Научный Вестник МГТУ ГА | Том 21, № 02, 2018
Civil Aviation High Technologies | Vol. 21, No. 02, 2018

УДК 519.217.4 + 519.218.23
DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-32-39

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В НЕПРЕРЫВНОМ ФИЛЬТРЕ ЧАСТИЦ

К.А. РЫБАКОВ[1]

[1]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 17-08-00530 А

В статье показана связь между фильтрами, основанными на моделировании траекторий случайного процесса с обрывами и ветвлениями, и непрерывным фильтром частиц, которые относятся к последовательным методам Монте-Карло. Даются различные варианты вычисления весовых коэффициентов в фильтре частиц для стохастических систем с непрерывным временем, т. е. стохастических систем диффузионного типа. Наряду с представлением непрерывной функцией показана возможность представления траектории весовой функции кусочно-постоянной функцией с действительными неотрицательными значениями, а также кусочно-постоянной функцией с целыми неотрицательными значениями. В основе такого представления лежит моделирование траекторий общего пуассоновского процесса. Указана связь с дифференциальным уравнением для весовой функции. Все приведенные варианты вычисления весовых коэффициентов в фильтре частиц не требуют сложной программной реализации, они подходят при разработке программного обеспечения для фильтров частиц с применением различных технологий параллельного программирования для высокопроизводительных вычислительных систем.
Рассмотренный в статье непрерывный фильтр частиц может применяться в различных прикладных задачах оценивания. Например, в задачах слежения за движущимся объектом, восстановления траектории движения по косвенным наблюдениям, выделения полезного сигнала на фоне помех, идентификации параметров динамических систем и многих других задачах. В дальнейшем планируется расширить применение фильтра частиц для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа. Кроме того, планируется сформировать алгоритмы прогнозирования состояний непрерывных стохастических систем как диффузионного, так и диффузионно-скачкообразного типа на основе рассмотренных вариантов вычисления весовых коэффициентов в фильтре частиц.

Ключевые слова: весовой коэффициент, ветвящийся процесс, метод Монте-Карло, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, случайный процесс, стохастическая система, фильтр частиц.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время для решения прикладных задач оценивания состояний динамических систем все чаще применяются фильтры частиц. В основном это относится к дискретным фильтрам, в меньшей степени – к непрерывным. Фильтры частиц (как дискретные, так и непрерывные) основаны на моделировании ансамбля траекторий дискретной или непрерывной динамической системы. Для каждой траектории дополнительно моделируются весовые коэффициенты, и по результатам моделирования траекторий и этих весовых коэффициентов формируется оптимальная оценка состояния динамической системы, т. е. решается задача оптимальной фильтрации.

В качестве приложений укажем задачи слежения за движущимся объектом, восстановление траектории движения по косвенным наблюдениям, выделение полезного сигнала на фоне помех, идентификацию параметров динамических систем [1, 2].

В работах [3, 4] был предложен метод решения задачи оптимальной фильтрации для непрерывных динамических систем, который основан на моделировании ансамбля траекторий системы с дополнительными условиями: обрывами и ветвлениями этих траекторий. Цель представленной работы состоит в том, чтобы установить связь между фильтрами, основанными на моделировании траекторий случайного процесса с обрывами и ветвлениями, и непрерывным фильтром частиц. В работе описываются различные способы вычисления весовых коэффициентов, которые заменяют обрывы и ветвления траекторий. По сравнению со способами вычисления весовых коэффициентов, изложенными в монографии [5], здесь приводятся некоторые новые варианты. Аналогичная методика может применяться и в задачах прогнозирования [6].

ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ

Пусть случайный процесс $[X^{\mathrm{T}}(t)\;\; Y^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$, где $t \in [t_0, T]$, $X \in R^n$, $Y \in R^m$, представляет собой решение системы уравнений

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) – стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито (уравнение объекта наблюдения, уравнение состояния), в нем $f(t,x)$: $T \times R^n \to R^n$ и $\sigma(t,x)$: $T \times R^n \to R^{ns}$ – заданные векторная и матричная функции, $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс. Начальное состояние X_0 детерминировано или случайно (с известным распределением). Уравнение (2) – стохастическое дифференциальное уравнение (уравнение измерительной системы, уравнение измерений), в этом уравнении $c(t,x)$: $T \times R^n \to R^m$ и $\zeta(t)$: $T \to R^{md}$ – заданные векторная и матричная функции, $V(t)$ – d-мерный стандартный винеровский процесс. Процессы $W(t)$, $V(t)$ и начальное состояние X_0 независимы.

Наряду с уравнением (2) запишем эквивалентное уравнение измерительной системы

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \tag{3}$$

в котором $Z \in R^m$, $N(t)$ – d-мерный стандартный гауссовский белый шум.

Задача оптимальной фильтрации [1, 2, 5, 7] состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ траектории случайного процесса $X(t)$ по результатам измерений $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$ или $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$ в соответствии с заданным критерием оптимальности. В частности, оценка $\hat{X}(t) = \mathrm{M}[X(t) \,|\, Y_0^t]$ является оптимальной в смысле критерия минимума среднего квадрата ошибки (M означает математическое ожидание).

ФИЛЬТРАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА

Определим функцию $\mu(t,x,z)$:

$$\mu(t,x,z) = c^{\mathrm{T}}(t,x)q(t)\left(z - \frac{1}{2}c(t,x)\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} c_k(t,x)q_{kr}(t)\left(z_r - \frac{c_r(t,x)}{2}\right),$$

где $q_{kr}(t)$ – элементы обратной матрицы $q(t) = (\zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$.

В работах [3–5] показано, что эту функцию можно рассматривать как интенсивность пуассоновского потока обрывов и ветвлений траекторий случайного процесса $X(t)$ с учетом измерений $Z(t)$. Моделирование такого ветвящегося процесса позволяет решить задачу оптимальной фильтрации. Оптимальная оценка в смысле критерия минимума среднего квадрата ошибки – это среднее по реализациям такого ветвящегося процесса (по всем ветвям каждой выборочной траектории). Приближенное моделирование траекторий такого процесса довольно просто, а именно моделируются траектории случайного процесса согласно уравнению (1) при использовании любого подходящего метода численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Кроме того, моделируются моменты времени, в которые эти траектории обрываются или разветвляются. После момента обрыва моделирование траектории прекращается, а после момента ветвления появляется новая траектория.

Интенсивности обрывов и ветвлений управляются измерениями $Z(t)$. Так, интенсивность обрывов определяется функцией $\mu^{-}(t, X(t), Z(t))$, а интенсивность ветвлений – функцией $\mu^{+}(t, X(t), Z(t))$, где

$$\mu^{-}(t,x,z) = \begin{cases} -\mu(t,x,z), & \mu(t,x,z) < 0, \\ 0, & \mu(t,x,z) \geq 0, \end{cases} \qquad \mu^{+}(t,x,z) = \begin{cases} \mu(t,x,z), & \mu(t,x,z) > 0, \\ 0, & \mu(t,x,z) \leq 0, \end{cases}$$

т. е. $\mu(t,x,z) = -\mu^{-}(t,x,z) + \mu^{+}(t,x,z)$.

Можно предложить два подхода к моделированию. Первый из них основан на точном моделировании пуассоновского потока обрывов и ветвлений, при котором, вообще говоря, узлы сетки для численного решения стохастического дифференциального уравнения (1) и моменты времени обрывов и ветвлений функционально не связаны между собой, но связаны статистически. Это приводит к необходимости дополнения сетки моментами времени, в которые могут происходить обрывы и ветвления траекторий, т. е. усложняется моделирование траекторий решения уравнения (1). При использовании второго подхода пуассоновский поток моделируется неточно, но узлы сетки для численного решения стохастического дифференциального уравнения (1) являются и моментами времени, в которые могут происходить обрывы и ветвления траекторий.

ФИЛЬТРАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим решение задачи фильтрации стохастических систем методом частиц. Под частицей будем понимать упорядоченную пару, которая состоит из n-мерного вектора X, характеризующего положение в фазовом пространстве, и скалярной неотрицательной величины ω, определяющей вес. Такая терминология берет начало из статистической физики, она связана с описанием движения частиц [8]. При решении задачи фильтрации такой метод называется фильтром частиц.

Каждой траектории случайного процесса $X(t)$, описываемого уравнением (1), ставится в соответствие весовая функция. Значение этой весовой функции в начальный момент времени t_0 равно единице, а далее с течением времени значение весовой функции уменьшается при ненулевой вероятности обрыва и увеличивается при ненулевой вероятности ветвления, при этом обрывы и ветвления траекторий случайного процесса $X(t)$ не происходят. В предельных случаях весовая функция должна принять нулевое значение вместо обрыва траектории, а вместо ветвления траектории значение весовой функции должно удвоиться.

Введем обозначение $\omega(t)$ для случайного процесса, каждая траектория которого является весовой функцией для некоторой траектории случайного процесса $X(t)$, $\omega(t_0) = 1$. Таким образом, поведение частицы – это выборочная траектория пары $(X(t), \omega(t))$. Оптимальная оценка в смысле критерия минимума среднего квадрата ошибки – это взвешенное среднее по реализациям случайного процесса $X(t)$:

$$\hat{X}(t) = \frac{M[\omega(t) X(t)]}{M[\omega(t)]}.$$

Траектории движения частицы определяются заданными вектором сноса $f(t,x)$ и матрицей диффузии $g(t,x) = \sigma^{\mathrm{T}}(t,x)\,\sigma(t,x)$, т. е. уравнением (1), а изменение веса характеризуется функцией

$$\mu(t,x,z) = -\mu^{-}(t,x,z) + \mu^{+}(t,x,z).$$

Отрицательные значения этой функции определяют интенсивность уменьшения значения весовой функции, а положительные – интенсивность роста. Измерения $Z(t)$ управляют траекториями случайного процесса $\omega(t)$.

При применении методики приближенного моделирования траекторий с обрывами и ветвлениями на основе метода «максимального сечения» [9, 10], или метода прореживания пуассоновского потока, моменты времени τ_k, в которые могут реализоваться события пуассоновского потока (обрывы или ветвления), определяются с помощью моделирования случайных величин $\Delta\tau_k$, имеющих показательное распределение с параметром μ^*. Величина μ^* определяется условием $|\mu(t)| \le \mu^*$, $t \in [t_0, T]$, т. е. $\tau_0 = t_0$, $\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta\tau_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Напомним, что необходимо получить реализацию случайной величины α, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, и проверить условие $\alpha \le |\mu(\tau_k)| \,/\, \mu^*$, где $\mu(t) = \mu(t, X(t), Z(t))$ задает значения функции $\mu(t,x,z)$ на траектории случайного процесса $X(t)$ с учетом измерений $Z(t)$ оцениваемой траектории. Если оно выполнено, то при $\mu(\tau_k) < 0$ реализуется обрыв, а при $\mu(\tau_k) > 0$ – ветвление. Вероятность реализации события пуассоновского потока задается отношением $|\mu(\tau_k)| \,/\, \mu^*$, эта вероятность может быть использована для изменения весового коэффициента в момент времени τ_k:

$$\omega(\tau_k) = \omega(\tau_k - 0)\left(1 + \frac{\mu(\tau_k)}{\mu^*}\right). \tag{4}$$

Таким образом, при $\mu(\tau_k) < 0$ значение весовой функции уменьшается на долю, равную вероятности обрыва, а при $\mu(\tau_k) > 0$ – увеличивается на долю, равную вероятности ветвления. В предельных случаях значение весовой функции соответственно обнуляется либо удваивается. Этот предельный случай можно реализовать в виде алгоритма, в основе которого лежит метод «максимального сечения», а именно при условии $\alpha \le |\mu(\tau_k)| \,/\, \mu^*$ и $\mu(\tau_k) < 0$ полагается $\omega(\tau_k) = 0$, т. е. значение весовой функции обнуляется. При условии $\alpha \le |\mu(\tau_k)| \,/\, \mu^*$ и $\mu(\tau_k) > 0$ полагается $\omega(\tau_k) = 2\,\omega(\tau_k - 0)$, т. е. значение весовой функции удваивается.

И в первом, и во втором случае весовые функции – это траектории общего пуассоновского процесса интенсивности $\mu(t)$ и μ^* (кусочно-постоянная траектория с точками разрыва, которые являются точками пуассоновского потока заданной интенсивности). Отличие состоит в том, что в первом случае траектория такого процесса – это кусочно-постоянная функция с действительными неотрицательными значениями, а во втором случае – с целыми неотрицательными значениями.

Если брать за основу методику приближенного моделирования траекторий с обрывами и ветвлениями, при применении которой обрывы и ветвления траекторий случайного процесса $X(t)$ происходят только в узлах сетки $\{t_k\}$, то вероятность появления события пуассоновского потока задается выражением $|\mu(t_k)|\,h$ для каждого момента времени t_k (здесь для простоты считается, что сетка для численного решения стохастического дифференциального уравнения (1) имеет постоянный шаг h, и предполагается выполнение неравенства $|\mu(t)|\,h < 1$ или даже $|\mu(t)|\,h \ll 1$, $t \in [t_0, T]$). Эта вероятность также может быть использована для изменения весового коэффициента:

$$\omega(t_{k+1}) = \omega(t_{k+1} - 0)\big(1 + \mu(t_k)h\big). \tag{5}$$

Аналогично подходу, рассмотренному выше, значение весовой функции может уменьшаться или увеличиваться, но только в узлах сетки $\{t_k\}$. Доля такого уменьшения или увеличения равна вероятности обрыва или ветвления соответственно, а в предельном случае также происходит обнуление или удвоение значения весовой функции. Предельный случай предполагает, что скачкообразное изменение весовой функции происходит не в каждом узле t_k, а только при условии $\alpha \le |\mu(t_k)|\,h$, где α, как и ранее, – это реализация случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0,1)$. Тогда при условии $\alpha \le |\mu(t_k)|\,/\,\mu^*$ и $\mu(t_k) < 0$ полагается $\omega(t_{k+1}) = 0$, т. е. значение весовой функции обнуляется. При условии $\alpha \le |\mu(t_k)|\,h$ и $\mu(t_k) > 0$ полагается $\omega(t_{k+1}) = 2\,\omega(t_{k+1} - 0)$, т. е. значение весовой функции удваивается. Здесь также весовая функция – это кусочно-постоянная функция либо с действительными, либо с целыми неотрицательными значениями.

Недостатком описанных вариантов расчета весовых коэффициентов может служить сложность оценки мажоранты μ^* и, как следствие, подбор шага h для численного решения уравнения (1), обеспечивающего условие $|\mu(t)|\,h < 1$ или $|\mu(t)|\,h \ll 1$. Избежать этого можно, вычисляя вероятности реализации событий пуассоновского потока в моменты времени t_k по определению функции распределения, а именно вместо $|\mu(t_k)|\,h$, используя соотношение

$$1 - \mathrm{e}^{-\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\mu(\tau)| d\tau},$$

или приближенно $1 - \mathrm{e}^{-|\mu(t_k)|h}$, если интеграл вычисляется методом прямоугольников.

Второй недостаток свойственен варианту вычисления весовых коэффициентов, предполагающему целочисленность их значений. Проблемой является обнуление значения весовой функции: при обнулении веса частица более не вносит вклада в оценку вектора состояния объекта наблюдения, дальнейшее моделирование ее траектории не имеет смысла. Однако такие частицы можно заменить частицами с максимальным весом. Тогда вместо пары частиц с координатами X_1, X_2 и соответствующими весами $\omega_1 = 0$, $\omega_2 \ne 0$ используются частицы с координатами X_2, X_2 с весами $\beta\,\omega_2$, $(1-\beta)\,\omega_2$, где $\beta \in (0,1)$ (величину β можно выбрать из условия целочисленности новых весов $\beta\,\omega_2$ и $(1-\beta)\,\omega_2$). Такой подход часто используется в фильтрах частиц для стохастических систем как с дискретным, так и с непрерывным временем. Он наиболее близок к фильтрам, основанным на моделировании траекторий случайного процесса с обрывами и ветвлениями.

СВЯЗЬ С НЕПРЕРЫВНЫМ ФИЛЬТРОМ ЧАСТИЦ

Рассмотрим непрерывный фильтр частиц и покажем связь соотношений, которые для него используются, и соотношения (5), приведенного в предыдущем разделе. Определим случайный процесс $\omega(t)$ следующим образом [7, 11, 12]:

$$\omega(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} c^{\mathrm{T}}(\tau, X(\tau)) q(\tau) dY(\tau) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} c^{\mathrm{T}}(\tau, X(\tau)) q(\tau) c(\tau, X(\tau)) d\tau},$$

что с учетом введенной ранее функции $\mu(t,x,z)$ и связи $\dot{Y}(t) = Z(t)$ можно формально переписать в виде

$$\omega(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \mu(\tau, X(\tau), Z(\tau)) d\tau}.$$

Тогда, используя простейший метод численного интегрирования – метод прямоугольников, запишем приближенный вариант последней формулы:

$$\omega(t_{k+1}) = \omega(t_k)e^{\mu(t_k)h} \quad (6)$$

при начальном условии $\omega(t_0) = 1$. Если дополнительно применить разложение показательной функции в ряд Тейлора в окрестности нуля и ограничиться членами разложения не выше первого порядка, то получим

$$\omega(t_{k+1}) = \omega(t_k)\big(1 + \mu(t_k)h\big),$$

что, в свою очередь, соответствует численной схеме метода Эйлера [13] для линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка $\dot{\omega}(t) = \omega(t)\mu(t)$. В пределе при $h \to 0$ результаты вычислений по формулам (5) и (6) должны совпадать. Отметим, что подход к решению задачи оптимальной фильтрации для непрерывных стохастических систем с помощью моделирования траекторий системы и соответствующих весовых коэффициентов был предложен в статье [14] еще до того, как подобные методы стали называть фильтрами частиц. Там же приведено дифференциальное уравнение $\dot{\omega}(t) = \omega(t)\mu(t)$. Остальные варианты вычисления весовых коэффициентов из предыдущего раздела дают тот же предельный результат, поскольку моделируются траектории одного и того же общего пуассоновского процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Т. 1. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2010.

2. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Т. 2. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2012.

3. Рыбаков К.А. Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Авиакосмическое приборостроение. 2013. № 3. С. 15–20.

4. Рыбаков К.А. Модифицированные статистические алгоритмы фильтрации и прогнозирования в непрерывных стохастических системах // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. № 2 (46). С. 155–162.

5. Рыбаков К.А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017.

6. Рыбаков К.А. Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 1. С. 25–38.

7. Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. Springer, 2009.

8. Del Moral P. Feynman-Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications. Springer, 2004.

9. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Издательский центр «Академия», 2006.

10. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Статистическое моделирование неоднородных случайных функций на основе пуассоновских точечных полей // Доклады АН. 2010. Т. 434, № 1. С. 29–32.

11. Davis M.H.A. A pathwise solution of the equations of nonlinear filtering // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27, No. 1. Pp. 160–167.

12. Crisan D. Exact rates of convergence for a branching particle approximation to the solution of the Zakai equation // The Annals of Probability. 2003. Vol. 31, No. 2. Pp. 693–718.

13. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум. М.: ИНФРА-М, 2016.

14. Зарицкий В.С., Светник В.Б., Шимелевич Л.И. Метод Монте-Карло в задачах оптимальной обработки информации // Автоматика и телемеханика. 1975. № 12. С. 95–103.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Рыбаков Константин Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (национального исследовательского университета), rkoffice@mail.ru.

CALCULATION OF WEIGHT COEFFICIENTS IN CONTINUOUS PARTICLE FILTER

Konstantin A. Rybakov[1]
[1]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

The study was conducted with support of Russian Foundation for Basic Research (RFBR) grant № 17-08-00530 A

ABSTRACT

This article shows the relationship between filters based on modeling of the random process paths with terminating and branching and a continuous particle filter that are related to sequential Monte Carlo methods. Different variants for calculation of weight coefficients in the particle filter for stochastic continuous systems (stochastic diffusion systems) are given. Along with the representation by a continuous function, it is shown that the path of the weight function can be presented by a piecewise constant function with nonnegative real values and also by a piecewise constant function with nonnegative integer values. This representation is based on paths modeling of the general Poisson process. The relation with the differential equation for the weight function is indicated. All the given variants for weight coefficients calculation in the particle filter do not require a complex software development, they are suitable for the particle filter software using various parallel programming technologies for high-performance computing systems. The continuous particle filter considered in this paper can be used in various applied estimation tasks, for example, tracking applications, restoring the motion trajectory from observations, restoring a signal from the noise, identifying the dynamic system parameters, and many others. In the future, it is planned to expand the use of the particle filter for stochastic jump-diffusion systems. In addition, it is planned to develop algorithms for predicting the states of stochastic diffusion and jump-diffusion systems based on the calculation of weight coefficients in the particle filter considered in this article.

Key words: weight coefficient, branching process, Monte Carlo method, statistical modeling, optimal filtering problem, random process, stochastic system, particle filter.

EFERENCES

1. Stepanov O.A. *Osnovy teorii otsenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigatsionnoi informatsii* [Fundamentals of the Estimation Theory with Applications to the Problems of Navigation Information Processing]. Vol. 1. St. Petersburg: "CSRI Elektropribor", 2010. (in Russian)

2. Stepanov O.A. *Osnovy teorii otsenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigatsionnoi informatsii* [Fundamentals of the Estimation Theory with Applications to the Problems of Navigation Information Processing]. Vol. 2. St. Petersburg"CSRI Elektropribor", 2012. (in Russian)

3. Rybakov K.A. *Modifitsirovannyy algoritm optimalnoy filtratsii signalov na osnove modelirovaniya spetsialnogo vetvyashchegosya protsessa* [Modified Algorithm for Optimal Signal Filtering Based on Modeling Special Branching Process]. *Aviakosmicheskoe priborostroenie* [Aerospace Instrument-Making], 2013, no. 3, pp. 15–20. (in Russian)

4. Rybakov K.A. *Modifitsirovannye statisticheskie algoritmy filtratsii i prognozirovaniya v nepreryvnykh stokhasticheskikh sistemakh* [Modified statistical algorithms for filtering and extrapolation in continuous-time stochastic systems]. *Izvestiya Instituta matematiki i informatiki UdGU* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University], 2015, no. 2 (46), pp. 155–162. (in Russian)

5. Rybakov K.A. *Statisticheskie metody analiza i filtratcii v nepreryvnykh stokhasticheskikh sistemakh* [Statistical Methods of Analysis and Filtering for Continuous Stochastic Systems]. Moscow, MAI Publ.house, 2017. (in Russian)

6. Rybakov K.A. *Algoritmy prognozirovaniya sostoyaniy v stokhasticheskikh differentsialnykh sistemakh na osnove modelirovaniya spetsialnogo vetvyashchegosya protsessa* [Extrapolation algorithms for stochastic differential systems based on modeling special branching process.] *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya* [Differential Equations and Control Processes.] 2015, no. 1, pp. 25–38. (in Russian)

7. Bain A., Crisan D. *Fundamentals of Stochastic Filtering*. Springer, 2009.

8. Del Moral P. Feynman-Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications. Springer, 2004.

9. Mikhailov G.A., Voitishek A.V. *Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo* [Numerical Statistical Modeling. Monte-Carlo Methods]. Moscow: “Akademiya” Publ.centre, 2006. (in Russian)

10. Mikhailov G.A., Averina T.A. Statistical modeling of inhomogeneous random functions on the basis of Poisson point fields. Doklady Mathematics, RAS Reports, 2010, vol. 434, no. 1, pp. 29–32.

11. Davis M.H.A. A pathwise solution of the equations of nonlinear filtering. Theory of Probability and its Applications, 1982, vol. 27, no. 1, pp. 167–175.

12. Crisan D. Exact rates of convergence for a branching particle approximation to the solution of the Zakai equation. The Annals of Probability, 2003, vol. 31, no. 2, pp. 693–718.

13. Panteleev A.V., Yakimova A.S., Rybakov K.A. *Obyknovennye differentsialnye uravneniya. Praktikum* [Ordinary Differential Equations. Practical Work]. Moscow: INFRA-M, 2016 (in Russian)

14. Zaritskii V.S., Svetnik V.B., Shimelevich L.I. Monte-Carlo technique in problems of optimal information rocessing. Automation and Remote Control, 1975, vol. 36, no. 12, pp. 2015–2022.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Konstantin A. Rybakov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Mathematics and Cybernetics Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), rkoffice@mail.ru.

Поступила в редакцию	15.11.2017	Received	15.11.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018