УДК 519.676

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА[1]

К.А. РЫБАКОВ

Статья представлена доктором физико-математических наук, профессором Пантелеевым А.В.

В статье сформулирован новый подход к решению задачи оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа с помощью метода статистических испытаний (метода Монте-Карло). Предполагается, что объект наблюдения и измерительная система описываются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито, причем в уравнении объекта наблюдения присутствует пуассоновская составляющая, которая позволяет моделировать импульсные случайные возмущения и помехи, действующие на систему.

Показано, что задача оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа может быть решена как задача анализа вспомогательной стохастической системы, траектории которой могут получать случайные приращения, разветвляться и обрываться в случайные моменты времени.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, ветвящиеся процессы, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, скачкообразный процесс, стохастическая система, уравнение Дункана-Мортенсена-Закаи, уравнение Стратоновича-Кушнера.

Введение

В настоящей работе развивается подход к решению задачи оптимальной нелинейной фильтрации как задачи анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий. Распределение времени обрывов и ветвлений в этой системе зависит от текущих измерений оцениваемого вектора состояния исходной системы.

Напомним, что в [14; 15; 18] приведены основные соотношения для решения задачи анализа вспомогательной стохастической системы и приведены пошаговые алгоритмы моделирования ее траекторий методом Монте-Карло с последующим получением оценки вектора состояния исходной системы в приложении к стохастическим системам диффузионного типа. Этот подход основан на общности структуры уравнения оптимальной нелинейной фильтрации для ненормированной апостериорной плотности вероятности (уравнение Дункана-Мортенсена-Закаи или просто уравнение Закаи) при фиксированных измерениях и обобщенного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, включающего дополнительные слагаемые – функции поглощения и функции восстановления [4; 11; 19]. Функция поглощения позволяет учитывать обрывы траекторий случайного процесса, которые образуют пуассоновский поток событий с заданной интенсивностью, а функция восстановления отвечает за появление новых траекторий, также образующее пуассоновский поток событий. Различное задание этих функций позволяет рассматривать сложное поведение стохастических систем: обрывы траекторий, разрывы траекторий со связанными и несвязанными условиями восстановления, ветвление траекторий. Они же позволяют описывать процессы в системах со случайной структурой [1; 4; 6].

Апробация разработанных в [14; 18] алгоритмов проводилась на модельных примерах: для линейно-гауссовкого случая эти алгоритмы обеспечивают практически потраекторное совпадение с оптимальной оценкой, получаемой при применении фильтра Калмана-Бьюси. Погрешности обусловлены тем, что и анализ вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий, и фильтрация Калмана-Бьюси проводились приближенно с использованием методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений невысокой

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00323-а).

точности [11] и моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий [1; 5; 10]. Кроме того, апробация проводилась на моделях, заданных нелинейными уравнениями [18].

Далее рассматривается более сложный класс стохастических систем – системы диффузионно-скачкообразного типа, а именно предполагается, что объект наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей. Такие уравнения позволяют описывать как технические, так и экономические модели и процессы, учитывающие случайные воздействия, в том числе импульсные. Основные приложения для подобных систем – задачи радиотехники, навигации, управление движущимися объектами, идентификация параметров моделей в финансовой математике [2; 9; 21; 24]. Теория оптимальной нелинейной фильтрации продолжает активно развиваться [13; 17; 22; 23; 25], однако системы диффузионно-скачкообразного типа рассматриваются гораздо реже, нежели системы диффузионного типа.

В работе показано, что задача оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа может быть решена как задача анализа вспомогательной стохастической системы, траектории которой могут получать случайные приращения, разветвляться и обрываться в случайные моменты времени. Разрывы траекторий обусловлены исходной постановкой задачи и характеризуются заданными параметрами (интенсивностью и величиной скачков), а обрывы и ветвления должны моделироваться на основе текущих измерений оцениваемого вектора состояния. Интенсивности обрывов и ветвлений выражаются через функции, задающие модель измерительной системы, и текущие измерения.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей [2; 3; 16]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in R^n$ – вектор состояния; $t \in T$, $T = [t_0, t_1]$ – отрезок времени функционирования системы; $f(t,x)$: $T \times R^n \to R^n$ – вектор-функция $n \times 1$, $\sigma(t,x)$: $T \times R^n \to R^{n \times s}$ – матричная функция $n \times s$; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0; $Q(t)$ – общий пуассоновский процесс, заданный в форме

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k.$$

В правой части последнего равенства $P(t)$ – пуассоновский процесс; Δ_k – независимые случайные векторы из R^n, распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k, \Delta)$, т.е. вектор состояния X получает случайные приращения в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots \in T$, образующие пуассоновский поток событий

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k. \tag{2}$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k, \Delta \,|\, x)$, характеризующая распределение Δ_k при условии $X(\tau_k - 0) = x$. В частном случае $\psi(\tau_k, \Delta \,|\, x) = \psi(\tau_k, \Delta)$. Наряду с $\psi(\tau_k, \Delta \,|\, x)$ введем плотность вероятности $\eta(\tau_k, x \,|\, \xi)$, характеризующую распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k - 0) = \xi$.

Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$, а также пуассоновский процесс $P(t)$ определяются интенсивностью $\lambda(t,x)$, т.е. условная вероятность события (2) при $X(t) = x$ на промежутке $[t, t + \Delta t]$ определяется равенством

$$\mathrm{P}(t,t+\Delta t)=\Pr(P(t+\Delta t)-P(t)=1\,|\,X(t)=x)=\lambda(t,x)\Delta t+o(\Delta t). \quad (3)$$

Пуассоновская составляющая $dQ(t)$ может быть записана в других формах [3; 7; 8; 19; 24]. Варианты определений решения уравнений типа (1) и возможные условия на его коэффициенты, достаточные для существования решения, изложены в [7].

Модель измерительной системы может быть представлена в одной из следующих форм:

$$dY(t)=c(t,X(t))dt+\zeta(t)dV(t) \quad (4)$$

или

$$Z(t)=c(t,X(t))+\zeta(t)N(t), \quad (5)$$

где $Y,Z\in R^m$ – векторы измерений; $c(t,x)$: $T\times R^n\to R^m$ – вектор-функция $m\times 1$, $\zeta(t)$: $T\to R^{m\times d}$ – матричная функция $m\times d$; $V(t)$ – d-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и от начального состояния X_0, $N(t)$ – d-мерный стандартный гауссовский белый шум, не зависящий от X_0.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений $Y_0^t=\{Y(\tau),\,\tau\in[t_0,t)\}$ или $Z_0^t=\{Z(\tau),\,\tau\in[t_0,t)\}$. Дальнейшие выкладки удобнее проводить для измерений Z_0^t, поэтому измерения Y_0^t использовать не будем. Задачу можно рассматривать шире: как нахождение апостериорной плотности вероятности $p(t,x\,|\,Z_0^t)$ вектора состояния X.

При использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оценивания имеем [19]

$$\hat{X}(t)=\mathrm{M}\left[X(t)\,|\,Z_0^t\right]=\int_{R^n}xp(t,x\,|\,Z_0^t)dx. \quad (6)$$

2. Уравнения для апостериорной плотности вероятности

Апостериорная плотность вероятности $p(t,x\,|\,Z_0^t)$ удовлетворяет уравнению Стратоновича–Кушнера. В форме Ито это уравнение имеет вид [12; 19]

$$\frac{d_0p(t,x\,|\,Z_0^t)}{dt}=\mathsf{K}p(t,x\,|\,Z_0^t)+\mathsf{F}_{Z(t)}p(t,x\,|\,Z_0^t),\quad p(t_0,x)=\varphi_0(x). \quad (7)$$

Здесь операторы K и $\mathsf{F}_{Z(t)}$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\mathsf{K}p(t,x\,|\,Z_0^t)=&-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i(t,x)p(t,x\,|\,Z_0^t)\right]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[g_{ij}(t,x)p(t,x\,|\,Z_0^t)\right]-\\&-\lambda(t,x)p(t,x\,|\,Z_0^t)+\int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)p(t,\xi\,|\,Z_0^t)d\xi;\end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathsf{F}_{Z(t)}p(t,x\,|\,Z_0^t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}\left(c_k(t,x)-\langle c_k(t,x)\rangle\right)q_{kr}(t)\left(Z_r(t)-\langle c_r(t,x)\rangle\right)p(t,x\,|\,Z_0^t),$$

где

$$\langle c_k(t,x)\rangle=\int_{R^n}c_k(t,x)p(t,x\,|\,Z_0^t)dx\quad(k=1,2,\ldots,m);$$

$$g(t,x)=\sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x);\quad q(t)=\left(\zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t)\right)^{-1}.$$

Сделаем замену апостериорной плотности вероятности [19] в уравнении (7):

$$p(t,x\,|\,Z_0^t)=\gamma(t)\varphi(t,x\,|\,Z_0^t);\quad \gamma^{-1}(t)=\int_{R^n}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)dx;\quad \gamma(0)=1,$$

тогда

$$\frac{d_0\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)}{dt} = \mathrm{K}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} c_k(t,x)q_{kr}(t)Z_r(t)\varphi(t,x\,|\,Z_0^t);\quad \varphi(t_0,x)=\varphi_0(x). \tag{9}$$

Запишем уравнение для ненормированной апостериорной плотности вероятности $\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$, которое называется уравнением Дункана–Мортенсена–Закаи, в симметризованной форме Стратоновича. Воспользуемся видом соответствующего уравнения для систем диффузионного типа (без скачкообразной компоненты [11]), т.е. при условии $\mathrm{K}=\mathrm{A}$

$$\mathrm{A}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i(t,x)\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\right].$$

Переход от формы Ито к форме Стратоновича для уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи в случае систем диффузионно-скачкообразного типа осуществляется по тем же правилам, что и для систем диффузионного типа, поэтому [11]:

$$\frac{d_{1/2}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)}{dt} = \mathrm{K}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) + \mu(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t);\quad \varphi(t_0,x)=\varphi_0(x), \tag{10}$$

где K – линейный оператор, определенный соотношением (8), а $\mu(t,x,z)$ задается выражением

$$\mu(t,x,z) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} c_k(t,x)q_{kr}(t)\left(z_r - \frac{c_r(t,x)}{2}\right).$$

Отметим, что уравнения (9) и (10) – линейные стохастические дифференциальные уравнения в частных производных.

3. Сведение к задаче анализа систем с обрывами и ветвлениями траекторий

Далее будем представлять уравнение (10) следующим образом (как детерминированное уравнение при фиксированных измерениях Z_0^t):

$$\frac{\partial\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)}{\partial t} = \mathrm{K}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) - \mu^-(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) + \mu^+(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$$

или

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)}{\partial t} &= \mathrm{A}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) - \lambda(t,x)\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) + \int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\varphi(t,\xi\,|\,Z_0^t)d\xi - \\ &-\mu^-(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) + \mu^+(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t),\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\mu^-(t,x,z) = \begin{cases}-\mu(t,x,z), & \mu(t,x,z)<0,\\ 0, & \mu(t,x,z)\ge 0,\end{cases}\qquad \mu^+(t,x,z) = \begin{cases}\mu(t,x,z), & \mu(t,x,z)>0,\\ 0, & \mu(t,x,z)\le 0.\end{cases}$$

Уравнение (11) по структуре соответствует обобщенному уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова, при этом функции $\mu^-(t,X(t),Z(t))$ и $\mu^+(t,X(t),Z(t))$ – интенсивности обрывов и ветвлений траекторий случайного процесса $X(t)$, а произведения $\mu^-(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$ и $\mu^+(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$ – функции поглощения и восстановления соответственно [4; 6]. Следовательно, условные вероятности обрывов и ветвлений при $X(t)=x$ и $Z(t)=z$ на промежутке $[t,t+\Delta t]$ определяются равенствами:

$$\mathrm{P}^-(t,t+\Delta t) = \mu^-(t,x,z)\Delta t + o(\Delta t);\quad \mathrm{P}^+(t,t+\Delta t) = \mu^+(t,x,z)\Delta t + o(\Delta t).$$

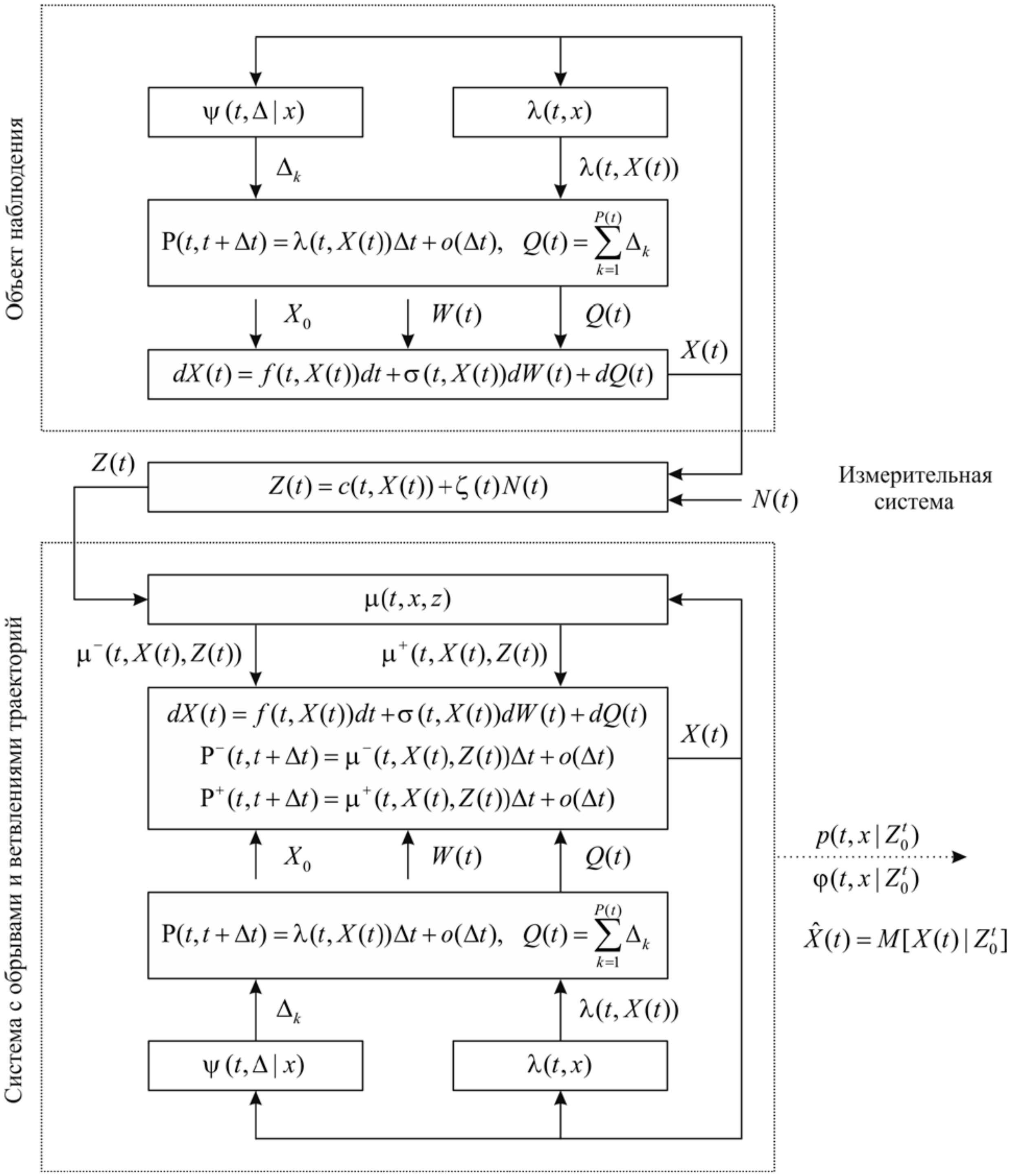

Рис. 1. Структурная схема системы наблюдения и оптимального фильтра

Таким образом, функции $p(t,x\,|\,Z_0^t)$ и $\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$ характеризуют распределение вектора X – состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), с учетом того, что траектории случайного процесса $X(t)$ получают случайные приращения, ветвятся или обрываются. Все перечисленные события образуют неоднородные пуассоновские потоки с известными интенсивностями, при ветвлении в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь, при обрыве прекращается моделирование только одной ветви. Для удобства моделирования, как и в случае стохастических систем диффузионного типа [14; 15; 18], каждая из новых ветвей должна рассматриваться как самостоятельная траектория.

Для приближенного решения задачи оптимальной фильтрации необходимо моделировать траектории вспомогательной стохастической системы, отличающейся от исходной модели наблюдения (1) наличием обрывов и ветвлений траекторий. По ансамблю траекторий, полученному в результате применения методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений и моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий [1-3; 5; 8; 10; 11], можно оценить как нормированную апостериорную плотность вероятности $p(t,x\,|\,Z_0^t)$, так и ненормированную $\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$, получив таким образом приближенные решения уравнений Стратоновича-Кушнера и Дункана-Мортенсена-Закаи. Оптимальная оценка $\hat{X}(t)$ может быть найдена и по апостериорной плотности вероятности, и с помощью усреднения по ансамблю траекторий. Структурная схема системы наблюдения и оптимального фильтра приведена на рис. 1.

Чтобы сформировать алгоритм решения задачи оптимальной фильтрации, можно воспользоваться результатами работ [14; 15] и алгоритмами численного решения стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей [1-3; 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аверина Т.А.** Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Сибирский журнал вычислительной математики. - 2013. - Т. 16. - № 2. - С. 97–105.
2. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Новые методы анализа воздействия пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Журнал радиоэлектроники. - 2013. - № 1. [Электронный ресурс]. URL: http://jre.cplire.ru/jre/contents.html.
3. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. - 2013. - № 3. - С. 85–116. [Электронный ресурс]. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal.
4. **Артемьев В.М.** Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. - Минск: Вышэйшая школа, 1979.
5. **Ермаков С.М.** Метод Монте-Карло и смежные вопросы. - М.: Наука, 1971.
6. **Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А**. Анализ систем случайной структуры. - М.: Физматлит, 1993.
7. **Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.** Справочник по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Наука, 1985.
8. **Кузнецов Д.Ф.** Новые представления явных одношаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2001. - Т. 41. - № 6. - С. 922–937.
9. Марковская теория оценивания в радиотехнике / под ред. М.С. Ярлыкова. - М.: Радиотехника, 2004.
10. **Михайлов Г.А., Аверина Т.А.** Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. - 2009. - Т. 428. - № 2. - С. 163–165.
11. **Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С.** Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. - М.: Вузовская книга, 2008.
12. **Параев Ю.И.** Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. - М.: Советское радио, 1976.
13. **Руденко Е.А.** Оптимальная структура непрерывного нелинейного фильтра Пугачева пониженного порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2013. - № 6. - С. 25–51.
14. **Рыбаков К.А.** Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. - 2012. - № 3. - С. 91–110. [Электронный ресурс]. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal.
15. **Рыбаков К.А**. Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Авиакосмическое приборостроение. - 2013. - № 3. - С. 15–20.
16. **Рыбаков К.А.** Вероятностный анализ стохастических систем с пуассоновской составляющей // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - №194. - С. 55–62.
17. **Рыбаков К.А.** Решение робастного уравнения Дункана Мортенсена Закаи спектральным методом // Системи обробки інформації. - 2013. - Вып. 7 (114). - С. 139–143.

18. Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // Сибирский журнал вычислительной математики. - 2013. - Т. 16. - № 4. - С. 377–391.

19. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. - М.: Логос, 2007.

20. Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов / под ред. М.Н. Красильщикова, Г.Г. Себрякова. - М.: Физматлит, 2009.

21. Шахтарин Б.И., Микаэльян С.В. Траекторный фильтр в системе координат измерителя для системы слежения за целями по угломерным данным // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - № 193. - С. 21–25.

22. Candy J.V. Bayesian Signal Processing: Classical, Modern and Particle Filtering Methods. - John Wiley & Sons, 2009.

23. Luo X., Yau S.S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory // IEEE Transactions on Automatic Control. - 2013. V. 58. № 10. - P. 2563–2578.

24. Situ R. Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications. - Springer, 2005.

25. Terejanu G., Singla P., Singh T., Scott P.D. Adaptive Gaussian sum filter for nonlinear Bayesian estimation // IEEE Transactions on Automatic Control. - 2011. V. 56. № 9. - P. 2151–2156.

APPROXIMATE FILTER FOR JUMP-DIFFUSION MODELS

Rybakov K.A.

A new approach to the optimal filtering problem for jump-diffusion models is considered in this paper. This approach is based on the statistical modeling method (Monte Carlo method). It is assumed that the observation object and measurement system are described by Itô stochastic differential equations, the observation object equation has compound Poisson component, which allows simulating impulse noises and perturbations for control system.

These results have shown that the optimal filtering problem for jump-diffusion models can be solved as an analysis problem for the special stochastic system with jumps, branching and terminating trajectories.

Key words: branching processes, conditional density, Duncan-Mortensen-Zakai equation, jump-diffusion, Kushner-Stratonovich equation, Monte Carlo method, optimal filtering problem, stochastic system.

Сведения об авторе

Рыбаков Константин Александрович, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики МАИ, автор 100 научных работ, область научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления, методы моделирования систем управления.