Stokes 方程式の解の特異摂動について

中　川　清　和

On the singular perturbation for the solutions of the Stokes equation

Kiyokazu NAKAGAWA

Abstract

We consider the solution of the Stokes equation in a bounded domain. Let the viscosity coefficient tend to zero. We already know that the solution converges weakly. We here show that it converges pointwise in the domain except at the boundary.

次の Stokes 方程式を考える。$(x, t)\in\Omega\times(0, T)$ に対し

$$\left.\begin{aligned} &D_t v_\nu-\nu\Delta v_\nu+\nabla p_\nu=f\\ &\nabla\cdot v_\nu=0\\ &v_\nu(x, 0)=a(x)\\ &v_\nu|_S=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ここに，Ω は3次元 Euclid 空間 R^3 の有界領域，S はそのなめらかな境界とする。また，$\nabla\cdot a=0$。更に，次の記号を定義しておく。$\Omega_\delta=\{x\in\Omega\,;\ d(x, S)>\delta\}$，$d(x, S)$ は x と境界 S との距離である。今，函数 f, a が無限回微分可能で有界であるとすれば，よく知られているように，問題(1)の解 v_ν は一意的に定まり，$C^\infty(\Omega\times(0, T))$ に属する。また，$\int_S p_\nu dS=0$ の条件をつけ加えることにより，p_ν も同様に定まる。

今，いくつかの函数空間を準備する。

$J_0=\{u\in C_0^\infty(\Omega)\,;\ \nabla\cdot u=0\}$，$J_1=\{J_0$ の $L^2(\Omega)$ における閉包$\}$，$L^2(\Omega)=G(\Omega)\oplus J_1$。$Q_T=\Omega\times(0, T)$ とおき，$u\in J_1(Q_T)$ とは，ほとんどすべての $t\in(0, T)$ に対し，$u(t)\in J_1(\Omega)$ となることである。$H(\Omega)=\{J_0(\Omega)$ の $\|\cdot\|_H$ による閉包$\}$，ここに，ノルム $\|u\|_H=\|\nabla u\|_{L^2}$ とする。このとき，Ladyzhenskaia[1] により，次の命題が得られる。

命題 1　問題 (1) の解 (弱解) v_ν は，$\nu\to 0$ のとき，次の方程式の解に弱収束する。

$$\left.\begin{aligned} &D_t v_0=-\nabla p_0+f\\ &v_0(x, 0)=a(x)\\ &v_0\in J_1(\Omega)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

そして，次の不等式が成立する。

$$\int_0^t\|D_t v_\nu\|^2dt+\nu\int_0^t\|\nabla v_\nu\|^2dt+\int_0^t\|v_\nu\|^2dt\leqq C\left(\int_0^t\|f\|\,dt+\|a\|_H\right)$$

ここに，$\|\cdot\|$ は，L^2 ノルムをあらわす。また，$\int_S p_\nu dS=0$ とする。

さて，この小論では，次の定理を示すことを目的としている。

定理　$f\in C^\infty(\bar{Q}_T)$，$a\in C^\infty(\Omega)$ とすると，$\nu\to 0$ の時，$v_\nu(x, t)$，$p_\nu(x, t)$ は，各々，任意の $(x, t)\in K\times(0, T)$ に対して収束し，その極限函数 v_0, p_0 は次を満足する。$(x, t)\in K\times(0, T)$ に対し

昭和60年10月31日受理
* 一般教育部講師