УДК 519.8

МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В. ПАНТЕЛЕЕВ[1], А.Ю. КРЮЧКОВ[1]

[1]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 16-07-00419 А

Рассмотрено применение метаэвристических методов условной глобальной оптимизации: «большого взрыва – большого сжатия», «фейерверков», «взрыва гранат» в задачах оценки параметров динамических моделей, описываемых дифференциально-алгебраическими уравнениями. Оценка параметров производится по результатам наблюдений за поведением математической модели. Их значения находятся в результате минимизации критерия, описывающего суммарное квадратическое отклонение значений координат вектора состояния от полученных при измерениях точных значений в различные моменты времени. На значения параметров наложены ограничения параллелепипедного типа. Применяемые для решения задачи оптимизации метаэвристические методы поиска условного глобального экстремума не гарантируют нахождения результата, но позволяют получать решение достаточно хорошего качества за приемлемое время. Описана стратегия применения метаэвристических методов. Для решения систем дифференциально-алгебраических уравнений наряду с явными методами удобно применять неявные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены два примера решения задачи оценивания параметров, отличающиеся видом математической модели. В первой задаче линейная математическая модель описывает изменение параметров химического процесса, а во второй нелинейная модель описывает процесс хищник-жертва, характеризующий изменение популяции из двух видов. Для каждой из рассмотренных моделей приведены результаты расчетов всеми тремя методами оптимизации, даны рекомендации по выбору параметров методов. Полученные численные результаты продемонстрировали эффективность предложенного подхода. Найденные приближенные значения оцениваемых параметров незначительно отличаются от лучших известных решений, полученных другими способами. Для уточнения полученных результатов рекомендуется применять гибридные алгоритмы, сочетающие классические методы оптимизации нулевого, первого и второго порядков и эвристические процедуры.

Ключевые слова: метаэвристические методы условной оптимизации, динамические системы, оценка параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих прикладных задачах при построении математической модели возникает проблема выбора параметров, которые заранее неизвестны. Если доступны наблюдения за состоянием системы, то проблему нахождения неизвестных параметров можно рассматривать как задачу оптимизации. В результате могут быть получены оценки значений параметров, в общем случае отличающиеся от точных величин.

В данной статье рассматривается проблема оценки параметров в классе динамических моделей [1]. Сложность таких задач заключается в том, что оптимизируемая целевая функция зависит от решения дифференциально-алгебраических уравнений модели. Как правило, на допустимое множество значений параметров наложены ограничения, поэтому требуется найти решение задачи условной оптимизации. Предлагается использовать метаэвристические методы условной глобальной оптимизации: «большого взрыва – большого сжатия», «фейерверков», «взрыва гранат» [2–5].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается модель нелинейной непрерывной динамической системы, описываемая дифференциально-алгебраическими уравнениями

$$f\left(\frac{dx}{dt}, x, \theta\right) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния системы, x_0 – заданное начальное состояние, $t \in [t_0, t_f]$ – заданный промежуток времени функционирования системы, $\theta \in \Theta \subseteq R^p$ – вектор неизвестных параметров модели, подлежащий выбору, Θ – множество возможных значений параметров.

На промежутке времени $t \in [t_0, t_f]$ зададим моменты наблюдений t_μ, $\mu = 1, ..., r$: $t_1, t_2, ..., t_r$. Предполагается, что в эти моменты известна информация об экспериментально полученных результатах наблюдения модели: $z(t_\mu)$, $\mu = 1, ..., r$.

При известном векторе θ параметров модели решение $x(t,\theta)$ системы уравнений (1) позволяет найти оценку $\hat{z}(t_\mu, \theta) = x(t_\mu, \theta)$, $\mu = 1, ..., r$.

Требуется найти такой вектор $\theta^* \in \Theta$, чтобы оценки $\hat{z}(t_\mu, \theta) = x(t_\mu, \theta)$, $\mu = 1, ..., r$ были максимально близки к заданным результатам наблюдения $z(t_\mu)$, $\mu = 1, ..., r$.

Сформулируем задачу условной оптимизации:

– целевая функция:

$$\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{z}_i(t_\mu, \theta) - z_i(t_\mu)\right]^2 = \sum_{\mu=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_\mu, \theta) - z_i(t_\mu)\right]^2 \to \min_{\theta \in \Theta}, \tag{2}$$

– ограничения

$$f\left(\frac{dx}{dt}, x, \theta\right) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \ \ \theta \in \Theta.$$

Для решения систем дифференциально-алгебраических уравнений наряду с явными методами удобно применять неявные методы решения дифференциальных уравнений [6]. Поскольку множество Θ, как правило, задается параллелепипедными ограничениями, для решения поставленной задачи условной оптимизации предлагается применять метаэвристические алгоритмы поиска экстремума [7]. Они не гарантируют нахождения результата, но позволяют получать решение достаточно хорошего качества за приемлемое время. Среди множества метаэвристических алгоритмов выбраны следующие методы: «большого взрыва – большого сжатия», «фейерверков», «взрыва гранат» [2–5].

СТРАТЕГИИ МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Метод «большого взрыва – большого сжатия». Использует в своей работе теорию эволюции вселенной, согласно которой сначала свершился большой взрыв, связанный с распределением частиц и энергии в пространстве, а затем произойдет большое сжатие, когда все частицы сожмутся в одну, расположенную в центре масс вселенной.

В рассматриваемом методе на каждой итерации к некоторому набору частиц (вселенной) последовательно применяются процедуры (фазы) «большого взрыва» и «большого сжатия». Каждая итерация метода осуществляет переход от одного состояния вселенной к другому.

На фазе большого взрыва частицы разбрасываются по всему пространству случайным образом. Интенсивность каждого взрыва определяется параметрами нормального закона распределения и падает с ростом числа итераций. Затем следует процесс большого сжатия, который эквивалентен выбору взвешенного среднего решения из текущей популяции. Более подробное описание дано в [4].

Основные параметры: NP – число частиц в популяции; α – параметр, ограничивающий область поиска; β – параметр влияния «центра масс» и наилучшего решения; $Iter_{\max}$ – максимальное число итераций.

Метод «фейерверков». Во время фейерверка (салюта) облако светящихся осколков будет заполнять окрестность взорвавшегося заряда. В задачах поиска экстремума этот процесс ассоциируется с процедурой локального поиска.

Каждый залп салюта определяет переход от одной итерации поиска к другой (от одного поколения решений к другому). Сначала для реализации первого залпа определяются NP точек (решений) в множестве допустимых решений, называемые «популяцией». В этих точках происходит взрыв, генерирующий определенное количество осколков, разлетающихся от точек взрыва в окрестности некоторого радиуса.

Среди решений, соответствующих точкам взрыва и полученным осколкам, выбирается наилучшее по величине целевой функции.

Остальные решения выбираются из оставшихся случайным образом с вероятностью, определяемой расстоянием до других точек (чем больше суммарное расстояние, тем больше вероятность выбора). Полученные решения определяют точки нового залпа. Процедура поиска заканчивается при достижении заданного числа итераций. Более подробное описание дано в [5].

Основные параметры: $Iter_{\max}$ – максимальное число итераций; NP – число зарядов на каждой итерации; m – параметр, контролирующий число осколков; α, β – параметры ($0<\alpha<\beta<1$), ограничивающие числа осколков снизу и сверху; $A_{\max}$ – максимальная амплитуда взрыва.

Метод «взрыва гранат». В методе реализуются процессы взрыва, в результате которых гранаты разлетаются на шрапнели. Назовем множество гранат «популяцией». Завершение взрыва всех гранат определяет переход от одного поколения решений к другому. Каждая шрапнель повреждает объект в пределах радиуса R_e. Положение, где произошло наибольшее повреждение (значение целевой функции минимальное), считается оптимальным на данной итерации. Этот процесс представляет собой локальный поиск наилучшего положения для гранаты. Одним из важных моментов алгоритма является реализация стратегии «радиус территории агентов». Это означает, что агент (здесь это гранаты) не позволяет другим агентам подойти ближе определенного расстояния R_t. Большое значение R_t позволяет гранатам равномерно исследовать множество допустимых решений. Небольшое значение R_t позволяет гранатам более тщательно исследовать множества допустимых решений. Для определения точек нового взрыва (нового поколения решений) выбирается наилучшее положение среди всех гранат и шрапнелей по величине целевой функции. Процесс прекращается по достижении заданного числа итераций. Более подробное описание дано в [2, 3].

Основные параметры: N_g – число гранат; N_q – число шрапнелей; R_{rd} – коэффициент уменьшения радиуса R_t; $P_{\sin}$ – параметр для нахождения веса m_{OSD} (параметр m_{OSD} определяет направление взрыва); p_{TS} (вероятность территориального поиска) – определяет вероятность, с которой поврежденный объект от шрапнели появляется внутри радиуса взрыва гранаты; $m_{\max}$ – максимальное значение параметра m (параметр m влияет на радиус взрыва); $m_{\min}$ – минимальное значение параметра m; $Iter_{\max}$ – максимальное число итераций.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Этот пример приведен в [1], а более подробно описан в [8]. Математическая модель описывает необратимую реакцию первого порядка, в которой измеряются концентрации x_1, x_2 компонент, а θ_1, θ_2 – коэффициенты скоростей реакции соответственно.

Целевая функция (2) имеет следующий вид:

$$\sum_{\mu=1}^{10}\sum_{i=1}^{2}\left[x_i(t_\mu,\theta)-z_i(t_\mu)\right]^2 \to \min_{\theta\in\Theta}, \tag{4}$$

где ограничения описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = -\theta_1 x_1,\ \ x_1(0)=1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2,\ \ x_2(0)=0,$$

в которой множество Θ задано параллелепипедными ограничениями вида $0 \le \theta_1 \le 10,\ 0 \le \theta_2 \le 10$. Результаты наблюдений за вектором состояния системы представлены в табл. 1.

Таблица 1
Table 1

Результаты наблюдения за вектором состояний системы
Observation results over state vector

μ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$z_1(t_\mu)$	0,606	0,368	0,223	0,135	0,082	0,05	0,03	0,018	0,011	0,007
$z_2(t_\mu)$	0,373	0,564	0,647	0,669	0,656	0,624	0,583	0,539	0,494	0,451

В [1] приведено наилучшее известное решение вместе со значениями параметров: значение целевой функции $1{,}18582\cdot 10^{-6}$; $\theta^* = (5{,}0035; 1{,}0000)^T$. В табл. 2–4 приведены результаты решения этой задачи выбранными метаэвристическими методами.

Таблица 2
Table 2

Результаты решения. Метод «большого взрыва – большого сжатия»
Solution results. "Great explosion-great compression" method

$Iter_{\max}$	NP	α	β	Значение целевой функции	θ_1	θ_2
300	200	0,1	0,9	1,18584701E–06	5,0035	1,0000
500	200	0,1	0,9	1,18585237E–06	5,0035	1,0000
500	200	0,9	0,4	1,18586127E–06	5,0035	1,0000
100	200	0,1	0,6	1,18586540E–06	5,0035	1,0000
500	200	0,1	0,1	1,18587912E–06	5,0035	1,0000

Продолжение таблицы 2

500	100	0,1	0,4	1,18587933E–06	5,0035	1,0000
500	200	0,1	0,4	1,18588507E–06	5,0035	1,0000
500	200	0,1	0,6	1,18589145E–06	5,0035	1,0000

Таблица 3
Table 3

Результаты решения. Метод «фейерверков»
Solution results. "Fireworks" method

$Iter_{\max}$	NP	α	β	m	$A_{\max}$	Значение целевой функции	θ_1	θ_2
500	50	0,1	0,9	40	20	1,55706172E–06	5,0001	1,0000
300	200	0,1	0,9	10	50	1,59918024E–06	5,0019	0,9992
500	100	0,1	0,9	10	20	1,61633791E–06	5,0069	0,9997
300	100	0,1	0,9	40	50	1,93453500E–06	5,0038	0,9989
500	100	0,1	0,9	40	50	2,01638443E–06	5,0045	0,9988
300	200	0,1	0,9	40	50	2,47895752E–06	4,9979	1,0006
500	200	0,1	0,9	40	20	3,34370768E–06	5,0071	0,9983
500	200	0,1	0,9	10	20	3,44248966E–06	5,0058	0,9981

Таблица 4
Table 4

Результаты решения. Метод «взрыва гранат»
Computation results. "Grenade explosion" method

$Iter_{\max}$	N_g	N_q	R_{rd}	p_{ts}	$m_{\min}$	$m_{\max}$	$P_{\sin}$	Значение целевой функции	θ_1	θ_2
100	1	50	100	0,8	0,1	0,9	5	1,18584556E–06	5,0035	1,0000
100	1	50	100	0,8	0,1	0,9	10	1,18585151E–06	5,0035	1,0000
500	1	50	100	0,8	0,1	0,9	5	1,18585765E–06	5,0035	1,0000
300	1	50	100	0,8	0,1	0,9	5	1,18585886E–06	5,0035	1,0000
500	1	50	100	0,8	0,1	0,9	10	1,18586354E–06	5,0035	1,0000
300	1	50	100	0,8	0,1	0,9	10	1,18587290E–06	5,0035	1,0000
100	1	30	100	0,8	0,1	0,9	10	1,18597200E–06	5,0035	1,0000
100	1	30	100	0,8	0,1	0,9	5	1,18650504E–06	5,0035	1,0000

Пример 2. Этот пример приведен в [1], а более подробно описан в [9]. Модель описывает изменения популяции двух биологических видов: «хищника» и «жертвы». Предполагается, что два вида живут изолированно от внешней среды, взаимодействуют только друг с другом, а их численность принимает непрерывное множество значений.

Целевая функция имеет вид (4). Модель системы представлена следующим образом:

$$\frac{dx_1}{dt} = \theta_1 x_1 \left(1 - x_2\right), \quad x_1\left(0\right) = 1,2;$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \theta_2 x_2 \left(x_1 - 1\right), \quad x_2\left(0\right) = 1,1,$$

где $x_1, x_2 -$ численность популяции «жертв» и «хищников», θ_1, $\theta_2 -$ коэффициенты смертности и роста популяций «жертв» и «хищников» (в этом примере они предполагаются равными для каждой из популяций), множество Θ задано параллелепипедными ограничениями вида $0 \le \theta_1 \le 10$, $0 \le \theta_2 \le 10$.

Результаты наблюдений за вектором состояния системы представлены в табл. 5.

Таблица 5
Table 5

Результаты наблюдения за вектором состояния системы
Observation results over a system condition vector

μ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_μ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_1(t_\mu)$	0,799	0,8731	1,2487	1,0362	0,7483	1,0024	1,2816	0,8944	0,7852	1,1527
$z_2(t_\mu)$	1,0758	0,8711	0,9393	1,1468	1,0027	0,8577	1,0274	1,1369	0,9325	0,9074

В [1] представлено лучшее известное решение и значения параметров: значение целевой функции $1,24924 \cdot 10^{-3}$; $\theta^* = (3,2434; 0,9209)^T$.

В табл. 6–8 приведены результаты решения этой задачи выбранными метаэвристическими методами.

Таблица 6
Table 6

Результаты решения. Метод «большого взрыва – большого сжатия»
Solution results. "Big explosion-big compression" method

$Iter_{\max}$	NP	α	β	Значение целевой функции	θ_1	θ_2
100	200	0,9	0,4	1,24923846E–03	3,2436	0,9208
100	200	0,6	0,4	1,24926842E–03	3,2447	0,9205
100	200	0,6	0,6	1,24927945E–03	3,2448	0,9204
100	100	0,6	0,6	1,24931420E–03	3,2451	0,9203
100	200	0,9	0,6	1,24934779E–03	3,2426	0,9211
100	100	0,9	0,6	1,24939701E–03	3,2403	0,9219
100	50	0,6	0,6	1,25202922E–03	3,2348	0,9239
100	100	0,9	0,4	1,25233261E–03	3,2359	0,9236

Таблица 7
Table 7

Результаты решения. Метод «фейерверков»
Solution results. "Fireworks" method

$Iter_{\max}$	NP	α	β	m	$A_{\max}$	Значение целевой функции	θ_1	θ_2
100	100	0,1	0,9	10	20	1,26045557E–03	3,2530	0,9171
100	200	0,1	0,9	40	20	1,31993525E–03	3,1906	0,9389
100	100	0,1	0,9	40	50	1,35434290E–03	3,3313	0,8941
100	200	0,1	0,9	40	50	1,36867361E–03	3,3418	0,8918
100	100	0,1	0,9	40	20	1,62254854E–03	3,2207	0,9331
100	50	0,1	0,9	40	20	1,64780434E–03	3,1360	0,9504
100	200	0,1	0,9	10	50	1,99384165E–03	3,3717	0,8893
100	50	0,1	0,9	40	50	2,31004297E–03	3,1183	0,9689

Таблица 8
Table 8

Результаты расчёта. Метод «взрыва гранат»
Computation results. "Grenade explosion" method

$Iter_{max}$	N_g	N_q	R_{rd}	p_{ts}	m_{min}	m_{max}	P_{sin}	Значение целевой функции	θ_1	θ_2
100	1	50	100	0,8	0,1	0,9	10	1,24923428E–03	3,2436	0,9209
100	1	50	100	0,8	0,1	0,9	5	1,24923905E–03	3,2434	0,9209
100	1	30	100	0,8	0,1	0,9	10	1,24925578E–03	3,2429	0,9210
100	1	30	100	0,8	0,1	0,9	5	1,24929621E–03	3,2457	0,9202
100	1	50	10	0,8	0,1	0,9	10	1,25190838E–03	3,2437	0,9213
100	1	30	10	0,8	0,1	0,9	5	1,25677850E–03	3,2280	0,9250
100	1	30	100	0,4	0,1	0,9	5	1,26036431E–03	3,2634	0,9155
100	1	50	100	0,4	0,1	0,9	5	1,26684251E–03	3,2744	0,9122

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача оценки параметров нелинейных непрерывных динамических систем решена тремя метаэвристическими методами условной глобальной оптимизации. Полученные решения незначительно отличаются от лучшего известного решения. Следует продолжить исследование метаэвристических алгоритмов с целью улучшения результата. Одно из возможных направлений исследований заключается в комбинировании классических и метаэвристических методов оптимизации, т. е. создании гибридных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Floudas C.A., Pardalos P.M., Adjimann C.S., Esposito W.R., Gumus Z.H., Harding S.T., Schweiger C.A. *Handbook of test problems in local and global optimization*, 1999, vol. 67. Springer US, 442 p. URL: https://titan.princeton.edu/TestProblems/ (дата обращения 10.05.2015).

2. Ahrari A., Shariat-Panahi M., Atai A.A. GEM: A novel evolutionary optimization method with improved neighborhood search. *Applied Mathematics and Computation,* 2009, Vol. 210, No. 2, pp. 376–386. URL: https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.01.009 (дата обращения 12.06.2015).

3. Ahrari A., Atai A.A. Grenade Explosion Method – A novel tool for optimization of multimodal functions. *Applied Soft Computing Journal*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 1132–1140. URL: https://doi.org/10.1016/j.asoc.2009.11.032 (дата обращения 30.05.2014).

4. Erol O.K., Eksin I. A new optimization method: Big Bang-Big Crunch. *Advances in Engineering Software*, 2006, vol. 37, no. 2, pp. 106–111. URL: https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2005.04.005 (дата обращения 01.04.2015).

5. Tan Y., Tan Y., Zhu Y. (2015). Fireworks Algorithm for Optimization. *Lecture Notes in Computer Science*, 2015, vol. 6145 (December), pp. 355–364. URL: https://doi.org/10.1007/978–3–642–13495–1 (дата обращения 23.02.2016).

6. Пантелеев А.В., Кудрявцева И.А. Численные методы. Практикум. М.: ИНФРА-М, 2017. 512 с.

7. Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А. Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы. М.: Вузовская книга, 2013. 244 с.

8. Tjoa I.-B., Biegler L.T. Simultaneous solution and optimization strategies for parameter estimation of differential-algebraic equation systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1991, vol. 30, no. 2, pp. 376–385. https://doi.org/10.1021/ie00050a015 (дата обращения 01.12.2015).

9. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование // Успехи физ. наук. 1928. Т. 8, № 1. С. 13–34. https://doi.org/10.3367/UFNr.0008.192801b.0013 (дата обращения 12.09.2015).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Пантелеев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики факультета «Прикладная математика и физика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), avpanteleev@inbox.ru.

Крючков Александр Юрьевич, бакалавр факультета прикладной математики и физики Московского авиационного института (национального исследовательского университета), alex9x99@yandex.ru.

METAHEURISTIC OPTIMIZATION METHODS FOR PARAMETERS ESTIMATION OF DYNAMIC SYSTEMS

Andrei V. Panteleev[1], Alexander U. Kryuchkov[1]
[1]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

ABSTRACT

The article considers the usage of metaheuristic methods of constrained global optimization: “Big Bang - Big Crunch”, “Fireworks Algorithm”, “Grenade Explosion Method” in parameters of dynamic systems estimation, described with algebraic-differential equations. Parameters estimation is based upon the observation results from mathematical model behavior. Their values are derived after criterion minimization, which describes the total squared error of state vector coordinates from the deduced ones with precise values observation at different periods of time. Parallelepiped type restriction is imposed on the parameters values. Used for solving problems, metaheuristic methods of constrained global extremum don’t guarantee the result, but allow to get a solution of a rather good quality in acceptable amount of time. The algorithm of using metaheuristic methods is given. Alongside with the obvious methods for solving algebraic-differential equation systems, it is convenient to use implicit methods for solving ordinary differential equation systems. Two ways of solving the problem of parameters evaluation are given, those parameters differ in their mathematical model. In the first example, a linear mathematical model describes the chemical action parameters change, and in the second one, a nonlinear mathematical model describes predator-prey dynamics, which characterize the changes in both kinds’ population. For each of the observed examples there are calculation results from all the three methods of optimization, there are also some recommendations for how to choose methods parameters. The obtained numerical results have demonstrated the efficiency of the proposed approach. The deduced parameters approximate points slightly differ from the best known solutions, which were deduced differently. To refine the results one should apply hybrid schemes that combine classical methods of optimization of zero, first and second orders and heuristic procedures.

Key words: metaheuristic methods of constrained optimization, dynamic systems, parameters estimation.

REFERENCES

1. Floudas C.A., Pardalos P.M., Adjimann C.S., Esposito W.R., Gumus Z.H., Harding S.T., Schweiger C.A. Handbook of test problems in local and global optimization, 1999, vol. 67, Springer US, 442 p. URL: https://titan.princeton.edu/TestProblems/ (accessed 10.05.2015).

2. Ahrari A., Shariat-Panahi M., Atai A.A. GEM: A novel evolutionary optimization method with improved neighborhood search. Applied Mathematics and Computation, 2009, vol. 210, no. 2, pp. 376–386. URL: https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.01.009 (accessed 12.06.2015).

3. Ahrari A., Atai A.A. Grenade Explosion Method – A novel tool for optimization of multimodal functions. Applied Soft Computing Journal, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 1132–1140. URL: https://doi.org/10.1016/j.asoc.2009.11.032 (accessed 30.05.2014).

4. Erol O.K., Eksin I. A new optimization method: Big Bang-Big Crunch. Advances in Engineering Software, 2006, vol. 37, no. 2, pp. 106–111. URL: https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2005.04.005 (accessed 01.04.2015).

5. Tan Y., Tan Y., Zhu Y. (2015). Fireworks Algorithm for Optimization. Lecture Notes in Computer Science, 2015, vol. 6145 (December), pp. 355–364. URL: https://doi.org/10.1007/978–3–642–13495–1 (accessed 23.02.2016).

6. Panteleev A.V., Kudryavtseva I.A. *Chislennie metody. Practicum* [Numerical methods. Practice]. Moscow, INFRA-M, 2017. 512 p. (in Russian)

7. Panteleev A.V., Metlitskaya D.V., Aleshina E.A. *Metody global'noi optimizatsii. Metaevristicheskie strategii i algoritmy* [Global optimization methods, Metaheuristic strategies and algorithms]. Moscow, Vuzovskaya kniga, 2013. 244 p. (in Russian)

8. Tjoa I.-B., Biegler L. T. Simultaneous solution and optimization strategies for parameter estimation of differential-algebraic equation systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1991, vol. 30, no. 2, pp. 376–385. https://doi.org/10.1021/ie00050a015 (accessed 01.12.2015).

9. Volterra V. *Mathematicheskya teoria borbi za sushesvovanie* [The mathematical theory of the struggle for survival]. *Usp. Fiz. Nauk.* [Successes of physical sciences], 1928, no. 8 (1), pp. 13–34. https://doi.org/10.3367/UFNr.0008.192801b.0013 (accessed 12.09.2015). (In Russian)

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Andrei V. Panteleev, Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Head of Mathematics and Cybernetics Chair, Moscow Aviation Institute (National Research University), avpanteleev@inbox.ru.

Alexander U. Kryuchkov, Bachelor of Applied Mathematics and Physics Chair, Moscow Aviation Institute (National Research University), alex9x99@yandex.ru.