可能ならば、ＰもＮＰ完全である。

［命題２］ｉ）グラフに対するハミルトン道問題ＨＰ*はＮＰ完全である。
ii）次数３以下のグラフに制限したときハミルトン道問題ＨＰ（３）もＮＰ完全である。

## ３．結果

前節で定義した問題について考察する。問題ＳＣ（ｄ）がＮＰ完全であることが示されれば、問題ＳＣもＮＰ完全であることになるから、前者だけを考えれば十分であるが、後者は証明の基本的な考え方をよく表わしていると考えるので、本稿では両者について証明を与える。グラフＧのハミルトン道（ＨＰ）はＳＣであるが、ＳＣは一般にはＨＰではないから、ＳＣからＨＰを得ることができるようにするのが本節の証明の基本的な考え方である。

---

＊　問題ＨＰは次のような問題である。グラフＧが与えられたとき、Ｇのすべての点を１回だけ通るような道が存在するかを判定せよ。

［定理１］問題ＳＣはＮＰ完全である。

（証明）問題ＳＣがＮＰに属することはあきらかであるから、問題ＨＰが問題ＳＣに多項式時間で変換可能であることを示して、問題ＳＣがＮＰ完全であることを証明する。

問題ＨＰの実例をＧ＝（Ｖ，Ｅ）とする。Ｇにおいて、$d(v)=1$ の点は存在しないものとする。ここで、$\overline{V}=V\cup\{v' \mid v\in V\}$、$\overline{E}=E\cup\{(v, v') \mid v\in V\}$ とし、$\overline{G}=(\overline{V}, \overline{E})$ を構成する。この$\overline{G}$を構成するのに要する時間は、$k|V|$（ｋ：定数）以下、すなわち多項式時間以下である。このとき、次の命題が成立する。

［命題］　ＧにＨＰが存在する必要十分条件は、$\overline{G}$にＳＣが存在することである。

（⇒）Ｇにハミルトン道$H=(V, E_H)$が存在するとする。$\overline{G}$の構成法から$T=(\overline{V}, E_H\cup\{(v, v') \mid v\in V\})$とすると、あきらかにＴは$\overline{G}$のＳＣである。

（⇐）$\overline{G}$にＳＣ$=(\overline{V}, E_C)$が存在するとする。あきらかに、$(V, E_C-\{(v, v') \mid v\in V\})$はＧのハミルトン道である。

よって問題ＨＰが問題ＳＣに多項式時間で変換されることが示された。

［定理２］問題ＳＣ（３）はＮＰ完全である。

（証明）定理１の証明と同様にして問題ＨＰ（３）を問題ＳＣ（３）に多項式時間で変換可能であることを示す。$G=(V, E)$, $d(v)\leqq 3$を問題ＨＰ（３）の実例とする。

Ｇに次数２の点があるときは、簡単な変形で解消できるから、Ｇは次数３の正規グラフであるとする。このとき、次の操作によって$G'=(V', E')$を構成する。（図１参照）

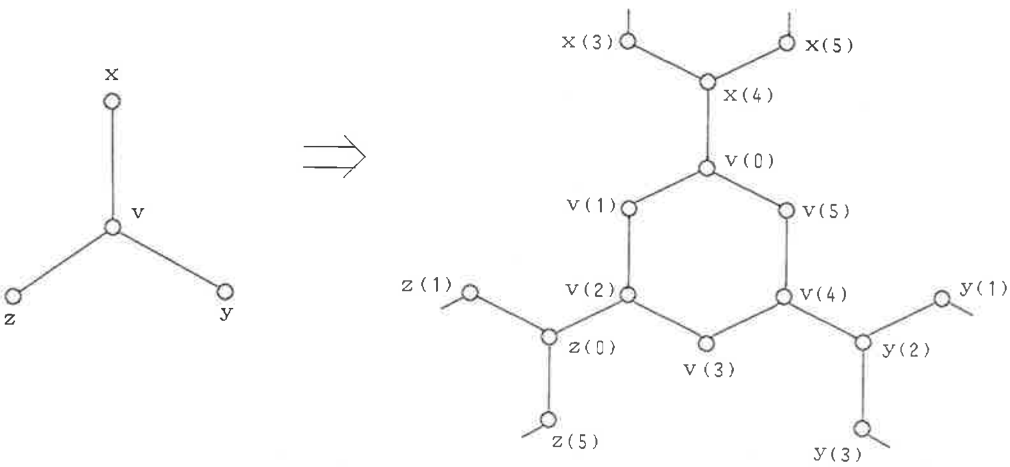


図１　Ｇの点ｖとｖに対するＧ’の部分グラフＧ（ｖ）

$V' = \bigcup_{v \in V} V(v)$、ここで、

$V(v) = \{v(i) \mid i = 0, 1, \cdots, 5\}$

とする。加算は6を法とする加算を表わすものとし、

$E(v) = \{(v(i), v(i+1)) \mid i = 0, 1, 2, \cdots, 5\}$

とし、$G(v) = (V(v), E(v))$とする。さらに、Eの各枝$(u, v)$に対応させて、ある$j, k$について$(u(2j), v(2k))$なる枝をつける。このとき、vに接続している3本の枝に対応する枝をすべて異なる点につけるようにkを選ぶ。このEの枝に対応した枝の集合を$E_0$とし、$E' = \bigcup_{v \in V} E(v) \cup E_0$とする。このとき、次の命題が成立する。

［命題］　GにハミルトンFが存在する必要十分条件は、G’にSCが存在することである。

(⇒) Gのハミルトン道$H = (V, E_H)$が存在するとする。それが、

$v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v_i v_{i+1} \cdots v_n$

であるとする。Hの各枝$(v_i, v_{i+1}) \in E_H \subset E$に対応するG’の枝が、$(v_i(2k_i), v_{i+1}(2j_{i+1})) \in E_0$であるとする。$G(v) = (V(v), E(v))$において、$v(2j)$と$v(2k)$とを結ぶ長さ4の道を$v(2j) \to v(2k)$とする。このとき

$$v_1(2k_1+1)v_1(2k_1+2) \to v_1(2k_1)v_2(2j_2) \to v_2(2k_2) \cdots$$
$$\cdots v_{i-1}(2k_{n-1})v_i(2j_i) \to v_i(2k_i)v_{i+1}(2k)v(2j_{i+1}) \cdots$$
$$\cdots v_{n-1}(2k_{n-1})v_n(2j_n) \to v(2j_n+2)v(2j_n+3)$$

は、G’の道となり、この道に入っていない点は、G’及び、道の構成法から、道から距離1で道に至る点である。

従って、この道に入っていない全ての点qに対してqに隣接している道の点のうちの1つpについて、$(p, q)$をこの道に付加したグラフはG’のSCである。

(⇐) G’にSCが存在するとする。G’の構成法からSCの幹は、各$v \in V$について、$V(v)$の元が一団になっているから、そのブッロクを$B(v)$と表わすことにすると、

$B(v_1)\ B(v_2) \cdots B(v_n)$

となっている。そこで、

$v_1 v_2 \cdots v_n$

をとると、これはあきらかにGのハミルトン道である。

よって問題HP(3)が問題SC(3)に多項式時間で変換されることが示された。

## ４．むすび

本稿では、計算機ネットワークの再編成に関する問題を、グラフＧが与えらえたときＧにスパンニングキャタピラが存在するかどうかを判定する問題として定式化した。そしてこの問題がＮＰ完全であることを示した。さらに、この問題の入力のグラフについて次数を３以下に制限した場合についても、ＮＰ完全であることを示した。次数が２以下の連結グラフは、道であるかサイクルであるかのいずれいかであるから、スパンニングキャタピラが存在することはあきらかである。従って本稿で示した結果は、多項式時間で解ける場合とＮＰ完全となる場合の境界を明確にしたことになる。

ＳＣ問題の他の部分問題として、幹の長さをできるだけ短くする問題も考えられる。この問題は、端局がどの主局にもできるだけ速くアクセスできるようにするという課題に対応するものである。この問題についても，ＮＰ完全であることが示されているが[3]、長さに関して多項式時間で解ける場合とＮＰ完全となる場合の境界については未解決である。

文献

１）F.Harary,"Graph Theory",Addisan-Wesley

２）M.R.Garey,D.S.Johnson,"Computers and Instractitability",W.H.Freeman and Company,1879

３）大川　知、”スパンニングキャタピラ問題について”、情報処理学会第３８回全国大会論文集(1989)