

打込み工法による鋼管杭の騒音発生機構（その2）

塩井幸武*, 境友昭**

Noise generation from steel pipe pile by driving (Part 2)

Yukitake SHIOI* and Tomoaki SAKAI**

Abstract

Last year, in the steel pipe pile driving test at site, it became clear that the noise from the pipe body is greater than that on the top of pile by hammer. A new type of hammer is required to mitigate the radial vibration of pipe and to keep the penetration efficiency of the pile. This year, a new theory of multi-piece hammer filled spaces with cushions proved mitigation of initial strain, decrease of the maximum stroke and extension of duration time of driving energy.

Next year, the site examination will be held.

Keywords: steel pipe pile, noise, pile driving, stress wave

目次

1	まえがき	75
2	前年度の研究概要	76
3	音の発生機構	76
3.1	鋼管杭の騒音	76
3.2	振動する物体からの音の発生機構	76
3.3	鋼管杭の音の発生機構	76
4	ハンマの特性と打撃音	77
4.1	低騒音型ハンマの実現性	77
4.2	打撃力波形	77
4.3	多重ハンマによる打撃力波形の制御	78
5	波動理論による打撃力波形の数値計算	79
5.1	打撃時のハンマと杭の挙動	79
5.2	差分法による数値解	79
5.2.1	微分演算子の差分スキームへの置換え	79
5.2.2	波動方程式の一般解と特解	80
5.2.3	杭長無限大を意味する境界	80
5.2.4	初期条件	81
5.3	数値計算法	81
5.4	多重ハンマの実現方法	81
6	結論と今後の計画	82
6.1	結論	82
6.2	今後の計画	83

1 まえがき

平成10年10月16日受理

* 構造工学研究所・教授

** アプライドリサーチ(株)

従来鋼管杭は、打込み工法によって施工されるのが一般的であった。しかし、打撃に伴う騒音

や振動などの環境問題から、次第に打込による施工は少なくなった。しかし、鋼管杭の場合、打込による施工の方が安価でかつ確実な支持力が得られることから、騒音・振動の問題を解決し、打撃による施工方法を復活させることが望まれている。

本研究は、これらの要請に応えるため、鋼管杭の騒音対策型打込工法の開発を目的とし、打撃時の鋼管杭の騒音発生機構の解析および騒音低減対策型のハンマ装置の設置理論の確立を行うものである。

2 前年度の研究概要

前年度は、打撃された鋼管杭からの騒音の発生機構として、(1) 杭頭部でのハンマとクッション(杭)の打撃面から放射される空気音、(2) 鋼管のフープ方向の呼吸振動に起因する振動音、を想定し、実際の打撃試験によって、騒音の発生機構の解明を行った。(1)の騒音は、ハンマとクッション、クッションと杭の間に取り込まれた空気がハンマの打撃によって圧縮され、これが一気に吹き出すことによって生じる音である。(2)の音は、打撃された鋼管中を伝搬する波動によって、鋼管は半径方向に呼吸し、これによって鋼管と接触している空気に速度成分が付与されて音となるものである。

騒音の発生機構として、2様の形態を考えたことから、それぞれの騒音発生機構を分離し、その寄与率を推定した。また、(1)の騒音発生に対する対策方法としてメッシュ状のクッションを設計した。

実験および解析の結果、騒音の発生機構として、想定した2様の形態があり、鋼管が空気中に露出している場合には、(2)の音が卓越することが分かった。ただし、鋼管の露出長さが1m以下となる場合、前者の騒音の寄与率は、約40%に達することが分かった。

3 音の発生機構

3.1 鋼管杭の騒音

ディーゼルパイハンマによる打撃で鋼管杭基礎を施工する時、発生する騒音のパワーレベルは、ほぼ120 dBから125 dBの範囲である。

3.2 振動する物体からの音の発生機構

振動する表面からの音は、物体の表面と接触している空気の粒子が押しつけられること、および引き寄せられることによって発生する。この時、物体の表面の振動速度とその表面での空気の粒子の振動速度は等しくなる。前者の場合の音の発生をソース(音が流れ出す場合)、後者の音の発生をシンク(音のエネルギーが吸い込まれる)と表現する。このようにして発生した空気の振動は、媒質としての空気中に拡散し、音として認識される。

3.3 鋼管杭の音の発生機構

鋼管杭からの音は、鋼管杭が半径方向に振動することによって発生する。杭は打撃されることによって上下方向に振動するが、これは一般的には音とはならない。何故ならば、空気は気体であるため、せん断抵抗を持たず、したがって杭が上下方向に振動してもこの振動は、空気に伝達されないからである。

鋼管杭から音が発生するのは、鋼管杭が半径方向に呼吸し、これによって鋼管杭と接した空気に圧縮、引っ張り方向(縦方向)の振動を与えるからである。このような杭の半径方向の呼吸振動は、打撃された杭が鉛直方向に圧縮され材料のポアソン比によって半径方向に伸延するためである。

打撃力の時間波形を $F(t)$ 、杭の外径を D 、ポアソン比を ν とすると、杭の半径方向の拡大 u は、

$$u = D\nu \frac{F(t)}{AE} \quad (1)$$

となる。ここで、 A, E はそれぞれ杭の断面積、縦弾性係数である。杭の呼吸速度は、この u の時間微分であるから、

$$\frac{du}{dt} = DvZ \frac{1}{AE} \frac{dv(t)}{dt} \quad (2)$$

となる。ここで Z は、杭の機械インピーダンスであり、杭材の弾性波の伝搬速度を C_p とすると、 $Z = AE/C_p$ の関係がある。また、 $v(t)$ は、打撃力の粒子速度であるから、その時間微分は加速度である。式を整理し加速度の時間波形を $a(t)$ とすると、

$$\frac{du}{dt} = Dv \frac{1}{C_p} a(t) \quad (3)$$

が得られる。

打撃力が杭頭に発生し、これが杭先端部へ伝達していく過程で、杭は打撃力の波形の微分に対応して順次、拡大縮小する。打撃力の波長が空気中に露出した杭の長さよりも長いと考えると、杭は同位相で呼吸することになり、打撃による杭の呼吸振動は、音として空気中に放射される。

この時発生する音の平均仕事量 (パワー) は、杭の露出長を L として、

$$W = \pi \rho c \left\{ \frac{du}{dt} \right\}^2 DL \quad (4)$$

となる。ここで、 ρ, c は空気密度、空気中の音速であり、この積は音響インピーダンスである。 du/dt が2乗となるのは、音の場合のエネルギーは、粒子速度と音の圧力の積であり、音圧 p は、音の粒子速度を v として $p = \rho cv$ となるからである。これから、鋼管杭から発生する騒音は、

$$W = \pi D^3 L v^2 \frac{\rho c}{C_p^2} \langle A^2 \rangle \quad (5)$$

となる。すなわち、発生する音のパワーは、杭

の外径の3乗、杭の露出長、および杭の加速度の2乗に比例することになる。これを音響パワーレベルで表示すると、次式となる

$$L_w = 56.7 + 30 \log D + 10 \log L + 20 \log |A| \quad (6)$$

4 ハンマの特性と打撃音

4.1 低騒音型ハンマの実現性

理論から明らかなような、打撃音は、打撃力の加速度成分に比例する。この時、打撃力の立ち上がり速度が、すなわち、杭に生じる半径方向の変位速度に比例することになる。実際に杭の打ち込みの場合、打撃力の立ち上がり速度そのものは、杭の打込性能には影響を与えない。杭の貫入性は、杭先端での杭の速度と地盤の貫入抵抗によって決定され、杭の鉛直方向の加速度には関係ないためである。これは、打撃力がどのようにゆっくり立ち上がろうと、急速に立ち上がろうと、杭の打込性能には影響がないこと、すなわち、打撃によって発生する騒音と、杭打ち特性とは関係がないことを意味している。低騒音型のハンマの設計基本理念として、

- (1) 打撃力の立ち上がりが緩やかなハンマとする。
- (2) 打撃力の継続時間を長くする。

がある。これを実現する手段として、(1) に対し、後述のとおり、ハンマの質量を大きくする方法、クッションを柔らかくする方法がある。この方法は同時に打撃力の継続時間を長くし、(2) に対する効果もある。しかし、打撃力の時間波形を積分した力積は、ハンマの運動量 (= MV_0) に等しく、打撃力の継続時間を長くすると、これに伴って最大打撃力が低下し、ハンマとしての杭の打込特性に影響を与える。

4.2 打撃力波形

速度 V_0 のハンマ (質量 M) で打撃された時、杭に発生する打撃力の波形については、すでに

¹ 波長が杭の露出長よりも短いと、正方向の振動 (ソース) と負方向の振動 (シンク) が混在し、音の放射効率が低下する。

得られている(文献1)。この解は、ハンマを質点、クッションをバネ(バネ係数 K)、杭を1次元の弾性体(機械インピーダンス Z)として得られたものである。その特別な場合として、ハンマクッション系の機械インピーダンスと杭の機械インピーダンスがマッチングした場合について、式(7)が与えられる。

$$V(t) = 2V_0 \frac{2Z}{M} t \exp\left(-\frac{2Z}{M}t\right) \quad (7)$$

式(7)において、打撃力の立ち上がり時間をハンマがクッションに接触して、打撃力が最大値に達するまでの時間を t とすると、

$$t = \frac{M}{2Z} = \frac{2Z}{K} \quad (8)$$

となって、杭が同じであれば、ハンマの質量が大きいほど、あるいは、クッションのバネ係数が小さい程、立ち上がり時間は長くなることが示される。式(7)は、機械インピーダンスがマッチングした状態での打撃力波形を示すが、クッションが柔らかいか、同一クッションに対してハンマの質量が大きくなると、打撃力波形は、

$$V(t) = 2V_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{2Z}{M}-1}} t \exp\left(-\frac{2Z}{M}t\right) \sin\left(\frac{2Z}{M}-1\right)^{\frac{1}{2}} t \quad (9)$$

として表現される。この場合、打撃力が最大に達する時間は、

$$t = \frac{M}{2Z} \frac{1}{\sqrt{r-r^2}} \sin^{-1}(\sqrt{r-r^2}) \quad (10)$$

となる。ここで、 r はクッションのバネ比を意味し、マッチングがとれた状態でのクッションのバネ係数を K_0 とすると、

$$K = rK_0 \quad (11)$$

の関係である。 $r \rightarrow 1$ の時式(10)は、式(9)と等しくなる。バネ比が小さいことは、クッションが柔らかいことを意味し、式(10)から明らかのように、打撃力が最大値に達するまでの時

間は、ハンマの質量が大きい程、クッションのバネ比が小さい程長くなる事が分かる。

4.3 多重ハンマによる打撃力波形の制御

ハンマが複数の質量で分割され、それぞれのハンマが時間差をおいて杭に衝突するハンマ装置をここでは、多重ハンマと呼ぶ。ハンマの打撃力および杭システムが線形システムであるとすると、一つのハンマによって生じた打撃力と他のハンマによって生じた打撃力 f_i は、それぞれ独立に加算することができる。

すなわち、 N 個のハンマから構成される系において、それぞれのハンマが時間間隔 T_d をおいて杭頭に衝突する場合の打撃波形は、

$$F(t) = \sum_{i=1}^N f_i(t - T_{di}) \quad (12)$$

として示される。ただし式(12)が実現されるためには、分割された複数のハンマが別々に杭頭に衝突することが必要であるが、このような前提は実際には期待できない。これは、一つのハンマが衝突している状態では他のハンマは杭頭に衝突できないからである。

この問題を解決するためには、各ハンマの断面を持つ機械インピーダンスを同じとして、ハンマ要素が直列に結合されたシステムを考えれば良い。

すなわち、図-1において、上下に分割されたハンマのうち、上のハンマブロックは、直接杭には衝突しないが、下のハンマブロックを介して、間接的に打撃力を杭に伝達する。上下のハンマブロックの機械インピーダンスが同じ場合、上のハンマブロックから見た時、下のハンマブロックは単なる波動の導波ブロックとなっているだけであり、発生する打撃力は、上ハンマブロックが直接杭に衝突した場合と同じである。波形重合の概念を図-2に示す。



図-1 多重ハンマの概念

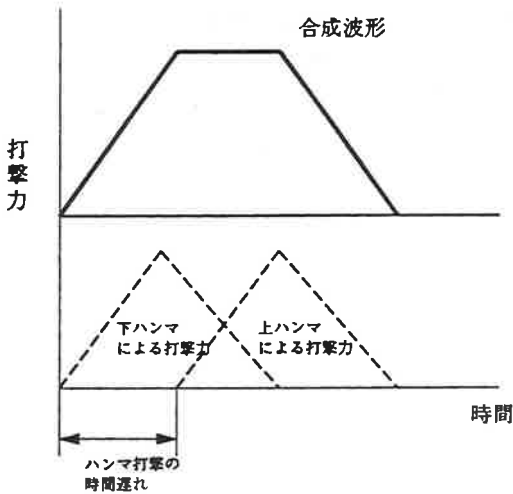


図-2 打撃力波形の重合の概念

5 波動理論による打撃力波形の数値計算

5.1 打撃時のハンマと杭の挙動

杭頭に作用した打撃力の杭中での伝搬現象が1次元の波動理論によって説明できることは、すでに公知の事実となっている（文献2）。

これと同様に打撃時には、ハンマを含む全ての杭系に波動現象が発生し、それぞれは1次元の波動理論によって説明可能な現象となる。ハ

ンマの中に発生する応力が波動現象として説明できることは、すでに宇都・冬木らが明らかにしている（文献3）。また、ハンマ・クッション、杭を機械インピーダンスで規準化し、杭に発生する波動現象を数値計算によって解く方法について、境が提案している（文献4）。

しかし、境が提案した有限差分法では、杭の先端での境界条件の影響があり、打撃力の波形のみを正確に求めることはできない。これは、数値解法の開発の目的が杭打ち現象のシミュレーションに置かれ、ハンマの設計に利用することは考慮されていなかったからである。

5.2 差分法による数値解

数値計算方法の概要は以下のとおりである。

5.2.1 微分演算子の差分スキームへの置き換え

有限差分法は、微分演算子を差分スキームに置き換えて、微分方程式の数値解を直接得る方法である。1階微分演算子は、

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\delta t}(u_{j+1} - u_{j-1}) \quad (13)$$

として差分スキームで近似される。ここで、 u は被微分関数であり、この場合、杭の変位である。 t は時刻を意味し、数列でのサフィクスは、 j が時間を示す。2階微分は、

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{\delta t^2}(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) \quad (14)$$

となる。杭の運動を示す波動方程式は、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

である。変数が距離と時間という二つの変数があり、従って偏微分方程式となる。波動方程式の数値解は、式(15)に式(13)および式(14)を代入し、これを未知数となる変位ポテンシャルについて解くことによって得られる。なお、未知数となる変位ポテンシャルは、時間的に最も遅く出現する変位である。

波動方程式を有限差分法によって解く場合に

は、距離方向の差分間隔と時間の差分間隔の間には、

$$\delta x = c \delta t \quad (16)$$

の関係が存在する (文献4)。

5.2.2 波動方程式の一般解と特解

差分法における波動方程式の一般解は、

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad (17)$$

である (文献4)。実際の波動現象を解析するためには、一般解のみならず、境界条件を考慮した特解が必要である。式 (17) において、杭が n の要素に分割されている時、要素 n での方程式は、

$$u_{n,j+1} = u_{n+1,j} + u_{n-1,j} - u_{n,j-1} \quad (18)$$

となり、定義されない領域 ($n+1$) のポテンシャルが参照される。このため、杭先端での境界条件を同様に差分化して、未定義領域のポテンシャルを定義する方法を用いている。例えば、杭先端の地盤抵抗のように一定反力が作用する境界では、

$$AE \frac{\partial u}{\partial x} = R \quad (19)$$

となり、これを差分化し、

$$\frac{1}{2\delta x} (u_{n+1,j} - u_{n-1,j}) = \frac{R}{AE} \quad (20)$$

式 (20) にも同様に未定義領域の変位ポテンシャル ($u_{n+1,j}$) があり、式 (18) と式 (20) を連立させることによって、($u_{n+1,j}$) を消去することができる。すなわち、

$$u_{n,j+1} = 2u_{n-1,j} - u_{n,j-1} + \frac{2\delta x R}{AE} \quad (21)$$

である。

5.2.3 杭長無限大を意味する境界

一般に、差分法、有限要素法などの数値解析方法では、計算領域を持っている。しかし、多くの自然現象を対象とする場合、半無限の領域を対象として理論立てしており、理論と数値解析の間には、無限遠の境界の実現方法に整合し

ないことがあった。多くの数値解析では、実際の計算領域を現象として着目している領域より十分に大きく取り、境界条件の影響が着目区間に及ばないように考慮する。

波動方程式でこのような手段を考えると、計算対象となる杭の長さが極端に長くなり (波形の計算時間を 50 ms とすると、杭長は、125 m 以上としなければならない。)、実用的でない。このため、杭長無限大を実現する境界条件を考慮する。

波動方程式の一般解から明らかなように、波動には系の正の方向に伝搬する進行波と、系の負の方向に伝搬する後退波がある。杭頭の打撃力が発生してこれが杭中を伝搬している過程では、進行波のみが生成され、杭に境界があった場合に初めて、後退波が発生する。杭長が無限大であることは、後退波が発生しないという条件である。波動方程式は、進行波、後退波に区分する場合、

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (22)$$

と変形できる、これは更に、

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (24)$$

の2つの式に分けられ、前者が進行波、後者が後退波を示している。進行波のみの場合の差分式は、式 (23) を差分化し、

$$u_{i,j+1} = -u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} \quad (25)$$

となる。差分法での境界条件の取り扱い方から、式 (25) は、波動方程式の一般解式 (17) と連立して成立しなければならない。一般解を再掲すると、次のようになる。

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad (26)$$

これから両者の式が恒等的に成立するためには、両者の式での符号が異なる $u_{i+1,j}$, $u_{i,j-1}$ は、0 でなければならないことが明らかである。

これを式 (17) に代入すると、

$$u_{i,j+1} = u_{i-1,j} \quad (27)$$

が得られ、これが進行波のみが存在する場合、すなわち、後退波が発生しない場合の波動方程式の差分解である。式 (27) から明らかなように、時刻 j で位置 $i-1$ にあったポテンシャルが δt の時間の経過によって、位置 i に達することを示しており、すなわち進行波の性質のみが示されている。

5.2.4 初期条件

微分方程式の特解を求める場合と同様に、差分法の場合でも初期条件を入力する必要がある。この初期条件の入力方法については、すでに解法が示されており (文献4) ここで詳細には述べない。

初期条件は、波動方程式の特殊解として、

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{F_d}{AE} \quad (28)$$

が成立する。右辺は、系の作用する駆動力を示し、この場合はハンマが落下の初速度を持つことを意味する。これを解くと、

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + \frac{F_d}{Z} \delta x \delta t \quad (29)$$

となる。初期条件では、時刻 0 以前のポテンシャルは全て 0 であり、また、分割した要素 δx に作用する力を機械インピーダンスで除した値は、要素の初期速度であるから、

$$u_{i,0} = V_0 \delta t \quad (30)$$

機械インピーダンスが異なる杭要素の境界では、

$$u_{i,0} = \frac{1}{1+\eta} (V_1 + \eta V_2) \delta t \quad (31)$$

となる。ここで、 η は、要素 1 と要素 2 の機械インピーダンスの比、 V_1 、 V_2 は、それぞれ境界の上下での要素の初期速度である。式 (31) において、ハンマの断面積が異なることによって機械インピーダンスが不連続であっても、同一初

期速度を持つものであれば、すなわち、 $V_1 = V_2$ であるから、式 (31) は、式 (30) と等しくなる。すなわち、異形断面のハンマであっても、各要素に与えられる初期値は等しいことを意味する。また、式 (31) において、静止している杭要素に初期速度を持つ杭要素が衝突する場合、 V_2 を 0 とすることによってこの条件が成立する。

5.3 数値計算法

5.4 多重ハンマの実現方法

表-1 に 2 重ハンマの実際の数値入力例を示す。この計算では、ハンマブロックを 2 つに分け、両者を非常に柔らかいバネ (この場合は、断面積が非常に小さいハンマ要素として実現) で結合するモデルである。

打撃力の波形は、クッションのバネ係数を小さくする程、立ち上がりが遅く、したがって騒音の発生量も少ない。ただし、同一のハンマ速度の対する最大打撃力は小さくなり、ハンマの速度を速くする工夫が必要となる。

ハンマにのインターギャップに相当するバネを柔らかくすると、上ハンマが衝突する時間が

表-1 2重ハンマ

	断面積 (cm ²)	弾性係数 (tf/cm ²)	長さ (m)
ハンマ	2,000	2,100	1.0
ギャップ	2	2,100	0.1
ハンマ	2,000	2,100	1.0
クッション	2	2,100	0.1
杭	144	2,100	1.0

表-2 単一ラムハンマ

	断面積 (cm ²)	弾性係数 (tf/cm ²)	長さ (m)
ハンマ	2,000	2,100	2.0
クッション	2	2,100	0.1
杭	144	2,100	1.0

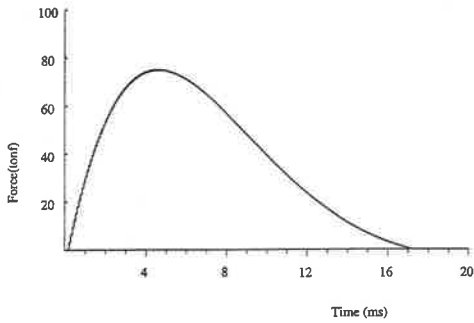


図-3 単一ラムハンマによる打撃力波形

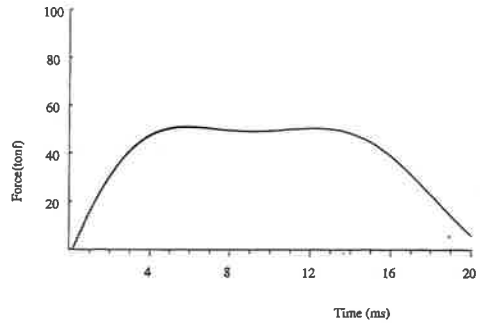


図-5 2重ラムハンマによる打撃力波形 (2)

表-3 2重ラムハンマ (1)

	断面積 (cm ²)	弾性係数 (tf/cm ²)	長さ (m)
ハンマ	2,000	2,100	1.0
ギャップ	2	2,100	0.1
ハンマ	2,000	2,100	1.0
クッション	2	2,100	0.1
杭	144	2,100	1.0

表-5 2重ラムハンマ (3)

	断面積 (cm ²)	弾性係数 (tf/cm ²)	長さ (m)
ハンマ	4,000	2,100	1.2
ギャップ	2	2,100	0.3
ハンマ	4,000	2,100	0.8
クッション	2	2,100	0.2
杭	144	2,100	1.0

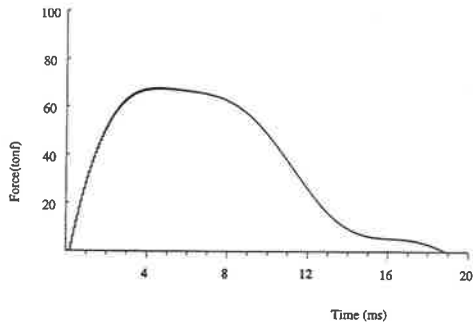


図-4 2重ラムハンマによる打撃力波形 (1)

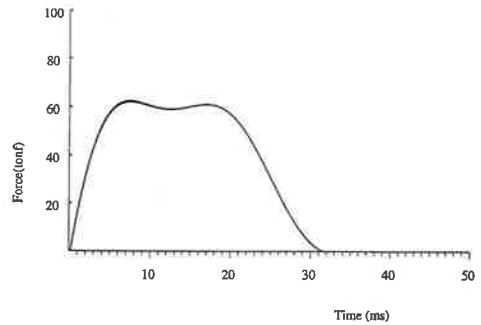


図-6 2重ラムハンマによる打撃力波形 (3)

表-4 2重ラムハンマ (2)

	断面積 (cm ²)	弾性係数 (tf/cm ²)	長さ (m)
ハンマ	2,000	2,100	1.2
ギャップ	2	2,100	0.3
ハンマ	2,000	2,100	0.8
クッション	2	2,100	0.2
杭	144	2,100	1.0

遅くなり、結果的に打撃力の継続時間が長くなる。ただし、上ハンマの衝撃時間が遅くなると、打撃力波形に凹みが生じる。

6 結論と今後の計画

6.1 結論

本研究によってハンマの設計を波動理論によって行う方法、およびそのハンマによって杭

を打撃した場合に発生する騒音の強さを計算する方法を確立した。この研究で提案したハンマでは、クッションのバネ係数が小さく、強い打撃力は得られない。打撃力を強くするためには、ハンマの落下高さを高くする必要がある。あるいは、ハンマを油圧力によって押し下げ、これによって打撃速度を速くする方法も考えられる。

本研究では、2重ハンマを提案しているが、製作上に問題がなければ、多重ハンマを実現することができ、この場合、比較的ゆっくりした打撃力の立ち上がりを持ち、打撃力の継続時間の長いハンマを製作することが可能となる。すなわち、低騒音でかつ打撃特性に優れたハンマの実現の可能性が示されることになる。

6.2 今後の計画

2か年間の研究によって、打撃された鋼管杭から発生する騒音の発生機構の解明、および低

騒音型ハンマの設計理論が明らかにされた。今後は、実際にハンマを製作し、実証試験を行う必要がある。試験ハンマについては現在、設計段階であり、試作次第、試験を行う予定である。

今後、公害関係のもう一つの課題である、振動問題の解決のために低振動型のハンマの設計技術の確立が望まれる。

参考文献

- 1) 澤井廣之他; 打込杭の支持力の簡易管理方法, 土木学会論文集 III-39, No. 568, pp. 241-248, (1997)
- 2) Smith, E.A.L; Pile Driving Analysis by the Wave Equation, J. Soil Mech., ASCE, Vol. 86, No. SM4, pp. 35-61, (1960)
- 3) 宇都一馬他; 縦衝撃におけるスミスの解の問題点 (2), 第13回土質工学会研究発表会, pp. 1449-1452, (1978)
- 4) 境友昭; 杭打ち解析のための波動方程式の数値解法, 土木学会論文集 III-14, No. 424, pp. 75-84, (1990)