

# 状態フィードバックに基づく不安定周期軌道安定化

清水 能理\*

## Stabilization of Unstable Periodic Orbits Based on State Feedback

Yoshimasa SHIMIZU\*

### Abstract

The unstable periodic orbits UPOs embedded in the strange attractor peculiar to chaos exists in chaotic systems. Chaos control is the problem that UPO is stabilized by using the external input or the very small perturbation of parameters. There is the advantage which makes the amount of control inputs small, or realizes composition of the control system simply and easily using chaotic characteristics of the system in chaos control. As examples of the conventional chaos control there are the OGY method which uses the parameter perturbation and the time Delayed Feedback Control (DFC) method which adds operation by the external input. In DFC, the amount of operations is determined based on the state of the system. It can apply easily also to discrete time systems, and has the robustness to disturbance. The class of chaos which can be used DFC for has restriction of the odd number property. The Prediction-based Feedback Control (PFC) method adapting DFC was proposed as the improvement technique. However, the error of the predicted value of the state of using in the control input design becomes problem. In order to improve the odd number property in DFC and the error of the predicted value in PFC, the chaos control input constituted by the hybrid type so that advantages of both methods can be used eciently is designed.

**Keywords:** Chaos, Delayed feedback control, Predictionbased feedback control, Ergodicity

### 1. はじめに

非線形性を有する系に遍在するカオス力学系は、有界の領域内で起こる非周期で初期値に鋭敏な決定論的法則に基づく振動現象である<sup>[1]</sup>。工学分野でのカオス応用のひとつであるカオス制御の代表的なものに、OGY法<sup>[2,3]</sup>と時間遅延フィードバック制御(DFC: Delayed Feedback Control)法がある<sup>[4,5,6]</sup>。OGY法はカオス軌道に軌跡から幾何学的に求めた線形化システムのパラメータに摂動を加えることで不安定周期軌道(UPO)を安定化するが、DFC法は現在のシステムの状態と過去のシステムの状態との

差に基づいた外部入力を用いる方法である。DFC法ではUPOの不安定周期が既知であればカオス軌道を正確に求める必要がなく、比較的容易に適用できる長所を持っている。さらに、OGY法と比べてDFC法は比較的ロバストな特性を有している<sup>[4,5,6,7]</sup>。不整脈の制御に応用されたが、フィードバックゲインの決定は試行錯誤的であり、対象とする系が制御に正確さを必要とする生体である場合は好ましい方法ではない。さらに、「奇数条件」の制約が存在し、安定性に関する理論的な保証は得られていない<sup>[8,9,10,11]</sup>。

一方、DFC法の欠点を補う方法として、未来の状態の予測値に基づく入力を用いた予測に基づくフィードバック制御(PFC: Prediction-

平成20年12月15日受理

\* システム情報工学科・助教

based Feedback Control) 法が提案された<sup>[11,12]</sup>。けれども、奇数条件の制約を受けないとき、DFCと比較してPFCがシステムをより安定にする制御入力ゲインを得られる保証はない。さらに、PFCは制御系設計において、状態の予測値を自由系の数学モデルを用いて求める必要がある。したがって、実際の状態と計算値との間に大きな誤差が生じる場合があり、正確な予測値を得る方法が研究課題として残されている<sup>[11]</sup>。これまでに、DFC法とPFC法を組み合わせる案が述べられた。しかし、制御入力ゲインの決定、前述の二種類の手法の制御入力のバランスなど考慮しなければならない問題点がいくつも存在する<sup>[12]</sup>。

そこで、DFC法とPFC法の欠点を回避するだけでなく、各々の利点を活かすように両手法を組み合わせ、同時刻に用いるハイブリッド型の制御系設計法を提案する。

## 2. 問題の記述

対象とするカオスシステムを式(1)の $n$ 次元非線形離散時間システムとする。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{R}^n$  はシステムの状態ベクトル、 $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{R}^m$  は制御入力ベクトルである。状態のダイナミクスを記述する数学モデル式(1)は既知であり、 $\mathbf{x}(k)$ と $\mathbf{u}(k)$ について非線形関数 $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$ は微分可能である。そして、 $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$ のとき式(1)はカオスを発生し、このとき状態の正確な予測値を計算することができる。エルゴード性を有する式(1)のカオスシステムから生成されるストレンジアトラクタの中に埋め込まれている周期 $\tau$ のUPOの各不安定周期点を $\mathbf{x}_{pi}(i=1, \dots, \tau)$ とすると、システムの状態を $\mathbf{x}_{pi}$ に安定化させることを考える。

カオス系のエルゴード性を用いたカオス制御であるDFC法、PFC法やOGY法を用いることが出来る。DFC法はシステムの状態に基づい

て制御入力を設計するため、OGY法より比較的容易に用いることができる。また、OGY法やPFC法などと比較してロバストである。しかし、UPOの各不安定周期点の近傍における線形化システムを用いて制御入力ゲインを決定するため、線形化システムが奇数条件の制約を受ける場合は、安定可能なフィードバックゲインは存在しない。そして、奇数条件の欠点を補うためにDFC法を改良したPFC法では、制御入力設計で用いる状態の予測値の誤差が問題となる。

そこで、PFC法とDFC法の両手法をハイブリッドで用いることを考える。

## 3. システム状態に基づくカオス制御

システムの状態フィードバックを操作量用いるカオス制御法であるPyragasのDFC法<sup>[5]</sup>と潮らのPFC法<sup>[11]</sup>について述べる。

### 3.1 時間遅延フィードバック制御

式(2)で表される離散時間システムに対するDFCの制御入力 $\mathbf{u}(k)$ は、 $\tau$ 時刻過去の状態と現在の状態との差に基づく外部入力である<sup>[5]</sup>。

$$\mathbf{u}(k) = \begin{cases} K_D(\mathbf{x}(k-\tau) - \mathbf{x}(k)) & \text{if } r(k) < \varepsilon \\ \mathbf{0} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $K_D \in \mathcal{R}^{l \times m}$ はフィードバックゲイン行列であり、 $r(k)$ は $\tau$ 時刻過去の状態と現在の状態の差に基づくベクトルのノルムで、式(3)で表される。

$$r(k) = \|\mathbf{x}(k-\tau) - \mathbf{x}(k)\| \quad (3)$$

$\varepsilon$ は $\tau$ 周期のUPOの各周期点近傍を示す十分に小さな正の実数であり、制御入力は各周期点近傍においてのみ印加する<sup>[5,7]</sup>。この方法では、UPOの各周期点近傍における線形化システム行列が、1よりも大きな実固有値を奇数個もつ場合に、元の対象とするシステムを安定にするゲイン $K_D$ が存在しない(奇数条件)<sup>[9,10]</sup>。

### 3.2 予測に基づくフィードバック制御

式 (4) で表される PFC の制御入力は,  $\tau$  時刻未来の状態の予測値と現在の状態との差に基づいて決定する<sup>[11]</sup>。

$$\mathbf{u}(k) = \begin{cases} K_P(\hat{\mathbf{x}}(k+\tau) - \mathbf{x}(k)) & \text{if } r(k) < \varepsilon \\ \mathbf{0} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

ここで,  $K_P \in \mathcal{R}^{l \times m}$  はフィードバックゲイン行列, そして  $\hat{\mathbf{x}}(k+\tau)$  は, 既知の数学モデル  $f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$  を  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$  として  $\tau$  回繰り返して用いた  $\tau$  時刻未来の状態の予測値で, 式 (5) のように表すことができる。

$$\hat{\mathbf{x}}(k+\tau) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{\tau \text{ times}}(\mathbf{x}(k), \mathbf{0}) = f^\tau(\mathbf{x}(k), \mathbf{0}) \quad (5)$$

式 (4) に示すように, この制御入力を DFC と同様に, 目標の UPO の各周期点近傍においてのみ印加する<sup>[11,12]</sup>。

## 4. Jury の安定判別法

システム行列の各可制御対  $(A(k), B(k))$  のみからフィードバックゲイン  $K(k)$  を求める方法として,  $A(k)$  のノルムに基づく方法, 1 入力システムの  $K(k)$  により  $A(k)$  を定数行列化する方法などがある。しかし, 周期係数システムの極配置問題に比べると安定度を自由に設定できない点が欠点である。さらに, システムの次元が大きくなると, 特性方程式の根を求めることはかなり面倒な計算になる<sup>[13]</sup>。一方, Jury の安定判別法はシステムの極を求めることなく安定性を判断し, ゲインなどのパラメータの有効な範囲を決定する方法である<sup>[14]</sup>。

$N$  次元の線形離散システムの不動点 (あるいは各周期点) に状態を安定させるとき, 特性多項式  $Z(z)$  を式 (6) とする。

$$Z(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (6)$$

ただし,  $a_N = 1$  である。まず, 表 1 を作成する。表の 1 行目は,  $Z(z)$  の係数  $a_N, a_{N-1}, \dots, a_1 z, a_0$

表 1 Jury の安定判別法

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{N-k}$	$\dots$	$a_{N-1}$	$a_N$
$a_N$	$a_{N-1}$	$a_{N-2}$	$\dots$	$a_k$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{N-k}$	$\dots$	$b_{N-1}$	
$b_{N-1}$	$b_{N-2}$	$b_{N-3}$	$\dots$	$b_{k-1}$	$\dots$	$b_0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$r_0$	$r_1$	$r_2$					

を定数項  $a_0$  から順番に並べて行き, 2 行目は逆に  $z^N$  の係数  $a_N$  から並べる。そして, 奇数行目の要素は式 (7), (8)  $\dots$  のように一つ上の行の係数を用いて  $b_k, c_k, \dots (k=0, 1, \dots)$  として求め, また偶数行目はそれを逆に並べる。さらに, 要素の数が 3 になる行まで, この操作を続ける。

$$b_k = \begin{bmatrix} a_0 & a_{N-k} \\ a_N & a_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$c_k = \begin{bmatrix} b_0 & b_{N-1-k} \\ b_{N-1} & b_k \end{bmatrix} \quad (8)$$

特性方程式  $Z(z) = 0$  の全ての根の絶対値  $|z_j| (j=1, 2, \dots, N)$  が 1 より小さくなるための必要十分条件は, 以下の  $N-1$  個の条件式が全て満たされることである。

$$\begin{aligned} Z(1) &> 0 \\ (-1)^N Z(-1) &> 0 \\ |a_0| &< a_N \\ |b_0| &> |b_{N-1}| \\ |c_0| &> |c_{N-2}| \\ &\vdots \\ |r_0| &> |r_2| \end{aligned}$$

これらの条件を満たす不等式すべての共通部分として, 式 (6) の係数  $a_N, a_{N-1}, \dots, a_1 z, a_0$  に含まれる  $N$  次元システムのパラメータを設定し, 不動点 (あるいは各周期点) に状態を安定させる。

## 5. 提案手法

提案する状態フィードバックに基づく制御法

は、PFC法<sup>[11]</sup>とDFC法<sup>[5]</sup>とのハイブリッド型であり、UPOsとフィードバックゲインおよび系の状態の予測値をカオスモデルから解析的に求めるカオス制御法である。

カオス制御入力にはDFCとPFCの各々のカオス制御に相当する二つの制御入力部分からなり、一つのシステムに対して同時にDFCとPFCの二種類の制御を行うものである。そして、入力のDFC部分とPFC部分のバランスを示すパラメータ $w$ を導入し、制御入力ゲイン $K$ としては2入力共通のものを用いる。制御入力ゲイン $K$ の決定方法は、先ずJuryの安定判別法<sup>[14]</sup>によりカオスシステムの安定に効果のあるバランスパラメータ $w$ と制御入力ゲイン $K$ の範囲を求める。次に、得られた領域 $w-K$ に属するパラメータの組 $(w, K)$ を用いた制御系モデルに対し、評価関数を適用する予備実験を行い、対象とするシステムの安定に適したパラメータ値を評価値から決定する。

ハイブリッド型で構成した制御入力の設計法により、DFC法の奇数条件の制約とPFC法の予測値の誤差の問題を改善出来ることを示す。

### 5.1 ハイブリッド型の制御系の設計

DFCに基づく制御入力とPFCに基づく制御入力とのハイブリッド型の制御入力を式(9)とする。

$$\mathbf{u}(k) = \begin{cases} \mathbf{u}_P(k) + \mathbf{u}_D(k) & \text{if } r(k) < \varepsilon \\ \mathbf{0} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{u}_P(k)$ はPFCに相当する入力部分で式(10)で表される。

$$\mathbf{u}_P(k) = K(1-w)\{\hat{\mathbf{x}}(k+\tau) - \mathbf{x}(k)\} \quad (10)$$

一方、 $\mathbf{u}_D(k)$ はDFCに相当する入力部分で式(11)で表される。

$$\mathbf{u}_D(k) = Kw\{\mathbf{x}(k-\tau) - \mathbf{x}(k)\} \quad (11)$$

ここで、式(10)の予測値 $\hat{\mathbf{x}}(k+\tau)$ は、式(1)から式(12)のように設計する。

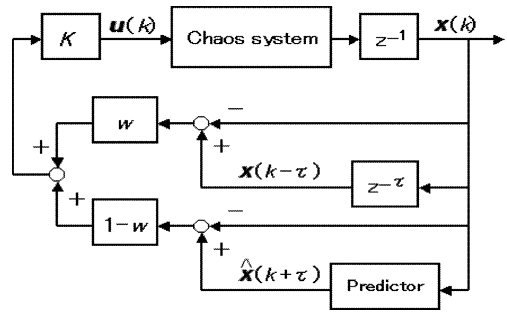


図1 状態フィードバックに基づく制御系  
Figure 1 The control system based on state feedback

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+\tau) &= \underbrace{\mathbf{f} \circ \dots \circ \mathbf{f}}_{\tau \text{ times}}(\mathbf{x}(k), 0) \\ &= \mathbf{f}^\tau(\mathbf{x}(k), 0) \end{aligned} \quad (12)$$

式(10)、(11)のように、 $\mathbf{u}_P(k)$ と $\mathbf{u}_D(k)$ のフィードバックゲイン行列は共通の $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$ とする。式(10)、(11)のパラメータ $w$ は、 $\mathbf{u}_P(k)$ と $\mathbf{u}_D(k)$ のバランスを決める重みで、 $0 \leq w \leq 1$ の間の実数値をとる。この制御入力を、DFC法およびPFC法と同様に、目標のUPOの各不安定周期点 $\mathbf{x}_{pi}$ の近傍においてのみ印加する。したがって、式(10)、(11)の $K$ と $w$ は、各 $\mathbf{x}_{pi}$ ごとに設定する。ここで、システムの状態が目標とするUPOの近傍にあるとき、現在の状態 $\mathbf{x}(k)$ の最も近傍に在る $\mathbf{x}_{pi}$ を $\mathbf{x}_{pk}$ とする。このとき、式(9)の $r(k)$ は、式(13)のように、 $\mathbf{x}(k)$ と $\mathbf{x}_{pk}$ の誤差ベクトルのノルムを表す。

$$r(k) = \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{pk}\| \quad (13)$$

また、式(9)の $\varepsilon$ は十分に小さな正の実数で、各 $\mathbf{x}_{pi}$ 近傍領域の大きさを示す。制御系の構成図を図1に示す。

### 5.2 ハイブリッド型制御と奇数条件

制御対象であるカオスシステムの線形化システムが奇数条件を満たすとき、DFCを用いてもシステムを安定化できない<sup>[12]</sup>。しかし、DFCと同じ過去の状態 $\mathbf{x}(k-\tau)$ を用いても、ハイブリッド型制御手法が奇数条件の制約を受けない

ことを示す。

式 (1) のシステムを UPO に局所的に安定化するため、式 (14) の不安定周期点  $\mathbf{x}_{pi}$  近傍における周期係数行列をもつ線形化システムを考える。

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = A_i \bar{\mathbf{x}}(k) + B_i \mathbf{u}_i(k) \quad (14)$$

ここで、状態ベクトル  $\bar{\mathbf{x}}(k) \in \mathcal{R}^m$  は式 (15)、システム行列  $A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$  は式 (16)、そして入力行列  $B_i \in \mathcal{R}^{n \times m}$  は式 (17) で表される。

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{pi} \quad (15)$$

$$A_i = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \right|_{\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}_{pi}, \mathbf{u}(k)=0} \quad (16)$$

$$B_i = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}(k)} \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \right|_{\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}_{pi}, \mathbf{u}(k)=0} \quad (17)$$

さらに、式 (10) の状態の予測値  $\bar{\mathbf{x}}(k+\tau)$  を表す式 (12) を  $\mathbf{x}_{pi}$  の近傍で線形化したシステム行列を  $Q_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$  で表すと、式 (16) と同様に、式 (18) で得られる。

$$Q_i = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(k)} \mathbf{f}^\tau(\mathbf{x}(k), \mathbf{0}) \right|_{\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}_{pi}} \quad (18)$$

そして、式 (1) に式 (9) の  $\mathbf{u}(k)$  を代入すると、式 (10), (11), (12) より、式 (19) が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_p(k) + \mathbf{u}_D(k)) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), K(1-w)\{\bar{\mathbf{x}}(k+\tau) - \mathbf{x}(k)\} \\ &\quad + Kw\{\mathbf{x}(k-\tau) - \mathbf{x}(k)\}) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), K(1-w)\{f^\tau(\mathbf{x}(k), \mathbf{0}) - \mathbf{x}(k)\} \\ &\quad + Kw\{\mathbf{x}(k-\tau) - \mathbf{x}(k)\}) \end{aligned} \quad (19)$$

したがって、式 (18), (19) より、式 (14) の周期係数行列をもつ線形化システムは式 (20) となる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= A \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &\quad + BK \left[ (1-w) \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}^\tau(\mathbf{x}_p, 0)}{\partial \mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k) \right\} \right. \\ &\quad \left. + w \{ \bar{\mathbf{x}}(k-\tau) - \bar{\mathbf{x}}(k) \} \right] \\ &= A \bar{\mathbf{x}}(k) + BK \left[ (1-w) \{ Q \bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k) \} \right. \\ &\quad \left. + w \{ \bar{\mathbf{x}}(k-\tau) - \bar{\mathbf{x}}(k) \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [A + (1-w)BK\{Q - I_n\} - wBK] \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &\quad + wBK \bar{\mathbf{x}}(k-\tau) \end{aligned} \quad (20)$$

ここからは、各不安定周期点  $\mathbf{x}_{pi}$  を区別する必要がある場合を除き、式 (20) のように添え字  $i (= 1, \dots, \tau)$  は省略する。

$\tau$  周期軌道の近傍における式 (14) の安定性を保証する式 (10), (11) の  $K$  と  $w$  を適切に決定するためには、式 (20) の拡大システムの安定性を求める必要がある。式 (14) は  $n$  次元であるため、式 (20) の拡大システムは  $n \times (\tau+1)$  ( $= N$ ) 次元となる。また、現在の状態ベクトル  $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{R}^n$  の近傍の不安定周期点  $\mathbf{x}_{pi} \in \mathcal{R}^n$  は  $\mathbf{x}_{pk} \in \mathcal{R}^n$  と表されるから、このとき各不安定周期点には式 (21) の関係がある。

$$\mathbf{x}_{p(k+\tau)} = \mathbf{x}_{pk} \quad (21)$$

そして、式 (20) の拡大システムの状態ベクトルを  $\bar{\mathbf{X}}(k) \in \mathcal{R}^N$  とおくと、式 (15), (21) より、式 (22) と表すことができる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(k) &= \underbrace{[\mathbf{x}^\tau(k) \cdots \mathbf{x}^\tau(k-\tau)]^\tau}_{\tau+1} \\ &\quad - \underbrace{[\mathbf{x}_{pk}^\tau \cdots \mathbf{x}_{p(k-\tau)}^\tau]^\tau}_{\tau+1} \end{aligned} \quad (22)$$

よって、式 (20) において式 (23) とおくと、式 (15), (22) より、式 (20) の拡大システムは式 (24) となる。

$$F(w, K) = (1-w)BK\{Q - I_n\} \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{X}}(k+1) = \begin{bmatrix} A + F\{w, K\} - wBK & O_n \cdots \cdots \\ & I_{n \times \tau} \\ & \cdots O_n & wBK \\ & & & O_n \\ & & & \vdots \\ & & & O_n \end{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(k) \quad (24)$$

式 (24) の拡大システムの安定性を求める。式 (24) の特性多項式を  $Z(z, w, K)$  とすると、式 (25) のように表すことができる。

$$Z(z, w, K) = \det \begin{bmatrix} zI_n - \{A + F(w, K) - wBK\} & O_n & O_n \\ & -I_n & zI_n & O_n \\ & O_n & -I_n & zI_n \\ & O_n & O_n & -I_n \\ & \vdots & \vdots & \\ & O_n & O_n & O_n \\ & O_n & O_n & O_n \\ & O_n & O_n & O_n \\ \cdots & \cdots & O_n & O_n & -wBK \\ \cdots & \cdots & O_n & O_n & O_n \\ & \cdots & O_n & O_n & O_n \\ & & O_n & O_n & O_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & zI_n & O_n & O_n \\ \cdots & & -I_n & zI_n & O_n \\ \cdots & \cdots & O_n & -I_n & zI_n \end{bmatrix}$$

$$= \det[z^{\tau+1}I_n - z^{\tau}\{A + F(w, K) - wBK\} - wBK] \quad (25)$$

そして、式 (25) の展開式を式 (26) とする。

$$Z(z, w, K) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (26)$$

ここで、式 (26) の係数  $a_\gamma (\gamma=0, \dots, N)$  は、 $w$  と  $K$  に依存する変数となる。式 (26) において  $a_N=1$  であるから、式 (27) がなりたつ。

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Z(z, w, K) = \infty > 0 \quad (27)$$

また、 $z=1$  のとき、式 (25) は式 (28) となる。

$$Z(1, w, K) = \det[I_n - \{A + F(w, K)\}] \quad (28)$$

したがって、 $Z(1, w, K)$  の符号の値は、式 (28) より、線形化システム行列  $A$  によらず式 (23) の  $F(w, K)$  の値すなわち  $w$  と  $K$  によって決定できるので、式 (14) の線形化システムは奇数条件の制約を受けない。

### 5.3 バランス・パラメータと奇数条件

2 入力のバランス・パラメータ  $w$  と奇数条件の関係について考察する。

式 (10), (11) の  $w=1$ , すなわち DFC 入力のみするとき、式 (23) は式 (29) のように  $O_n \in \mathcal{R}^{n \times n}$  となる。

$$F(w, K)|_{w=1} = F(1, K) = (1-1)BK\{Q - I_n\} = O_n \quad (29)$$

よって、式 (25) の  $Z(z, w, K)$  は、 $z=1$  において式 (30) のようになる。

$$\begin{aligned} Z(1, 1, K) &= \det[I_n - \{A + F(1, K) - wBK\} - wBK] \\ &= \det[I_n - \{A + F(1, K)\}] \\ &= \det[I_n \{A + O_n\}] \\ &= \det(I_n - A) \end{aligned} \quad (30)$$

式 (30) より、 $A$  が奇数条件を満たすときは常に  $Z(1, 1, K) < 0$  である。したがって、 $K$  の値に関わらず  $|z| > 1$  となる解が必ず存在する。

一方、 $w=0$ , すなわち PFC 入力のみするとき、式 (23) は式 (31) となり、式 (25) の  $Z(z, w, K)$  は  $z=1$  において式 (32) のようになる。

$$F(w, K)|_{w=0} = F(0, K) = BK\{Q - I_n\} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} Z(1, 0, K) &= \det[I_n - \{A + F(0, K) - wBK\} - wBK] \\ &= \det[I_n - \{A + F(0, K)\}] \\ &= \det[I_n - \{A + BK(Q - I_n)\}] \\ &= \det[I_n - A - BA\{Q - I_n\}] \end{aligned} \quad (32)$$

式 (32) より、 $A$  の値に関わらず  $K$  の値によって  $Z(1, 0, K)$  の符号の値を決定でき、すべての解を  $|\forall z| < 1$  とすることができる。よって、式 (14) の線形化システムは奇数条件の制約を受けない。このとき、各システムの極  $z$  に対して、システムの安定性を満足する  $BK(Q - I_n)$  を求めることができる。したがって、 $\det(Q - I_n) \neq 0$  ならば、フィードバックゲイン行列  $K$  が得られる。

### 5.4 入力ゲインおよびバランス・パラメータ

式 (10), (11) のフィードバックゲイン行列

$K$  およびバランスの重み  $w$  の値を設定するため、極配置問題としてシステムの極を求めることを考える。式 (23), (25) より、式 (25) の特性多項式  $Z(z, w, K)$  は式 (33) となる。

$$\begin{aligned}
 Z(z, w, K) &= \det[z^{\tau+1}I_n - z^\tau\{A + (1-w)BK(Q - I_n) \\
 &\quad - wBK\} - wBK] \\
 &= \det[z^{\tau+1}I_n - z^\tau\{A + BK(Q - I_n) \\
 &\quad - wBK(Q - I_n) - wBK\} - wBK] \\
 &= \det[z^{\tau+1}I_n - z^\tau\{A + BK(Q - I_n) \\
 &\quad - wBKQ\} - wBK] \\
 &= \det[z^{\tau+1}I_n - z^\tau\{A + (1-w)BKQ \\
 &\quad - BK\} - wBK] \quad (33)
 \end{aligned}$$

$w$  および  $K$  は、式 (33) を用いた式 (34) の特性方程式から、各解  $z$  に対するパラメータの組  $(w, K)$  として求めることができる。

$$Z(z, w, K) = 0 \quad (34)$$

しかし、一般に周期係数をもつシステム行列の各  $A_1, A_2, \dots$  に対して単独にゲイン行列  $K_1, K_2, \dots$  を設計しても、元の周期係数システムを安定化できるとは限らない<sup>[13]</sup>。さらに、システムの次元が大きくなると、特性方程式の根を求めることはかなり面倒な計算になる。したがって、周期係数をもつ線形化システム行列の各  $A_i (i=1, 2, \dots, \tau)$  に基づく拡大システムに対する極配置問題の解となるパラメータの組  $(w_i, K_i)$  を求めることは、かなり面倒である。そして、安定化したい目標軌道の周期  $\tau$  が大きくなると、それに伴い線形化システムの次元が大きくなり、式 (24) の拡大システムの次元  $N$  も大きくなるので、式 (34) の特性方程式の周期解  $z$  を求めることは大変煩雑な計算となる場合がある。

線形フィードバック入力を用いる DFC 法および PFC 法において、カオスシステムを目標の不安定周期軌道に安定化させるフィードバックゲイン  $K$  の求め方として、周期係数システムの極配置問題の方法以外いくつか提案されてい

るが、試行錯誤的であり最適のゲインを決定する方法は確立していない<sup>[7]</sup>。一方、DFC 法および PFC 法の入力ゲイン  $K$  の設定に Jury の安定判別法<sup>[14]</sup>を用いる場合がある<sup>[7, 11, 12]</sup>。

そこで、提案手法ではシステムの極  $z$  を求めることなく、Jury の安定判別法を用いて式 (24) の拡大システムの安定性を判断する<sup>[14]</sup>。そして、式 (14) の  $\tau$  周期軌道の線形化システムが安定であるように、パラメータの組  $(w, K)$  の範囲を決定する。

## 5.5 評価関数を用いた入力パラメータの設定

Jury の安定判別法を用いて得られるパラメータの組  $(w, K)$  の領域から、制御に適切な組  $(w, K)$  を決定する<sup>[7, 14]</sup>。そして、式 (24) から得られた  $(w, K)$  を式 (10), (11) の  $w$  および  $K$  に各々代入する。得られた式 (9) の制御入力を用いた式 (1) の制御系モデルに対して評価関数を適用し、対象とする実際のシステムに適した  $(w, K)$  を選び出す。

評価関数としては、制御入力が増加される時刻からシステムの状態が安定する時刻までの間において、状態  $\mathbf{x}(k)$  と目標  $\mathbf{x}_{pi}$  との誤差が少ないこと、そのときの制御入力なるべく小さいこと、制御時間が短いことなどを考慮する。したがって、式 (9), (13) を用い、評価関数は式 (35) とする。

$$E_{va} = \frac{1}{\sum_{k=k_c}^{k_s} \{r(k) + v \|\mathbf{u}(k)\|\}} \quad (35)$$

ここで、 $k_c$  は制御開始時刻、 $k_s$  はシステムが十分に安定した時刻、そして  $v$  は重みである。

## 6. 制御系のロバスト性

状態フィードバックを用いたカオス制御系のロバスト性について説明する。自由系に外乱が付加した場合の影響と線形状態フィードバック制御のロバスト性を述べた後、PFC と DFC の

ロバスト性を示す。そして、PFC と DFC とのハイブリッド型制御系における外乱の影響を考察する。PFC とハイブリッド型制御においては、状態の予測値をカオス制御に用いるので、予測値の誤差の影響についても考察する。

対象とする離散時間カオスシステムを式(36)とする。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (36)$$

ここで、 $\mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^m$  はシステムの状態、 $\mathbf{u}_k \in \mathcal{R}^l$  は制御入力である。安定化する式(36)のUPOの周期を  $\tau=1$  とし、不安定不動点近傍における式(36)の線形化システムを式(37)とする。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(\mathbf{u}_k + \Delta) \quad (37)$$

ここで、 $\Delta$  は加法的な外乱で、簡単のため定数雑音とする。

### 6.1 外乱のある線形システム

式(37)で  $\mathbf{u}_k=0$  とすると、式(38)となる。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\Delta \quad (38)$$

式(38)は式(37)の自由系で、外乱のため  $\mathbf{B}\Delta$  の誤差を生じている。式(38)を一時刻だけ進め、さらに式(38)を代入すると、式(39)となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+2} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{B}\Delta \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\Delta) + \mathbf{B}\Delta \\ &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}_k + (\mathbf{A} + \mathbf{I}_m)\mathbf{B}\Delta \end{aligned} \quad (39)$$

同様に、式(39)を一時刻だけ進め、さらに式(39)を代入すると、式(40)となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+3} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+2} + \mathbf{B}\Delta \\ &= \mathbf{A}\{\mathbf{A}^2\mathbf{x}_k + (\mathbf{A} + \mathbf{I}_m)\mathbf{B}\Delta\} + \mathbf{B}\Delta \\ &= \mathbf{A}^3\mathbf{x}_k + (\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I}_m)\mathbf{B}\Delta \end{aligned}$$

よって、 $n$  時刻後は式(41)のように表され、式(41)において  $k \rightarrow \infty$  とすると、式(42)のように誤差が蓄積される。

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \mathbf{x}_{k+n} &= \mathbf{A}^n\mathbf{x}_k + (\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I}_m)\mathbf{B}\Delta \end{aligned}$$

$$= \mathbf{A}^n\mathbf{x}_k + \sum_{i=n-1}^0 \mathbf{A}^i\mathbf{B}\Delta \quad (\mathbf{A}^0 \equiv \mathbf{I}_m) \quad (41)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \mathbf{x}_{k+\infty} &= \mathbf{A}^\infty\mathbf{x}_k + (\mathbf{A}^{\infty-1} + \cdots + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I}_m)\mathbf{B}\Delta \end{aligned} \quad (42)$$

### 6.2 線形状態フィードバック制御

式(36)の  $\mathbf{u}_k$  として式(43)を用いた線形状態フィードバック制御を考える。

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k \quad (43)$$

このとき、式(37)で  $\Delta=0$  とすると、式(44)となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (44)$$

式(44)を一時刻進め、さらに式(44)を代入すると式(45)となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+2} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+1} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}_{k+1} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_{k+1} \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A})^2\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (45)$$

同様に繰り返していくと、 $n$  時刻後は式(46)で表さる。

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \mathbf{x}_{k+n} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})^n\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (46)$$

よって、 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  が可制御対であるなら、 $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$  が安定行列となるように  $\mathbf{K}$  を定めると式(47)のように収束する。

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \mathbf{x}_\infty &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (47)$$

式(37)で  $\Delta \neq 0$  のときは、式(43)を用いて式(48)となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(\mathbf{u}_k + \Delta) \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\Delta \end{aligned} \quad (48)$$

式(45)のように一時刻進める操作を同様に繰り返していくと、式(49)、(50)、(51)のようになり、 $n$  時刻後は式(52)で表さる。



$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+2} &= A\mathbf{x}_{k+1} + B(\mathbf{u}_{k+1} + \Delta) \\
 &= A\mathbf{x}_{k+1} + BK\mathbf{x}_{k+1} + B\Delta \\
 &= (A + BA)\mathbf{x}_{k+1} + B\Delta \\
 &= (A + BK)^2\mathbf{x}_k + (A + BK)B\Delta \\
 &\quad + B\Delta \tag{49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+3} &= A\mathbf{x}_{k+2} + B(\mathbf{u}_{k+2} + \Delta) \\
 &= A\mathbf{x}_{k+2} + BK\mathbf{x}_{k+2} + B\Delta \\
 &= (A + BA)\mathbf{x}_{k+2} + B\Delta \\
 &= (A + BK)^3\mathbf{x}_k + (A + BK)^2B\Delta \\
 &\quad + (A + BK)B\Delta + B\Delta \tag{50}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+4} &= A\mathbf{x}_{k+3} + B(\mathbf{u}_{k+3} + \Delta) \\
 &= A\mathbf{x}_{k+3} + BK\mathbf{x}_{k+3} + B\Delta \\
 &= (A + BA)\mathbf{x}_{k+3} + B\Delta \\
 &= (A + BK)^4\mathbf{x}_{k+1} \\
 &\quad + (A + BK)^3B\Delta + (A + BK)^2B\Delta \\
 &\quad + (A + BK)B\Delta + B\Delta \\
 &= (A + BK)^4\mathbf{x}_k \\
 &\quad + \{(A + BK)^3 + (A + BK)^2\}B\Delta \\
 &\quad + (A + BK)B\Delta + B\Delta \tag{51}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 \mathbf{x}_{k+n} &= (A + BK)^n\mathbf{x}_k + \{(A + BK)^{n-1} + \dots \\
 &\quad + (A + BK)^2\}B\Delta + \{(A + BK) + I_m\}B\Delta \tag{52}
 \end{aligned}$$

よって、 $A + BK$  が安定行列であるとき、式 (53) のように定常偏差を生じる。

$$\begin{aligned}
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 \mathbf{x}_\infty &= \{(A + BK) + I_m\}B\Delta \tag{53}
 \end{aligned}$$

### 6.3 予測に基づくフィードバック制御

式 (36) の  $\mathbf{u}_k$  として式 (54) を用いた予測に基づくフィードバック制御 (PFC) を考える。

$$\mathbf{u}_k = K(\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \tag{54}$$

このとき、式 (37) で  $\Delta = 0$  とすると、式 (55) となる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\
 &= A\mathbf{x}_k + BK(\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \tag{55}
 \end{aligned}$$

ここで、式 (54) の予測値  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  を式 (56) で定め、正確な予測値が得られると仮定する。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \tag{56}$$

式 (56) より式 (54) は式 (57) となり、このとき式 (55) は式 (58) となる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_k &= K(\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \\
 &= K(A\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k) \\
 &= K(A - I_m)\mathbf{x}_k \tag{57}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\
 &= A\mathbf{x}_k + BK(A - I_m)\mathbf{x}_k \\
 &= (A + BKA - BK)\mathbf{x}_k \tag{58}
 \end{aligned}$$

式 (56)、(58) を用いた式 (59) のように、一時刻進める操作を繰り返していくと、 $n$  時刻後は式 (60) で表さる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+2} &= A\mathbf{x}_{k+1} + B\mathbf{u}_{k+1} \\
 &= A\mathbf{x}_{k+1} + BK(\hat{\mathbf{x}}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}) \\
 &= A\mathbf{x}_{k+1} + BK(A\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}) \\
 &= (A + BKA - BK)\mathbf{x}_{k+1} \\
 &= (A + BKA - BK)^2\mathbf{x}_k \tag{59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 \mathbf{x}_{k+n} &= (A + BKA - BK)^n\mathbf{x}_k \tag{60}
 \end{aligned}$$

よって、 $A + BKA - BK$  が安定行列となるように  $K$  を定めると式 (61) のように収束する。

$$\begin{aligned}
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 \mathbf{x}_\infty &= 0 \tag{61}
 \end{aligned}$$

#### 6.3.1 正確な予測値に基づく制御 (外乱が存在)

式 (37) で  $\Delta \neq 0$  のときは、式 (58) は式 (62) となる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B(\mathbf{u}_k + \Delta) \\
 &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k + B\Delta \\
 &= A\mathbf{x}_k + BK(A - I_m)\mathbf{x}_k + B\Delta \\
 &= (A + BKA - BK)\mathbf{x}_k + B\Delta \tag{62}
 \end{aligned}$$

式 (62) を一時刻進める操作を式 (59) のように同様に繰り返していくと、式 (63)、(64) より、 $n$  時刻後は式 (65) で表さる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+2} &= A\mathbf{x}_{k+1} + B(\mathbf{u}_{k+1} + \Delta) \\
 &= A\mathbf{x}_{k+1} + B\mathbf{u}_{k+1} + B\Delta \\
 &= A\mathbf{x}_{k+1} + BK(\hat{\mathbf{x}}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}) + B\Delta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A\mathbf{x}_{k+1} + BK(A\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}) + B\Delta \\
 &= (A + BKA - BK)\mathbf{x}_{k+1} + B\Delta \\
 &= (A + BKA - BK)^2\mathbf{x}_k \\
 &= (A + BKA - BK)B\Delta + B\Delta \quad (63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+3} &= A\mathbf{x}_{k+2} + B(\mathbf{u}_{k+2} + \Delta) \\
 &= A\mathbf{x}_{k+2} + BK(\hat{\mathbf{x}}_{k+3} - \mathbf{x}_{k+2}) + B\Delta \\
 &= A\mathbf{x}_{k+2} + BK(A\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+2}) + B\Delta \\
 &= (A + BKA - BK)\mathbf{x}_{k+2} + B\Delta \\
 &= (A + BKA - BK)^3\mathbf{x}_k \\
 &\quad + (A + BKA - BK)^2 B\delta \\
 &\quad + (A + BKA - BK)B\Delta + B\Delta \quad (64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \mathbf{x}_{k+n} &= (A + BKA - BK)^n \mathbf{x}_k \\
 &\quad + \{(A + BKA - BK)^{n-1} + \dots \\
 &\quad + (A + BKA - BK)^2\} B\Delta \\
 &\quad + \{(A + BKA - BK) + I_m\} B\Delta \quad (65)
 \end{aligned}$$

よって、 $A + BKA - BK$  安定行列であるとき、式 (66) のように定常偏差を生じる。

$$\begin{aligned}
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \mathbf{x}_\infty &= (A + BKA - BK + I_m)B\Delta \quad (66)
 \end{aligned}$$

### 6.3.2 誤差を含む予測値に基づく制御

6.3.6.3.1 では、式 (54) の PFC 入力の予測値  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  として、式 (56) を用いた。しかし、実際には、次の時刻の状態  $\mathbf{x}_{k+1}$  は式 (55) の制御系で得られ、式 (56) の自由系のシステム行列  $A$  には誤差が存在する。よって、システム行列の誤差を  $\delta A$  とすると、式 (57) は式 (67) となり、このとき式 (58) は式 (68) となる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_k &= K(\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \\
 &= K\{(A + \delta A)\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k\} \\
 &= K(A - I_m + \delta A)\mathbf{x}_k \quad (67)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\
 &= A\mathbf{x}_k + BK(A - I_m + \delta A)\mathbf{x}_k \\
 &= (A + BKA - BK + BK\delta A)\mathbf{x}_k \quad (68)
 \end{aligned}$$

式 (68) を一時刻進め、さらに式 (68) を代入し変形すると式 (69) が得られる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+2} &= A\mathbf{x}_{k+1} + B\mathbf{u}_{k+1} \\
 &= (A + BKA - BK + BK\delta A)\mathbf{x}_{k+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (A + BKA - BK + BK\delta A)^2 \mathbf{x}_k \\
 &= \{(A + BKA - BK)^2 \\
 &\quad + (A + BKA - BK)BK\delta A \\
 &\quad + BK\delta A(A + BKA - BK) \\
 &\quad + (BK\delta A)^2\} \mathbf{x}_k \\
 &= \{(A + BKA - BK)^2 + F_2\} \mathbf{x}_k \quad (69)
 \end{aligned}$$

ここで、 $F_2$  は式 (70) のように定められ、式 (69) の制御系のシステム行列の誤差を表す。

$$\begin{aligned}
 F_2 &= (A + BKA - BK + BK\delta A)^2 \\
 &\quad - (A + BKA - BK)^2 \quad (70)
 \end{aligned}$$

さらに、式 (69) を一時刻進める操作を行うと、式 (71) を用いて式 (72) で表される。

$$\begin{aligned}
 F_3 &= (A + BKA - BK + BK\delta A)^3 \\
 &\quad - (A + BKA - BK)^3 \quad (71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+3} &= (A + BKA - BK + BK\delta A)^2 \mathbf{x}_k \\
 &= \{(A + BKA - BK)^3 \\
 &\quad + (A + BKA - BK)^2 BK\delta A \\
 &\quad + (A + BKA - BK)BK\delta A(A + BKA - BK) \\
 &\quad + (A + BKA - BK)(BK\delta A)^2 \\
 &\quad + (BK\delta A)(A + BKA - BK)^2 \\
 &\quad + (BK\delta A)(A + BKA - BK)BK\delta A \\
 &\quad + (BK\delta A)^2(A + BKA - BK) \\
 &\quad + (BK\delta A)^2\} \mathbf{x}_k \\
 &= \{(A + BKA - BK)^3 + F_3\} \mathbf{x}_k \quad (72)
 \end{aligned}$$

同様に繰り返していくと、 $n$  時刻後は式 (73) で表され、このとき式 (73) の誤差  $F_n$  は式 (74) で表される。

$$\begin{aligned}
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \mathbf{x}_{k+n} &= \{(A + BKA - BK)^n + F_n\} \mathbf{x}_k \quad (73)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_n &= (A + BKA - BK + BK\delta A)^n \\
 &\quad - (A + BKA - BK)^n \quad (74)
 \end{aligned}$$

よって、 $A + BKA - BK$  が安定行列となるように  $K$  を定めても、式 (75) のように偏差を生じる。

$$\begin{aligned}
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \mathbf{x}_\infty &= F_\infty \mathbf{x}_k \quad (75)
 \end{aligned}$$

また、式 (74) において  $n=1$  とすると式 (76) となるから、式 (68) より、式 (73), (74) は  $n=1$  の場合もなりたつ。

$$\begin{aligned} F_1 &= (A + BKA - BK + BK\delta A) \\ &\quad - (A + BKA - BK) \\ &= BK\delta A \end{aligned} \quad (76)$$

#### 6.4 時間遅延フィードバック制御

式 (36) の  $u_k$  として式 (77) を用いた時間遅延フィードバック制御 (DFC) を考える。

$$u_k = K(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k) \quad (77)$$

このとき、式 (37) で  $\Delta=0$  とすると、式 (78) となり、その拡大システムを式 (79) とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\ &= A\mathbf{x}_k + BK(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k) \\ &= (A - BK)\mathbf{x}_k + BK\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (79)$$

式 (78) を一時刻進め、さらに式 (78) を代入すると式 (80) となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+2} &= A\mathbf{x}_{k+1} + B\mathbf{u}_{k+1} \\ &= A\mathbf{x}_{k+1} + BK(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}) \\ &= (A - BK)\mathbf{x}_{k+1} + BK\mathbf{x}_k \\ &= (A - BK)^2\mathbf{x}_k + (A - BK)BK\mathbf{x}_{k-1} \\ &\quad + BK\mathbf{x}_k \\ &= \{(A - BK)^2 + BK\}\mathbf{x}_k \\ &\quad + (A - BK)BK\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (80)$$

式 (78), (80) を用いた式 (80) の拡大システムは、式 (79) を用いた式 (81) となる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+2} \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A - BK)^2 + BK & \\ & A - BK \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} (A - BK)BK \\ BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (81)$$

式 (81) のような操作を繰り返していくと  $n$  時刻後は式 (82) で表され、拡大システム行列が安定行列となるように  $K$  を定めると式 (83) のように収束する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+n} \\ \mathbf{x}_{k+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ I_m & O_n \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_\infty \\ \mathbf{x}_{\infty-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (83)$$

##### 6.4.1 外乱 (一定値) が存在する場合の制御

式 (37) のように一定値の外乱  $\Delta (\neq 0)$  が存在するとき、式 (77) より、式 (37) の制御系は式 (84) となり、その拡大システムは式 (85) となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B(\mathbf{u}_k + \Delta) \\ &= A\mathbf{x}_k + BK(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k) + B\Delta \\ &= (A - BK)\mathbf{x}_k + BK\mathbf{x}_{k-1} + B\Delta \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ I_m & O_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \quad (85)$$

式 (84) を一時刻進め、さらに式 (84) を代入すると式 (86) となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+2} &= A\mathbf{x}_{k+1} + B(\mathbf{u}_{k+1} + \Delta) \\ &= A\mathbf{x}_{k+1} + BK(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}) + B\Delta \\ &= (A - BK)\mathbf{x}_{k+1} + BK\mathbf{x}_k + B\Delta \\ &= (A - BK)^2\mathbf{x}_k + (A - BK)BK\mathbf{x}_{k-1} \\ &\quad + (A - BK)B\Delta + BK\mathbf{x}_k + B\Delta \\ &= \{(A - BK)^2 + BK\}\mathbf{x}_k \\ &\quad + (A - BK)BK\mathbf{x}_{k-1} \\ &\quad + \{(A - BK) + I_n\}B\Delta \end{aligned} \quad (86)$$

式 (84), (86) を用いた式 (86) の拡大システムは、式 (85) を用いた式 (87) となる。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+2} \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &= \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_n \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &= \begin{bmatrix} (A-BK)^2 + BK \\ A-BK \\ (A-BK)BK \\ BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} A-BK + I_m \\ I_m \end{bmatrix} B\Delta \quad (87)
 \end{aligned}$$

式 (87) のように繰り返していくと、式 (88)、(89) のようになり、 $n$  時刻後の拡大システムは式 (90) で表される。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+3} \\ \mathbf{x}_{k+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+2} \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &= \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &+ \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \quad (88)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+4} \\ \mathbf{x}_{k+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &+ \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &+ \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \quad (89)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\vdots \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+n} \\ \mathbf{x}_{k+n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+n-1} \\ \mathbf{x}_{k+n-2} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &= \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &\vdots \\
 &+ \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &+ \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\
 &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \quad (90)
 \end{aligned}$$

よって、式 (85) の拡大システム行列が安定行列となるように  $K$  を定めると、式(90)より、式 (91) のように定常偏差を生じる。

$$\begin{aligned}
 &\vdots \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\infty \\ \mathbf{x}_{\infty-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A-BK + I_m \\ I_m \end{bmatrix} B\Delta \quad (91)
 \end{aligned}$$

### 6.5 ハイブリッド型制御

PFC と DFC とのハイブリッド型の制御系を考える。PFC に基づく制御入力部分の予測値  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  として式 (56) を用いた場合、式 (36) の

$\mathbf{u}_k$  は式 (92) のカオス制御入力となる。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_k &= K\{(1-w)(\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}_k)+w(\mathbf{x}_{k-1}-\mathbf{x}_k)\} \\ &= (1-w)K(A\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_k)+wK(\mathbf{x}_{k-1}-\mathbf{x}_k) \\ &= \{(1-w)K(A-I_m)-wK\}\mathbf{x}_k+wK\mathbf{x}_{k-1} \\ &= (\bar{F}-\bar{K})\mathbf{x}_k+\bar{K}\mathbf{x}_{k-1}\end{aligned}\quad (92)$$

ここで、式 (92) の  $\bar{F}, \bar{K}$  は、式 (93), (94) を表す。

$$\bar{F} = (1-w)K(A-I_m) \quad (93)$$

$$\bar{K} = wK \quad (94)$$

このとき、式 (37) で  $\Delta=0$  とすると式 (95) となり、その拡大システムを式 (96) とする。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\ &= A\mathbf{x}_k + (B\bar{F} - B\bar{K})\mathbf{x}_k + B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} \\ &= (A + B\bar{F} - B\bar{K})\mathbf{x}_k + B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1}\end{aligned}\quad (95)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B\bar{F} - B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix}\quad (96)$$

式 (96) の拡大システムは式 (79) の DFC の拡大システムと同様な型となる。DFC のときと同様に一時刻ずつ時間を進める操作を繰り返していくと、式 (97), (98), (99) より  $n$  時刻後の拡大システムは式 (100) で表される。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+2} &= A\mathbf{x}_{k+1} + B\mathbf{u}_{k+1} \\ &= A\mathbf{x}_{k+1} + (B\bar{F} - B\bar{K})\mathbf{x}_{k+1} + B\bar{K}\mathbf{x}_k \\ &= (A + B\bar{F} - B\bar{K})\mathbf{x}_{k+1} + B\bar{K}\mathbf{x}_k \\ &= (A + B\bar{F} - B\bar{K})^2\mathbf{x}_k \\ &\quad + (A + B\bar{F} - B\bar{K})B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} + B\bar{K}\mathbf{x}_k \\ &= \{(A + B\bar{F} - B\bar{K})^2 + B\bar{K}\}\mathbf{x}_k \\ &\quad + (A + B\bar{F} - B\bar{K})B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1}\end{aligned}\quad (97)$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+2} \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B\bar{F} - B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + B\bar{F} - B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A + B\bar{F} - B\bar{K})^2 + B\bar{K} & \\ A + B\bar{F} - B\bar{K} & \\ (A + B\bar{F} - B\bar{K})B\bar{K} & \\ B\bar{K} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(98)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+3} &= \{(A + B\bar{F} - B\bar{K})^3 \\ &\quad + (A + B\bar{F} - B\bar{K})B\bar{K} \\ &\quad + B\bar{K}(A + B\bar{F} - B\bar{K})\}\mathbf{x}_k \\ &\quad + (A + B\bar{F} - B\bar{K})^2 B\bar{K} \\ &\quad + (B\bar{K})^2\mathbf{x}_{k-1}\end{aligned}\quad (99)$$

$$\begin{aligned}\vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+n} \\ \mathbf{x}_{k+n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B\bar{F} - B\bar{K} \\ I_m \\ B\bar{K} \\ O_m \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (100)$$

よって、式 (96) の拡大システム行列が安定行列となるように式 (93), (94) の  $K$  と  $w$  を定めると、式 (101) のように収束する。

$$\begin{aligned}\vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\infty \\ \mathbf{x}_{\infty-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (101)$$

### 6.5.1 正確な予測値に基づく制御 (外乱が存在)

式 (37) のように外乱が  $\Delta \neq 0$  のときは、式 (36) の  $\mathbf{u}_k$  に式 (92) の制御入力を用いると、式 (95) の制御系は式 (102) となり、このとき式 (96) の拡大システムは式 (103) となる。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B(\mathbf{u}_k + \Delta) \\ &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k + B\Delta \\ &= (A + B\bar{F} - B\bar{K})\mathbf{x}_k \\ &\quad + B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} + B\Delta\end{aligned}\quad (102)$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B\bar{F} - B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta\end{aligned}\quad (103)$$

式 (103) の拡大システムは式 (85) の DFC の拡大システムと同様な型となる。よって、式 (103) を一時刻進めた式 (104) のように、DFC のときと同様な操作を繰り返していくと、 $n$  時刻後の拡大システムは式 (105) で表すことができる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+2} \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\ &= \begin{bmatrix} A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A+B\bar{F} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\ &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+n} \\ \mathbf{x}_{k+n-1} \end{bmatrix} &= \\ &\begin{bmatrix} A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\ &\vdots \\ &+ \begin{bmatrix} A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\ &+ \begin{bmatrix} A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \\ &+ \begin{bmatrix} I_m \\ O_m \end{bmatrix} B\Delta \end{aligned} \quad (105)$$

よって、式 (96) の拡大システム行列が安定行列となるように式 (93), (94) の  $K$  と  $w$  を定めるとき、式 (103) の拡大システムは DFC のときと同様に式 (106) のような定常偏差を生じる。

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &\vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\infty \\ \mathbf{x}_{\infty-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A+B\bar{F}-B\bar{K}+I_m \\ I_m \end{bmatrix} B\Delta \end{aligned} \quad (106)$$

### 6.5.2 誤差を含む予測値に基づく制御

6.5, 6.5.1 では、式 (92) の制御入力の予測値  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  として式 (56) を用いたが、実際の次の時刻の状態  $\mathbf{x}_{k+1}$  は式 (95) の制御系によって得られる。よって、式 (56) のシステム行列  $A$  の誤

差を  $\delta A$  とすると、式 (92) は式 (107) と表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= K\{(1-w)(\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}_k) + w(\mathbf{x}_{k-1}-\mathbf{x}_k)\} \\ &= (1-w)K\{(A+\delta A)\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k\} \\ &\quad + wK\{\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k\} \\ &= \{(1-w)K\{A-I_m\} \\ &\quad + (1-w)K\delta A - wK\}\mathbf{x}_k + wK\mathbf{x}_{k-1} \\ &= (\bar{F} + \delta\bar{F} - \bar{K})\mathbf{x}_k + \bar{K}\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (107)$$

ここで、式 (107) の  $\bar{F}$ ,  $\delta\bar{F}$ ,  $\bar{K}$  は式 (108), (109), (110) を表す。

$$\bar{F} = (1-w)K(A-I_m) \quad (108)$$

$$\delta\bar{F} = (1-w)K\delta A \quad (109)$$

$$\bar{K} = wK \quad (110)$$

このとき、式 (95) の制御系は式 (111) となり、その拡大システムを式 (112) で表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k \\ &= A\mathbf{x}_k + (B\bar{F} + B\delta\bar{F} - B\bar{K})\mathbf{x}_k + B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} \\ &= (A+B\bar{F} + B\delta\bar{F} - B\bar{K})\mathbf{x}_k + B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} \\ &= (A+B\bar{F} - B\bar{K})\mathbf{x}_k + B\delta\bar{F}\mathbf{x}_k \\ &\quad + B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A+B\bar{F} + B\delta\bar{F} - B\bar{K} \\ I_m \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} B\bar{K} \\ O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A+B\bar{F}GB\bar{K} & B\bar{K}) \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B\delta\bar{F} & O_n \\ O_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (112)$$

式 (112) のシステム行列は、式 (96) のシステム行列と誤差行列の和で構成される。式 (111) を一時刻進め、さらに式 (111) を代入すると式 (113) が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+2} &= (A+B\bar{F} + B\delta\bar{F} - B\bar{K})\mathbf{x}_{k+1} + B\bar{K}\mathbf{x}_k \\ &= (A+B\bar{F} + B\delta\bar{F} - B\bar{K})^2\mathbf{x}_k \\ &\quad + (A+B\bar{F} + B\delta\bar{F} - B\bar{K})B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + B\bar{K}\mathbf{x}_k \\
 = & \{(A+B\bar{F}-B\bar{K})^2+B\bar{K}\}\mathbf{x}_k \\
 & + \{B\delta\bar{F}(A+B\bar{F}-B\bar{K}) \\
 & + (A+B\bar{F}-B\bar{K})B\delta\bar{F}+(B\delta\bar{F})^2\}\mathbf{x}_k \\
 & + (A+B\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} \\
 & + B\delta\bar{F}B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} \quad (113)
 \end{aligned}$$

式 (111) と式 (113) を用いて得られる拡大システムは、式 (113) を繰り返し用いた式 (114) と一致する。

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+2} \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} A+B\bar{F}+B\delta\bar{K}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} A+B\bar{F}+B\delta\bar{K}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} (A+B\bar{F}+B\delta\bar{K}-B\bar{K})^2 B\bar{K} \\ A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K} \\ (A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K} \\ B\bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} (A+B\bar{F}-B\bar{K})^2+B\bar{K} \\ A+B\bar{F}-B\bar{K} \\ (A+B\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K} \\ B\bar{K} \\ B\delta\bar{F}(A+B\bar{F}-B\bar{K}) \\ +(A+B\bar{F}-B\bar{K})B\delta\bar{F}+(B\delta\bar{F})^2 \\ B\delta\bar{F} \\ B\delta\bar{F}B\bar{K} \\ O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} (A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K})^2 \\ I_m & O_m \\ B\delta\bar{F}(A+B\bar{F}-B\bar{K}) \\ +(A+B\bar{F}-B\bar{K})B\delta\bar{F}+(B\delta\bar{F})^2 \\ B\delta\bar{F} \\ B\delta\bar{F}B\bar{K} \\ O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (114)
 \end{aligned}$$

式 (113) を一時刻進め、再び式 (113) を代入したのち、式 (115), (116), (117) を用いると式 (118) の制御系が得られ、その拡大システムは式 (119) となる。

$$\bar{F}_1=(A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K})-(A+B\bar{F}-B\bar{K}) \quad (115)$$

$$\bar{F}_2=(A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K})^2-(A+B\bar{F}-B\bar{K})^2 \quad (116)$$

$$\bar{F}_3=(A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K})^3-(A+B\bar{F}-B\bar{K})^3 \quad (117)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{x}_{k+3} \\
 = & \{(A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K})^3 \\
 & + (A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}B\bar{K}-B\bar{K})B\bar{K} \\
 & + B\bar{K}(A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K})\}\mathbf{x}_k \\
 & + \{(A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K})^2 B\bar{K} \\
 & + (B\bar{K})^2\}\mathbf{x}_{k-1} \\
 = & \{(A+B\bar{F}-B\bar{K})^3 \\
 & + (A+B\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K} \\
 & + B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K})\}\mathbf{x}_k \\
 & + \{(A+B\bar{F}-B\bar{K})^2 B\bar{K} \\
 & + (B\bar{K})^2\}\mathbf{x}_{k-1} \\
 & + (\bar{F}_3+\bar{F}_1 B\bar{K}+B\bar{K}\bar{F}_1)\mathbf{x}_k \\
 & + \bar{F}_2 B\bar{K}\mathbf{x}_{k-1} \quad (118)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+3} \\ \mathbf{x}_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K})^3 \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \bar{F}_3+\bar{F}_1 B\bar{K}+B\bar{K}\bar{F}_1 & \bar{F}_2 B\bar{K} \\ \bar{F}_2 & \bar{F}_1 B\bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (119)
 \end{aligned}$$

式 (113), (118) のように一時刻進める操作を繰り返していくと、式 (120), (121), (122), (123), (123) より、 $n$  時刻後の拡大システムは式 (125) となる。

$$\bar{F}_4=(A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K})^4-(A+B\bar{F}-B\bar{K})^4 \quad (120)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{k}_{k+4}= \\
 & \{(A+B\bar{F}-B\bar{K})^4 \\
 & + (A+B\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K})^2 \\
 &+(A+B\bar{F}-B\bar{K})^2B\bar{K}+(B\bar{K})^2\mathbf{x}_k \\
 &+\{(A+B\bar{F}-B\bar{K})^3B\bar{K} \\
 &+(A+B\bar{F}-B\bar{K})(B\bar{K})^2 \\
 &+B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K}\}\mathbf{x}_{k+1} \\
 &+(\bar{F}_4+\bar{F}_1B\bar{K}\bar{F}_1+B\bar{K}\bar{F}_2+F_2B\bar{K})\mathbf{x}_k \\
 &+(\bar{F}_3B\bar{K}+\bar{F}_1(B\bar{K})^2 \\
 &+B\bar{K}\bar{F}_1B\bar{K})\mathbf{x}_{k-1} \tag{121}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+4} \\ \mathbf{x}_{k+3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K})^4 \\ I_m & O_m \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \bar{F}_4+\bar{F}_1B\bar{K}\bar{F}_1+B\bar{K}\bar{F}_2+\bar{F}_2B\bar{K} \\ \bar{F}_3+\bar{F}_1B\bar{K}+B\bar{K}\bar{F}_1 \\ \bar{F}_3B\bar{K}+\bar{F}_1(B\bar{K})^2+B\bar{K}\bar{F}_1B\bar{K} \\ \bar{F}_2B\bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \tag{122}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_5 &= (A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K})^5 \\
 &- (A+B\bar{F}-B\bar{K})^5 \tag{123}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+5} &= \\
 &\{(A+B\bar{F}-B\bar{K})^5 \\
 &+(A+B\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K})^2 \\
 &+B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K})^3 \\
 &+(A+B\bar{F}-B\bar{K})^2B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K}) \\
 &+(B\bar{K})^2(A+B\bar{F}-B\bar{K}) \\
 &+(A+B\bar{F}-B\bar{K})^3B\bar{K} \\
 &+(A+B\bar{F}-B\bar{K})(B\bar{K})^2 \\
 &+B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K}\}\mathbf{x}_k \\
 &+\{(A+B\bar{F}-B\bar{K})^4B\bar{K} \\
 &+(A+B\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K})B\bar{K} \\
 &+B\bar{K}(A+B\bar{F}-B\bar{K})^2B\bar{K} \\
 &+(A+B\bar{F}-B\bar{K})^2(B\bar{K})^2+(B\bar{K})^3\}\mathbf{x}_{k-1} \\
 &+\{\bar{F}_5+\bar{F}_1B\bar{K}\bar{F}_2+B\bar{K}\bar{F}_3 \\
 &+\bar{F}_2B\bar{K}\bar{F}_1+(B\bar{K})^2F_1+\bar{F}_3B\bar{K} \\
 &+\bar{F}_1(B\bar{K})^2+B\bar{K}\bar{F}_1B\bar{K}\}\mathbf{x}_k \\
 &+\{F_4B\bar{K}+\bar{F}_1B\bar{K}\bar{F}_1B\bar{K} \\
 &+B\bar{K}\bar{F}_2B\bar{K}+\bar{F}_2(B\bar{K})^2\}\mathbf{x}_{k-1} \tag{124} \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+n} \\ \mathbf{x}_{k+n-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K})^n \\ I_m & O_m \end{bmatrix} + \bar{E}_n \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \tag{125}$$

式(125)の $\bar{E}_n \in \mathcal{R}^{2 \times m}$ は、システム行列の誤差行列で、式(126)で表す。

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_n &= \begin{bmatrix} A+B\bar{F}+B\delta\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^n \\
 &- \begin{bmatrix} A+B\bar{F}-B\bar{K} & B\bar{K} \\ I_m & O_m \end{bmatrix}^n \tag{126}
 \end{aligned}$$

式(125)の拡大システム行列は、予測値に誤差を含むときのPFCのシステム行列と同型であり、式(96)の拡大システム行列が安定行列となるように式(93)、(94)の $K$ と $w$ を定めても、式(126)を用いた式(127)のように偏差を生じる。

$$\begin{aligned}
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_\infty \\ \mathbf{x}_{\infty-1} \end{bmatrix} &= \bar{E}_\infty \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix} \tag{127}
 \end{aligned}$$

以上のことより、制御入力に侵入する加法的な外乱に対して、DFCおよびPFCは線形状態フィードバック制御と同様にロバストな傾向があり、外乱が一定値のときは定常偏差を生じる。しかし、PFC入力設計には状態の正確な予測値が必要であり、予測値に誤差が存在すると偏差を生じる。そして、DFCとPFCとをハイブリッドに用いた場合、加的外乱に対してロバストな傾向があり、一定値外乱のときは定常偏差となる。このとき、入力設計で用いる状態予測値の誤差に依存した偏差も生じる。したがって、ハイブリッド型カオス制御は、DFCとPFCの両方の特徴を合わせもつことが分かる。

## 7. シミュレーション

一次元離散時間カオスシステムである式(128)のロジスティック写像に提案手法を適用した。



$$x(k+1)=4x(k)(1-x(k))+u(k) \quad (128)$$

ここで,  $x(k) \in \mathcal{R}$  はシステムの状態,  $u(k) \in \mathcal{R}$  は加法的なカオス制御入力である。そして,  $u(k)=0$  のときにカオスが発生する。式(128)の  $\tau$  周期の不安定周期点を  $x_{p_i} \in \mathcal{R} (i=1, 2, \dots, \tau)$  とし,  $x_{p_i}$  近傍での式(128)の線形化システムを式(129)とした。

$$\bar{x}(k+1)=a_i\bar{x}(k)+b_iu(k) \quad (129)$$

式(129)の誤差状態変数  $\bar{x}(k) \in \mathcal{R}$  は式(130)である。

$$\bar{x}(k)=x(k)-x_{p_i} \quad (130)$$

式(129)の要素1となる線形化システム行列  $a_i \in \mathcal{R}$ , 入力定数  $b_i \in \mathcal{R}$  を求めるのに式(131), (132)を用いると,  $a_i=4(1-2x_{p_i})$ ,  $b_i=1$  となった。

$$a_i = \left. \frac{\partial}{\partial x(k)} f(x(k), u(k)) \right|_{x(k)=x_{p_i}, u(k)=0} \quad (131)$$

$$b_i = \left. \frac{\partial}{\partial u(k)} f(x(k), u(k)) \right|_{x(k)=x_{p_i}, u(k)=0} \quad (132)$$

### 7.1 奇数条件満たす不安定二周期軌道の安定

奇数条件によりDFC法では安定化できない式(128)の不安定2周期軌道を安定化した。不安定周期軌道の各不安定周期点  $x_{p_i} \in \mathcal{R} (i=1, 2)$  ごとに  $w_i$  と  $K_i$  を設定する。式(128)の各不安定周期点は  $x_{p_1}=(5+\sqrt{5})/8$ ,  $x_{p_2}=(5-\sqrt{5})/8$  である。このとき, 制御入力  $u(k) \in \mathcal{R}$  は,  $0 < w < 1$  として用いた式(133)となった。

$$\begin{aligned} u(k) &= (1-w)K[x(k+2)-z(k)] \\ &\quad + wK[z(k-2)-x(k)] \\ &= (1-w)K[16\{x(k)-5x^2(k)+8z^2(k) \\ &\quad -4x^4(k)\}-z(k)] \\ &\quad + wK\{z(k-2)-z(k)\} \end{aligned} \quad (133)$$

式(128)の不安定2周期  $x_{p_i} (i=1, 2)$  近傍での式(129)の線形化系制御入力  $u_i(k) \in \mathcal{R}$  は式

(134) となった。

$$\begin{aligned} u(k) &= (1-w_i)K_i[16\{1-10x_{p_i}+24x_{p_i}^2 \\ &\quad -16x_{p_i}^3\}\bar{x}(k)-\bar{x}(k)] \\ &\quad + w_iK_i\{\bar{x}(k-2)-\bar{x}(k)\} \\ &= (1-w_i)K_i\{g_i\bar{x}(k)-\bar{x}(k)\} \\ &\quad + w_iK_i\{\bar{x}(k-2)-\bar{x}(k)\} \\ &= (1-w_i)K_i(g_i-1)\bar{x}(k) \\ &\quad + w_iK_i\{\bar{x}(k-2)-\bar{x}(k)\} \end{aligned} \quad (134)$$

ここで, 式(134)の  $g_i$  は式(135)である。

$$g_i = 16\{1-10x_{p_i}+24x_{p_i}^2-16x_{p_i}^3\} \quad (i=1, 2) \quad (135)$$

#### 7.1.1 Juryの安定判別法の結果

式(134)より状態ベクトルを式(136)とすると, 式(129)の拡大システムは式(137)となった。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k) &= [\bar{x}(k) \quad \bar{x}(k-1) \quad \bar{x}(k-2)]^T \quad (136) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} a_i + (1-w_i)K_i(g_i-1) - w_iK_i & & \\ & 1 & \\ & & 0 \\ 0 & w_iK_i & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \quad (137)$$

よって, 式(137)の特性多項式  $z(z, w_i, K_i)$  は式(138)となった。

$$\begin{aligned} Z(z, w_i, K_i) &= \\ &= z^3 - \{a_i + K_i(g_i-1) - w_iK_i g_i\}z^2 - w_iK_i \end{aligned} \quad (138)$$

式(138)にJuryの安定判別法を適用し, 制御入力の重み  $w_i$  およびゲイン  $K_i (i=1, 2)$  の範囲を求めた。

不安定周期点  $x_{p_i}=(5+\sqrt{5})/8$  を安定化するためのパラメータの組  $(w_i, K_i)$  は, Juryの方法を用いて得られた式(139)の4つの不等式の条件をすべて満たす  $w_1-K_1$  平面の領域の共通部分として得られた。

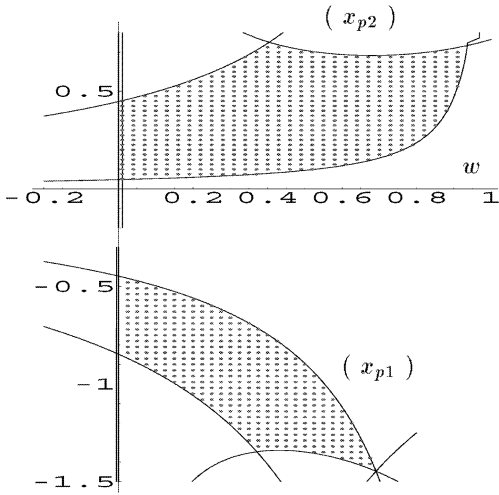


図2  $w-K$  平面における  $(w_i, K_i)(i=1, 2)$  の領域  $(x_{p1,2}=(5\pm\sqrt{5})/8)$   
 Figure 2 Domains  $(w_i, K_i)(i=1, 2)$  on plane  $w-K(x_{p1,2}=(5\pm\sqrt{5})/8)$ .

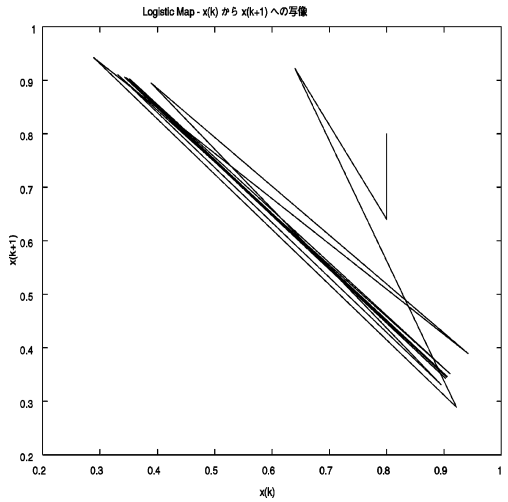


図3 2周期点  $(x_{p1}, x_{p2}), (x_{p2}, x_{p1})$  への制御過程の写像  $x(k)\rightarrow x(k+1)(x_{p1,2}=(5\pm\sqrt{5})/8)$   
 Figure 3 Map  $x(k)\rightarrow x(k+1)$  of control process into 2 periodic points  $(x_{p1}, x_{p2}), (x_{p2}, x_{p1}) (x_{p1,2}=(5\pm\sqrt{5})/8)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2+\sqrt{5}}{-5+5w_1} < K_1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}(-1+w_1)} > K_1 \\ -\frac{1}{w_1} < K_1 < \frac{1}{w_1} \\ 1-(1+\sqrt{5})w_1K_1 \\ +w_1(-5+3w_1)K_1^2 < 0 \end{array} \right. \quad (139)$$

同様に、 $x_{p2}=(5-\sqrt{5})/8$ を安定化する  $(w_2, K_2)$  の領域は、式 (140) の条件式すべてを満たす  $w_2-K_2$  平面の領域の共通部分として得た。

$$\left\{ \begin{array}{l} 2-\frac{\sqrt{5}}{-5+5w_2} < K_2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}(-1+w_2)} > K_2 \\ -\frac{1}{w_2} < K_2 < \frac{1}{w_2} \\ 1+(-1+\sqrt{5})w_2K_2 \\ +w_2(-5+3w_2)K_2^2 < 0 \end{array} \right. \quad (140)$$

図2は、 $(w_1, K_1)$  と  $(w_2, K_2)$  が存在する領域を  $w-K$  平面に同時に示したものである。

### 7.1.2 不安定二周期軌道の制御結果

制御入力のパラメータを  $(w_1, K_1)=(0.3711, -1.0), (w_2, K_2)=(0.5, 0.3711)$  として、式 (128) の2周期軌道  $\{x_{p1}, x_{p2}\}=\{(5+\sqrt{5})/8, (5-\sqrt{5})/8\}$  にシステムの状態を安定化した制御過程の写像  $x(k)\rightarrow x(k+1)$  を図3に示す。式 (128) の状態の初期値は  $x(0)=0.8$ 、近傍領域の大きさは  $\epsilon=0.1$  とした。DFC法では奇数条件の制約を受けて状態を安定化できなかった2周期軌道を安定化できた。

### 7.2 不安定不動点の安定

式 (128) の周期点  $x_{pi}\in\mathcal{R}(i=1, 2, \dots, \tau)$  のうち、周期  $\tau=1$  の不安定不動点を  $x_f\in\mathcal{R}$  とした。式 (128) の不動点は、 $x_f=0, 0.75$  の2つである。このとき、カオス制御入力  $u(k)\in\mathcal{R}$  は、 $0 < w < 1$  として用いた式 (141) となった。

$$u(k)=(1-w)K[4x(k)\{1-x(k)\}-x(k)] + wK\{x(k-1)-x(k)\} \quad (141)$$

式 (128) の不動点  $x_f$  近傍での線形化システム

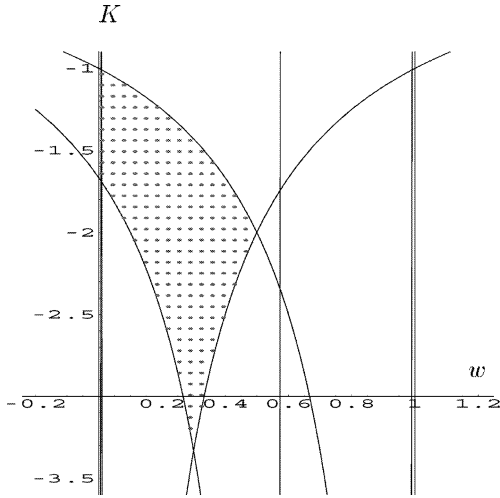


図4 重み  $w$  とゲイン  $K$  の共通範囲 (不動点  $x_f=0$ )

Figure 4 Common domain of  $w$  and  $K$  (fixed point  $x_f=0$ ).

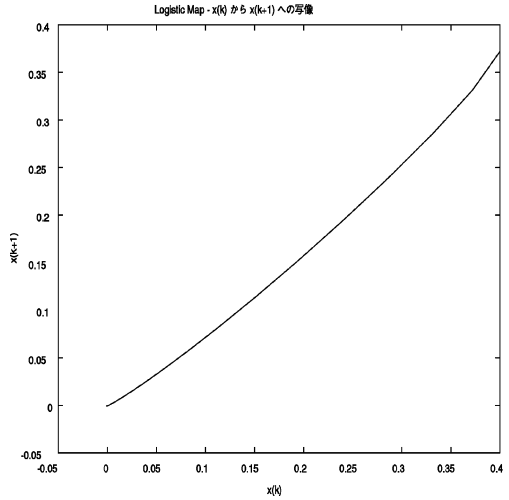


図5 制御過程の写像  $x(k) \rightarrow x(k+1)$  (不動点  $x_f=0$ )

Figure 5 Map  $x(k) \rightarrow x(k+1)$  of control process (fixed point  $x_f=0$ ).

は、式 (142) となった。

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= a \bar{x}(k) + b u(k) \\ &= 4(1-2x_f) \bar{x}(k) + u(k) \quad (142) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{x}(k) = x(k) - x_f$  である。また、式(142)の制御入力  $u(k) \in \mathcal{R}$  は式 (143) となった。

$$\begin{aligned} u(k) &= (1-w)K[4(1-2x_f)\bar{x}(k) - \bar{x}(k)] \\ &\quad + wK[\bar{x}(k-1) - \bar{x}(k)] \quad (143) \end{aligned}$$

### 7.2.1 不動点 $x_f=0$ の安定

式(142), (143)より、誤差ベクトルを式(144)とすると、不動点  $x_f=0$  近傍での拡大線形化システムは式 (145) となった。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k) &= [\bar{x}(k) \quad \bar{x}(k-1)]^T \quad (144) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} 4+(1-w)K(4-1)-wK & wK \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned}$$

式 (145) より、特性多項式  $Z(z, w, K)$  は式 (146) となったので、Jury の安定判別法を適用して重み  $w$  とゲイン  $K$  の条件式を求めると式

(147) となった。

$$\begin{aligned} Z(z, w, K) &= x^2 - \{4 + (3-4w)K\}z - wK \quad (146) \\ &\begin{cases} K < \frac{1}{w-1} \\ K > \frac{1}{w-\frac{3}{5}} \\ 1 > |wK| \end{cases} \quad (147) \end{aligned}$$

式 (147) の条件式を満たす  $w$  と  $K$  の共通範囲を図4の  $w-K$  平面に示す。

図4の領域に属する  $w=0.3$  と  $K=-1.5$  を用いて、状態  $x(k)$  を不動点  $x_f=0$  に安定化した制御過程における  $x(k)$  から  $x(k+1)$  への写像を図5に示す。状態の初期値は  $x(0)=0.4$ 、近傍領域の大きさは  $\varepsilon=0.1$  とした。

### 7.2.2 不動点 $x_f=0.75$ の安定

式(142), (143), (144)より、不動点  $x_f=0.75$  近傍での拡大線形化システムは式 (148) となった。

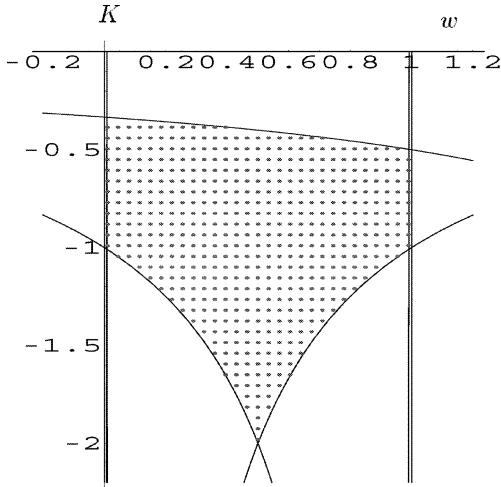


図6 重み $w$ とゲイン $K$ の共通範囲 (不動点 $x_f=0.75$ )  
 Figure 6 Common domain of  $w$  and  $K$  (fixed point  $x_f=0.75$ ).

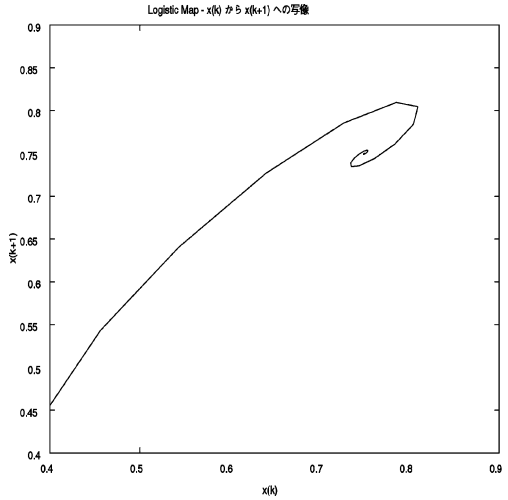


図7 制御過程の写像 $x(k) \rightarrow x(k+1)$  (不動点 $x_f=0.75$ )  
 Figure 7 Map  $x(k) \rightarrow x(k+1)$  of control process (fixed point  $x_f=0.75$ ).

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -2 + (-3 + 2w)K & wK \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(k) \quad (148)$$

式 (148) の特性多項式である式 (149) に Jury の方法を適用すると、 $w$  と  $K$  の条件式は式 (150) となった。

$$Z(z, w, K) = z^2 - \{-2 + (-3 + 2w)K\}z - wK \quad (149)$$

$$\begin{cases} K > \frac{1}{w-1} \\ K < \frac{1}{w-3} \\ 1 > |wK| \end{cases} \quad (150)$$

式 (150) の条件式を満たす  $w$  と  $K$  の共通範囲を図6に示す。

図6の領域に属する  $w=0.4$  と  $K=-1.5$  を用いて、状態  $x(k)$  を不動点  $x_f=0.75$  に安定化した制御過程における写像  $x(k) \rightarrow x(k+1)$  を図7に示す。状態の初期値は  $x(0)=0.4$ 、近傍領域の大きさは  $\epsilon=0.1$  とした。

## 8. おわりに

状態の予測値の誤差に対してロバストな傾向があり、奇数条件の制約を受けない特徴を有するカオス制御系の設計法を提案した。提案手法は、DFC法を応用した入力とPFC法を応用した入力を同時刻に合わせて用いるカオス制御法である。

提案手法が奇数条件の制約を受けないことを解析的に示し、奇数条件によってDFC法では安定化できない不安定周期軌道を安定化できることを数値実験で示した。数値実験ではロジスティック写像を用い、不安定不動点および不安定2周期点を安定化した。制御入力のパラメータをJuryの安定判別法を用いて解析的に求められることを示し、実際に数値実験において設定することで有効性を確認した。そして、提案手法が制御システムのロバスト性において、従来のDFC法とPFC法の両方の特徴を有することを解析的に示した。

参考文献

- [1] 合原一幸 (編著): 応用カオス, サイエンス社 (1994)
- [2] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke: “Controlling Chaos”, *Physical Review Letters*, Vol. 64, No. 11 (1990)
- [3] T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, and J.A. Yorke: “Using Small Perturbations to Control Chaos”, *Nature*, Vol. 363, pp. 411-417 (1993)
- [4] K. Pyragas: “Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback”, *Physics Letters A*, Vol. 170, pp. 421-428 (1992)
- [5] A. Kittel, J. Parisi, and K. Pyragas: “Delayed Feedback Control of Chaos by Self-adapted Delayed Time”, *Physics Letter A*, Vol. 198, pp. 433-436 (1995)
- [6] M.E. Bleich, and J.E.S. Socolar: “Stability of Periodic Orbits Controlled by Time-delayed Feedback”, *Physics Letters A*, Vol. 210, pp. 87-94 (1996)
- [7] 潮 俊光: カオス制御, カオス全書, 第4巻, 朝倉書店 (1996)
- [8] 潮 俊光: 「非線形離散時間システムにおける遅延フィードバックの性質」, 信学A大, pp. 195-196 (1995)
- [9] T. Ushio: “Limitation of Delayed Feedback Control in Nonlinear Discrete-time Systems” *Trans. IEEE on Circ Sys. I*, Vol. 43, pp. 815-816 (1996)
- [10] H. Nakajima and Y. Ueda: “Limitation of Generalized Delayed Feedback Control”, *Physica D*, Vol. 111, pp. 143-150 (1998)
- [11] T. Ushio and S. Yamamoto: “Prediction-based Control of Chaos”, *Physics Letter A*, Vol. 264, pp. 30-35 (1999-12)
- [12] 山本 茂・日野 徹・潮 俊光: 「予測に基づく離散時間カオスシステムの制御」, 電気学会電子・情報・システム部門大会講演論文集, pp. 105-108 (2000)
- [13] 河野通夫: 「周期係数線形離散時間系の固有値設定」, 計測自動制御学会論文集, Vol. 15, No. 2, pp. 186-192 (1979).
- [14] C.L. Phillips & H.T. Nagle Jr.: *Digital Control System Analysis and Design*, Prentice-Hall (1984)